Marko JAKOVAC

Niko TRATNIK

KOMPLEKSNA ANALIZA

Učbenik z izpitnimi nalogami

$$\int_K f(z)\,dz = 0.$$

$$\int_K (u(x,y), v(x,y))\,d\vec{r} = \iint_G (v_x(x,y) - u_y(x,y))\,dxdy$$

Univerzitetna založba
Univerze v Mariboru

Univerza v Mariboru

Fakulteta za naravoslovje
in matematiko

Kompleksna analiza

Učbenik z izpitnimi nalogami

Avtorja
Marko Jakovac
Niko Tratnik

April 2026

Naslov *Title* **Kompleksna analiza** *Complex Analysis*

Podnaslov *Subtitle* **Učbenik z izpitnimi nalogami** *A Textbook with Exam Problems*

Avtorja *Authors*
Marko Jakovac
(Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko)

Niko Tratnik
(Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko)

Recenzija *Review*
Bojan Hvala
(Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko)

Marko Slapar
(Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko)

Jezikovni pregled *Language editing*
Alenka Fujs

Tehnična urednika *Technical editors*
Niko Tratnik
(Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko)

Jan Perša
(Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba)

Oblikovanje ovitka *Cover designer*
Jan Perša
(Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba)

Grafika na ovitku *Cover graphics*
Tenis žoga, foto: Bessi, pixabay.com, 2016; Abstrakt, avtor: Robert Clark, pexels.com, 2023; Skice in formuli, avtorja, 2026

Grafične priloge *Graphics material*
Vsi viri so lastni, razen če ni navedeno drugače.
Jakovac, Tratnik (avtorja), 2026

Založnik *Published by*
Univerza v Mariboru
Univerzitetna založba
Slomškov trg 15, 2000 Maribor, Slovenija
https://press.um.si, zalozba@um.si

Izdajatelj *Issued by*
Univerza v Mariboru
Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Koroška cesta 160, 2000 Maribor, Slovenija
https://fnm.um.si, dekanat.fnm@um.si

Izdaja *Edition*
Prva izdaja

Izdano *Published at*
Maribor, Slovenija, april 2026

Vrsta publikacije *Publication type*
E-knjiga

Dostopno na *Available at*
https://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/1113

```
CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Univerzitetna knjižnica Maribor

517.972.85(075.8)(0.034.2)

JAKOVAC, Marko, matematik
    Kompleksna analiza [Elektronski vir] : učbenik z izpitnimi nalogami / avtorja Marko Jakovac, Niko
Tratnik. - 1. izd. - E-knjiga. - Maribor : Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba, 2026

Način dostopa (URL): https://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/1113

ISBN 978-961-299-139-5 (PDF)
doi: 10.18690/um.fnm.2.2026
COBISS.SI-ID 274072579
```


ISBN	978-961-299-139-5 (pdf)
DOI	https://doi.org/10.18690/um.fnm.2.2026
Cena *Price*	Brezplačni izvod
Odgovorna oseba založnika *For publisher*	Prof. dr. Zdravko Kačič, rektor Univerze v Mariboru
Citiranje *Attribution*	Jakovac, M., Tratnik, N., (2026). *Kompleksna analiza: učbenik z izpitnimi nalogami.* Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba. doi: 10.18690/um.fnm.2.2026

Kazalo

Predgovor

Visokošolski učbenik, ki je pred vami, predstavlja študijsko gradivo pri predmetu Kompleksna analiza, ki ga poslušajo študenti enopredmetne matematike na Fakulteti za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru. Nastal je predvsem v okviru priprav na predavanja pri tem predmetu, vendar zraven teorije in zgledov vključuje tudi naloge iz pisnih izpitov in kolokvijev, ki so nastajale od leta 2016 do leta 2023.

Področje kompleksne analize je sicer obravnavano v več učbenikih (glejte [1, 2, 4, 8, 11, 12]), vendar imajo posamezni avtorji različne pristope. Pričujoči učbenik večinoma sledi predavanjem tako, kot jih je podajal že dr. Bojan Hvala na predbolonjskem študijskem programu matematike na Univerzi v Mariboru. Delo ne vsebuje originalnih prispevkov ali pristopov s področja kompleksne analize, vendar je v določeni meri originalen izbor tem in predstavitev obravnavane snovi.

Izpitne naloge so zbrane glede na vsebino ob koncu nekaterih poglavij. Poudariti je treba, da niso vse naloge originalne, saj so nekatere povzete ali prirejene po nalogah iz drugih zbirk vaj, na primer [3, 5, 6, 7, 9, 10, 13]. Opazili boste, da se katera od nalog, ki vsebuje različne tematike, pojavi tudi v dveh sklopih. V zadnjem poglavju so zbrani rezultati vseh izpitnih nalog. Pri tistih delih, ki zahtevajo kakšen dokaz, pa je podana celotna rešitev. Za določene podmnožice kompleksne ravnine, ki jih treba zapisati in skicirati, je podan le natančen zapis.

Upava, da bo pričujoči učbenik koristen pripomoček pri študiju tako teoretičnega dela kompleksne analize kot pri samostojni pripravi na kolokvije in pisne izpite.

Na koncu bi se iskreno zahvalila recenzentoma dr. Bojanu Hvali in dr. Marku Slaparju za natančen pregled dela in popravke. Zahvala gre tudi Alenki Fujs za lektoriranje besedila.

Poglavje 1

Kompleksna števila

V uvodnem poglavju bomo ponovili nekaj osnovnih definicij in dejstev o kompleksnih številih.

Množica ***kompleksnih števil***, ki jo označimo s $\mathbb{C}$, je definirana kot množica vseh urejenih parov realnih števil. To pomeni

$$\mathbb{C} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.$$

Na množico $\mathbb{C}$ vpeljemo operaciji seštevanja in množenja, za kateri velja:

(1) seštevanje kompleksnih števil:

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$$

za vsaka $(x, y), (u, v) \in \mathbb{C}$,

(2) enota za seštevanje je $(0, 0)$,

(3) množenje kompleksnih števil:

$$(x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, yu + xv)$$

za vsaka $(x, y), (u, v) \in \mathbb{C}$,

(4) enota za množenje je $(1, 0)$.

Izkaže se, da je množica kompleksnih števil, skupaj z operacijama seštevanja in množenja, komutativni obseg. Kompleksna števila prikažemo v ***kompleksni ravnini***.

Dogovorimo se, da bomo kompleksno število $(x, 0)$ zapisovali kar kot x, torej $x = (x, 0)$ za poljuben $x \in \mathbb{R}$. Po drugi strani bomo kompleksno število $(0, 1)$ označevali z i, torej $i = (0, 1)$. Število i imenujemo tudi ***imaginarna enota***. Takoj opazimo, da velja $i^2 = -1$. Izkaže se, da lahko poljubno kompleksno število (x, y) zapišemo kot

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + (y, 0) \cdot (0, 1) = x + iy.$$

Naj bo $z = x + iy \in \mathbb{C}$, kjer sta $x, y \in \mathbb{R}$. Definiramo:

(1) ***realni del*** števila z: $\mathrm{Re}(z) = x$,

(2) ***imaginarni del*** števila z: $\mathrm{Im}(z) = y$,

(3) ***konjugirano kompleksno število***: $\overline{z} = x - iy$,

(4) ***absolutna vrednost kompleksnega števila***: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Zlahka preverimo, da za poljubni kompleksni števili z, w velja:

(1) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,

(2) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$,

(3) $\overline{(\overline{z})} = z$,

(4) $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ in $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$,

(5) $|z| \geq 0$,

(6) $|z| = 0$ natanko tedaj, ko je $z = 0$,

(7) $|z|^2 = z\overline{z}$,

(8) $|\overline{z}| = |z|$,

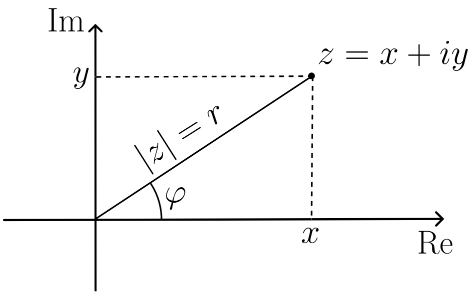
(9) $|zw| = |z| \cdot |w|$,

(10) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Kompleksno število $z = x + iy$ lahko zapišemo tudi v ***polarni obliki***

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

kjer je $r = |z|$ absolutna vrednost kompleksnega števila z in $\varphi = \arg(z)$ ***argument*** števila z. Pri tem $\arg(z)$ predstavlja usmerjeni kot, ki ga dobimo, če pozitivni poltrak osi x zavrtimo proti poltraku z vrhom v točki 0, ki poteka tudi skozi točko z (slika 1.1). Če vrtenje poteka v pozitivni smeri, torej nasprotni smeri urnega kazalca, je kot pozitiven, sicer pa negativen. Opomnimo, da argument $\arg(z)$ števila z ni enolično določen. Zaradi tega označimo z $\mathrm{Arg}(z)$ argument števila z, ki leži na intervalu $(-\pi, \pi]$.



Slika 1.1: Kompleksno število $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Če je $x \neq 0$, si za računanje argumenta φ pomagamo s formulo

$$\tan(\varphi) = \frac{y}{x}.$$

Očitno velja tudi $x = r\cos\varphi$ in $y = r\sin\varphi$.

Izkaže se, da za poljubni kompleksni števili $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ in $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ velja

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Posledično za vsako kompleksno število $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ in poljubno naravno število n velja

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

V razdelku 2.5 bomo vpeljali kompleksno eksponentno funkcijo, pri čemer bomo pokazali, da za vsak $\varphi \in \mathbb{R}$ velja

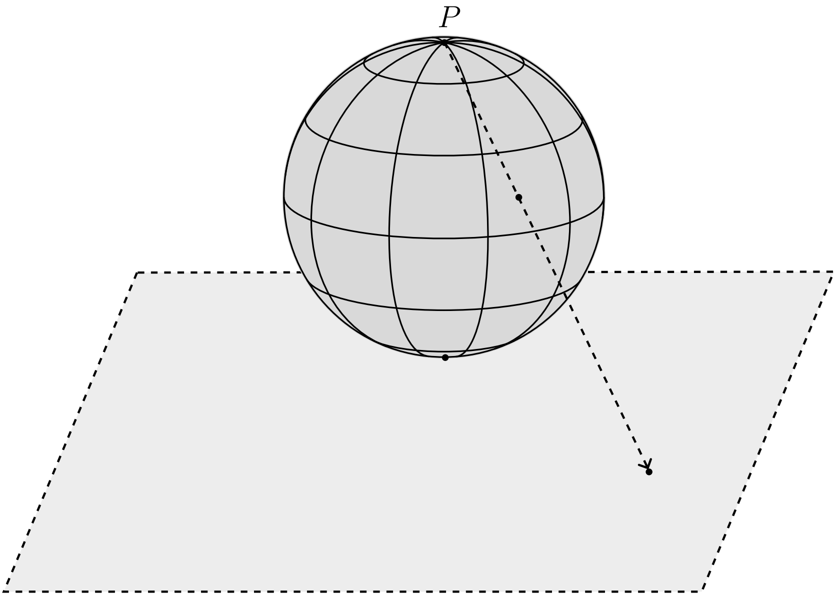
$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Število $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ lahko posledično zapišemo kot

$$z = re^{i\varphi},$$

kar imenujemo ***Eulerjev zapis*** kompleksnega števila.

Ponekod bomo uporabljali tudi razširjeno kompleksno ravnino $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, ki jo dobimo iz običajne kompleksne ravnine tako, da ji dodamo točko ∞. Naj bo S_2 sfera v $\mathbb{R}^3$. Ker obstaja bijekcija $f : S_2 \setminus \{P\} \to \mathbb{C}$, obstaja tudi bijekcija $g : S_2 \to \overline{\mathbb{C}}$ (slika 1.2).



Slika 1.2: Bijekcija $f : S_2 \setminus \{P\} \to \mathbb{C}$.

Zapišimo še nekaj definicij, ki jih bomo potrebovali tudi v nadaljnjih poglavjih:

(1) ***Odprti krog*** $K_r(a)$ s središčem v točki $a \in \mathbb{C}$ in polmerom $r > 0$ je množica

$$K_r(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}.$$

Podobno je ***zaprti krog*** $\overline{K}_r(a)$ s središčem v točki $a \in \mathbb{C}$ in polmerom $r > 0$ definiran kot

$$\overline{K}_r(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}.$$

(2) Množica $D \subseteq \mathbb{C}$ je ***odprta***, če za vsak $a \in D$ obstaja $r > 0$, tako da velja $K_r(a) \subseteq D$. Množica $D \subseteq \mathbb{C}$ je ***zaprta***, če je množica $\mathbb{C} \setminus D$ odprta.

(3) Množica $V \subseteq \mathbb{C}$ je ***okolica*** točke $a \in \mathbb{C}$, če obstaja taka odprta množica $\mathcal{U}$, da je $a \in \mathcal{U} \subseteq V$.

(4) Odprta množica $D \subseteq \mathbb{C}$ je ***nepovezana***, če obstajata taki disjunktni neprazni odprti množici $A, B \subseteq \mathbb{C}$, da je $D = A \cup B$. Če odprta množica $D \subseteq \mathbb{C}$ ni nepovezana, rečemo, da je ***povezana***.

(5) Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$. Točka $a \in \mathbb{C}$ je ***robna točka*** množice D, če za vsak $r > 0$ velja $K_r(a) \cap D \neq \emptyset$ in $K_r(a) \cap (\mathbb{C} \setminus D) \neq \emptyset$. Množici vseh robnih točk množice D bomo rekli ***rob*** množice D, označevali pa jo bomo kot ∂D. Množico $\overline{D} = D \cup \partial D$ imenujemo ***zaprtje*** množice D.

Definicija 1.1 *Neprazna, odprta in povezana podmnožica kompleksne ravnine se imenuje* ***območje****.*

Opomnimo še, da bomo v nadaljevanju učbenika uporabljali tudi nekatere druge koncepte in rezultate, ki se obravnavajo pri teoriji metričnih prostorov ali pri realni analizi, čeprav jih ne bomo posebej ponavljali.

Poglavje 2

Funkcije kompleksne spremenljivke

Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ poljubno območje. ***Kompleksna funkcija ene kompleksne spremenljivke*** je preslikava $f : D \to \mathbb{C}$, ki poljubno kompleksno število $z = x + iy \in D$ preslika v kompleksno število $u(x, y) + iv(x, y)$, kjer sta $u, v : D \to \mathbb{R}$ funkciji dveh spremenljivk.

To pomeni, da lahko f obravnavamo tudi kot funkcijo $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ki par (x, y) preslika v $(u(x, y), v(x, y))$:

$$(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)).$$

V nadaljevanju poglavja bomo spoznali nekaj različnih vrst funkcij kompleksnih spremenljivk.

2.1 Linearna funkcija

Linearna funkcija je preslikava $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s predpisom

$$f(z) = az + b,$$

kjer sta $a, b \in \mathbb{C}$. Če je $a \neq 0$, je ta preslikava bijektivna. Da to preverimo, izberimo poljuben $w \in \mathbb{C}$. Iščemo tak $z \in \mathbb{C}$, da bo veljalo $w = f(z)$. To pomeni

$$w = f(z) \iff w = az + b \iff az = w - b \iff z = \frac{w - b}{a}.$$

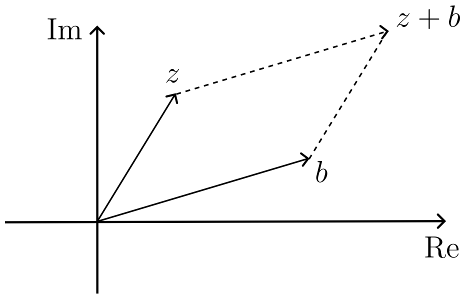
Tak z je torej enolično določen, zato je f bijekcija.

V nadaljevanju želimo ugotoviti, kam funkcija f preslika neko število $z \in \mathbb{C}$. Predpostavimo, da je $a \neq 0$, in ločimo nekaj primerov.

(1) Če je $a = 1$, potem ima preslikava f predpis $f(z) = z + b$, kjer je $b \in \mathbb{C}$. Ta preslikava pa očitno predstavlja premik (translacija) v kompleksni ravnini za vektor (kompleksno število) b; glejte sliko 2.1.

(2) Če je $b = 0$, potem ima preslikava f predpis $f(z) = az$, kjer je $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zapišimo števili a in z v polarnem zapisu:

$$\begin{aligned} a &= |a|(\cos\varphi + i \sin\varphi), \\ z &= |z|(\cos\psi + i \sin\psi). \end{aligned}$$



Slika 2.1: Premik (translacija) kompleksnega števila z za vektor (kompleksno število) b.

Potem seveda velja

$$f(z) = az = |a| \cdot |z| \big(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi) \big).$$

Opazimo, da ta preslikava predstavlja razteg za faktor $|a|$ in rotacijo za kot $\arg a = \varphi$.

(3) Če je $f(z) = az + b$, kjer sta $a, b \in \mathbb{C}$ in $a \neq 0$, potem lahko iz prejšnjih dveh točk sklepamo, da je f kompozitum raztega, rotacije in premika.

Naj bo $f(z) = az + b$, kjer sta $a, b \in \mathbb{C}$ in $a \neq 0$. Ker razteg (za nek pozitiven faktor), rotacija in premik slikajo premice v premice in krožnice v krožnice, sledi, da tudi f slika premice v premice in krožnice v krožnice.

Primer 2.1 Kam funkcija f, ki je podana s predpisom $f(z) = (3 - 4i)z + 6 + 2i$, preslika krožnico K, podano z enačbo $|z + 1 + i| = 1$?

Enačbo krožnice K lahko zapišemo tudi v obliki

$$|z - (-1 - i)| = 1,$$

kar pomeni, da ima dana krožnica središče $S = -1 - i$ in polmer $r = 1$. Ker želimo najti sliko $f(K)$, moramo poiskati vse točke $w \in \mathbb{C}$, za katere je $w \in f(K)$. Posledično iščemo vse $w \in \mathbb{C}$, za katere obstaja tak $z \in K$, da velja $w = f(z)$. Opazimo, da so naslednje trditve ekvivalentne:

$$w = f(z) \iff w = (3 - 4i)z + 6 + 2i \iff z = \frac{w - 6 - 2i}{3 - 4i}.$$

Ker pa morajo točke z pripadati množici K, pridemo do naslednjih ekvivalentnih enačb:

$$\begin{aligned}
|z + 1 + i| &= 1, \\
\left| \frac{w - 6 - 2i}{3 - 4i} + 1 + i \right| &= 1, \\
\left| \frac{w - 6 - 2i + (1 + i)(3 - 4i)}{3 - 4i} \right| &= 1, \\
|w + 1 - 3i| &= |3 - 4i|, \\
|w - (-1 + 3i)| &= 5.
\end{aligned}$$

Iz zapisanega sledi, da je $f(K)$ krožnica s središčem $S' = -1 + 3i$ in polmerom $r' = 5$.

V drugem delu razdelka podajmo še nekaj dejstev o rotacijah ravnine. Naj $R(z_0, \varphi)$ označuje rotacijo ravnine okoli točke $z_0 \in \mathbb{C}$ za kot $\varphi \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Takoj opazimo, da lahko preslikavo $R(0, \varphi)$ podamo s predpisom $z \mapsto e^{i\varphi} z$. Po drugi strani pa hitro ugotovimo, da ima poljubna rotacija $R(z_0, \varphi)$ predpis

$$R(z_0, \varphi) : z \mapsto e^{i\varphi}(z - z_0) + z_0.$$

Naj bo $f = R(z_0, \varphi)$. Opazimo, da za poljuben $z \in \mathbb{C}$ velja

$$f(z) = e^{i\varphi}(z - z_0) + z_0 = e^{i\varphi} z + z_0(1 - e^{i\varphi}),$$

kar pomeni, da je rotacija ravnine dejansko linearna preslikava, podana s predpisom $f(z) = az + b$, kjer je $a, b \in \mathbb{C}$ in $|a| = 1$.

Poglejmo, ali velja tudi obrat te trditve. Naj bo torej f linearna funkcija, podana s predpisom $f(z) = az + b$, kjer je $a, b \in \mathbb{C}$ in $|a| = 1$. Ali lahko pri danih a in b poiščemo ustrezna z_0 in φ, da bo $f = R(z_0, \varphi)$? To bi pomenilo, da mora veljati

$$a = e^{i\varphi} \quad \text{in} \quad b = z_0(1 - e^{i\varphi}).$$

Ločimo dve možnosti.

(1) Če je $a \neq 1$, ima zgornji sistem rešitev

$$\varphi = \arg a \quad \text{in} \quad z_0 = \frac{b}{1 - e^{i\varphi}} = \frac{b}{1 - a}.$$

Velja torej $f = R(z_0, \varphi)$, kjer je $\varphi \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

(2) Če je $a = 1$, obravnavamo še dve možnosti.

(2.1) V primeru, ko je $b = 0$, lahko izberemo poljuben z_0. Prav tako velja $\varphi = 2k\pi$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$. Posledično je f identiteta, tako da ne gre za rotacijo.

(2.2) V primeru, ko je $b \neq 0$, dani sistem nima rešitve, kar pomeni, da f ni rotacija, ampak gre le za premik.

S tem smo preverili, da je f rotacija samo v primeru, ko velja $|a| = 1$ in $a \neq 1$.

Za konec si oglejmo še, kaj je kompozitum dveh rotacij. Naj bosta $f = R(z_1, \varphi_1)$ in $g = R(z_2, \varphi_2)$ dve poljubni rotaciji, kjer sta $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Potem za vsak $z \in \mathbb{C}$ velja

$$\begin{aligned} (f \circ g)(z) &= f(g(z)) = f\left(e^{i\varphi_2}(z - z_2) + z_2\right) \\ &= e^{i\varphi_1}\Big(\left(e^{i\varphi_2}(z - z_2) + z_2\right) - z_1\Big) + z_1 \\ &= e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} z + w = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} z + w, \end{aligned}$$

kjer je

$$w = -e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} z_2 + e^{i\varphi_1} z_2 - e^{i\varphi_1} z_1 + z_1.$$

Opazimo naslednje:

(1) Če je $\varphi_1 + \varphi_2 \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, je $f \circ g$ rotacija za kot $\varphi_1 + \varphi_2$.

(2) Če je $\varphi_1 + \varphi_2 \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, preslikava $f \circ g$ ni rotacija.

2.2 Ulomljene linearne preslikave

Ulomljena linearna preslikava ima predpis

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

kjer so $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ in velja $ad - bc \neq 0$. Če bi veljalo $ad - bc = 0$, bi dobili konstantno funkcijo. V primeru, ko je $d \neq 0$, to preverimo tako:

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{adz+bd}{(cz+d)d} = \frac{bcz+bd}{(cz+d)d} = \frac{b(cz+d)}{(cz+d)d} = \frac{b}{d}.$$

Če pa velja $d = 0$, iz $ad - bc = 0$ sledi $b = 0$ (saj v tem primeru $c \neq 0$) in dobimo

$$f(z) = \frac{az}{cz} = \frac{a}{c}.$$

Opazimo, da je za $c \neq 0$ preslikava $f : \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$, podana s predpisom

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

bijekcija. Da to preverimo, izberimo poljuben $w \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$. Iščemo tak $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$, da bo veljalo $w = f(z)$. To pomeni:

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \iff czw + wd = az + b \iff z(cw - a) = b - wd.$$

Ker $w \neq \frac{a}{c}$, je $cw - a \neq 0$, zato sledi

$$z = \frac{b - wd}{cw - a}.$$

Tak z je torej enolično določen, zato je f bijekcija.

Očitno iz zgornjega sledi, da je bijektivna tudi preslikava $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, podana kot

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ za } z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}, \quad -\frac{d}{c} \mapsto \infty, \quad \infty \mapsto \frac{a}{c}.$$

Inverzna preslikava $f^{-1} : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ je podana s predpisom

$$f(z) = \frac{b - dz}{cz - a} \text{ za } z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}, \quad \frac{a}{c} \mapsto \infty, \quad \infty \mapsto -\frac{d}{c}.$$

Trditev 2.2 *Množica vseh ulomljenih linearnih preslikav je grupa za komponiranje.*

Dokaz. Kompozitum je seveda asociativna operacija. Prav tako že vemo, da ima vsaka ulomljena linearna preslikava inverz, ki je spet ulomljena linearna preslikava. Enota za komponiranje je identiteta, podana s predpisom

$$f(z) = z = \frac{1 \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1} \text{ za } z \in \mathbb{C}.$$

Preveriti še moramo, da je kompozitum ulomljenih linearnih preslikav spet ulomljena linearna preslikava. Naj bosta f in g ulomljeni linearni preslikavi, ki ju lahko zapišemo tako:

$$f(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \quad \text{in} \quad g(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}.$$

Potem je

$$(f \circ g)(z) = f(g(z)) = \frac{a_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + b_1}{c_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + d_1} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2) z + (a_1 b_2 + b_1 d_2)}{(a_2 c_1 + c_2 d_1) z + (b_2 c_1 + d_1 d_2)},$$

kar je spet ulomljena linearna preslikava. □

V nadaljevanju nas bo zanimalo, kam ulomljena linearna preslikava preslika krožnice in premice. Denimo, da imamo krožnico $K_r(a)$, kjer je $a \in \mathbb{C}$ in $r \in \mathbb{R}^+$. To je torej množica vseh $z \in \mathbb{C}$, za katere veljajo naslednje trditve:

$$\begin{aligned}
|z - a| &= r, \\
|z - a|^2 &= r^2, \\
(z - a)(\overline{z - a}) &= r^2, \\
(z - a)(\overline{z} - \overline{a}) &= r^2, \\
z\overline{z} - \overline{a}z - a\overline{z} + a\overline{a} - r^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Razmislimo, kakšno množico lahko predstavlja izraz:

$$\alpha z \overline{z} + \overline{b} z + b \overline{z} + \gamma = 0, \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \; b \in \mathbb{C}.$$

Ločimo dve možnosti:

(1) $\alpha \neq 0$.
V tem primeru lahko izraz delimo z α in dobimo naslednje ekvivalentne trditve:

$$\begin{aligned}
\alpha z\overline{z} + \overline{b}z + b\overline{z} + \gamma &= 0, \\
z\overline{z} + \frac{\overline{b}}{\alpha} z + \frac{b}{\alpha} \overline{z} + \frac{\gamma}{\alpha} &= 0, \\
z\overline{z} + \frac{\overline{b}}{\overline{\alpha}} z + \frac{b}{\alpha} \overline{z} + \frac{b\overline{b}}{\alpha^2} - \frac{b\overline{b}}{\alpha^2} + \frac{\gamma}{\alpha} &= 0, \\
\left(z + \frac{b}{\alpha}\right)\left(\overline{z} + \frac{\overline{b}}{\overline{\alpha}}\right) - \frac{b\overline{b}}{\alpha^2} + \frac{\gamma}{\alpha} &= 0, \\
\left|z + \frac{b}{\alpha}\right|^2 &= \frac{|b|^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Opazimo naslednje:

(i) Če je $\frac{|b|^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha} > 0$, potem enačba predstavlja krožnico.

(ii) Če je $\frac{|b|^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha} = 0$, potem je rešitev ena sama točka.

(iii) Če je $\frac{|b|^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha} < 0$, potem enačba nima rešitve.

(2) $\alpha = 0$.
V tem primeru dobimo naslednje ekvivalentne trditve:

$$\begin{aligned} \overline{b}z + b\overline{z} + \gamma &= 0, \\ \overline{b}z + \overline{\overline{b}z} + \gamma &= 0, \\ 2\operatorname{Re}\left(\overline{b}z\right) + \gamma &= 0. \end{aligned}$$

Če zapišemo $b = b_1 + ib_2$ in $z = x + iy$, kjer so $b_1, b_2, x, y \in \mathbb{R}$, potem velja

$$2(b_1x + b_2y) + \gamma = 0 \iff 2b_1x + 2b_2y + \gamma = 0,$$

kar predstavlja enačbo premice v implicitni obliki.

Ugotovili smo torej, da enačba

$$\alpha z\overline{z} + \overline{b}z + b\overline{z} + \gamma = 0, \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \ b \in \mathbb{C},$$

lahko določa krožnico, premico, točko ali prazno množico.

Lema 2.3 *Ulomljena linearna preslikava f, podana s predpisom $f(z) = \frac{1}{z}$, množico krožnic in premic preslika samo vase.*

Dokaz. Naj bo L nek objekt iz množice krožnic in premic. Potem lahko množico L zapišemo s pomočjo enačbe

$$\alpha z\overline{z} + \overline{b}z + b\overline{z} + \gamma = 0, \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \ b \in \mathbb{C}.$$

Izberimo poljuben $w \in f(L)$. Seveda je $w \in f(L)$ natanko tedaj, ko obstaja $z \in L$, tako da velja $f(z) = w$ oziroma $\frac{1}{z} = w$. To je ekvivalentno dejstvu, da obstaja $z \in L$, tako da je $z = \frac{1}{w}$.

Tak z vstavimo v zgornjo enačbo in dobimo

$$\alpha \frac{1}{w}\frac{1}{\overline{w}} + \overline{b}\frac{1}{w} + b\frac{1}{\overline{w}} + \gamma = 0 \iff \alpha + \overline{b}\overline{w} + bw + \gamma w\overline{w} = 0.$$

Če označimo $c = \overline{b}$, sledi

$$\gamma w\overline{w} + \overline{c}w + c\overline{w} + \alpha = 0.$$

Funkcija f je bijekcija, zato $f(L)$ ne more biti prazna množica in ne more vsebovati ene same točke. To pomeni, da zgornja enačba spet določa krožnico ali premico. □

Izrek 2.4 *Poljubna ulomljena linearna preslikava preslika množico krožnic in premic samo vase.*

Dokaz. Naj bo

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

ulomljena linearna preslikava. Če je $c = 0$, je f linearna funkcija, zato izrek v tem primeru velja. Naj bo torej $c \neq 0$. Preoblikujmo izraz

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+b}{cz+d} - \frac{a}{c} + \frac{a}{c} = \frac{acz+bc-acz-ad}{c(cz+d)} + \frac{a}{c} \\ &= \frac{bc-ad}{c(cz+d)} + \frac{a}{c} = \frac{bc-ad}{c} \cdot \frac{1}{cz+d} + \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

Definirajmo preslikave f_1, f_2 in f_3 s predpisi:

$$f_1(z) = cz + d, \quad f_2(z) = \frac{1}{z}, \quad f_3(z) = \frac{bc-ad}{c} z + \frac{a}{c}.$$

Opazimo, da je

$$f(z) = \frac{bc-ad}{c} \cdot \frac{1}{cz+d} + \frac{a}{c} = f_3(f_2(f_1(z))) = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z),$$

zato velja $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$. Ker sta f_1 in f_3 linearni preslikavi, f_2 pa po lemi 2.3 ohranja množico krožnic in premic, sledi, da vse tri funkcije ohranjajo množico krožnic in premic. Posledično tudi f ohranja množico krožnic in premic. □

Trditev 2.5 *Ulomljena linearna preslikava f, ki ni identiteta, ima največ dve fiksni točki.*

Dokaz. Naj bo $z \in \mathbb{C}$ fiksna točka preslikave f. To pomeni, da velja $f(z) = z$. Dobimo naslednje ekvivalentne trditve:

$$\begin{aligned} \frac{az+b}{cz+d} &= z, \\ az + b &= cz^2 + zd, \\ cz^2 + (d-a)z - b &= 0. \end{aligned}$$

Ločimo dve možnosti.

(1) Predpostavimo, da velja $c \neq 0$.
V tem primeru ima zgornja enačba največ dve različni rešitvi, kar pomeni, da ima f največ dve fiksni točki.

(2) Predpostavimo, da velja $c = 0$.
V tem primeru dobimo enačbo $(d - a)z = b$. Ponovno si oglejmo dve možnosti.

(2.1) V primeru, ko je $d \neq a$, ima enačba samo eno rešitev v $\mathbb{C}$.

(2.2) V primeru, ko je $d = a$, dobimo $-b = 0$. Če je $b \neq 0$, ta enačba sploh nima rešitve, če pa je $b = 0$, je f identiteta, kar je v protislovju s predpostavko trditve.

Preverili smo torej, da če f ni identiteta, potem lahko ima največ dve fiksni točki. □

Posledica 2.6 *Če se dve ulomljeni linearni preslikavi ujemata v slikah treh paroma različnih točk, potem sta enaki.*

Dokaz. Naj bosta f in g dve ulomljeni linearni preslikavi in recimo, da za paroma različna števila $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ velja

$$f(z_1) = g(z_1), \quad f(z_2) = g(z_2), \quad f(z_3) = g(z_3).$$

Preslikava $h = f^{-1} \circ g$ je spet ulomljena linearna preslikava, za katero velja $h(z_1) = f^{-1}(g(z_1)) = f^{-1}(f(z_1)) = z_1$, $h(z_2) = z_2$ in $h(z_3) = z_3$. Ker ima h tri paroma različne fiksne točke, je po trditvi 2.5 enaka identiteti, torej $h = f^{-1} \circ g = id$, kar pomeni, da je $f = g$. □

Trditev 2.7 *Naj bodo $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tri paroma različne točke in $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$ prav tako tri paroma različne točke. Potem obstaja natanko ena ulomljena linearna preslikava f, tako da velja $f(z_i) = w_i$ za vsak $i \in \{1, 2, 3\}$.*

Dokaz. Naj bo

$$\alpha = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \quad \text{in} \quad \beta = \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1}.$$

Definirajmo preslikavo f s predpisom

$$f(z) = \frac{w_3(z - z_1)\alpha - w_1(z - z_3)\beta}{(z - z_1)\alpha - (z - z_3)\beta}.$$

Opazimo, da velja

$$f(z_1) = \frac{-w_1(z_1 - z_3)\beta}{-(z_1 - z_3)\beta} = w_1 \quad \text{in} \quad f(z_3) = \frac{w_3(z_3 - z_1)\alpha}{(z_3 - z_1)\alpha} = w_3.$$

Izračunajmo še

$$\begin{aligned} f(z_2) &= \frac{w_3(z_2 - z_1)\alpha - w_1(z_2 - z_3)\beta}{(z_2 - z_1)\alpha - (z_2 - z_3)\beta} = \frac{w_3(z_2 - z_3) - w_1(z_2 - z_3)\beta}{(z_2 - z_3) - (z_2 - z_3)\beta} \\ &= \frac{w_3 - w_1\beta}{1 - \beta} = \frac{w_3(w_2 - w_1) - w_1(w_2 - w_3)}{(w_2 - w_1) - (w_2 - w_3)} = \frac{w_2w_3 - w_1w_2}{w_3 - w_1} \\ &= \frac{w_2(w_3 - w_1)}{w_3 - w_1} = w_2. \end{aligned}$$

Iz predpisa preslikave f je razvidno, da je f ulomljena linearna preslikava (glede na zgornji razmislek f seveda ni konstanta). S tem smo pokazali, da obstaja ulomljena linearna preslikava f, tako da velja $f(z_i) = w_i$ za vsak $i \in \{1, 2, 3\}$. Posledica 2.6 nam zagotavlja, da je taka preslikava ena sama. □

Posledica 2.8 *Naj bosta L in M dva objekta iz množice krožnic in premic. Potem obstaja ulomljena linearna preslikava, ki L preslika na M.*

Dokaz. Naj bodo $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tri paroma različne točke iz objekta L in w_1, w_2, w_3 tri paroma različne točke iz objekta M. Po trditvi 2.7 obstaja ulomljena linearna preslikava f, tako da velja $f(z_i) = w_i$ za vsak $i \in \{1, 2, 3\}$. Preslikava f po izreku 2.4 preslika množico krožnic in premic samo vase, zato mora biti $f(L) = M$. Natančneje:

(1) Če so točke w_1, w_2, w_3 kolinearne, je M premica.

(2) Če točke w_1, w_2, w_3 niso kolinearne, je M krožnica.

$\square$

Opomba 2.9 *Navedeni rezultati veljajo tudi v primeru, če eno izmed točk iz množice $\{z_1, z_2, z_3\}$ oziroma iz množice $\{w_1, w_2, w_3\}$ zamenjamo z ∞.*

Kot primer si oglejmo situacijo, ko je $z_3 = \infty$, medtem ko velja $z_1, z_2, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$. Pokažimo, da obstaja natanko ena ulomljena linearna preslikava f, za katero je $f(z_i) = w_i$ za vsak $i \in \{1, 2, 3\}$. Naj bo g ulomljena linearna preslikava, ki je podana s predpisom $g(z) = \frac{1}{z-d}$, pri čemer je d poljubno število iz množice $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$. V tem primeru seveda velja $g(z_1), g(z_2) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, zato so $g(z_1), g(z_2), 0$ tri različne točke. Po trditvi 2.7 obstaja natanko ena ulomljena linearna preslikava h, za katero je

$$h(g(z_1)) = w_1, \quad h(g(z_2)) = w_2, \quad h(0) = w_3.$$

Naj bo $f = h \circ g$. Seveda je tudi f ulomljena linearna preslikava. Opazimo še, da velja $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$ in $f(\infty) = h(g(\infty)) = h(0) = w_3$. S tem smo dokazali obstoj preslikave f. Za dokaz enoličnosti predpostavimo, da sta f_1 in f_2 dve ulomljeni linearni preslikavi, tako da velja $f_j(z_i) = w_i$ za vsaka $i \in \{1, 2, 3\}$ in $j \in \{1, 2\}$. Potem definiramo preslikavi $h_1 = f_1 \circ g^{-1}$ in $h_2 = f_2 \circ g^{-1}$. Opazimo, da za $j \in \{1, 2\}$ velja $h_j(g(z_1)) = f_j(z_1) = w_1$, $h_j(g(z_2)) = f_j(z_2) = w_2$ in $h_j(0) = f_j(\infty) = w_3$. Iz trditve 2.7 sedaj sledi $h_1 = h_2$, zato dobimo še $f_1 = f_2$.

2.3 Kvadratna funkcija

Kvadratna funkcija je preslikava $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s predpisom

$$f(z) = az^2 + bz + c,$$

kjer so $a, b, c \in \mathbb{C}$ in $a \neq 0$. V nadaljevanju razdelka bomo obravnavali samo situacijo, ko je f podana s predpisom

$$f(z) = z^2.$$

Če je $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = re^{i\varphi}$, potem velja

$$z^2 = r^2(\cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi)) = r^2 e^{2i\varphi}.$$

Opazujmo poltrak z vrhom v izhodišču 0. To je množica točk v kompleksni ravnini, ki imajo isti argument, denimo kot α. Točke s tega poltraka lahko zapišemo na naslednji način:

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \arg z = \alpha\} = \left\{z = re^{i\alpha} \mid r \geq 0\right\}.$$

Preslikava f, podana s predpisom $f(z) = z^2$, to množico preslika v množico

$$\left\{r^2 e^{i2\alpha} \mid r \geq 0\right\},$$

kar je spet poltrak, tokrat s podvojenim argumentom. Posledično se za poljubna kota α in β, kjer je $\alpha < \beta$, množica

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \alpha < \arg z < \beta\}$$

preslika v množico

$$\{z \in \mathbb{C} \mid 2\alpha < \arg z < 2\beta\}.$$

Zato lahko rečemo, da preslikava f podvaja kote med poltraki z vrhom v izhodišču.

Sedaj definirajmo množico

$$H_D = \left\{z \in \mathbb{C} \;\Big|\; -\frac{\pi}{2} < \arg z \leq \frac{\pi}{2}\right\},$$

ki jo imenujemo ***desna polravnina*** kompleksne ravnine. Na podlagi zgornjega razmisleka je preslikava $f : H_D \to \mathbb{C}$ s predpisom $f(z) = z^2$ bijekcija. Njen inverz je ***glavna (prva) veja kompleksne korenske funkcije***.

Podobno vpeljemo množico

$$H_L = \left\{z \in \mathbb{C} \;\Big|\; \frac{\pi}{2} < \arg z \leq \frac{3\pi}{2}\right\},$$

ki jo imenujemo ***leva polravnina*** kompleksne ravnine. Tudi preslikava $f : H_L \to \mathbb{C}$ s predpisom $f(z) = z^2$ je bijektivna, njen inverz pa je ***druga veja kompleksne korenske funkcije***.

Opomba 2.10 *Podoben razmislek, kot smo ga naredili za kvadratno funkcijo, lahko naredimo za poljubno potenčno funkcijo $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, ki jo podamo s predpisom $f(z) = z^n$, kjer je $n \in \mathbb{N}$. V tem primeru funkcija f argumente poltrakov množi z n in zato enako deluje na kote z vrhom v izhodišču.*

2.4 Potenčne vrste v kompleksnem

Najprej ponovimo nekaj osnovnih pojmov o kompleksnih zaporedjih in vrstah.

Zaporedje kompleksnih števil $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je ***konvergentno***, če obstaja tak $L \in \mathbb{C}$, da velja:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : |z_n - L| < \varepsilon.$$

Število L v tem primeru imenujemo ***limita*** zaporedja $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in pišemo

$$L = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

Zaporedje $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je ***Cauchyjevo***, če

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq n_0 : |z_m - z_n| < \varepsilon.$$

Ker je $\mathbb{C}$ poln metrični prostor, je zaporedje kompleksnih števil $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno natanko tedaj, ko je Cauchyjevo.

Naj bo $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ kompleksno zaporedje. ***Številska vrsta*** je formalna vsota

$$z_1 + z_2 + z_3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} z_k.$$

Zgornji vrsti priredimo ***zaporedje delnih vsot*** $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pri čemer za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} z_n.$$

Če obstaja $s \in \mathbb{C}$, tako da velja $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, potem pravimo, da vrsta $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ ***konvergira***, njena ***vsota*** pa je s. To označimo tudi tako:

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = s.$$

Trditev 2.11 *Naj bo $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ kompleksna vrsta, tako da za vsak $k \in \mathbb{N}$ velja $z_k = x_k + iy_k$, $x_k, y_k \in \mathbb{R}$. Tedaj vrsta $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ konvergira natanko tedaj, ko konvergirata vrsti $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ in $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$.*

Dokaz. Vrsta $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ konvergira natanko tedaj, ko konvergira zaporedje delnih vsot $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pri katerem za poljuben $n \in \mathbb{N}$ velja

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n}(x_k + iy_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + i\sum_{k=1}^{n} y_k.$$

Opazimo torej, da zaporedje $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira natanko tedaj, ko konvergirata zaporedji $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$, kar pa je ekvivalentno dejstvu, da konvergirata vrsti $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ in $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$. □

Spomnimo, da je vrsta $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ ***absolutno konvergentna***, če je konvergentna vrsta $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|$.

Trditev 2.12 *Če vrsta $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ absolutno konvergira, potem tudi konvergira.*

Dokaz. Za poljuben $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k \quad \text{in} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Naj bosta $m, n \in \mathbb{N}$ naravni števili, tako da velja $m > n$. Potem je

$$|s_m - s_n| = \left| \sum_{k=1}^{m} z_k - \sum_{k=1}^{n} z_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} z_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |z_k| = S_m - S_n = |S_m - S_n|.$$

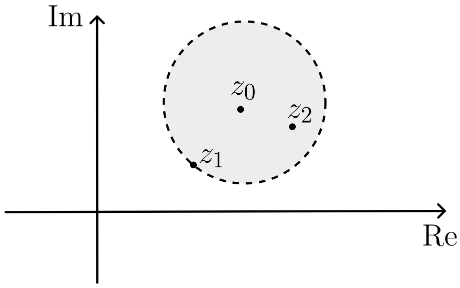
Ker vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ absolutno konvergira, je zaporedje $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno in posledično Cauchyjevo. Zaradi zgornje ocene mora biti tudi zaporedje $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo, kar pomeni, da je tudi konvergentno. S tem smo pokazali, da vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ konvergira. $\square$

Definicija 2.13 ***Kompleksna potenčna vrsta*** *je funkcijska vrsta oblike*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

kjer je $z_0 \in \mathbb{C}$ in $a_k \in \mathbb{C}$ za vsak $k \in \mathbb{N}_0$.

Lema 2.14 *Če potenčna vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ konvergira za nek $z_1 \in \mathbb{C}$, potem (absolutno) konvergira tudi za vsak $z_2 \in \mathbb{C}$, za katerega velja $|z_2 - z_0| < |z_1 - z_0|$; glejte sliko 2.2.*



Slika 2.2: Število $z_2 \in \mathbb{C}$, za katerega velja $|z_2 - z_0| < |z_1 - z_0|$.

Dokaz. Naj bo $z_1 \neq z_0$. Vemo, da vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z_1 - z_0)^k$ konvergira, zato je

$$\lim_{k\to\infty} a_k (z_1 - z_0)^k = 0.$$

Ker je zaporedje $(a_k (z_1 - z_0)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergentno, je tudi omejeno:

$$\exists M > 0, \forall k \in \mathbb{N}_0 : \left| a_k (z_1 - z_0)^k \right| \leq M.$$

Ker je $|z_2 - z_0| < |z_1 - z_0|$, sledi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \left|a_k(z_2 - z_0)^k\right| &= \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot |z_2 - z_0|^k = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot \frac{|z_2 - z_0|^k \cdot |z_1 - z_0|^k}{|z_1 - z_0|^k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left|a_k(z_1 - z_0)^k\right| \cdot \left(\frac{|z_2 - z_0|}{|z_1 - z_0|}\right)^k \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} M \left(\frac{|z_2 - z_0|}{|z_1 - z_0|}\right)^k = M \sum_{k=0}^{\infty} q^k,
\end{aligned}$$

kjer je $q = \dfrac{|z_2 - z_0|}{|z_1 - z_0|} < 1$. Vemo, da geometrijska vrsta konvergira natanko tedaj, ko je $|q| < 1$. Posledično velja, da vrsta

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z_2 - z_0)^k$$

absolutno konvergira in po trditvi 2.12 tudi konvergira. $\square$

Izrek 2.15 *Za vsako kompleksno potenčno vrsto*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k, \quad a_k \in \mathbb{C}, z_0 \in \mathbb{C},$$

velja natanko ena izmed naslednjih možnosti:

(1) Vrsta konvergira le za $z = z_0$.

(2) Vrsta konvergira za vsak $z \in \mathbb{C}$.

(3) Obstaja $R > 0$, tako da vrsta konvergira za vsak $z \in \mathbb{C}$ z lastnostjo $|z - z_0| < R$ in divergira za vsak $z \in \mathbb{C}$ z lastnostjo $|z - z_0| > R$.

Dokaz. Naj bo A množica vseh $z \in \mathbb{C}$, za katere potenčna vrsta konvergira. Definirajmo množico

$$D_A = \{|z - z_0| \mid z \in A\} \subseteq \mathbb{R}_0^+.$$

Ločimo naslednji možnosti:

(1) *Množica D_A je neomejena.*
Izberemo poljuben $z \in \mathbb{C}$ in pogledamo vrednost $|z - z_0|$. Ker je D_A neomejena, obstaja $z_1 \in A$, za katerega velja $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. Vrsta konvergira za $z_1 \in A$, zato po lemi 2.14 konvergira tudi za $z \in \mathbb{C}$. Ker smo $z \in \mathbb{C}$ izbrali poljubno, vrsta konvergira za vsak $z \in \mathbb{C}$.

(2) *Množica D_A je omejena.*
Ker je D_A omejena, obstaja $\sup(A) = R$. Ločimo še dve podmožnosti:

(2.1) $R = 0$.
V tem primeru je očitno, da vrsta konvergira samo za $z = z_0$.

(2.2) $R > 0$.

Izberimo tak $z \in \mathbb{C}$, za katerega je $|z - z_0| < R$. Ker je R supremum množice D_A, obstaja $z_1 \in A$, za katerega velja $|z - z_0| < |z_1 - z_0| < R$. Ker vrsta konvergira za $z_1 \in A$, po lemi 2.14 konvergira tudi za izbrani z.

Naj bo sedaj $z \in \mathbb{C}$ tak, da velja $|z - z_0| > R$. Denimo, da vrsta za ta z konvergira. Potem je $z \in A$ in posledično $|z - z_0| \in D_A$. Ker je $|z - z_0| > R$, smo torej našli vrednost v D_A, ki je večja od supremuma te množice, kar je protislovje. S tem smo dokazali, da vrsta divergira za vse $z \in \mathbb{C}$, za katere je $|z - z_0| > R$.

□

Definicija 2.16 *Številu $R \in \mathbb{R}_0^+$ iz prejšnjega izreka pravimo* ***konvergenčni polmer*** *potenčne vrste.*

Opomba 2.17 *Iz kriterijev za konvergenco vrst sledi, da lahko konvergenčni polmer R izračunamo s pomočjo formul*

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \quad \textit{oziroma} \quad \frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|},$$

če ustrezni limiti obstajata.

2.5 Eksponentna funkcija

Eksponentno funkcijo $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiramo s pomočjo kompleksne potenčne vrste:

$$\exp(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Iz realne analize vemo, da vrsta $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ konvergira za vsak $z = x + i\cdot 0$, $x \in \mathbb{R}$. Po lemi 2.14 zato ta vrsta absolutno konvergira za vse $z \in \mathbb{C}$. Funkcija exp je torej dobro definirana.

Naj bo $z = x + i \cdot 0$, kjer je $x \in \mathbb{R}$. Potem velja

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x + i\cdot 0)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Kompleksna eksponentna funkcija torej v tem primeru sovpada z realno eksponentno funkcijo.

Sedaj predpostavimo, da je $z = 0 + iy$, kjer je $y \in \mathbb{R}$. V tem primeru dobimo

$$\begin{aligned} e^z &= e^{iy} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} = 1 + \frac{iy}{1!} - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots\right) \\ &= \cos y + i \sin y. \end{aligned}$$

Trditev 2.18 *Za vsaki kompleksni števili* $z, w \in \mathbb{C}$ *velja*

$$e^z e^w = e^{z+w}.$$

Dokaz. Naj bosta $z, w \in \mathbb{C}$ poljubni kompleksni števili. Potem je

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{in} \quad e^w = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!}.$$

Ker pa zgornji dve vrsti absolutno konvergirata, lahko njun produkt izračunamo kot

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = e^{z+w},
\end{aligned}$$

kjer smo pri predzadnji enakosti uporabili binomski izrek. □

Posledično za poljuben $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, velja

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y.$$

Omenimo nekaj lastnosti eksponentne funkcije:

(1) Za vse $z, w \in \mathbb{C}$ velja $e^z e^w = e^{z+w}$.

To sicer že vemo po trditvi 2.18, sedaj pa lahko preverimo še na drugi način. Naj bosta $z = a + bi$ in $w = c + di$, kjer so $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Potem je

$$\begin{aligned}
e^z e^w &= e^{a+bi} e^{c+di} = e^a(\cos b + i \sin b) \cdot e^c(\cos d + i \sin d) \\
&= e^a e^c(\cos b \cos d + i \cos b \sin d + i \sin b \cos d - \sin b \sin d) \\
&= e^{a+c}(\cos(b+d) + i \sin(b+d)) \\
&= e^{a+c} e^{i(b+d)} = e^{a+c+i(b+d)} = e^{(a+bi)+(c+di)} = e^{z+w}.
\end{aligned}$$

(2) Funkcija exp je periodična s periodo $2\pi i$.

Opazimo, da za poljuben $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$, velja

$$\begin{aligned}
e^{z+2\pi i} &= e^{a+bi+2\pi i} = e^{a+i(b+2\pi)} = e^a(\cos(b+2\pi) + i \sin(b+2\pi)) \\
&= e^a(\cos b + i \sin b) = e^a e^{bi} = e^{a+bi} = e^z.
\end{aligned}$$

Izkaže se, da je $2\pi i$ tudi osnovna perioda funkcije exp.

(3) Funkcija exp nima nobene ničle.

Poiščimo vse $z \in \mathbb{C}$, za katere je $e^z = 0$. Če zapišemo $z = x + iy$, kjer sta $x, y \in \mathbb{R}$, potem mora veljati

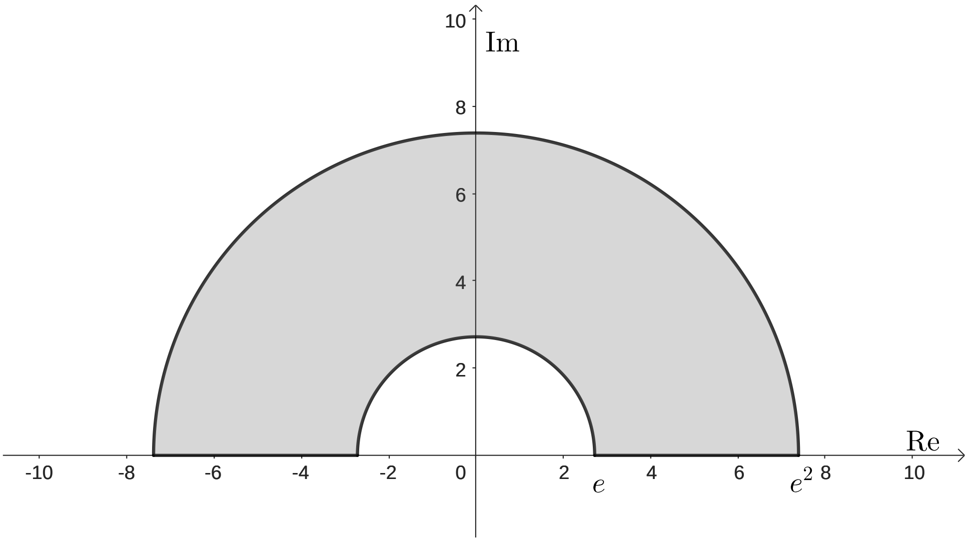
$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = 0,$$

od koder sledi $e^x = 0$ ali $\cos y + i \sin y = 0$. Ker realna eksponentna funkcija nima ničel, enačba $e^x = 0$ nima rešitve, iz druge enačbe pa dobimo $\cos y = 0$ in $\sin y = 0$, kar pa prav tako ni mogoče, saj mora biti $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$. To torej pomeni, da enačba $e^z = 0$ nima rešitev v $\mathbb{C}$.

Primer 2.19 Premislimo, kam funkcija exp preslika območje $[1,2] \times [0,\pi]$. Vemo, da za $z = x + iy \in \mathbb{C}$, kjer sta $x, y \in \mathbb{R}$, velja

$$\exp(z) = e^z = e^x e^{iy}.$$

To pomeni, da absolutna vrednost števila e^z zavzame vse vrednosti med e in e^2, argument števila e^z pa vse vrednosti med 0 in π. Posledično se dano območje preslika tako, kot kaže slika 2.3.



Slika 2.3: Slika območja $[1,2] \times [0,\pi]$ s funkcijo exp.

Če domeno in kodomeno eksponentne funkcije definiramo tako, da velja

$$\exp : \mathbb{R} \times (-\pi, \pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \exp(z) = e^z,$$

potem dobimo bijektivno funkcijo.

2.6 Logaritemska funkcija

Za $z \in \mathbb{C}$ definirajmo množico

$$\log(z) = \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z\}.$$

Naj bo $w \in \log(z)$ in $w = u + iv$, kjer sta $u, v \in \mathbb{R}$. Potem je

$$e^w = z \iff e^{u+iv} = z \iff e^u e^{iv} = |z| e^{i \arg(z)},$$

od koder dobimo

$$e^u = |z| \quad \text{in} \quad v = \arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

kar implicira še

$$u = \ln|z| \quad \text{in} \quad v = \arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Če je torej $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, lahko zapišemo

$$\log(z) = \{\ln|z| + i(\arg(z) + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Glavno vejo kompleksne ***logaritemske funkcije*** lahko definiramo kot funkcijo

$$\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \times (-\pi, \pi],$$

tako da za vsak $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ velja

$$\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z),$$

kjer je $\mathrm{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$.

Za poljubna $z, w \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, lahko definiramo še potenco

$$z^w = \exp(w\,\mathrm{Log}(z)) = e^{w\,\mathrm{Log}(z)}.$$

Primer 2.20 Izračunajmo:

(1) $\mathrm{Log}(-1) = \ln|-1| + i\,\mathrm{Arg}(-1) = 0 + i\pi = i\pi$.

(2) $\mathrm{Log}(2i) = \ln|2i| + i\,\mathrm{Arg}(2i) = \ln 2 + i\frac{\pi}{2}$.

(3) $i^i = \exp(i\,\mathrm{Log}(i)) = \exp(i(\ln|i| + i\,\mathrm{Arg}(i))) = \exp\left(i \cdot i\frac{\pi}{2}\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

2.7 Kotne in krožne funkcije

Kompleksni funkciji sin in cos prav tako definiramo s pomočjo potenčnih vrst:

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{in} \quad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}.$$

Ker ti vrsti konvergirata za vsak $z \in \mathbb{R}$, po lemi 2.14 konvergirata tudi za vsak $z \in \mathbb{C}$.

Opazimo, da za vsak $z \in \mathbb{C}$ velja

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} = 1 + \frac{iz}{1!} - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right) \\ &= \cos z + i \sin z. \end{aligned}$$

Podobno velja

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z,$$

zato dobimo

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2\cos z \quad \text{in} \quad e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sin z$$

ter posledično še

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{in} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Zapišimo še nekaj osnovnih lastnosti funkcij sin in cos.

(1) Za kompleksni funkciji sin in cos veljajo običajni adicijski izreki. Kot zgled dokažimo, da za poljubna $z, w \in \mathbb{C}$ velja

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w.$$

Z uporabo zgoraj zapisanih formul dobimo

$$\begin{aligned}
\sin z \cos w + \cos z \sin w &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \cdot \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} + \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \cdot \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \\
&= \frac{e^{i(z+w)} + e^{i(z-w)} - e^{-i(z-w)} - e^{-i(z+w)} + e^{i(z+w)} - e^{i(z-w)} + e^{-i(z-w)} - e^{-i(z+w)}}{4i} \\
&= \frac{2e^{i(z+w)} - 2e^{-i(z+w)}}{4i} = \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i} = \sin(z+w),
\end{aligned}$$

kar pomeni, da je formula dokazana.

(2) Funkciji sin in cos sta periodični. Za sin bi to preverili tako:

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z \cos(2\pi) + \cos z \sin(2\pi) = \sin z.$$

Izkaže se, da je 2π osnovna perioda tako za sin kot za cos.

(3) Opazimo, da če je $y \in \mathbb{R}$, potem velja

$$\begin{aligned}
\cos(iy) &= \frac{e^{i\cdot iy} + e^{-i\cdot iy}}{2} = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} = \operatorname{ch} y, \\
\sin(iy) &= \frac{e^{i\cdot iy} - e^{-i\cdot iy}}{2i} = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = \frac{-\left(e^{y} - e^{-y}\right)}{2i} = i \cdot \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} = i \operatorname{sh} y.
\end{aligned}$$

Naj bo $z = x + iy$, kjer sta $x, y \in \mathbb{R}$. Izračunajmo realni in imaginarni del funkcije sin:

$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y.$$

Podobno dobimo tudi za funkcijo cos:

$$\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y.$$

(4) Funkciji sin in cos v $\mathbb{C}$ nista omejeni, kar sledi iz točke (3).

(5) Poiščimo ničle funkcije sin. Iščemo torej vse $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, za katere je

$$\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y = 0,$$

kar pomeni, da mora biti

$$\sin x \operatorname{ch} y = 0 \quad \text{in} \quad \cos x \operatorname{sh} y = 0.$$

Iz prve enačbe sledi $\sin x = 0$ in posledično $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Če to vstavimo v drugo enačbo, dobimo $\cos(k\pi) \operatorname{sh} y = 0$ in zato $y = 0$. Ničle funkcije sin so torej števila $z = k\pi$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$. Posledično opazimo, da ima kompleksna funkcija sin enake ničle kot realna funkcija sin, podobno pa velja za funkcijo cos.

Definiramo lahko tudi funkciji tan in ctan:

$$\begin{aligned}
\tan : \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{C}, \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \\
\operatorname{ctan} : \mathbb{C} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \} \to \mathbb{C}, \quad \operatorname{ctan} z = \frac{\cos z}{\sin z}.
\end{aligned}$$

Ob koncu razdelka vpeljimo še krožne funkcije. Za poljuben $z \in \mathbb{C}$ definirajmo najprej naslednje množice:

$$\begin{aligned}
\arcsin z &= \{ w \in \mathbb{C} \mid \sin w = z \}, \\
\arccos z &= \{ w \in \mathbb{C} \mid \cos w = z \}, \\
\arctan z &= \{ w \in \mathbb{C} \mid \tan w = z \}, \\
\operatorname{arcctan} z &= \{ w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{ctan} w = z \}.
\end{aligned}$$

Za začetek si oglejmo množico $\arctan z$. Opazimo, da velja

$$\tan w = z \iff \frac{\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}}{\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}} = z \iff \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{i(e^{iw} + e^{-iw})} = z,$$

zato dobimo še naslednje ekvivalentne trditve:

$$\begin{aligned}
e^{iw} - e^{-iw} &= iz(e^{iw} + e^{-iw}), \\
e^{2iw} - 1 &= iz(e^{2iw} + 1) = ize^{2iw} + iz, \\
e^{2iw}(1 - iz) &= 1 + iz, \\
e^{2iw} &= \frac{1 + iz}{1 - iz}.
\end{aligned}$$

To pomeni, da velja

$$2iw \in \log \left(\frac{1 + iz}{1 - iz} \right)$$

in posledično dobimo

$$2iw = \operatorname{Log} \left(\frac{1 + iz}{1 - iz} \right) + 2k\pi i, \ k \in \mathbb{Z} \implies w = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \left(\frac{1 + iz}{1 - iz} \right) + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Množico $\arctan z$ lahko torej zapišemo kot

$$\arctan z = \left\{ \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \left(\frac{1 + iz}{1 - iz} \right) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\},$$

funkcijo Arctan pa definiramo s predpisom

$$\operatorname{Arctan} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \left(\frac{1 + iz}{1 - iz} \right)$$

za vse $z \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$. Podobno izpeljemo tudi

$$\operatorname{Arcctan} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log}\left(\frac{z+i}{z-i}\right).$$

Oglejmo si še množico $\arcsin z$. Opazimo, da velja

$$\sin w = z \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z \quad \Longleftrightarrow \quad e^{iw} - e^{-iw} = 2iz,$$

kar implicira

$$e^{2iw} - 1 = 2ize^{iw} \quad \Longrightarrow \quad e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0.$$

Če vpeljemo novo spremenljivko $t = e^{iw}$, dobimo enačbo $t^2 - 2izt - 1 = 0$, ki ima rešitvi

$$t_{1,2} = \frac{2iz \pm \sqrt{-4z^2+4}}{2} = \frac{2iz \pm 2\sqrt{1-z^2}}{2} = iz \pm \sqrt{1-z^2}.$$

To pomeni, da je

$$iw = \operatorname{Log}\left(iz \pm \sqrt{1-z^2}\right) + 2k\pi i, \ k \in \mathbb{Z},$$

kar nam da še

$$w = \frac{1}{i} \operatorname{Log}\left(iz \pm \sqrt{1-z^2}\right) + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Množico $\arcsin z$ lahko torej zapišemo kot

$$\arcsin z = \left\{\frac{1}{i} \operatorname{Log}\left(iz \pm \sqrt{1-z^2}\right) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\},$$

funkcijo Arcsin pa definiramo s predpisom

$$\operatorname{Arcsin} z = \frac{1}{i} \operatorname{Log}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right).$$

Podobno izpeljemo tudi

$$\operatorname{Arccos} z = \frac{1}{i} \operatorname{Log}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right).$$

2.8 Izpitne naloge: linearna funkcija

1. V kompleksni ravnini je podan trikotnik T z oglišči -1, 1 in i.

   (a) Zapiši linearno preslikavo, ki trikotnik T preslika v trikotnik z oglišči 0, 1 in i.

   (b) Ugotovi in utemelji, kam se trikotnik T preslika s preslikavo $f(z) = \frac{1}{z}$. Skica je obvezna.

2. V kompleksni ravnini sta podana kvadrat K_1 z oglišči $-i$, 1, i, -1 in kvadrat K_2 z oglišči 0, $-2i$, $2-2i$, 2.

   (a) Zapiši eksplicitni predpis linearne preslikave, ki K_1 preslika na K_2.

(b) Ugotovi in utemelji, kam se kvadrat K_2 preslika s preslikavo $f(z) = e^{2z}$. Preslikano območje skiciraj in prikaži, kam se preslikajo posamezni robovi kvadrata K_2.

3. V kompleksni ravnini sta podana kvadrat K_1 z oglišči $-2i$, 2, $2i$, -2 in kvadrat K_2 z oglišči 0, 1, $1+i$, i.

   (a) Zapiši eksplicitni predpis linearne preslikave, ki K_1 preslika na K_2.

   (b) Ugotovi in utemelji, kam se kvadrat K_2 preslika s preslikavo $f(z) = e^{3z}$. Preslikano območje skiciraj in prikaži, kam se preslikajo posamezni robovi kvadrata K_2.

2.9 Izpitne naloge: ulomljene linearne preslikave

Opomba: številne naloge v tem razdelku so povzete ali prirejene po nalogah iz zbirk [3] in [9].

1. Poišči predpis ulomljene linearne preslikave f, ki ohranja točki 0 in 2, točko ∞ pa preslika v 1. Zapiši in skiciraj, kam se s preslikavo f preslika kolobar $1 < |z| < 2$.

2. Poišči predpis ulomljene linearne preslikave f, ki točke 0, $-i$ in $2i$ zaporedoma preslika v točke -1, 0 in 3. Ugotovi in zapiši, kam preslikava f slika območje

$$D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| < 1 \,\wedge\, \operatorname{Im} z > 0\}.$$

   Preslikano območje natančno skiciraj in zapiši enačbe njegovih robov.

3. Poišči predpis ulomljene linearne preslikave f, ki točke 0, 3 in ∞ zaporedoma preslika v točke 0, $\frac{3}{2}$ in 1. Ugotovi in zapiši, kam preslikava f slika območje

$$D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1 \,\wedge\, \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 1\}.$$

   Preslikano območje natančno skiciraj in zapiši enačbe njegovih robov.

4. Zapiši ulomljeno linearno preslikavo f, ki točke 0, 1 in i preslika zaporedoma v točke $3i$, $2+2i$ in ∞. Ugotovi in utemelji, kam f preslika krožnico z enačbo $|z-2i| = 1$ in premico z enačbo $z + \overline{z} = 2$. Zapiši enačbi preslikanih krivulj in ju skiciraj.

5. Poišči predpis ulomljene linearne preslikave f, ki točke 0, $1+i$ in ∞ zaporedoma preslika v točke ∞, $2-i$ in 1. Ugotovi in zapiši, kam preslikava f slika območje

$$D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z+2| < 2 \,\wedge\, |z+1| > 1\}.$$

   Preslikano območje natančno skiciraj in zapiši enačbe njegovih robov.

6. Poišči predpis ulomljene linearne preslikave f, ki točke 1, 2 in 3 zaporedoma preslika v točke ∞, 2 in $\frac{3}{2}$. Ugotovi in zapiši, kam preslikava f slika območje

$$D = \left\{z \in \mathbb{C} \,\Big|\, \left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2} \,\wedge\, \operatorname{Im} z > 0\right\}.$$

   Odgovor utemelji in preslikano območje tudi skiciraj.

7. Poišči predpis ulomljene linearne preslikave f, ki točke 0, -1 in -2 zaporedoma preslika v točke 0, 1 in ∞. Ugotovi in zapiši, kam preslikava f slika območje

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} z < \pi \right\}.$$

Preslikano območje natančno skiciraj in zapiši enačbe njegovih robov.

8. Poišči predpis ulomljene linearne preslikave f, ki točke $1-i$, ∞ in 0 zaporedoma preslika v točke $3+2i$, 1 in ∞. Ugotovi in zapiši, kam preslikava f slika območje

$$D = \{ z \in \mathbb{C} \,|\, |z+2| > 2 \,\wedge\, |z-4| > 4 \}.$$

Preslikano območje natančno skiciraj in zapiši enačbe njegovih robov.

9. Poišči predpis ulomljene linearne preslikave f, ki točke 0, 4 in ∞ zaporedoma preslika v točke 0, 2 in 3. Ugotovi in zapiši, kam preslikava f slika območje

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, (|z| < 2) \;\wedge\; (\operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z < 2) \right\}.$$

Preslikano območje natančno skiciraj in zapiši enačbe njegovih robov.

10. Poišči predpis ulomljene linearne preslikave f, ki točke 0, -1 in i zaporedoma preslika v točke -1, 0 in $-i$. Ugotovi in zapiši, kam preslikava f slika območje

$$D = \{ z \in \mathbb{C} \mid (\operatorname{Re} z - 1 < \operatorname{Im} z < 1 - \operatorname{Re} z) \;\wedge\; (\operatorname{Re} z > 0) \}.$$

Preslikano območje natančno skiciraj in zapiši enačbe njegovih robov.

11. Poišči ulomljeno linearno preslikavo, ki območje $D_1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \wedge \operatorname{Im} z > 0 \}$ preslika na $D_2 = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \wedge \operatorname{Im} z > 0 \}$.

12. V kompleksni ravnini sta dani množici

$$D_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1 \wedge |z-i| \leq \sqrt{2} \right\} \text{ in } D_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{3\pi}{4} \right\}.$$

Poišči predpis ulomljene linearne preslikave, ki preslika množico D_1 na D_2.

13. V kompleksni ravnini je podan trikotnik T z oglišči -1, 1 in i.

    (a) Zapiši linearno preslikavo, ki trikotnik T preslika v trikotnik z oglišči 0, 1 in i.

    (b) Ugotovi in utemelji, kam se trikotnik T preslika s preslikavo $f(z) = \frac{1}{z}$. Skica je obvezna.

2.10 Izpitne naloge: druge elementarne funkcije

Opomba: številne naloge v tem razdelku so povzete ali prirejene po nalogah iz zbirke [3].

1. Zapiši konformno preslikavo, ki preslika množico

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1 \,\wedge\, 0 \le \arg(z) < \frac{\pi}{3} \right\} \quad \text{na} \quad D' = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2i| > 3\}.$$

Obe množici tudi skiciraj.

2. V kompleksni ravnini sta podana kvadrat K_1 z oglišči $-i$, 1, i, -1 in kvadrat K_2 z oglišči 0, $-2i$, $2-2i$, 2.

   (a) Zapiši eksplicitni predpis linearne preslikave, ki K_1 preslika na K_2.

   (b) Ugotovi in utemelji, kam se kvadrat K_2 preslika s preslikavo $f(z) = e^{2z}$. Preslikano območje skiciraj in prikaži, kam se preslikajo posamezni robovi kvadrata K_2.

3. V kompleksni ravnini sta podana kvadrat K_1 z oglišči $-2i$, 2, $2i$, -2 in kvadrat K_2 z oglišči 0, 1, $1+i$, i.

   (a) Zapiši eksplicitni predpis linearne preslikave, ki K_1 preslika na K_2.

   (b) Ugotovi in utemelji, kam se kvadrat K_2 preslika s preslikavo $f(z) = e^{3z}$. Preslikano območje skiciraj in prikaži, kam se preslikajo posamezni robovi kvadrata K_2.

4. V kompleksni ravnini sta dani množici

$$K_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 4 \wedge |z-2| > 2\} \text{ in } K_2 = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Im}(z) > 0\right\}.$$

Poišči predpis konformne preslikave f, ki preslika množico K_1 na množico K_2. *Namig: Množico K_1 najprej preslikaj v pas $0 < \operatorname{Im}(z) < 4$.*

5. Dana je funkcija $f : \mathbb{C} \to \{x+iy \mid (x > 0) \vee (x = 0 \wedge y \ge 0)\}$ s predpisom $f(z) = \sqrt{z}$ in območje $D = \{z \in \mathbb{C} \mid (|z| > 1) \wedge (\frac{3\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4})\}$.

   (a) Reši enačbo $z^2 = -1 - \sqrt{3}i$ in izračunaj $f(-1-\sqrt{3}i)$.

   (b) Ugotovi, kam funkcija f preslika območje D. Preslikano območje zapiši in skiciraj.

   (c) Naj bo funkcija $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \times (-\pi, \pi]$ podana s predpisom $g(z) = \operatorname{Log} z$. Ugotovi, kam se s funkcijo $g \circ f$ preslika območje D.

6. Podani sta funkciji $f : \mathbb{C} \to \{x+iy \mid (x > 0) \vee (x = 0 \wedge y \ge 0)\}$ in $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \times (-\pi, \pi]$ s predpisoma $f(z) = \sqrt{z}$ in $g(z) = \operatorname{Log} z$. Naj bo območje D podano kot

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid (e < |z| < e^2) \wedge \operatorname{Re} z < 0)\}.$$

   (a) Območje D preslikaj s funkcijo f.

   (b) Naj bo $h(z) = ig(z)$ za vsak $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Območje D preslikaj s funkcijo h.

V obeh primerih preslikano območje zapiši in skiciraj.

7. Funkciji $f : \mathbb{C} \to \{x + iy \mid (x > 0) \vee (x = 0 \wedge y \geq 0)\}$ in $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \times (-\pi, \pi]$ sta podani s predpisoma $f(z) = \sqrt{z}$ in $g(z) = \operatorname{Log} z$. Podana je še množica D:

$$D = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \bigm| |\operatorname{Re} z| = |\operatorname{Im} z|\}.$$

   (a) Naj bo $h(z) = (1 + i)f(z)$ za vsak $z \in \mathbb{C}$. Množico D preslikaj s funkcijo h.
   (b) Množico D preslikaj s funkcijo g.

   V obeh primerih vse korake natančno utemelji in skiciraj preslikano množico.

8. (a) Izračunaj $\operatorname{Log}(3 + 3i)$ in reši enačbo $e^{z+i} = 3 + 3i$.
   (b) S funkcijo s predpisom $f(z) = \operatorname{Log}(z)$ preslikaj množico

$$I = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \in [1, e], \arg(z) \in [0, \pi]\}.$$

   Množico I in preslikano množico tudi skiciraj.

9. Dana je funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s predpisom $f(z) = \cos z$.

   (a) Ugotovi, kam se s funkcijo f preslika poltrak $D_a = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = a, \operatorname{Im} z > 0\}$, kjer je $a \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
   (b) Kam se preslika daljica $D_b = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = b, -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}\}$, kjer je $b > 0$?
   (c) Kam se s funkcijo f preslika območje

$$D = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2} \wedge \operatorname{Im} z > 0\right\}?$$

   (d) Reši enačbo $\sin z + \cos z = 2$.

10. Dana je funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s predpisom $f(z) = \cos z$.

   (a) Poišči vse $z \in \mathbb{C}$, za katere velja $f(z) = \frac{5}{4}$.
   (b) Ugotovi in utemelji, kam se s funkcijo f preslika premica $P_a = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = a\}$, kjer je $a \in [0, \pi]$ konstanta. Skice so obvezne.
   (c) Ugotovi in utemelji, kam se s funkcijo f preslika množica

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re} z \leq \pi\}.$$

11. Dana je funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s predpisom $f(z) = \operatorname{sh} z$.

   (a) Dokaži, da za vse $z, w \in \mathbb{C}$ velja $\operatorname{sh}(z + w) = \operatorname{sh} z \operatorname{ch} w + \operatorname{ch} z \operatorname{sh} w$. Nato izračunaj realni in imaginarni del funkcije f.
   (b) Ugotovi, kam se s funkcijo f preslika daljica

$$D_a = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = a, \operatorname{Im} z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\},$$

   kjer je $a \in \mathbb{R}$ konstanta. Kam se preslika množica $[0, \infty) \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$? Skice so obvezne.

12. Dana je funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s predpisom $f(z) = \operatorname{ch} z$.
    (a) Poišči vse $z \in \mathbb{C}$, za katere velja $f(z) = 1$.
    (b) Preveri, da za vse $z, w \in \mathbb{C}$ velja $\operatorname{ch}(z + w) = \operatorname{ch} z \operatorname{ch} w + \operatorname{sh} z \operatorname{sh} w$. Zapiši tudi realni in imaginarni del funkcije f.
    (c) Ugotovi, kam se s funkcijo f preslika množica točk $D_a = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = a\}$, kjer je $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ konstanta. Skice so obvezne.

13. Dokaži, da za vsak $z \in \mathbb{C}$ velja

$$|\operatorname{sh}(\operatorname{Im} z)| \leq |\cos z| \leq \operatorname{ch}(\operatorname{Im} z).$$

Kakšno oceno dobimo, če je $z \in \mathbb{R}$?

Poglavje 3

Kompleksni odvod

3.1 Definicija odvoda

Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ poljubna množica. Funkcija $f : D \to \mathbb{C}$ je ***zvezna v točki*** $z_0 \in D$, če velja:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in D : |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Če je funkcija $f : D \to \mathbb{C}$ zvezna v vsaki točki $z_0 \in D$, potem pravimo, da je ***zvezna***.

Sedaj predpostavimo, da je $f : D \to \mathbb{C}$ definirana na neki okolici točke $z_0 \in \mathbb{C}$, razen morda v točki z_0. Funkcija f ima ***limito*** $L \in \mathbb{C}$, ko gre $z \to z_0$, če je resnična naslednja izjava:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in D : 0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - L| < \varepsilon.$$

V takem primeru pišemo

$$L = \lim_{z \to z_0} f(z).$$

Če množica D vsebuje tudi točko z_0, potem zlahka preverimo, da je f zvezna v točki $z_0 \in D$ natanko tedaj, ko velja $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Lastnosti:

(i) Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$. Če sta funkciji $f : D \to \mathbb{C}$ in $g : D \to \mathbb{C}$ zvezni, potem so zvezne tudi funkcije $f + g$, $f - g$ in fg.

(ii) Če je funkcija f zvezna in $a \in \mathbb{C}$, potem je $a \cdot f$ zvezna funkcija.

(iii) Naj bosta $D_f, D_g \subseteq \mathbb{C}$. Če sta funkciji $f : D_f \to \mathbb{C}$ in $g : D_g \to \mathbb{C}$ zvezni, pri čemer je zaloga vrednosti funkcije g vsebovana v množici D_f, potem je zvezna tudi funkcija $f \circ g$.

Kot že vemo, lahko funkcijo $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, ki $x + iy$ preslika v $u(x, y) + iv(x, y)$, obravnavamo tudi kot funkcijo $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ki par (x, y) preslika v $(u(x, y), v(x, y))$. Pri tem sta u, v funkciji dveh spremenljivk, ki slikata iz D v $\mathbb{R}$. Opazimo, da je $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zvezna v $z_0 = x_0 + y_0 \in D$ natanko tedaj, ko je $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zvezna v točki (x_0, y_0). Posledično to pomeni, da je f zvezna natanko tedaj, ko sta zvezni funkciji u in v.

Definicija 3.1 *Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ poljubna odprta množica in $z_0 \in D$. Funkcija $f : D \to \mathbb{C}$ je* ***odvedljiva*** *v točki z_0, če obstaja limita*

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

Opomba 3.2 *Veljajo običajne formule za odvod vsote, razlike, produkta, produkta s številom, kvocienta, kompozituma in inverzne preslikave, ki jih dokažemo na enak način kot pri realni analizi.*

Primer 3.3 Ali je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$, odvedljiva v točki $z_0 \in \mathbb{C}$? Izračunajmo

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \to z_0} (z + z_0) = 2z_0. \end{aligned}$$

To pomeni, da velja $f'(z) = 2z$ za vsak $z \in \mathbb{C}$.

Opomba 3.4 *Vse elementarne funkcije v $\mathbb{C}$ so odvedljive in jih odvajamo tako kot v $\mathbb{R}$.*

Primer 3.5 Preverimo, ali je funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}$, odvedljiva. Izračunajmo

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{(z + \Delta z)} - \overline{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z} + \overline{\Delta z} - \overline{z}}{\Delta z} \\ = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta x + i\Delta y}}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}. \end{aligned}$$

Sedaj si oglejmo dve možnosti:

(i) Če je $\Delta z = \Delta x + i \cdot 0$, potem je $\displaystyle\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$

(ii) Če je $\Delta z = 0 + i\Delta y$, potem je $\displaystyle\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1.$

S tem smo preverili, da začetna limita ne obstaja in posledično funkcija f ni odvedljiva v točki z.

Izrek 3.6 *Če je funkcija $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ odvedljiva v točki $z_0 \in D$, potem je v tej točki tudi zvezna.*

Dokaz. Dokazati želimo, da je f zvezna v točki $z_0 \in D$. Dokazali bomo ekvivalentno trditev, ki pravi, da velja $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ oziroma $\lim_{z \to z_0} (f(z) - f(z_0)) = 0$. Opazimo, da velja

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} (f(z) - f(z_0)) &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \\ &= f'(z_0) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

□

Odvedljiva funkcija je torej vedno tudi zvezna, medtem ko obratna trditev v splošnem ne velja.

Definicija 3.7 *Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ poljubno območje. Če je funkcija $f : D \to \mathbb{C}$ odvedljiva v vsaki točki množice D, pravimo, da je f* ***holomorfna*** *na množici D.*

Definicija 3.8 *Holomorfno funkcijo $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ imenujemo* ***cela funkcija*** *(f je holomorfna na $\mathbb{C}$).*

Trditev 3.9 *Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ poljubno območje. Denimo, da sta funkciji $f, g : D \to \mathbb{C}$ odvedljivi v točki $z_0 \in D$ in da velja $f(z_0) = g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$. Potem velja*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Dokaz. Izračunajmo:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{g(z) - g(z_0)} = \lim_{z \to z_0} \frac{\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}{\dfrac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}{\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

□

Izrek 3.10 (Cauchy-Riemann) *Funkcija $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, je odvedljiva v točki $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, natanko tedaj, ko sta funkciji u in v diferenciabilni v točki (x_0, y_0) in velja*

$$\begin{aligned} u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) &= -v_x(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Opomba 3.11

1. *Enačbama v izreku pravimo Cauchy-Riemannovi enačbi (na kratko CR-enačbi).*

2. *Diferenciabilnost funkcij u in v v točki (x_0, y_0) pomeni:*

$$\begin{aligned} u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= u(x_0, y_0) + u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + o_1(\Delta x, \Delta y), \\ v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= v(x_0, y_0) + v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + o_2(\Delta x, \Delta y), \end{aligned}$$

kjer je $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{o_1(\Delta x, \Delta y)}{|\Delta z|} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{o_2(\Delta x, \Delta y)}{|\Delta z|} = 0$ in $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$.

Dokaz. ($\Longrightarrow$) Najprej predpostavimo, da je f odvedljiva v točki z_0. To pomeni, da obstaja

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

(i) Naj bo $\Delta z = \Delta x + i \cdot 0$. Zgornja limita se v tem primeru poenostavi v

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + \Delta x) - f(x_0 + iy_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0). \end{aligned}$$

To pomeni, da velja $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$.

(ii) Naj bo $\Delta z = 0 + i\Delta y$. Zgornja limita se v tem primeru poenostavi v

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(z_0 + i\Delta y) - f(z_0)}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + i\Delta y) - f(x_0 + iy_0)}{i\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) + iv(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{i\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0))}{i\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} - i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} \\
&= v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0).
\end{aligned}$$

To pomeni, da velja $f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$.

Če združimo (i) in (ii), dobimo

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0).$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned}
u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0) \\
u_y(x_0, y_0) &= -v_x(x_0, y_0).
\end{aligned}$$

Dokažimo še, da sta u in v diferenciabilni v točki (x_0, y_0). Definirajmo izraz

$$\alpha(\Delta z) = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0).$$

Ker je f odvedljiva v točki z_0, očitno velja $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \alpha(\Delta z) = 0$. Izračunamo lahko tudi

$$\begin{aligned}
&\Delta z \cdot \alpha(\Delta z) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) - \Delta z \cdot f'(z_0) \\
&= f(x_0 + iy_0 + \Delta x + i\Delta y) - f(x_0 + y_0) - (\Delta x + i\Delta y) f'(x_0 + iy_0) \\
&= u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + iv(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0) \\
&- (\Delta x + i\Delta y)(u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)).
\end{aligned}$$

Oglejmo si realni del zgornjega izraza in uporabimo Cauchy-Riemannovi formuli:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}(\Delta z \cdot \alpha(\Delta z)) = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - u_x(x_0, y_0)\Delta x + v_x(x_0, y_0)\Delta y \\
&= u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - u_x(x_0, y_0)\Delta x - u_y(x_0, y_0)\Delta y = o_1(\Delta x, \Delta y).
\end{aligned}$$

Dokazati moramo še, da velja $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{o_1(\Delta x, \Delta y)}{\Delta z} = 0$. Opazimo, da velja

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{o_1(\Delta x, \Delta y)}{\Delta z} \right| &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\mathrm{Re}(\Delta z \cdot \alpha(\Delta z))|}{|\Delta z|} \\
&\leq \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta z \cdot \alpha(\Delta z)|}{|\Delta z|} = \lim_{\Delta z \to 0} |\alpha(\Delta z)| = 0.
\end{aligned}$$

To pomeni, da je $\lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{o_1(\Delta x, \Delta y)}{\Delta z} \right| = 0$ in posledično tudi $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{o_1(\Delta x, \Delta y)}{\Delta z} = 0$. S tem smo preverili, da je funkcija u diferenciabilna v točki (x_0, y_0). Podobno bi z obravnavo izraza $\mathrm{Im}(\Delta z \cdot \alpha(\Delta z))$ lahko preverili, da je tudi funkcija v diferenciabilna v točki (x_0, y_0). Dokaz v eno smer je torej zaključen.

($\Longleftarrow$) Za drugo smer predpostavimo, da veljata CR-enačbi in da sta funkciji u, v diferenciabilni v točki (x_0, y_0), kar pomeni:

$$\begin{aligned} u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= u(x_0, y_0) + u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + o_1(\Delta x, \Delta y), \\ v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= v(x_0, y_0) + v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + o_2(\Delta x, \Delta y), \end{aligned}$$

kjer je $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{o_1(\Delta x, \Delta y)}{|\Delta z|} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{o_2(\Delta x, \Delta y)}{|\Delta z|} = 0$ in $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$.

V nadaljevanju preverimo, da obstaja odvod funkcije f v točki z_0, pri čemer bomo v spodnjem izračunu namesto $o_1(\Delta x, \Delta y)$ in $o_2(\Delta x, \Delta y)$ nekajkrat pisali kar o_1 in o_2:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x_0 + iy_0 + \Delta x + i\Delta y) - f(x_0 + iy_0)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + iv(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) + i(v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0))}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u_x(x_0, y_0)\Delta x + u_y(x_0, y_0)\Delta y + o_1 + i(v_x(x_0, y_0)\Delta x + v_y(x_0, y_0)\Delta y + o_2)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u_x(x_0, y_0)\Delta x - v_x(x_0, y_0)\Delta y + o_1 + i(v_x(x_0, y_0)\Delta x + u_x(x_0, y_0)\Delta y + o_2)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x(u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)) + \Delta y(-v_x(x_0, y_0) + iu_x(x_0, y_0)) + o_1 + io_2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(\Delta x + i\Delta y)(u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)) + o_1(\Delta x, \Delta y) + io_2(\Delta x, \Delta y)}{\Delta z} \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) + \lim_{\Delta z \to 0} \frac{o_1(\Delta x, \Delta y)}{\Delta z} + i \lim_{\Delta z \to 0} \frac{o_2(\Delta x, \Delta y)}{\Delta z} \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) + 0 + i \cdot 0 = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Opazimo torej, da je funkcija f odvedljiva v točki z_0, kar zaključi dokaz. □

3.2 Geometrijski pomen odvoda

V prejšnjem razdelku smo pokazali, da je funkcija $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, odvedljiva natanko tedaj, ko sta funkciji u, v diferenciabilni in velja $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$.

Po drugi strani ponovno opomnimo, da lahko na funkcijo $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gledamo tudi kot na funkcijo $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ki poljuben par (x, y) preslika v urejeni par $(u(x, y), v(x, y))$.

Če je torej $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ odvedljiva v točki $z_0 = x_0 + iy_0$, potem sta funkciji u, v diferenciabilni v točki (x_0, y_0), zato sledi, da je tudi funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diferenciabilna v točki (x_0, y_0). Posledično to pomeni, da obstaja realna matrika A velikosti 2×2, da velja

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + A \cdot \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} + o(\Delta x, \Delta y),$$

pri čemer je

$$A = \begin{bmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

Jacobijeva matrika parcialnih odvodov funkcij u in v.

V primeru, ko je funkcija $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ odvedljiva v točki $z_0 = x_0 + iy_0$ in $f'(z_0) \neq 0$, pa lahko na matriki A uporabimo tudi Cauchy-Rimenannovi enačbi:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x(x_0,y_0) & -v_x(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & u_x(x_0,y_0) \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{(u_x(x_0,y_0))^2 + (v_x(x_0,y_0))^2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{u_x(x_0,y_0)}{\sqrt{(u_x(x_0,y_0))^2+(v_x(x_0,y_0))^2}} & -\frac{v_x(x_0,y_0)}{\sqrt{(u_x(x_0,y_0))^2+(v_x(x_0,y_0))^2}} \\ \frac{v_x(x_0,y_0)}{\sqrt{(u_x(x_0,y_0))^2+(v_x(x_0,y_0))^2}} & \frac{u_x(x_0,y_0)}{\sqrt{(u_x(x_0,y_0))^2+(v_x(x_0,y_0))^2}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

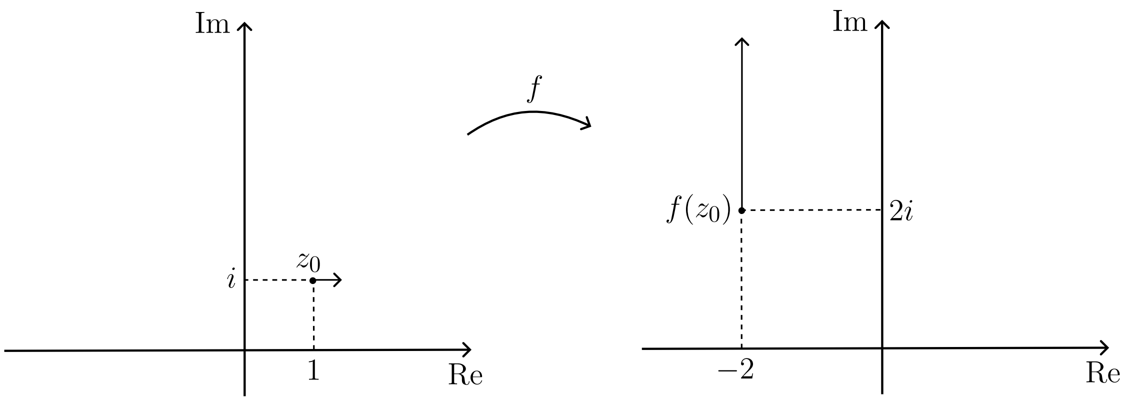
Od tod dobimo

$$A = |f'(z_0)| \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix},$$

kjer je $\varphi = \arg(f'(z_0))$ argument kompleksnega števila $f'(z_0)$.

Sklep. *Naj bo funkcija $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ odvedljiva v točki $z_0 \in D$, pri čemer je $f'(z_0) \neq 0$. V okolici točke z_0 lahko preslikavo f dobro aproksimiramo s pomočjo preslikave, ki je enaka raztegu za faktor $|f'(z_0)|$ in zasuku za kot $\arg(f'(z_0))$.*

Primer 3.12 Naj bo funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ podana s predpisom $f(z) = z^3$ in naj bo $z_0 = 1 + i$. Opazimo, da je $f(z_0) = (1+i)^3 = -2+2i$. Po drugi strani je $f'(z) = 3z^2$ in posledično $f'(z_0) = 3(1+i)^2 = 6i$, od koder dobimo $|f'(z_0)| = 6$ in $\arg(f'(z_0)) = \frac{\pi}{2}$. To pomeni, da lahko v okolici točke $1+i$ preslikavo f dobro aproksimiramo s pomočjo preslikave, ki je enaka kompozitumu raztega za faktor 6 in zasuka za kot $\frac{\pi}{2}$ (glejte sliko 3.1).

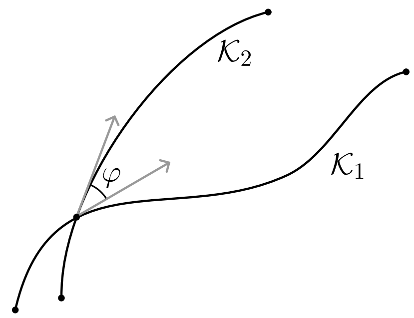


Slika 3.1: Obnašanje funkcije f v okolici točke z_0.

3.3 Konformnost

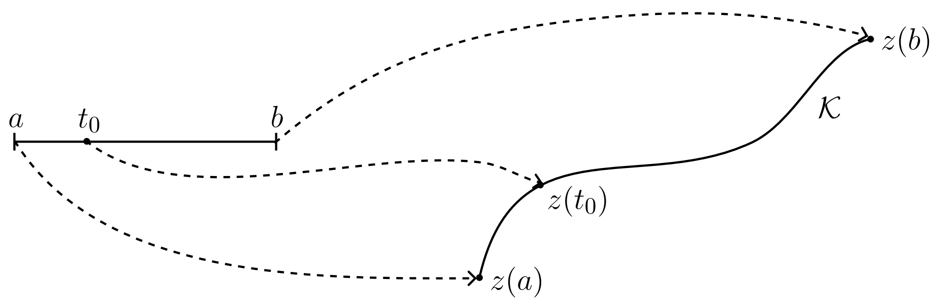
Definicija 3.13 *Funkcija $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je **konformna**, če ohranja kote med krivuljami po velikosti in orientaciji.*

Opomba 3.14 *1. Kot med krivuljama v neki skupni točki je kot med tangentnima vektorjema na dani krivulji v tej točki (slika 3.2).*



Slika 3.2: Kot φ med krivuljama $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$.

2. Spomnimo, da je parametrizacija neke krivulje $\mathcal{K}$ v $\mathbb{R}^2$ funkcija $\vec{r} : [a,b] \to \mathcal{K}$, ki je zvezna in surjektivna. Zapišemo jo v obliki $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ za vsak $t \in [a,b]$. Podobno je parametrizacija neke krivulje $\mathcal{K}$ v $\mathbb{C}$ funkcija $z : [a,b] \to \mathcal{K}$, ki je zvezna in surjektivna; glejte sliko 3.3. Zapišemo jo v obliki $z(t) = x(t) + iy(t)$ za vsak $t \in [a,b]$. Glede na to, da za to interpretacijo potrebujemo obstoj tangentnih vektorjev na krivuljo, bomo v nadaljevanju predpostavili, da za krivulje obstaja regularna parametrizacija, kar zagotavlja, da obstaja $\dot{z}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$ in velja $\dot{z}(t) \neq 0$ za vsak $t \in [a,b]$.



Slika 3.3: Parametrizacija krivulje $\mathcal{K}$.

Izrek 3.15 *Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija in $z_0 \in D$. Če je $f'(z_0) \neq 0$, potem je funkcija f konformna v točki z_0.*

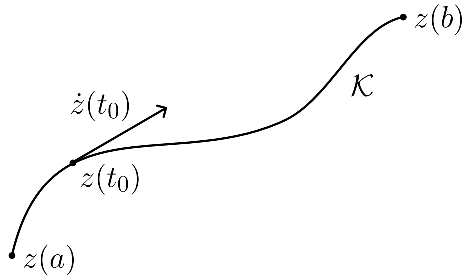
Dokaz. Naj bo $\mathcal{K} \subseteq D$ krivulja v $\mathbb{C}$, ki poteka skozi točko z_0. Naj bo še $z : [a,b] \to \mathcal{K}$ regularna parametrizacija krivulje $\mathcal{K}$ in $z(t) = x(t) + iy(t)$ za vsak $t \in [a,b]$. Potem obstaja tak $t_0 \in [a,b]$, da velja

$$z(t_0) = z_0 = x(t_0) + iy(t_0).$$

Odvod parametrizacije z v točki t_0 je

$$\dot{z}(t_0) = \dot{x}(t_0) + i\dot{y}(t_0),$$

kar predstavlja tangentni vektor na krivuljo $\mathcal{K}$ v točki z_0 (slika 3.4).



Slika 3.4: Tangentni vektor na krivuljo $\mathcal{K}$ v točki z_0.

Krivuljo $\mathcal{K}$ preslikamo s funkcijo $f = u + iv$, da dobimo krivuljo $f(\mathcal{K})$, ki ima parametrizacijo $z_1 = f \circ z$. Za poljuben $t \in [a, b]$ torej velja

$$\begin{aligned} z_1(t) &= f(z(t)) = f(x(t) + iy(t)) \\ &= u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Izračunajmo odvod parametrizacije z_1:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= u_x(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t) + u_y(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t) \\ &+ i(v_x(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t) + v_y(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t)) \\ &= u_x(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t) - v_x(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t) \\ &+ i(v_x(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t) + u_x(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t)) \\ &= u_x(x(t), y(t))(\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)) + iv_x(x(t), y(t))(\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)) \\ &= (\dot{x}(t) + i\dot{y}(t))(u_x(x(t), y(t)) + iv_x(x(t), y(t))) \\ &= \dot{z}(t) \cdot f'(z(t)). \end{aligned}$$

Če v zgornjo enakost vstavimo $t = t_0$, dobimo

$$\dot{z}_1(t_0) = \dot{z}(t_0) \cdot f'(z(t_0)) = \dot{z}(t_0) \cdot f'(z_0) \neq 0.$$

Opazimo, da je kot med tangentnim vektorjem na krivuljo $\mathcal{K}$ v točki z_0 in pozitivno smerjo realne osi enak $\arg(\dot{z}(t_0))$ (slika 3.5).

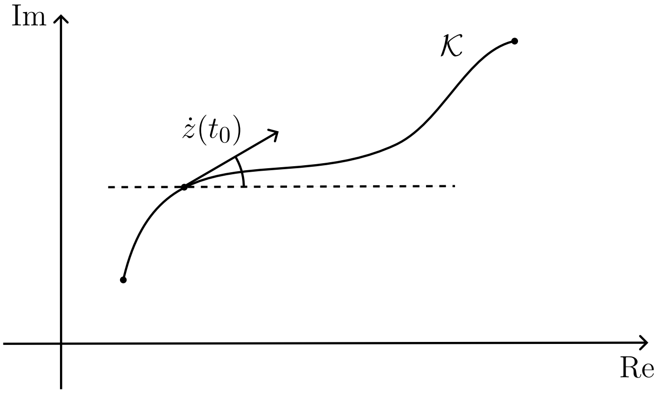
Po drugi strani je kot med tangentnim vektorjem na krivuljo $f(\mathcal{K})$ v točki $f(z_0)$ in pozitivno smerjo realne osi enak $\arg(\dot{z}_1(t_0))$. Očitno pa oba kota povezuje naslednja enakost:

$$\arg(\dot{z}_1(t_0)) = \arg(\dot{z}(t_0)) + \arg(f'(z_0)).$$

Če označimo $\alpha = \arg(f'(z_0))$, potem velja

$$\arg(\dot{z}_1(t_0)) = \arg(\dot{z}(t_0)) + \alpha.$$

Naj bosta $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ dve krivulji, ki potekata skozi točko z_0. Naj bosta še φ_1 in φ_2 kota, ki ga tangentna vektorja na krivulji $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ v točki z_0 oklepata s pozitivno smerjo



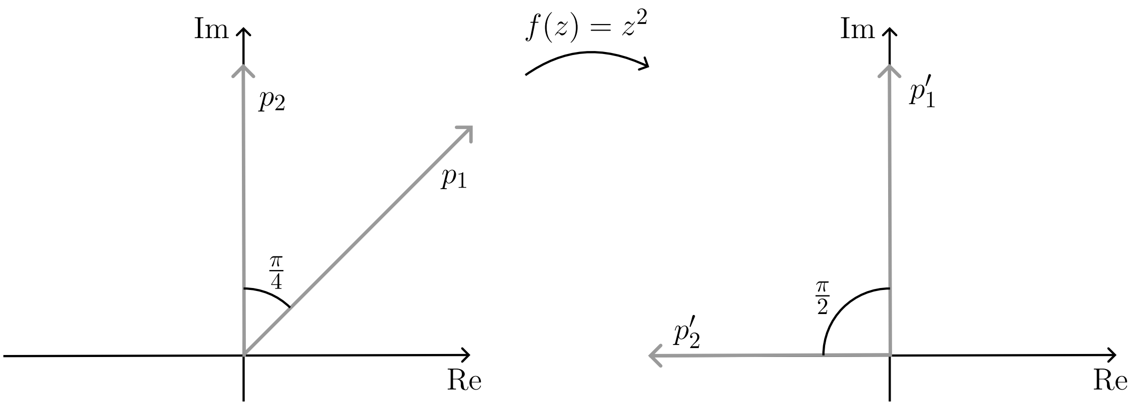
Slika 3.5: Kot $\arg(\dot z(t_0))$.

realne osi. Kot med krivuljama $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ je potem enak $\varphi_1 - \varphi_2$. Iz zgornjega razmisleka pa sledi, da je kot med krivuljama $f(\mathcal{K}_1)$ in $f(\mathcal{K}_2)$ v točki $f(z_0)$ enak

$$(\varphi_1 + \alpha) - (\varphi_2 + \alpha) = \varphi_1 - \varphi_2,$$

kar zaključuje dokaz. $\square$

Primer 3.16 Funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je podana s predpisom $f(z) = z^2$. Naj bo še $z_0 = 0$ ter $p_1 = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x \geq 0,\ y = x\}$ in $p_2 = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x = 0,\ y \geq 0\}$ dva poltraka, ki vsebujeta točko $z_0 = 0$. Zlahka preverimo, da se s funkcijo f poltrak p_1 preslika v poltrak $p_1' = p_2 = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x = 0,\ y \geq 0\}$, poltrak p_2 pa se preslika v poltrak $p_2' = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x \leq 0,\ y = 0\}$. Opazimo, da je kot med poltrakoma p_1 in p_2 enak $\frac{\pi}{4}$, kot med poltrakoma p_1' in p_2' pa znaša $\frac{\pi}{2}$ in torej ni enak prej omenjenemu kotu (glejte sliko 3.6). Razlog za to je dejstvo, da velja $f'(z_0) = 2z_0 = 0$.



Slika 3.6: Kot med poltrakoma p_1 in p_2 oziroma p_1' in p_2'.

3.4 Odvodi elementarnih funkcij

Navedimo odvode nekaterih elementarnih funkcij.

(1) Polinome in racionalne funkcije odvajamo enako kot v $\mathbb{R}$.

(2) Naj bo $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$. Potem velja

$$f(z) = f(x + iy) = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y.$$

Funkcijo f lahko torej zapišemo v obliki $f = u + iv$, kjer je $u(x, y) = e^x \cos y$ in $v(x, y) = e^x \sin y$. Preverimo lahko, da velja $u_x(x, y) = v_y(x, y) = e^x \cos y$ in $u_y(x, y) = -v_x(x, y) = -e^x \sin y$. Po Cauchy-Riemannovem izreku sledi, da je funkcija f odvedljiva. Prav tako velja

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

S tem smo preverili, da je $f'(z) = e^z$ za vsak $z \in \mathbb{C}$.

(3) Naj bo $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sin z$. Izračunajmo odvod:

$$f'(z) = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)' = \frac{1}{2i}(e^{iz} \cdot i - e^{-iz}(-i)) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

Podobno lahko preverimo, da za funkcijo $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \cos z$, velja $f'(z) = -\sin z$.

(4) Naj bo $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \operatorname{Log} z$. Seveda za vsak $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ velja

$$e^{\operatorname{Log} z} = z.$$

Če obe strani odvajamo, dobimo

$$e^{\operatorname{Log} z}(\operatorname{Log} z)' = 1,$$

od koder sledi

$$(\operatorname{Log} z)' = \frac{1}{e^{\operatorname{Log} z}} = \frac{1}{z}.$$

To pomeni, da velja $f'(z) = \frac{1}{z}$ za vsak $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(5) Naj bo $f : \mathbb{C} \setminus \{i, -i\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \operatorname{Arctan}(z)$. Izračunajmo odvod

$$\begin{aligned} f'(z) &= \left(\frac{1}{2i} \operatorname{Log} \frac{1 + iz}{1 - iz}\right)' = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1 - iz}{1 + iz} \cdot \left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)' \\ &= \frac{1}{2i} \cdot \frac{1 - iz}{1 + iz} \cdot \frac{i(1 - iz) - (1 + iz)(-i)}{(1 - iz)^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(1 + iz)(1 - iz)} = \frac{1}{1 + z^2}. \end{aligned}$$

3.5 Izpitne naloge: kompleksni odvod

Opomba: nekatere naloge v tem razdelku so povzete po nalogah iz zbirk [10] in [6]. Ponekod je to tudi posebej označeno.

1. Naj bo $f(z) = \sin(iz) - z^2$.
   (a) Zapiši realni in imaginarni del funkcije f ter preveri, ali je f holomorfna.
   (b) Izračunaj integral $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{f(z)}{z^2}\,dz$.

2. (a) Dana je funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s predpisom
$$f(z) = \frac{1-i}{4}\left(z^2 + \overline{z}^2\right) + \frac{1+i}{2}|z|^2.$$
   Ali je f cela funkcija? Če ni, poišči vse točke, v katerih je f odvedljiva.
   (b) [6] Naj bosta $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfni funkciji, tako da velja $f'(z) = g'(z)$ za vsak $z \in \mathbb{C}$. Pokaži, da se f in g razlikujeta za konstanto.

3. [10] Poišči vse holomorfne funkcije $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, za katere povsod velja
$$u(x,y) + v(x,y) = x^2 - y^2.$$
   Rešitev izrazi kot funkcijo spremenljivke $z = x + iy$.

4. [10] Poišči holomorfno funkcijo s predpisom $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, za katero povsod velja
$$v(x,y) = 1 + x - 2xy \text{ in } f(0) = 3 + i.$$
   Rešitev izrazi kot funkcijo spremenljivke $z = x + iy$.

5. Poišči holomorfno funkcijo s predpisom $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, za katero povsod velja
$$v(x,y) = 4xy - 3y \text{ in } f(0) = 0.$$
   Rešitev izrazi kot funkcijo spremenljivke $z = x + iy$.

6. [10] Poišči holomorfno funkcijo s predpisom $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, za katero povsod velja
$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 - y \text{ in } f(0) = i.$$
   Rešitev izrazi kot funkcijo spremenljivke $z = x + iy$.

7. Poišči holomorfno funkcijo s predpisom $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, za katero povsod velja
$$v(x,y) = 3x^2y - y^3 + 4xy - x \text{ in } f(0) = 1.$$
   Rešitev izrazi kot funkcijo spremenljivke $z = x + iy$.

8. Poišči holomorfno funkcijo s predpisom $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, za katero povsod velja
$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2xy \quad \text{in} \quad f(0) = 2i.$$
Rešitev izrazi kot funkcijo spremenljivke $z = x + iy$ (brez uporabe $\operatorname{Re} z$ in $\operatorname{Im} z$).

9. Poišči vse holomorfne funkcije s predpisom $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, za katere povsod velja
$$v(x,y) = 2 \operatorname{ch} x \cos y.$$
Rešitev izrazi kot funkcijo spremenljivke $z = x + iy$.

10. [10] Poišči holomorfno funkcijo s predpisom $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, za katero povsod velja
$$u(x,y) = x \cos x \operatorname{ch} y + y \sin x \operatorname{sh} y \text{ in } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$
Rešitev izrazi kot funkcijo spremenljivke $z = x + iy$.

11. Poišči holomorfno funkcijo s predpisom $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, za katero povsod velja
$$v(x,y) = ye^x \cos y + xe^x \sin y \text{ in } f\left(\frac{\pi}{2}i\right) = 0.$$
Rešitev izrazi kot funkcijo spremenljivke $z = x + iy$.

12. Poišči holomorfno funkcijo s predpisom $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, za katero povsod velja
$$v(x,y) = \cos x \operatorname{sh} y + 2xy - x \text{ in } f(0) = 2.$$
Rešitev izrazi kot funkcijo spremenljivke $z = x + iy$.

13. Poišči holomorfno funkcijo s predpisom $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, za katero povsod velja
$$v(x,y) = x + y \sin x \operatorname{ch} y + x \operatorname{sh} y \cos x \text{ in } f(0) = 0.$$
Rešitev izrazi kot funkcijo spremenljivke $z = x + iy$.

14. Poišči holomorfno funkcijo s predpisom $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, za katero povsod velja
$$u(x,y) = \cos x \operatorname{ch} y - x^2 + y^2 - 3y \text{ in } f(0) = 1 + i.$$
Rešitev izrazi kot funkcijo spremenljivke $z = x + iy$.

15. Poišči holomorfno funkcijo f s predpisom $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, za katero povsod velja
$$v(x,y) = e^x \cos y - x^2 + y^2 + 2y \text{ in } f(0) = i.$$
Rešitev izrazi kot funkcijo spremenljivke $z = x + iy$.

16. Poišči holomorfno funkcijo f s predpisom $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, za katero povsod velja
$$u(x,y) = \sin x \operatorname{ch} y + x^3 - 3xy^2 - 2y \quad \text{in} \quad f(0) = 3i.$$
Rešitev izrazi kot funkcijo spremenljivke $z = x + iy$ (brez uporabe $\operatorname{Re} z$ in $\operatorname{Im} z$).

Poglavje 4

Integracija kompleksnih funkcij

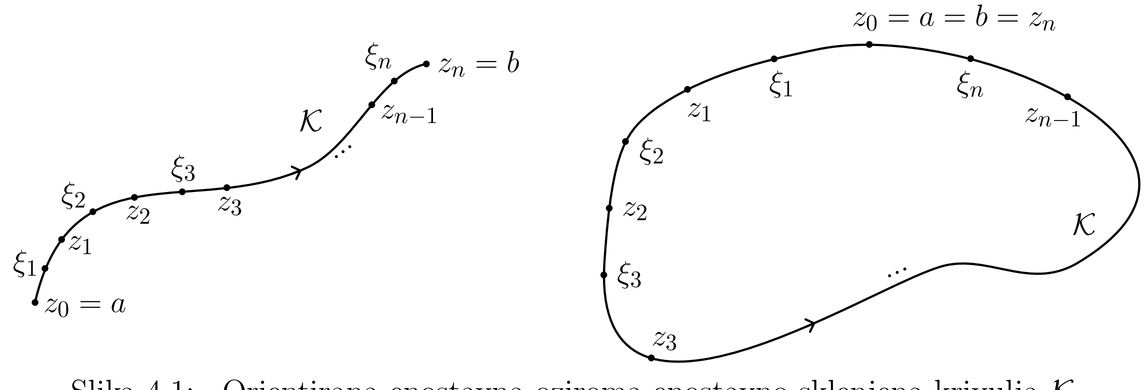
4.1 Definicija integrala

Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ poljubno območje in $f : D \to \mathbb{C}$ omejena funkcija. Naj bo še $\mathcal{K} \subseteq D$ orientirana, enostavna ali enostavno sklenjena krivulja s končno dolžino, kjer je $a \in \mathcal{K}$ začetna točka, $b \in \mathcal{K}$ pa končna točka na tej krivulji.

Na krivulji $\mathcal{K}$ v smeri orientacije po vrsti izberemo točke $a = z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n = b$. Množico $\Delta = \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ imenujemo ***množica delitve*** krivulje $\mathcal{K}$. Definirajmo še

$$\rho_\Delta = \max\{|z_k - z_{k-1}| \mid k \in \{1, \ldots, n\}\},$$

kar predstavlja največjo izmed vseh razdalj med kompleksnimi števili s sosednjimi indeksi. Za vsak $k \in \{1, \ldots, n\}$ na krivulji $\mathcal{K}$ med točkama z_{k-1} in z_k izberemo poljubno točko ξ_k; glejte sliko 4.1.



Slika 4.1: Orientirana enostavna oziroma enostavno sklenjena krivulja $\mathcal{K}$.

Vpeljimo vsoto

$$\sigma_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}).$$

Definicija 4.1 *Če obstaja $L \in \mathbb{C}$, za katerega je*

$$\lim_{\rho_\Delta \to 0} \sigma_\Delta(f) = L,$$

potem število L imenujemo ***kompleksni integral*** *funkcije f po krivulji $\mathcal{K}$. V tem primeru pravimo, da je funkcija f* ***(kompleksno) integrabilna*** *po krivulji $\mathcal{K}$, njen integral pa označimo*

$$L = \int_{\mathcal{K}} f(z)\, dz = \int_{\mathcal{K}} f\, dz.$$

Naslednji izrek pove, da lahko kompleksni integral izrazimo s pomočjo dveh krivuljnih integralov vektorskih funkcij.

Izrek 4.2 *Naj bo funkcija $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, integrabilna po krivulji $\mathcal{K} \subseteq D$. Potem velja*

$$\int_{\mathcal{K}} f(z)\, dz = \int_{\mathcal{K}} (u, -v)\, d\vec{r} + i \int_{\mathcal{K}} (v, u)\, d\vec{r}.$$

Dokaz. Naj bo $z_k = x_k + iy_k$ za vsak $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ in $\xi_k = c_k + id_k$ za vsak $k \in \{1, \ldots, n\}$, kjer so $x_k, y_k, c_k, d_k \in \mathbb{R}$. Ker je $f = u + iv$, dobimo

$$\begin{aligned}
\sigma_\Delta(f) &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (u(c_k, d_k) + iv(c_k, d_k))\, ((x_k - x_{k-1}) + i(y_k - y_{k-1})) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (u(c_k, d_k)(x_k - x_{k-1}) - v(c_k, d_k)(y_k - y_{k-1})) \\
&+ i \sum_{k=1}^{n} (v(c_k, d_k)(x_k - x_{k-1}) + u(c_k, d_k)(y_k - y_{k-1})) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (u(c_k, d_k), -v(c_k, d_k)) \cdot (x_k - x_{k-1}, y_k - y_{k-1}) \\
&+ i \sum_{k=1}^{n} (v(c_k, d_k), u(c_k, d_k)) \cdot (x_k - x_{k-1}, y_k - y_{k-1}).
\end{aligned}$$

Ko na obeh straneh dobljene enakosti pošljemo ρ_Δ proti 0, dobimo enakost

$$\int_{\mathcal{K}} f(z)\, dz = \int_{\mathcal{K}} (u, -v)\, d\vec{r} + i \int_{\mathcal{K}} (v, u)\, d\vec{r}.$$

$\square$

Trditev 4.3 *Za integriranje kompleksnih funkcij $f, g : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ veljajo naslednje lastnosti (ob pogoju, da vsi navedeni integrali obstajajo):*

(1) Za poljubna $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ je $\displaystyle\int_{\mathcal{K}} (\alpha f + \beta g)\, dz = \alpha \int_{\mathcal{K}} f\, dz + \beta \int_{\mathcal{K}} g\, dz.$

(2) $\displaystyle\int_{-\mathcal{K}} f\,dz = -\int_{\mathcal{K}} f\,dz$, *kjer je* $-\mathcal{K}$ *krivulja, ki ima nasprotno orientacijo kot* $\mathcal{K}$.

(3) $\displaystyle\int_{\mathcal{K}_1\cup\mathcal{K}_2} f\,dz = \int_{\mathcal{K}_1} f\,dz + \int_{\mathcal{K}_2} f\,dz$, *kjer krivulja* $\mathcal{K}_1$ *poteka od točke* a *do točke* b, *krivulja* $\mathcal{K}_2$ *pa od točke* b *do točke* c *(začetna točka krivulje* $\mathcal{K}_2$ *je torej enaka končni točki krivulje* $\mathcal{K}_1$*).*

(4) $\displaystyle\int_{\mathcal{K}} 1\,dz = b - a$, *kjer krivulja* $\mathcal{K}$ *poteka od točke* a *do točke* b.

(5) $\displaystyle\left|\int_{\mathcal{K}} f\,dz\right| \leq \int_{\mathcal{K}} |f|\,ds$, *pri čemer drugi integral predstavlja krivuljni integral realne skalarne funkcije.*

Dokaz. V vseh primerih bomo pokazali zveze med ustreznimi vsotami po množici delitve dane krivulje, zapisane rezultate pa nato dobimo, ko pošljemo ρ_Δ proti 0. Naj bo torej $\Delta = \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ množica delitve krivulje $\mathcal{K}$, točka ξ_k pa naj na krivulji $\mathcal{K}$ leži med z_{k-1} in z_k pri poljubnem $k \in \{1, \ldots, n\}$.

(1) Opazimo, da je

$$\begin{aligned}
\sigma_\Delta(\alpha f + \beta g) &= \sum_{k=1}^{n} (\alpha f + \beta g)(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k))(z_k - z_{k-1}) \\
&= \alpha \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) + \beta \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) \\
&= \alpha \cdot \sigma_\Delta(f) + \beta \cdot \sigma_\Delta(g),
\end{aligned}$$

od koder dobimo želeni rezultat.

(2) Za potrebe te točke označimo s $\sigma_\Delta(f;\mathcal{K})$ ustrezno vsoto za krivuljo $\mathcal{K}$, s $\sigma_\Delta(f;-\mathcal{K})$ pa ustrezno vsoto za krivuljo $-\mathcal{K}$. Potem velja

$$\sigma_\Delta(f;-\mathcal{K}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_{k-1} - z_k) = -\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) = -\sigma_\Delta(f;\mathcal{K}),$$

kar smo želeli pokazati.

(3) Naj bo $\Delta = \{z_0, z_1, \ldots, z_{i-1}, z_i, z_{i+1}, \ldots, z_n\}$ množica delitve krivulje $\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, kjer je $a = z_0$, $b = z_i$ in $c = z_n$. Potem je $\Delta_1 = \{z_0, z_1, \ldots, z_i\}$ množica delitve krivulje

$\mathcal{K}_1$ in $\Delta_2 = \{z_i, z_{i+1}, \ldots, z_n\}$ množica delitve krivulje $\mathcal{K}_2$. Očitno velja

$$\begin{aligned} \sigma_\Delta(f) &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{i} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) + \sum_{k=i+1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) \\ &= \sigma_{\Delta_1}(f) + \sigma_{\Delta_2}(f). \end{aligned}$$

(4) Opazimo, da je

$$\sigma_\Delta(1) = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot (z_k - z_{k-1}) = z_n - z_0 = b - a,$$

kar zaključuje dokaz točke (4).

(5) Očitno velja

$$|\sigma_\Delta(f)| = \left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)| \cdot |z_k - z_{k-1}| = \sigma_\Delta(|f|),$$

kar implicira rezultat zadnje točke.

$\square$

Izrek 4.4 *Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ integrabilna funkcija po krivulji $\mathcal{K} \subseteq D$, ki jo lahko podamo z odeskoma zvezno odvedljivo parametrizacijo $z : [a, b] \to \mathcal{K}$. Potem velja*

$$\int_{\mathcal{K}} f(z)\, dz = \int_{a}^{b} f(z(t))\dot{z}(t)\, dt.$$

Dokaz. Naj bo $z(t) = x(t) + iy(t)$ za vsak $t \in [a, b]$, pri čemer sta x, y realni funkciji. Vemo, da velja

$$\int_{\mathcal{K}} f(z)\, dz = \int_{\mathcal{K}} (u, -v)\, d\vec{r} + i \int_{\mathcal{K}} (v, u)\, d\vec{r}.$$

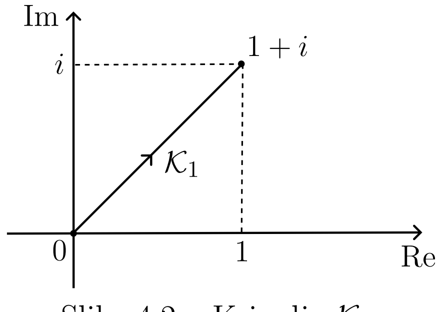
Po izreku o računanju krivuljnega integrala realne vektorske funkcije sledi

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{K}} f(z)\,dz &= \int\limits_a^b (u(x(t),y(t)), -v(x(t),y(t))) \cdot (\dot{x}(t),\dot{y}(t))\,dt \\
&+ i\int\limits_a^b (v(x(t),y(t)), u(x(t),y(t))) \cdot (\dot{x}(t),\dot{y}(t))\,dt \\
&= \int\limits_a^b (u(x(t),y(t))\dot{x}(t) - v(x(t),y(t))\dot{y}(t))\,dt \\
&+ i\int\limits_a^b (v(x(t),y(t))\dot{x}(t) + u(x(t),y(t))\dot{y}(t))\,dt \\
&= \int\limits_a^b \big(u(x(t),y(t))\,(\dot{x}(t)+i\dot{y}(t)) + iv(x(t),y(t))\,(\dot{x}(t)+i\dot{y}(t))\,\big)dt \\
&= \int\limits_a^b \big(u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t))\big)\big(\dot{x}(t)+i\dot{y}(t)\big)dt \\
&= \int\limits_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\,dt,
\end{aligned}
$$

kar pomeni, da je dokaz zaključen. □

Oglejmo si nekaj primerov uporabe zadnjega izreka.

Primer 4.5 (1) Izračunajmo integral $\int\limits_{\mathcal{K}_1} \mathrm{Re}(z)\,dz$, kjer je $\mathcal{K}_1$ daljica od točke 0 do točke $1+i$ (slika 4.2).

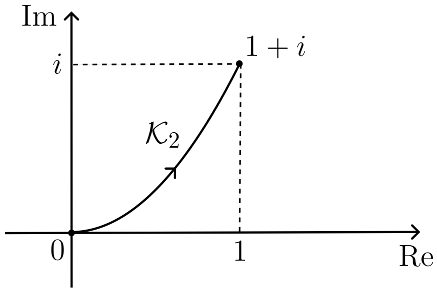


Slika 4.2: Krivulja $\mathcal{K}_1$.

Opazimo, da je $z : [0,1] \to \mathcal{K}_1$, kjer je $z(t) = t + it$ za vsak $t \in [0,1]$, parametrizacija krivulje $\mathcal{K}_1$. Očitno velja $\dot{z}(t) = 1+i$, zato dobimo

$$\int\limits_{\mathcal{K}_1} \mathrm{Re}(z)\,dz = \int\limits_0^1 \mathrm{Re}(t+it)\dot{z}(t)\,dt = \int\limits_0^1 t(1+i)\,dt = (1+i)\left(\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

(2) Izračunajmo integral $\int\limits_{\mathcal{K}_2} \operatorname{Re}(z)\, dz$, kjer je krivulja $\mathcal{K}_2$ podana s parametrizacijo $z : [0,1] \to \mathcal{K}_2$, $z(t) = t + it^2$ za vsak $t \in [0,1]$ (slika 4.3).

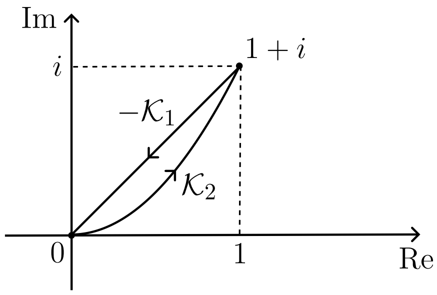


Slika 4.3: Krivulja $\mathcal{K}_2$.

Opazimo, da je $\dot{z}(t) = 1 + 2it$ za vsak $t \in [0,1]$. Tako dobimo

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{K}_2} \operatorname{Re}(z)\, dz &= \int\limits_0^1 \operatorname{Re}(t + it^2)(1 + 2it)\, dt = \int\limits_0^1 t(1 + 2it)\, dt \\
&= \int\limits_0^1 t\, dt + i \int\limits_0^1 2t^2\, dt = \left(\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 + i\left(\frac{2t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{3}i.
\end{aligned}$$

(3) Izračunajmo integral $\int\limits_{\mathcal{K}_2 \cup (-\mathcal{K}_1)} \operatorname{Re}(z)\, dz$, kjer sta $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ krivulji iz prejšnjih dveh primerov (slika 4.4).

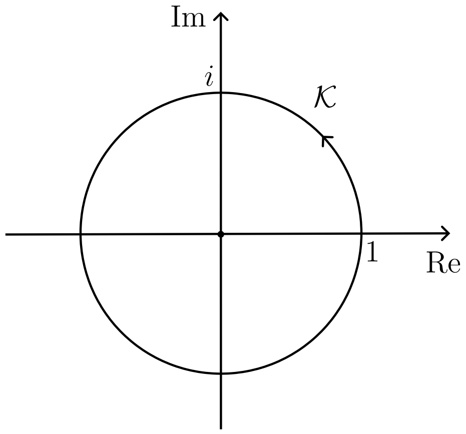


Slika 4.4: Krivulja $\mathcal{K}_2 \cup (-\mathcal{K}_1)$.

Z uporabo točk (3) in (2) trditve 4.3 dobimo

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{K}_2 \cup (-\mathcal{K}_1)} \operatorname{Re}(z)\, dz &= \int\limits_{\mathcal{K}_2} \operatorname{Re}(z)\, dz + \int\limits_{-\mathcal{K}_1} \operatorname{Re}(z)\, dz \\
&= \int\limits_{\mathcal{K}_2} \operatorname{Re}(z)\, dz - \int\limits_{\mathcal{K}_1} \operatorname{Re}(z)\, dz \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}i\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{i}{6}.
\end{aligned}$$

(4) Izračunajmo integral $\int\limits_{\mathcal{K}} z^2\,dz$, kjer je $\mathcal{K}$ pozitivno orientirana krožnica, podana z enačbo $|z| = 1$ (slika 4.5).

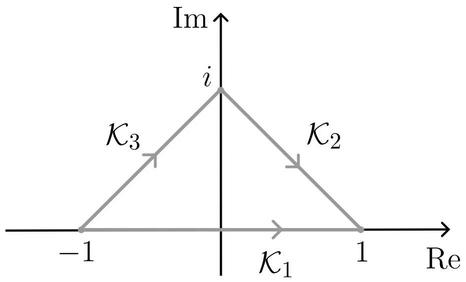


Slika 4.5: Krivulja $\mathcal{K}$.

Opazimo, da je $z : [0, 2\pi] \to \mathcal{K}$, kjer je $z(t) = \cos t + i \sin t = e^{it}$ za vsak $t \in [0, 2\pi]$, parametrizacija krivulje $\mathcal{K}$. Očitno velja $\dot{z}(t) = ie^{it}$ za vsak $t \in [0, 2\pi]$, zato dobimo

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{K}} z^2\,dz &= \int\limits_0^{2\pi} \left(e^{it}\right)^2 ie^{it}\,dt = i\int\limits_0^{2\pi} e^{2it}e^{it}\,dt = i\int\limits_0^{2\pi} e^{3it}\,dt \\
&= i \cdot \frac{1}{3i}\left(e^{3it}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{3}\left(e^{6\pi i} - 1\right) = \frac{1}{3}(1-1) = 0.
\end{aligned}$$

(5) Naj bo $\mathcal{K}_1$ daljica od točke -1 do točke 1, $\mathcal{K}_2$ daljica od i do 1 ter $\mathcal{K}_3$ daljica od -1 do i. Krivulja $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup (-\mathcal{K}_2) \cup (-\mathcal{K}_3)$ je torej pozitivno orientiran rob trikotnika z oglišči -1, 1 in i (slika 4.6).



Slika 4.6: Krivulja $\mathcal{K}$.

Naj bo $z_1 : [-1, 1] \to \mathcal{K}_1$, $z_1(t) = t$ parametrizacija krivulje $\mathcal{K}_1$, $z_2 : [0, 1] \to \mathcal{K}_2$, $z_2(t) = t+i(1-t)$, parametrizacija krivulje $\mathcal{K}_2$ in $z_3 : [-1, 0] \to \mathcal{K}_3$, $z_3(t) = t+i(1+t)$, parametrizacija krivulje $\mathcal{K}_3$. Izračunajmo integral

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{K}} z\,dz &= \int_{\mathcal{K}_1} z\,dz + \int_{-\mathcal{K}_2} z\,dz + \int_{-\mathcal{K}_3} z\,dz \\
&= \int_{\mathcal{K}_1} z\,dz - \int_{\mathcal{K}_2} z\,dz - \int_{\mathcal{K}_3} z\,dz \\
&= \int_{-1}^{1} t\cdot 1\,dt - \int_{0}^{1} (t+i(1-t))(1-i)\,dt - \int_{-1}^{0} (t+i(1+t))(1+i)\,dt \\
&= \left(\frac{t^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1} - (1-i)\left(\frac{t^2}{2} - i\frac{(1-t)^2}{2}\right)\Big|_{0}^{1} - (1+i)\left(\frac{t^2}{2} + i\frac{(1+t)^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - (1-i)\frac{1}{2}(1+i) - (1+i)\frac{1}{2}(i-1) \\
&= -(1-i)\frac{1}{2}(1+i) + (1+i)\frac{1}{2}(1-i) = 0.
\end{aligned}$$

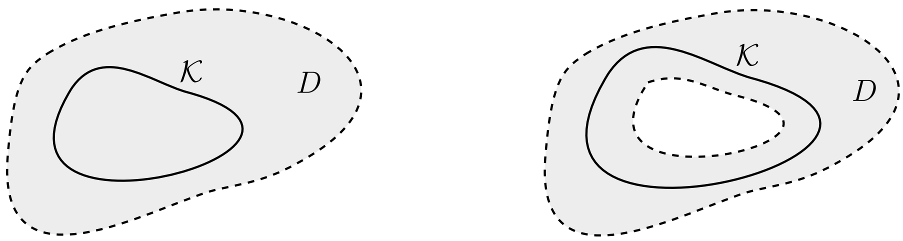
(6) Izračunajmo integral $\int_{\mathcal{K}} \frac{1}{z}\,dz$, kjer je $\mathcal{K}$ pozitivno orientirana krožnica, podana z enačbo $|z| = 1$. Ponovno je $z : [0, 2\pi] \to \mathcal{K}$, kjer je $z(t) = \cos t + i \sin t = e^{it}$, parametrizacija krivulje $\mathcal{K}$. Vemo, da je $\dot{z}(t) = ie^{it}$, zato dobimo

$$\int_{\mathcal{K}} \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \cdot ie^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi i.$$

Izrek 4.6 (Jordanov izrek) *Vsaka enostavno sklenjena krivulja v ravnini slednjo razdeli na dve komponenti – omejeno in neomejeno. Omejeni komponenti pravimo **notranje območje** te krivulje.*

Definicija 4.7 *Območje $D \subseteq \mathbb{C}$ je **enostavno povezano**, če za vsako enostavno sklenjeno krivuljo $\mathcal{K} \subseteq D$ tudi notranje območje krivulje $\mathcal{K}$ leži v D.*

Za ponazoritev zgornje definicije glejte sliko 4.7.



Slika 4.7: Enostavno povezano območje (levo) in območje, ki ni enostavno povezano (desno).

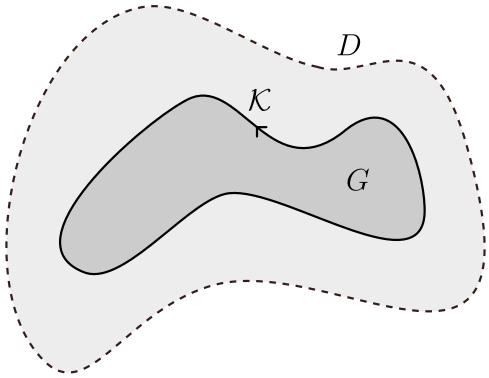
Naj bo $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ in $f : D \to \mathbb{C}$ funkcija, podana s predpisom $f(z) = \frac{1}{z}$. Opazimo, da območje D ni enostavno povezano, saj na primer krožnica $\mathcal{K}$ z enačbo $|z| = 1$ obkroži točko $z_0 = 0$, ki ne leži v območju D.
Sklep. Enostavno povezano območje je takšno območje, ki nima "lukenj".

4.2 Cauchyjev izrek

Najprej se spomnimo Greenove formule, ki povezuje krivuljni integral vektorske funkcije z dvojnim integralom.

Izrek 4.8 (Greenova formula) *Naj bo $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^2$ pozitivno orientirana, enostavno sklenjena krivulja z odsekoma zvezno odvedljivo parametrizacijo in $G \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^2$ območje, ki ga omejuje krivulja $\mathcal{K}$ (glejte sliko 4.8). Naj imata funkciji $u, v : D \to \mathbb{R}$ zvezne parcialne odvode. Potem velja*

$$\int_{\mathcal{K}} (u(x,y), v(x,y))\, d\vec{r} = \iint_{G} \big(v_x(x,y) - u_y(x,y)\big) dxdy.$$



Slika 4.8: Območje $G \subseteq D$, ki ga omejuje krivulja $\mathcal{K}$.

Sedaj zapišimo Cauchyjev izrek, ki ga bomo na tem mestu dokazali samo v posebnem primeru, bolj splošen dokaz pa sledi kasneje.

Izrek 4.9 (Cauchyjev izrek) *Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ enostavno povezano območje, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija in $\mathcal{K} \subseteq D$ enostavno sklenjena krivulja z odsekoma zvezno odvedljivo parametrizacijo. Tedaj je*

$$\int_{\mathcal{K}} f(z)\, dz = 0.$$

Dokaz. Na tem mestu bomo pokazali dokaz izreka ob dodatni predpostavki, da je funkcija f' zvezna. Dokaz brez te predpostavke sledi kasneje.

Naj bo $f = u + iv$, kjer sta u, v realni funkciji dveh spremenljivk. Ker je f' zvezna in velja

$$f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y,$$

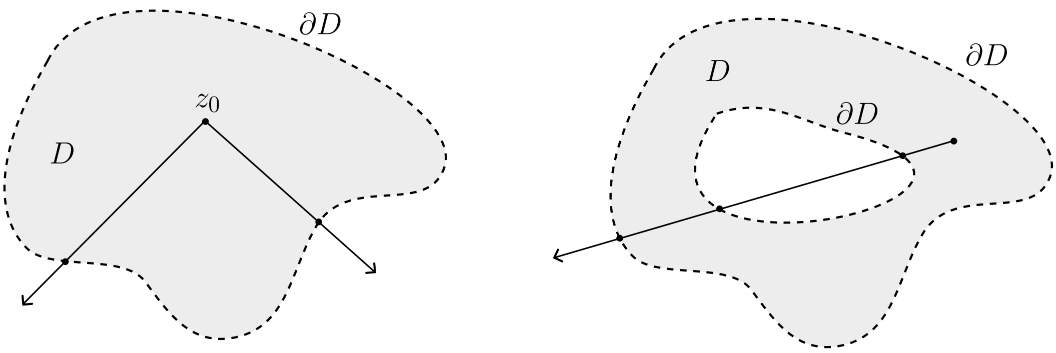
morajo biti zvezne tudi funkcije u_x, u_y, v_x in v_y. Naj bo G območje, ki ga omejuje krivulja

$\mathcal{K}$ (slika 4.8). Z uporabo izrekov 4.2 in 4.8 ter Cauchy-Riemannovih formul dobimo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{K}} f(z)\,dz &= \int_{\mathcal{K}} (u,-v)\,d\vec{r} + i\int_{\mathcal{K}} (v,u)\,d\vec{r} \\
&= \iint_G \big(-v_x - u_y\big)dxdy + \iint_G \big(u_x - v_y\big)dxdy \\
&= \iint_G \big(u_y - u_y\big)dxdy + \iint_G \big(v_y - v_y\big)dxdy \\
&= 0 + 0 = 0,
\end{aligned}$$

kar zaključi dokaz. □

Definicija 4.10 *Območje $D \subseteq \mathbb{C}$ je **zvezdasto**, če je rob ∂D krivulja z odsekoma zvezno odvedljivo parametrizacijo in obstaja taka točka $z_0 \in D$, da vsak poltrak z vrhom v z_0 seka ∂D natanko enkrat (slika 4.9).*



Slika 4.9: Zvezdasto območje (levo) in območje, ki ni zvezdasto (desno).

Opomba 4.11 *V primeru zvezdastega območja D lahko rob ∂D parametriziramo na naslednji način:*

$$z : [0, 2\pi] \to \partial D, \quad z(t) = z_0 + \mu(t)e^{it} = z_0 + h(t),$$

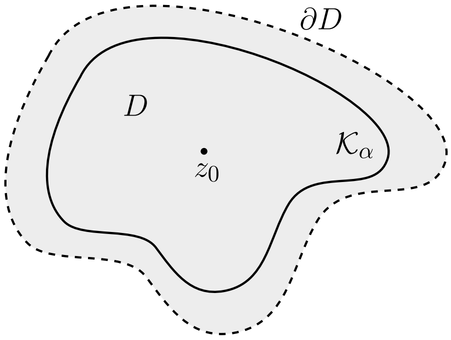
kjer je z_0 točka iz definicije zvezdastega območja, $\mu(t)$ razdalja med z_0 in ustrezno točko na robu in $h(t) = \mu(t)e^{it}$ za vsak $t \in [0, 2\pi]$.

Izrek 4.12 (posplošeni Cauchyjev izrek) *Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ omejeno, enostavno povezano območje, $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ holomorfna na D in zvezna na $\overline{D}$ (zaprtje množice D) ter naj ima ∂D odsekoma zvezno odvedljivo parametrizacijo. Tedaj je*

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 0.$$

Dokaz. Denimo, da je D zvezdasto območje. Naj bo $z : [0, 2\pi] \to \partial D$ s predpisom

$$z(t) = z_0 + h(t)$$



Slika 4.10: Zvezdasto območje D in krivulja $\mathcal{K}_\alpha$.

parametrizacija roba ∂D. Potem je $z_1 : [0, 2\pi] \to \mathcal{K}_\alpha$ s predpisom

$$z(t) = z_0 + \alpha h(t)$$

parametrizacija neke krivulje $\mathcal{K}_\alpha \subseteq D$, kjer je $\alpha \in (0, 1)$; glejte sliko 4.10.

Po Cauchyjevem izreku velja

$$\int_{\mathcal{K}_\alpha} f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} f(z_0 + \alpha h(t))\alpha h'(t)\, dt = 0,$$

od koder dobimo

$$\int_0^{2\pi} f(z_0 + \alpha h(t))h'(t)\, dt = 0.$$

Ker sta funkciji h in h' zvezni na zaprtem intervalu $[0, 2\pi]$, sta na tem intervalu omejeni. To pomeni, da obstajata $M, N > 0$, tako da za vsak $t \in [0, 2\pi]$ velja

$$|h(t)| \leq M \quad \text{in} \quad |h'(t)| \leq N.$$

Ker je množica D omejena, je $\overline{D}$ zaprta in omejena, zato je množica $\overline{D}$ kompaktna v $\mathbb{C}$. Funkcija f je zvezna na kompaktni množici $\overline{D}$, zato je na tej množici tudi enakomerno zvezna. To pomeni:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z, w \in \overline{D} : |z - w| < \delta \implies |f(z) - f(w)| < \varepsilon.$$

Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Ker zgornje velja za vsak $\varepsilon > 0$, velja tudi za $\frac{\varepsilon}{2\pi N}$:

$$\exists \delta > 0, \forall z, w \in \overline{D} : |z - w| < \delta \implies |f(z) - f(w)| < \frac{\varepsilon}{2\pi N}.$$

Če označimo $z = z_0 + h(t)$ in $w = z_0 + \alpha h(t)$, dobimo

$$|z - w| = |z_0 + h(t) - (z_0 + \alpha h(t))| = |(1 - \alpha)h(t)| = (1 - \alpha)|h(t)| \leq (1 - \alpha)M.$$

Sedaj izberimo $\alpha \in (0, 1)$ tako, da bo $(1 - \alpha)M < \delta$. Iz pogoja enakomerne zveznosti za točki $z = z_0 + h(t)$ in $w = z_0 + \alpha h(t)$ sledi

$$|f(z_0 + h(t)) - f(z_0 + \alpha h(t))| < \frac{\varepsilon}{2\pi N}.$$

Ocenimo absolutno vrednost integrala $\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz$:

$$\begin{aligned}
\left|\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz\right| &= \left|\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz - 0\right| \\
&= \left|\int\limits_{0}^{2\pi} f(z_0+h(t))h'(t)\,dt - \int\limits_{0}^{2\pi} f(z_0+\alpha h(t))h'(t)\,dt\right| \\
&= \left|\int\limits_{0}^{2\pi} \big(f(z_0+h(t)) - f(z_0+\alpha h(t))\big)h'(t)\,dt\right| \\
&\leq \int\limits_{0}^{2\pi} |f(z_0+h(t)) - f(z_0+\alpha h(t))|\cdot|h'(t)|\;dt \\
&\leq \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\varepsilon}{2\pi N} N\,dt = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} dt = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Velja torej

$$\left|\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz\right| < \varepsilon$$

za poljuben $\varepsilon > 0$, zato mora biti

$$\left|\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz\right| = 0 \quad \text{in posledično} \quad \int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = 0.$$

Naj bo sedaj D poljubno območje, ki zadošča pogojem izreka. Potem ga lahko razdelimo na zvezdasta območja, katerih robovi so krivulje $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots, \mathcal{K}_n$ (slika 4.11), tako da velja

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = \int\limits_{\mathcal{K}_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\mathcal{K}_2} f(z)\,dz + \cdots + \int\limits_{\mathcal{K}_n} f(z)\,dz = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0.$$

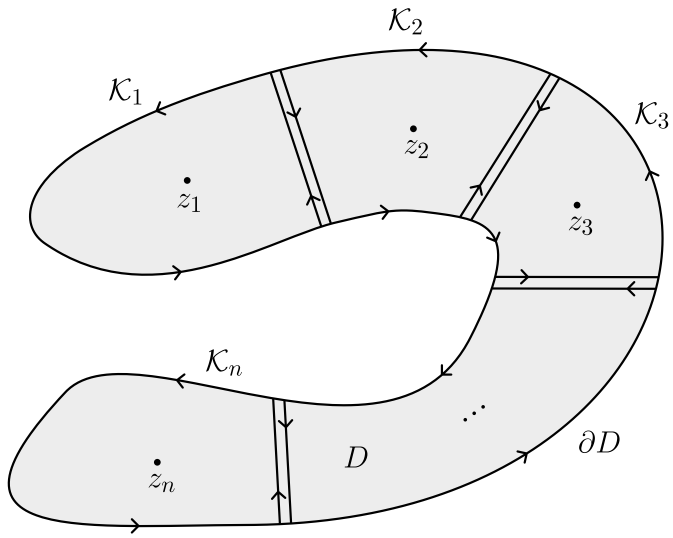
□

4.3 Posledice Cauchyjevega izreka

4.3.1 D je enostavno povezano območje

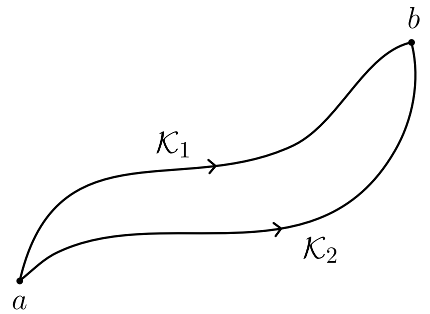
Izrek 4.13 *Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ enostavno povezano območje, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija in $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \subseteq D$ krivulji z začetno točko $a \in \mathbb{C}$ in končno točko $b \in \mathbb{C}$, ki imata odsekoma zvezno odvedljivi parametrizaciji. Potem velja*

$$\int\limits_{\mathcal{K}_1} f(z)\,dz = \int\limits_{\mathcal{K}_2} f(z)\,dz.$$



Slika 4.11: Delitev območja D na zvezdasta območja.

Dokaz. Brez izgube za splošnost predpostavimo, da sta točki a in b edini skupni točki krivulj $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$; glejte sliko 4.12 (če imata krivulji več skupnih točk, dokaz razdelimo na več delov).



Slika 4.12: Krivulji $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$.

Opazimo, da je $\mathcal{K}_1 \cup (-\mathcal{K}_2)$ enostavno sklenjena krivulja, ki zadošča pogojem Cauchy-jevega izreka (izrek 4.9). Sledi torej

$$0 = \int\limits_{\mathcal{K}_1 \cup (-\mathcal{K}_2)} f(z)\,dz = \int\limits_{\mathcal{K}_1} f(z)\,dz + \int\limits_{-\mathcal{K}_2} f(z)\,dz = \int\limits_{\mathcal{K}_1} f(z)\,dz - \int\limits_{\mathcal{K}_2} f(z)\,dz,$$

od koder dobimo

$$\int\limits_{\mathcal{K}_1} f(z)\,dz = \int\limits_{\mathcal{K}_2} f(z)\,dz.$$

$\square$

Če je $D \subseteq \mathbb{C}$ enostavno povezano območje in $a, b \in D$, potem je kompleksni integral po neki krivulji od a do b vedno enak.

Zato definirajmo funkcijo $F : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s predpisom

$$F(z) = \int\limits_a^z f(\xi)\,d\xi,$$

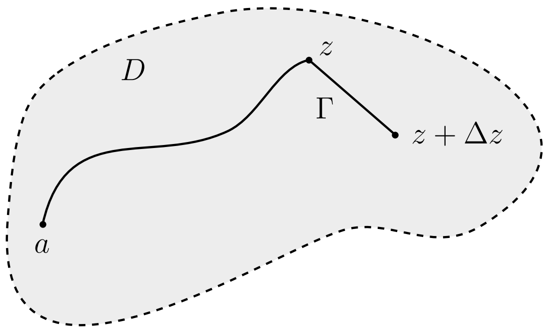
kjer $\int\limits_a^z$ predstavlja kompleksni integral po neki krivulji od točke a do točke z na enostavno povezanem območju D.

Izrek 4.14 *Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ enostavno povezano območje, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija in $a \in D$. Potem je $F : D \to \mathbb{C}$,*

$$F(z) = \int\limits_a^z f(\xi)\, d\xi,$$

holomorfna funkcija in za vsak $z \in D$ velja $F'(z) = f(z)$ (F je torej primitivna funkcija funkcije f na območju D).

Dokaz. Naj bo Γ daljica od točke z do točke $z+\Delta z$, katere parametrizacija $\xi : [0,1] \to \Gamma$ je podana s predpisom $\xi(t) = (1-t)z + t(z+\Delta z) = z + t\Delta z$ (slika 4.13). Potem očitno velja $\xi'(t) = \Delta z$.



Slika 4.13: Daljica Γ od točke z do točke $z + \Delta z$.

Opazimo, da velja

$$\begin{aligned}
F(z+\Delta z) - F(z) &= \int\limits_a^{z+\Delta z} f(\xi)\, d\xi - \int\limits_a^z f(\xi)\, d\xi \\
&= \int\limits_a^z f(\xi)\, d\xi + \int\limits_\Gamma f(\xi)\, d\xi - \int\limits_a^z f(\xi)\, d\xi \\
&= \int\limits_\Gamma f(\xi)\, d\xi = \int\limits_0^1 f(z+t\Delta z)\Delta z\, dt \\
&= \Delta z \int\limits_0^1 f(z+t\Delta z)\, dt.
\end{aligned}$$

Po predpostavki je funkcija f holomorfna v poljubni točki $z \in D$, zato je v tej točki tudi zvezna. To pomeni:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall u \in D : |u - z| < \delta \implies |f(u) - f(z)| < \varepsilon.$$

Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben in naj bo $|\Delta z| < \delta$. Za točko $u = z + t\Delta z$, kjer je $t \in [0,1]$, potem velja

$$|u - z| = |z + t\Delta z - z| = |t\Delta z| = |t| \cdot |\Delta z| \leq |\Delta z| < \delta.$$

Iz pogoja zveznosti zato sledi $|f(z + t\Delta z) - f(z)| < \varepsilon$. Za $0 < |\Delta z| < \delta$ ocenimo razliko:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| &= \left|\int_0^1 f(z + t\Delta z)\,dt - f(z)\int_0^1 dt\right| \\
&= \left|\int_0^1 f(z + t\Delta z)\,dt - \int_0^1 f(z)\,dt\right| \\
&= \left|\int_0^1 \big(f(z + t\Delta z) - f(z)\big)\,dt\right| \\
&\leq \int_0^1 \big|f(z + t\Delta z) - f(z)\big| dt \\
&< \int_0^1 \varepsilon\,dt = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ker zgornja ocena velja za vsak $\varepsilon > 0$, sledi

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z).$$

Ker smo $z \in D$ izbrali poljubno, je $F'(z) = f(z)$ za vsak $z \in D$. $\square$

Izrek 4.15 *Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ enostavno povezano območje, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija, G primitivna funkcija funkcije f (to pomeni $G' = f$) in $\mathcal{K} \subseteq D$ poljubna enostavna krivulja z odsekoma zvezno odvedljivo parametrizacijo, pri čemer je $a \in D$ začetna točka in $b \in D$ končna točka krivulje $\mathcal{K}$. Potem velja*

$$\int_{\mathcal{K}} f(z)\,dz = G(b) - G(a).$$

Dokaz. Po prejšnjem izreku je funkcija $F : D \to \mathbb{C}$,

$$F(z) = \int_a^z f(\xi)\,d\xi,$$

primitivna funkcija funkcije f (torej $F' = f$). Naj bo $\varphi : D \to \mathbb{C}$ funkcija s predpisom

$$\varphi(z) = G(z) - F(z).$$

Očitno je φ holomorfna funkcija in velja

$$\varphi'(z) = G'(z) - F'(z) = f(z) - f(z) = 0.$$

Če je $\varphi = u + iv$, kjer sta u, v realni funkciji dveh spremenljivk, potem mora veljati

$$\varphi' = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0 = 0 + i \cdot 0,$$

kar pomeni, da je $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$. Funkciji u in v morata torej biti realni konstanti: $u = C_1 \in \mathbb{R}$ in $v = C_2 \in \mathbb{R}$. Če označimo $C = C_1 + iC_2$, dobimo

$$\varphi = C_1 + iC_2 = C \in \mathbb{C},$$

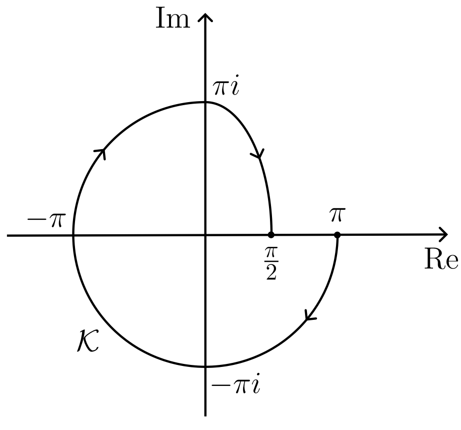
zato za vsak $z \in D$ velja $G(z) = F(z) + C$. Sledi

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= (F(b) + C) - (F(a) + C) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(\xi)\, d\xi - \int_a^a f(\xi)\, d\xi \\ &= \int_a^b f(\xi)\, d\xi = \int_{\mathcal{K}} f(z)\, dz, \end{aligned}$$

s čimer je dokaz zaključen. □

Primer 4.16 Funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ naj bo podana s predpisom $f(z) = \cos z$. Potem je funkcija $G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, podana s predpisom $G(z) = \sin z$, primitivna funkcija funkcije f. Naj bo $\mathcal{K}$ krivulja, prikazana na sliki 4.14. Ker je $\mathbb{C}$ enostavno povezano območje in f holomorfna funkcija, po izreku 4.15 sledi

$$\int_{\mathcal{K}} \cos z\, dz = G\left(\frac{\pi}{2}\right) - G(\pi) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(\pi) = 1 - 0 = 1.$$



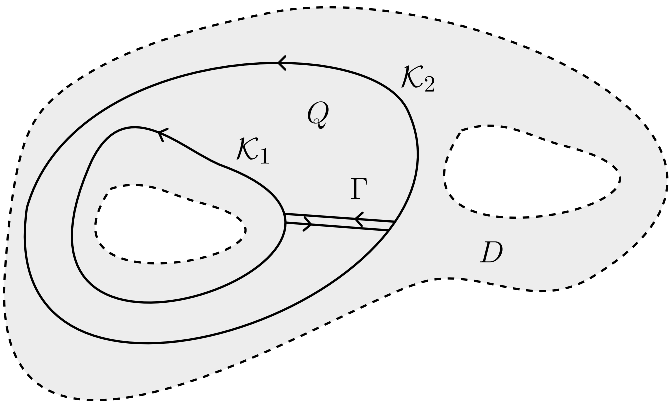
Slika 4.14: Krivulja $\mathcal{K}$.

4.3.2 D ni enostavno povezano območje

Izrek 4.17 *Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ poljubno območje in $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \subseteq D$ dve enostavno sklenjeni krivulji z odsekoma zvezno odvedljivima parametrizacijama, za kateri velja, da ena leži znotraj druge, območje med njima pa leži v množici D. Če je $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija, potem velja*

$$\int_{\mathcal{K}_1} f(z)\,dz = \int_{\mathcal{K}_2} f(z)\,dz.$$

Dokaz. Območje med krivuljama $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ prerežemo z daljico Γ, ki tako postane enostavno povezano območje: označimo ga s Q (slika 4.15).



Slika 4.15: Krivulji $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ ter območje Q.

Ker je $Q \subseteq D$, je funkcija f holomorfna tudi na Q, rob območja Q pa lahko zapišemo kot

$$\partial Q = \mathcal{K}_1 \cup \Gamma \cup (-\mathcal{K}_2) \cup (-\Gamma).$$

Po posplošenem Cauchyjevem izreku (izrek 4.12) velja

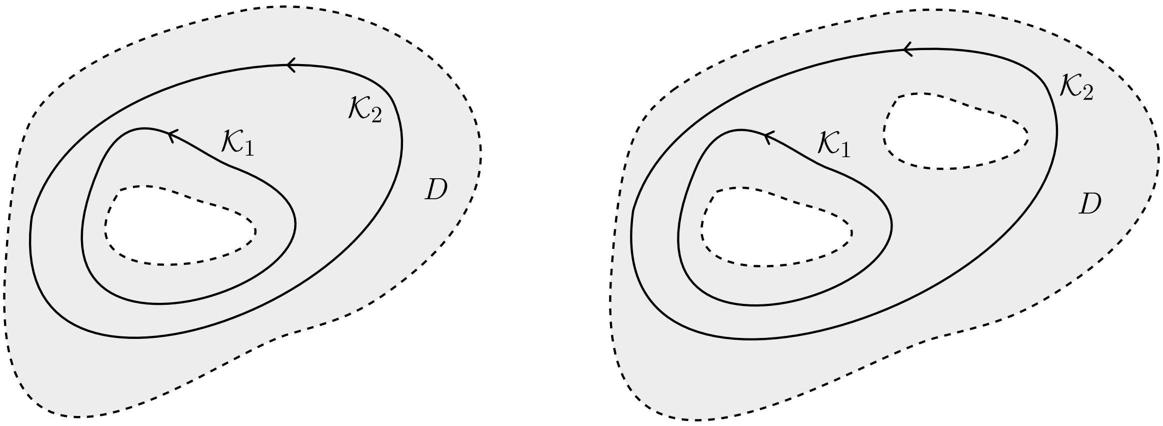
$$\begin{aligned}
0 = \int_{\partial Q} f(z)\,dz &= \int_{\mathcal{K}_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma} f(z)\,dz + \int_{-\mathcal{K}_2} f(z)\,dz + \int_{-\Gamma} f(z)\,dz \\
&= \int_{\mathcal{K}_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma} f(z)\,dz - \int_{\mathcal{K}_2} f(z)\,dz - \int_{\Gamma} f(z)\,dz \\
&= \int_{\mathcal{K}_1} f(z)\,dz - \int_{\mathcal{K}_2} f(z)\,dz,
\end{aligned}$$

od koder sledi

$$\int_{\mathcal{K}_1} f(z)\,dz = \int_{\mathcal{K}_2} f(z)\,dz.$$

$\square$

Definicija 4.18 *Enostavno sklenjeni krivulji $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ sta* ***homotopni*** *glede na območje D, če obstaja zvezna transformacija, s katero krivuljo $\mathcal{K}_1$ znotraj območja D deformiramo v krivuljo $\mathcal{K}_2$ (slika 4.16).*

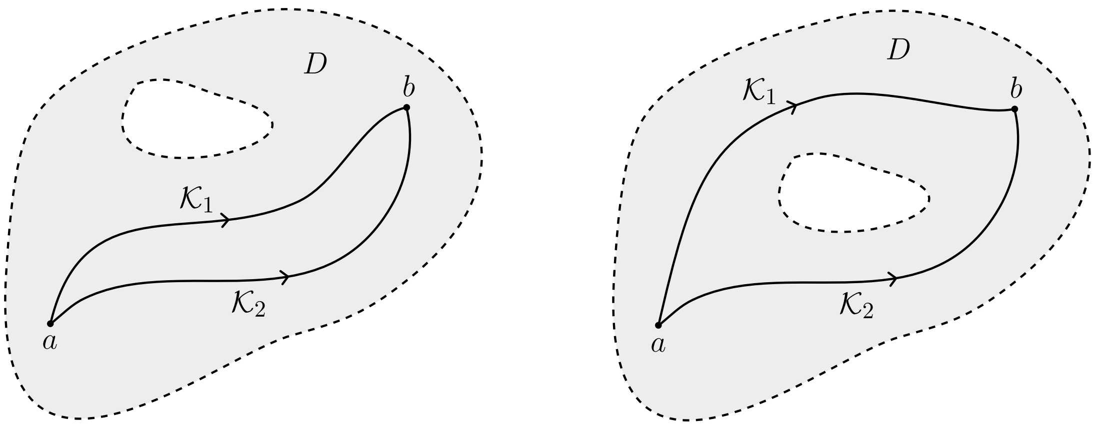


Slika 4.16: Homotopni krivulji (levo) in krivulji, ki nista homotopni (desno).

Opomba 4.19 *Če sta enostavno sklenjeni krivulji $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$, ki imata odsekoma zvezno odvedljivi parametrizaciji, homotopni glede na območje D in je $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija, potem velja*

$$\int_{\mathcal{K}_1} f(z)\, dz = \int_{\mathcal{K}_2} f(z)\, dz.$$

Definicija 4.20 *Nesklenjeni enostavni krivulji $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ z začetno točko $a \in \mathbb{C}$ in končno točko $b \in \mathbb{C}$ sta* ***homotopni*** *glede na območje D, če obstaja zvezna transformacija, ki v vsakem trenutku ohranja točki a in b ter krivuljo $\mathcal{K}_1$ deformira v krivuljo $\mathcal{K}_2$ znotraj območja D (slika 4.17).*



Slika 4.17: Homotopni krivulji (levo) in krivulji, ki nista homotopni (desno).

Opomba 4.21 *Integrali holomorfne funkcije po homotopnih krivuljah z odsekoma zvezno odvedljivimi parametrizacijami, ki imajo začetno točko a in končno točko b, so enaki.*

4.4 Integralska upodobitev holomorfnih funkcij

Izrek 4.22 *Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ enostavno povezano območje in $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Potem za vsak $z \in D$ in vsako pozitivno orientirano, enostavno sklenjeno krivuljo*

$\mathcal{K} \subseteq D$ z odsekoma zvezno odvedljivo parametrizacijo, ki obkroži točko $z \in D$, velja

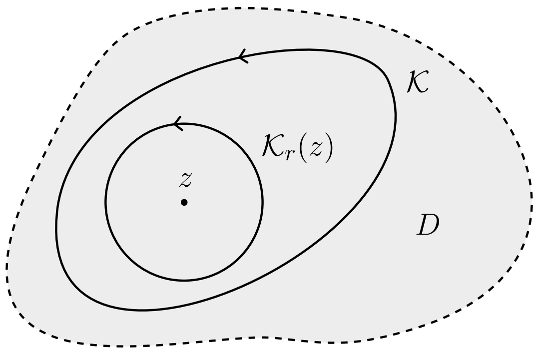
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi.$$

Opomba 4.23 *Opazimo, da je funkcija $g : D \setminus \{z\} \to \mathbb{C}$, $g(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi - z}$, holomorfna na $D \setminus \{z\}$, zato je na tem območju tudi zvezna. Integral*

$$\int_{\mathcal{K}} g(\xi)\, d\xi$$

iz zgornjega izreka torej obstaja.

Dokaz. Krivulja $\mathcal{K}$ je očitno homotopna s krožnico $\mathcal{K}_r(z) = \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi - z| = r\}$, kjer je $r > 0$ (glejte sliko 4.18).



Slika 4.18: Krivulja $\mathcal{K}$ in krožnica $\mathcal{K}_r(z)$.

Zato velja

$$\int_{\mathcal{K}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \int_{\mathcal{K}_r(z)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi.$$

Parametrizacija krožice $\mathcal{K}_r(z)$ je $\xi : [0, 2\pi] \to \mathcal{K}_r(z)$, $\xi(t) = z + re^{it}$. Velja torej $\xi'(t) = rie^{it}$. Od tod dobimo:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{K}_r(z)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi &= \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{it})}{z + re^{it} - z} rie^{it} dt = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{it})}{re^{it}} rie^{it} dt \\ &= i \int_0^{2\pi} f(z + re^{it})\, dt.\end{aligned}$$

Ker je po predpostavki funkcija f holomorfna v točki $z \in D$, je v tej točki tudi zvezna. To pomeni:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall u \in D : |u - z| < \delta \implies |f(u) - f(z)| < \varepsilon.$$

Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Ker zgornje velja za vsak $\varepsilon > 0$, mora veljati tudi za $\frac{\varepsilon}{2\pi} > 0$. Torej:

$$\exists \delta > 0, \forall u \in D : |u - z| < \delta \implies |f(u) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}.$$

Naj za krožnico $\mathcal{K}_r(z)$ velja $r < \delta$. Za točko $u = z + re^{it}$, kjer je $t \in [0, 2\pi]$, potem dobimo

$$|u - z| = |z + re^{it} - z| = r|e^{it}| = r < \delta.$$

Iz pogoja zveznosti posledično sledi $|f(z + re^{it}) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$.

Sedaj ocenimo naslednji izraz:

$$\begin{aligned}
\left| \int\limits_{\mathcal{K}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi - 2\pi i f(z) \right| &= \left| i \int\limits_0^{2\pi} f(z + re^{it}) \, dt - i f(z) \int\limits_0^{2\pi} dt \right| \\
&= \left| i \left(\int\limits_0^{2\pi} f(z + re^{it}) \, dt - \int\limits_0^{2\pi} f(z) \, dt \right) \right| \\
&= |i| \cdot \left| \int\limits_0^{2\pi} \big(f(z + re^{it}) - f(z) \big) \, dt \right| \\
&= \left| \int\limits_0^{2\pi} \big(f(z + re^{it}) - f(z) \big) \, dt \right| \\
&\leq \int\limits_0^{2\pi} \big| f(z + re^{it}) - f(z) \big| \, dt \\
&< \int\limits_0^{2\pi} \frac{\varepsilon}{2\pi} \, dt = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} dt = \frac{\varepsilon}{2\pi} 2\pi = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ker zgornja ocena velja za vsak $\varepsilon > 0$, sledi

$$\left| \int\limits_{\mathcal{K}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi - 2\pi i f(z) \right| = 0 \iff \int\limits_{\mathcal{K}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi - 2\pi i f(z) = 0,$$

od koder dobimo

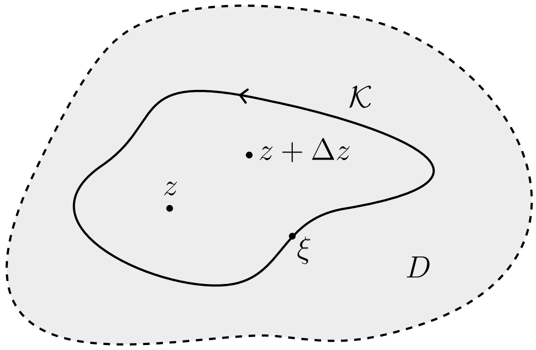
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{K}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi.$$

□

Izrek 4.24 *Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ enostavno povezano območje in $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Potem je za vsak $z \in D$ funkcija f odvedljiva v točki z in za vsako pozitivno orientirano, enostavno sklenjeno krivuljo $\mathcal{K} \subseteq D$ z odsekoma zvezno odvedljivo parametrizacijo, ki obkroži točko z, velja*

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{K}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} \, d\xi.$$

Dokaz. Naj bo $z \in D$ poljubna točka in $\Delta z \neq 0$ takšno kompleksno število, da točka $z + \Delta z$ še vedno leži v notranjosti krivulje $\mathcal{K}$ (slika 4.19).



Slika 4.19: Krivulja $\mathcal{K}$ ter števili z in $z + \Delta z$.

Opazimo, da po izreku 4.22 velja

$$\begin{aligned} f(z+\Delta z) - f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{K}} \frac{f(\xi)}{\xi - z - \Delta z}\, d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{K}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{K}} f(\xi)\frac{\xi - z - \xi + z + \Delta z}{(\xi - z - \Delta z)(\xi - z)}\, d\xi \\ &= \frac{\Delta z}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{K}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z - \Delta z)(\xi - z)}\, d\xi. \end{aligned}$$

Naj bo Q notranje območje krivulje $\mathcal{K}$, ki je seveda omejeno. Množica $\overline{Q}$ je torej zaprta in omejena, zato je kompaktna v $\mathbb{C}$. Vemo, da je funkcija f holomorfna na množici $\overline{Q} \subseteq D$ in posledično je na $\overline{Q}$ tudi zvezna. Funkcija f je torej zvezna na kompaktni množici $\overline{Q}$, zato je na tej množici tudi omejena. To pomeni:

$$\exists M \in \mathbb{R}, M > 0, \forall \xi \in \overline{Q} : |f(\xi)| \leq M.$$

Ker je $\mathcal{K}$ zaprta množica v $\mathbb{C}$, točki $z, z + \Delta z$ pa ležita v notranjem območju krivulje $\mathcal{K}$, obstajata taka $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, $m_1, m_2 > 0$, da za vse $\xi \in \mathcal{K}$ velja $|\xi - z| \geq m_1$ in $|\xi - (z + \Delta z)| \geq m_2$. Naj bo $m = \min\{m_1, m_2\}$. Potem za vse $\xi \in \mathcal{K}$ velja $|\xi - z| \geq m$ in $|\xi - (z + \Delta z)| \geq m$ ter posledično tudi

$$\frac{1}{|\xi - z|} \leq \frac{1}{m} \quad \text{in} \quad \frac{1}{|\xi - (z + \Delta z)|} \leq \frac{1}{m}.$$

Sedaj ocenimo naslednji izraz:

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{K}}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}\,d\xi\right| \\
&=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{K}}\frac{f(\xi)}{(\xi-z-\Delta z)(\xi-z)}\,d\xi-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{K}}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}\,d\xi\right| \\
&=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{K}}\frac{f(\xi)}{(\xi-z-\Delta z)(\xi-z)^2}(\xi-z-\xi+z+\Delta z)\,d\xi\right| \\
&=\left|\frac{1}{2\pi i}\right|\cdot\left|\int\limits_{\mathcal{K}}\frac{f(\xi)\Delta z}{(\xi-z-\Delta z)(\xi-z)^2}\,d\xi\right|=\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\mathcal{K}}\frac{f(\xi)\Delta z}{(\xi-z-\Delta z)(\xi-z)^2}\,d\xi\right| \\
&\leq\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathcal{K}}\frac{|f(\xi)|\cdot|\Delta z|}{|\xi-z-\Delta z|\cdot|\xi-z|^2}\,ds\leq\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathcal{K}}\frac{M\cdot|\Delta z|}{m^3}\,ds \\
&=\frac{M\cdot|\Delta z|}{2\pi m^3}\ell(\mathcal{K}),
\end{aligned}
$$

kjer $\ell(\mathcal{K})$ predstavlja dolžino krivulje $\mathcal{K}$. Opazimo, da gre izraz

$$\frac{M\cdot|\Delta z|}{2\pi m^3}\ell(\mathcal{K})$$

proti 0, ko gre Δz proti 0, zato velja

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{K}}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}\,d\xi.$$

$\square$

Izrek 4.25 *Naj bo $D\subseteq\mathbb{C}$ enostavno povezano območje in $f:D\to\mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Potem je za vsak $z\in D$ funkcija f poljubno mnogokrat odvedljiva v točki z in za vsako pozitivno orientirano, enostavno sklenjeno krivuljo $\mathcal{K}\subseteq D$ z odsekoma zvezno odvedljivo parametrizacijo, ki obkroži točko z, velja*

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{K}}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\,d\xi,\quad n\in\mathbb{N}_0.$$

Dokaz. Dokaz poteka s pomočjo matematične indukcije. V izrekih 4.22 in 4.24 smo trditev dokazali za $n=0$ in $n=1$, zato baza indukcije velja. Za indukcijski korak $n\to n+1$ pa uporabimo postopek, ki je zelo podoben postopku iz dokaza izreka 4.24. Pri tem upoštevamo dejstvo, da za vsak $z\in D$ in $n\in\mathbb{N}_0$ velja

$$f^{(n+1)}(z)=\left(f^{(n)}\right)'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f^{(n)}(z+\Delta z)-f^{(n)}(z)}{\Delta z}.$$

$\square$

Opomba 4.26 *(1) Če je območje D v zgornjem izreku tudi omejeno, lahko namesto krivulje $\mathcal{K}$, ki obkroži točko $z \in D$, vzamemo kar rob območja D, torej ∂D. Tako dobimo:*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

(2) Formulam

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

*ki se pojavijo v izrekih 4.22, 4.24 in 4.25, pravimo **Cauchyjeve integralske formule**.*

(3) Izrek 4.25 pove, da je vsaka holomorfna funkcija na poljubnem enostavno povezanem območju neskončnokrat odvedljiva. Spomnimo, da podobna trditev v $\mathbb{R}$ ne velja, saj obstaja odvedljiva realna funkcija, ki ni dvakrat odvedljiva. Na primer, naj bo funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}; & x \geq 0, \\ -\frac{x^2}{2}; & x < 0 \end{cases}.$$

Zlahka preverimo, da je f povsod odvedljiva in da velja

$$f'(x) = \begin{cases} x; & x \geq 0, \\ -x; & x < 0 \end{cases} = |x|.$$

Vendar pa funkcija f' ni odvedljiva v $x = 0$, zato drugi odvod funkcije f v točki $x = 0$ ne obstaja.

(4) Cauchyjev izrek 4.9 smo dokazali ob dodatni predpostavki, da je f' zvezna funkcija. Po drugi strani pa nam izrek 4.25 pove, da je vsaka holomorfna funkcija tudi dvakrat odvedljiva, to pomeni, da obstaja f''. Posledično je torej funkcija f' odvedljiva in zato tudi zvezna. Vendar pa tega dejstva ne moremo uporabiti, saj smo izrek 4.25 dokazali s pomočjo Cauchyjevega izreka.

4.5 Posledice Cauchyjevih integralskih formul

Definicija 4.27 *Naj bo $u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ realna funkcija dveh realnih spremenljivk, ki je vsaj dvakrat parcialno odvedljiva. Funkcija u je **harmonična**, če za vse $(x, y) \in D$ velja*

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0.$$

Izrek 4.28 *Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ enostavno povezano območje in $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, holomorfna funkcija, kjer sta u, v realni funkciji. Potem sta funkciji u in v harmonični.*

Dokaz. Vemo, da je $f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y$. Po izreku 4.25 obstaja f'' in posledično tudi funkcije u_{xx}, u_{xy}, u_{yx}, u_{yy}, v_{xx}, v_{xy}, v_{yx} in v_{yy}. Prav tako mora obstajati f''', zato je funkcija f'' zvezna, kar pomeni, da so zvezne tudi funkcije u_{xy}, u_{yx}, v_{xy} in v_{yx}. Posledično mora veljati $u_{xy} = u_{yx}$ in $v_{xy} = v_{yx}$. Ker je

$$u_x = v_y \quad \text{in} \quad u_y = -v_x,$$

z odvajanjem prve enakosti po x in z odvajanjem druge enakosti po y dobimo

$$u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} \quad \text{in} \quad u_{yy} = -v_{xy}.$$

To pomeni, da velja

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{xy} - v_{xy} = 0$$

v poljubni točki $(x, y) \in D$. Podobno preverimo tudi, da velja

$$v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

□

Izrek 4.29 (Morerov izrek) *Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ enostavno povezano območje in $f : D \to \mathbb{C}$ zvezna funkcija. Če za vsako enostavno sklenjeno krivuljo $\mathcal{K} \subseteq D$ z odsekoma zvezno odvedljivo parametrizacijo velja*

$$\int_{\mathcal{K}} f(z)\, dz = 0,$$

potem je funkcija f holomorfna na D.

Dokaz. Naj bosta $a, b \in D$ in $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \subseteq D$ dve enostavni krivulji z začetno točko a in končno točko b. Po predpostavki je

$$0 = \int_{\mathcal{K}_1 \cup (-\mathcal{K}_2)} f(z)\, dz = \int_{\mathcal{K}_1} f(z)\, dz + \int_{-\mathcal{K}_2} f(z)\, dz = \int_{\mathcal{K}_1} f(z)\, dz - \int_{\mathcal{K}_2} f(z)\, dz,$$

zato je

$$\int_{\mathcal{K}_1} f(z)\, dz = \int_{\mathcal{K}_2} f(z)\, dz.$$

Ugotovili smo, da so integrali po poljubnih enostavnih krivuljah od točke a do točke b vedno enaki. Zato je smiselno vpeljati funkcijo $F : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s predpisom

$$F(z) = \int_a^z f(\xi)\, d\xi,$$

kjer $\int_a^z$ predstavlja kompleksni integral po poljubni enostavni krivulji od točke a do točke $z \in D$. Ker je f zvezna funkcija, lahko enako kot v dokazu izreka 4.14 preverimo, da je funkcija F odvedljiva in da za vsak $z \in D$ velja

$$F'(z) = f(z).$$

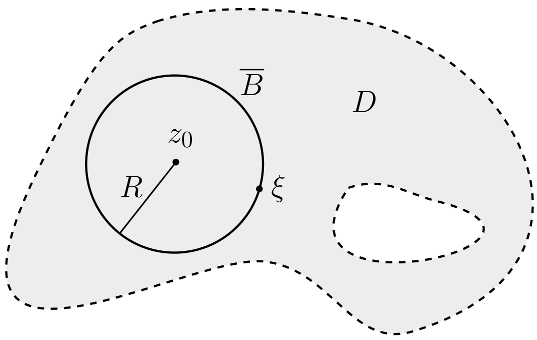
Funkcija F je torej holomorfna na enostavno povezanem območju D, zato je po izreku 4.25 neskončnokrat odvedljiva. To pomeni, da obstaja F'' in da za vsak $z \in D$ velja

$$F''(z) = f'(z).$$

Posledično je f holomorfna na D. $\square$

Izrek 4.30 (Cauchyjeva neenakost) *Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ poljubno območje, $z_0 \in D$ in $R > 0$ takšno realno število, da je $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\} \subseteq D$ (slika 4.20). Naj bo še $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija in $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ takšno število, da za vse $z \in \overline{B}$ velja $|f(z)| \leq M$ (takšno število M obstaja, ker je funkcija f omejena na množici $\overline{B}$). Potem za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ velja*

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{Mn!}{R^n}.$$



Slika 4.20: Krivulja $\mathcal{K}$ ter števili z in $z + \Delta z$.

Dokaz. Naj bo $z_0 \in D$ poljubna točka. Po izreku 4.25 za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ velja:

$$\begin{aligned}
\left|f^{(n)}(z_0)\right| &= \left|\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\partial B} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi\right| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\right| \cdot \left|\int\limits_{\partial B} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi\right| \\
&= \frac{n!}{2\pi} \cdot \left|\int\limits_{\partial B} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\int\limits_{\partial B} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z_0|^{n+1}}\, ds \\
&\leq \frac{n!}{2\pi}\int\limits_{\partial B} \frac{M}{|\xi - z_0|^{n+1}}\, ds = \frac{Mn!}{2\pi}\int\limits_{\partial B} \frac{1}{R^{n+1}}\, ds \\
&= \frac{Mn!}{2\pi R^{n+1}}\int\limits_{\partial B} ds = \frac{Mn!}{2\pi R^{n+1}} 2\pi R = \frac{Mn!}{R^n}.
\end{aligned}$$

To pomeni, da je neenakost dokazana. $\square$

Izrek 4.31 (Liouvillov izrek) *Naj bo $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ cela funkcija, ki je omejena. Potem je f konstantna funkcija.*

Dokaz. Ker je f omejena funkcija na $\mathbb{C}$, velja:

$$\exists M \in \mathbb{R}, M > 0, \forall z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq M.$$

Ker je f cela funkcija, je f holomorfna na $\mathbb{C}$. Naj bo $z \in \mathbb{C}$ poljuben. Očitno je krog $K_R(z) = \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi - z| < R\}$ vsebovan v $\mathbb{C}$ za vsak $R > 0$. Posledično po izreku 4.30 za vsak $R > 0$ velja

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{R}.$$

Opazimo, da gre izraz $\frac{M}{R}$ proti 0, ko gre R proti neskončno, zato mora biti $|f'(z)| = 0$ in posledično $f'(z) = 0$ za vsak $z \in \mathbb{C}$.

Če je $f = u + iv$, kjer sta u, v realni funkciji dveh spremenljivk, potem mora veljati

$$f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0 = 0 + i \cdot 0,$$

kar pomeni, da je $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$. Funkciji u in v morata torej biti realni konstanti: $u = C_1 \in \mathbb{R}$ in $v = C_2 \in \mathbb{R}$. Če označimo $C = C_1 + iC_2$, dobimo $f(z) = C$ za vsak $z \in \mathbb{C}$, zato je f konstantna funkcija. $\square$

Navedimo še mali Picardov izrek, ki pa ga ne bomo dokazovali. Zainteresiran bralec lahko dokaz najde na primer v knjigi [11].

Izrek 4.32 (mali Picardov izrek) *Naj bo $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ cela, nekonstantna funkcija. Potem je*

$$Z_f = \{f(z) \mid z \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C},$$

ali pa obstaja $w \in \mathbb{C}$, da velja

$$Z_f = \{f(z) \mid z \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C} \setminus \{w\}.$$

Opomba 4.33 *Liouvillov izrek sledi neposredno iz malega Picardovega izreka.*

Izrek 4.34 (osnovni izrek algebre) *Vsak nekonstanten polinom s kompleksnimi koeficienti ima vsaj eno kompleksno ničlo.*

Dokaz. Denimo, da to ni res. Potem obstaja nekonstanten polinom p, ki nima kompleksnih ničel. Posledično lahko definiramo funkcijo $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s predpisom

$$f(z) = \frac{1}{p(z)}.$$

Očitno je f holomorfna na $\mathbb{C}$, zato je f cela funkcija. Predpostavimo, da je

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

kjer je $n \geq 1$, $a_i \in \mathbb{C}$ za vsak $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ in $a_n \neq 0$. Potem dobimo

$$|f(z)| = \frac{1}{|a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0|} = \frac{1}{|z|^n \cdot \left|a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right|}.$$

Opazimo, da je

$$\lim_{|z|\to\infty}|f(z)| = \lim_{|z|\to\infty}\frac{1}{|z|^n}\cdot\lim_{|z|\to\infty}\frac{1}{\left|a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_1}{z^{n-1}}+\frac{a_0}{z^n}\right|} = 0\cdot\frac{1}{|a_n|} = 0,$$

kar pomeni:

$$\forall\varepsilon>0, \exists R\in\mathbb{R}, R>0, \forall z\in\mathbb{C} : |z|>R \implies |f(z)-0|<\varepsilon.$$

Če izberemo na primer $\varepsilon = 1$, velja

$$\exists R\in\mathbb{R}, R>0, \forall z\in\mathbb{C} : |z|>R \implies |f(z)-0|<1.$$

Zgornje pomeni, da je funkcija f omejena na območju $\mathbb{C}\setminus\overline{K}_R(0)$.

Po drugi strani pa je množica $\overline{K}_R(0)$ zaprta in omejena, zato je tudi kompaktna. Ker je funkcija f zvezna na $\mathbb{C}$ (in s tem tudi na $\overline{K}_R(0)$), je omejena na množici $\overline{K}_R(0)$. Pokazali smo torej, da je funkcija f omejena na $\mathbb{C}$, zato je f po izreku 4.31 konstantna funkcija. Posledično mora biti p konstanten polinom, kar je protislovje. S tem smo preverili, da ima p vsaj eno kompleksno ničlo. $\square$

4.6 Izpitne naloge: osnovni primeri integralov

1. Izračunaj integral:

   (a) $\int_{\mathcal{K}} |z|\,dz$, če je $\mathcal{K}$ daljica od točke 0 do točke $2-i$.

   (b) $\int_{\mathcal{K}} \mathrm{Im}(z)\,dz$, če je $\mathcal{K} = \{z\in\mathbb{C} \mid |z| = 1 \wedge \mathrm{Im}(z)\geq 0\}$ pozitivno orientiran polkrog.

2. Z direktno parametrizacijo izračunaj integrala:

   (a) $\int_{\mathcal{K}} \sin(\overline{z})\,dz$, če je $\mathcal{K}$ daljica od točke i do točke $3i$.

   (b) $\int_{\mathcal{K}} \sqrt{z}\,dz$, če je $\mathcal{K} = \{z\in\mathbb{C} \mid |z| = 4 \wedge \mathrm{Im}(z)\geq 0\}$ pozitivno orientirana polkrožnica.

3. Z direktno parametrizacijo izračunaj integral:

   (a) $\int_{\mathcal{K}} \mathrm{Im}(z)\,dz$, če je $\mathcal{K}$ daljica od točke $1+i$ do točke $3+2i$.

   (b) $\int_{\mathcal{K}} (\overline{z})^2\,dz$, če je $\mathcal{K}$ pozitivno orientiran rob območja $D = \{z\in\mathbb{C} \mid |z|\leq 3 \wedge \mathrm{Im}(z)\geq 0\}$.

4. Z direktno parametrizacijo izračunaj integral:

   (a) $\displaystyle\int_{\mathcal{K}} \overline{z}\, dz$, če je $\mathcal{K}$ daljica od točke $2i$ do točke $2 - 4i$.

   (b) $\displaystyle\int_{\mathcal{K}} \sqrt{z}\, dz$, če je $\mathcal{K} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 4\}$ pozitivno orientirana krožnica.

4.7 Izpitne naloge: Cauchyjeve formule

Opomba: 2. in 3. naloga v tem razdelku sta prirejeni po nalogah iz zbirke [3].

1. Naj bo $f(z) = \sin(iz) - z^2$.

   (a) Zapiši realni in imaginarni del funkcije f ter preveri, ali je f holomorfna.

   (b) Izračunaj integral $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{f(z)}{z^2}\, dz$.

2. Naj bo $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija in naj bo $g(z) = z^3 f(z)$. Dokaži, da velja

$$\int_{|z-2|=1} \frac{g(z)\, dz}{(z-2)^2} = 12 \int_{|z-2|=1} \frac{f(z)\, dz}{(z-2)} + 8 \int_{|z-2|=1} \frac{f(z)\, dz}{(z-2)^2}.$$

3. Naj bosta $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfni funkciji in naj bo

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|w|=2} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\, dw \;+\; \int_{|w|=\frac{1}{2}} \frac{g(w)}{\left(w - \frac{1}{z}\right)^2}\, dw \right).$$

   Določi naravno definicijsko območje funkcije F in zapiši njen eksplicitni predpis (brez integralov). Ali je funkcija F holomorfna povsod, kjer je definirana? Odgovor utemelji.

Poglavje 5

Taylorjeva in Laurentova vrsta

5.1 Enakomerna konvergenca funkcijskih vrst

Na začetku poglavja ponovimo nekaj osnovnih pojmov o (kompleksnih) številskih in funkcijskih vrstah.

Naj bo $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ kompleksna številska vrsta in $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pripadajoče zaporedje delnih vsot. Spomnimo, da vrsta konvergira natanko tedaj, ko obstaja tak $s \in \mathbb{C}$, da velja:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : |s_n - s| < \varepsilon.$$

Opazimo tudi, da vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ konvergira natanko tedaj, ko velja

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} z_k \right| < \varepsilon.$$

Pri tem opomnimo, da za vsak $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, vrsto $\sum_{k=m}^{\infty} z_k$ imenujemo ***rep*** ali ***ostanek*** vrste $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$.

Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ in $f_k : D \to \mathbb{C}$ funkcija za vsak $k \in \mathbb{N}$. Zaporedju $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pravimo ***funkcijsko zaporedje***, vrsti

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

pa ***funkcijska vrsta***.

Definicija 5.1 *Naj bo $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $f_k : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, funkcijsko zaporedje. Vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$* ***konvergira po točkah*** *na D, če velja*

$$\forall z \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \right| < \varepsilon.$$

Definicija 5.2 *Naj bo $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $f_k : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, funkcijsko zaporedje. Vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$* ***konvergira enakomerno*** *na D, če velja*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall z \in D, \forall n \geq n_0 : \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)\right| < \varepsilon.$$

Opomba 5.3 *Opazimo, da je pri konvergenci po točkah $n_0 \in \mathbb{N}$ odvisen tako od $\varepsilon > 0$ kot od $z \in D$, pri enakomerni konvergenci pa je n_0 odvisen le od ε.*

Opomnimo še, da če neka funkcijska vrsta enakomerno konvergira na D, potem seveda na D tudi konvergira po točkah. Po drugi strani pa obrat te trditve v splošnem ne velja.

Definicija 5.4 *Če funkcijska vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergira (po točkah ali enakomerno) k neki funkciji f, potem tej funkciji pravimo* ***limitna funkcija****.*

Izrek 5.5 (Weierstrassov kriterij) *Naj bo $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $f_k : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, funkcijsko zaporedje in $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ realno zaporedje. Če za vsak $k \in \mathbb{N}$ in vsak $z \in D$ velja $|f_k(z)| \leq b_k$ in vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergira, potem funkcijska vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergira enakomerno na D.*

Dokaz. Dokazati moramo:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall z \in D, \forall n \geq n_0 : \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)\right| < \varepsilon.$$

Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Ker vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergira, velja

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k < \varepsilon.$$

Naj bo $n \geq n_0$ poljuben. Potem za vsak $z \in D$ velja

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k < \varepsilon,$$

kar pomeni, da je dokaz zaključen. $\square$

Izrek 5.6 *Naj bo $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $f_k : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, funkcijsko zaporedje zveznih funkcij. Če vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergira enakomerno na D, potem je limitna funkcija $f : D \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$, zvezna na D.*

Dokaz. Naj bo $z_0 \in D$ poljubna točka. Preverimo zveznost funkcije f v točki z_0. Dokazati moramo:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in D : |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon,$$

kar lahko zapišemo tudi tako:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z = z_0 + \Delta z \in D : |\Delta z| < \delta \implies |f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Ker vrsta $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergira enakomerno na D, za $\frac{\varepsilon}{3}$ velja

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall z \in D, \forall n \geq n_0 : \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Po drugi strani je f_k zvezna funkcija za vsak $k \in \{1, \ldots, n_0\}$, zato za $\frac{\varepsilon}{3n_0}$ velja

$$\exists \delta_k > 0, \forall z = z_0 + \Delta z \in D : |\Delta z| < \delta_k \implies |f_k(z_0 + \Delta z) - f_k(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3n_0}.$$

Naj bo

$$\delta = \min\{\delta_k \mid k \in \{1, \ldots, n_0\}\}$$

in naj bo $|\Delta z| < \delta$. Potem za vsak $k \in \{1, \ldots, n_0\}$ velja $|\Delta z| < \delta \leq \delta_k$ in posledično

$$|f_k(z_0 + \Delta z) - f_k(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3n_0}.$$

Sedaj ocenimo absolutno vrednost razlike

$$\begin{aligned}
|f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z_0 + \Delta z) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z_0)\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n_0} f_k(z_0 + \Delta z) + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} f_k(z_0 + \Delta z) - \sum_{k=1}^{n_0} f_k(z_0) - \sum_{k=n_0+1}^{\infty} f_k(z_0)\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n_0} \big(f_k(z_0 + \Delta z) - f_k(z_0)\big) + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} f_k(z_0 + \Delta z) - \sum_{k=n_0+1}^{\infty} f_k(z_0)\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n_0} \big|f_k(z_0 + \Delta z) - f_k(z_0)\big| + \left|\sum_{k=n_0+1}^{\infty} f_k(z_0 + \Delta z)\right| + \left|\sum_{k=n_0+1}^{\infty} f_k(z_0)\right| \\
&< \sum_{k=1}^{n_0} \frac{\varepsilon}{3n_0} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dokaz je torej zaključen. $\square$

Izrek 5.7 *Naj bo $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $f_k : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, funkcijsko zaporedje zveznih funkcij in naj vrsta $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergira enakomerno na D. Potem za vsako enostavno krivuljo $\mathcal{K} \subseteq D$ z odsekoma zvezno odvedljivo parametrizacijo velja*

$$\int_{\mathcal{K}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)\right) dz = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{\mathcal{K}} f_k(z)\, dz\right).$$

Dokaz. Za vsak $k \in \mathbb{N}$ integral $\int\limits_{\mathcal{K}} f_k(z)\,dz$ obstaja, saj je f_k zvezna funkcija. Po izreku 5.6 je funkcija $f : D \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$, zvezna na D, zato obstaja tudi integral $\int\limits_{\mathcal{K}} \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z) \right) dz$. Označimo z $\ell(\mathcal{K})$ dolžino krivulje $\mathcal{K}$ in brez izgube za splošnost predpostavimo $\ell(\mathcal{K}) > 0$ (za $\ell(\mathcal{K}) = 0$ je enačba v izreku trivialno izpolnjena). Izberimo poljuben $\varepsilon > 0$. Ker vrsta $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergira enakomerno na D, za $\frac{\varepsilon}{\ell(\mathcal{K})}$ velja:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall z \in D, \forall n \geq n_0 : \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \right| < \frac{\varepsilon}{\ell(\mathcal{K})}.$$

Naj bo $n \geq n_0$. Ocenimo izraz:

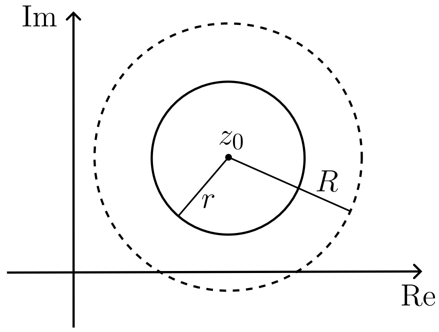
$$\begin{aligned}
&\left| \int\limits_{\mathcal{K}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \right) dz - \sum_{k=1}^{n} \left(\int\limits_{\mathcal{K}} f_k(z)\,dz \right) \right| \\
&= \left| \int\limits_{\mathcal{K}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \right) dz - \int\limits_{\mathcal{K}} \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(z) \right) dz \right| \\
&= \left| \int\limits_{\mathcal{K}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z) \right) dz \right| \\
&= \left| \int\limits_{\mathcal{K}} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \right) dz \right| \leq \int\limits_{\mathcal{K}} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \right| ds \\
&\leq \int\limits_{\mathcal{K}} \frac{\varepsilon}{\ell(\mathcal{K})}\, ds = \frac{\varepsilon}{\ell(\mathcal{K})} \int\limits_{\mathcal{K}} ds = \frac{\varepsilon}{\ell(\mathcal{K})} \ell(\mathcal{K}) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

S tem smo preverili, da vrsta $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\int\limits_{\mathcal{K}} f_k(z)\,dz \right)$ konvergira in da je njena vsota ravno $\int\limits_{\mathcal{K}} \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z) \right) dz$. □

Izrek 5.8 *Naj bo*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k; \quad z_0 \in \mathbb{C}, a_k \in \mathbb{C} \text{ za vse } k \in \mathbb{N}_0,$$

kompleksna potenčna vrsta s konvergenčnim polmerom $R > 0$. Potem za poljuben $r \in [0, R)$ ta vrsta konvergira enakomerno na $\overline{K}_r(z_0)$ (slika 5.1).



Slika 5.1: Kroga $K_R(z_0)$ in $\overline{K}_r(z_0)$.

Dokaz. Po lemi 2.14 vrsta $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ konvergira absolutno na krogu $\overline{K}_r(z_0)$, kjer je $0 \leq r < R$. To pomeni, da za vsak $z \in \overline{K}_r(z_0)$ konvergira vrsta

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot |z - z_0|^k.$$

V posebnem primeru, ko je $z \in \partial\overline{K}_r(z_0)$, to pomeni, da konvergira tudi vrsta

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k.$$

Opazimo, da za vsak $k \in \mathbb{N}$ in vsak $z \in \overline{K}_r(z_0)$ velja

$$\left|a_k(z - z_0)^k\right| = |a_k| \cdot |z - z_0|^k \leq |a_k| r^k.$$

Po Weierstrassovem kriteriju (izrek 5.5) iz konvergence vrste

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k$$

sledi enakomerna konvergenca funkcijske vrste $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ na $\overline{K}_r(z_0)$. □

Z uporabo zadnjih dveh izrekov takoj dobimo še naslednjo trditev, ki nam pove, da lahko potenčne vrste členoma integriramo.

Trditev 5.9 *Naj bo* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ *potenčna vrsta s konvergenčnim polmerom* $R > 0$. *Potem za vsako enostavno krivuljo* $\mathcal{K} \subseteq K_R(z_0)$ *z odsekoma zvezno odvedljivo parametrizacijo velja*

$$\int_{\mathcal{K}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \right) dz = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\mathcal{K}} a_k(z - z_0)^k \, dz \right).$$

Dokaz. Ker ima krivulja $\mathcal{K}$ parametrizacijo, ki je zvezna na nekem zaprtem intervalu, je $\mathcal{K}$ kompaktna množica. Po drugi strani je rob množice $K_R(z_0)$ krožnica, ki je disjunktna s $\mathcal{K}$ in kompaktna. Posledično obstaja tak $r \in (0, R)$, da je $\mathcal{K} \subseteq \overline{K}_r(z_0)$. Po izreku 5.8 potenčna vrsta konvergira enakomerno na $\overline{K}_r(z_0)$, zato rezultat dobimo z uporabo izreka 5.7. $\square$

5.2 Taylorjeva vrsta

Izrek 5.10 *Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ poljubno območje, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija, $z_0 \in D$ in $B = K_r(z_0) \subseteq D$, $r > 0$, krog, ki v celoti leži v D. Potem za vsak $z \in B$ velja*

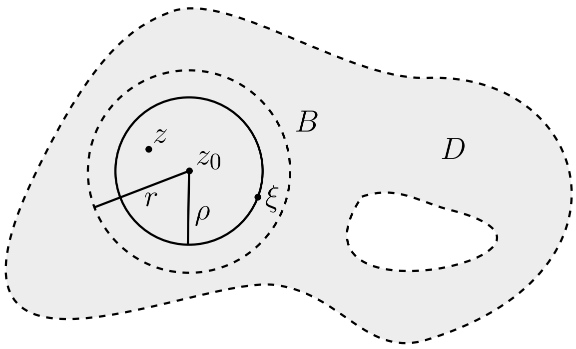
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k.$$

Opomba 5.11 *Vrsto iz zgornjega izreka imenujemo* ***Taylorjeva vrsta****. Opazimo, da je Taylorjeva vrsta tudi potenčna vrsta.*

Dokaz. Naj bo $z \in B$ poljubna točka. Izberimo $0 < \rho < r$ pri krožnici z enačbo

$$\mathcal{K}_\rho = \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi - z_0| = \rho\} \subset B$$

tako, da bo točka z ležala na notranjem območju krožnice $\mathcal{K}_\rho$ (glejte sliko 5.2).



Slika 5.2: Krog B in krožnica $\mathcal{K}_\rho(z_0)$.

Po izreku 4.22 za $z \in B$ velja Cauchyjeva integralska formula

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{K}_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi.$$

Naj bo $\xi \in \mathcal{K}_\rho$. Opazimo, da velja

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{(\xi - z_0)\left(1 + \frac{z_0 - z}{\xi - z_0}\right)} = \frac{1}{(\xi - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)},$$

pri čemer je

$$\left|\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right| = \frac{|z - z_0|}{|\xi - z_0|} < \frac{|\xi - z_0|}{|\xi - z_0|} = 1,$$

saj z leži na notranjem območju krožnice $\mathcal{K}_\rho$.

Izraz $\dfrac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}}$ lahko torej razvijemo v geometrijsko vrsto

$$\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^k,$$

zato sledi

$$\frac{1}{\xi-z} = \frac{1}{(\xi-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(\xi-z_0)^{k+1}}. \tag{5.1}$$

Iz zgoraj navedene Cauchyjeve integralske formule in formule (5.1) tako dobimo

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{K}_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{K}_\rho}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(\xi)(z-z_0)^k}{(\xi-z_0)^{k+1}}\right)d\xi \\
&\overset{(*)}{=} \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int\limits_{\mathcal{K}_\rho}\frac{f(\xi)(z-z_0)^k}{(\xi-z_0)^{k+1}}\,d\xi\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{K}_\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{k+1}}\,d\xi\right)(z-z_0)^k \\
&\overset{(**)}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k,
\end{aligned}$$

kjer smo pri enakosti $(**)$ uporabili izrek 4.25. Spomnimo, da dobljena enakost velja za vsak $z \in K_r(z_0) = B$.

Za konec dokaza moramo utemeljiti še enakost $(*)$, kjer smo zamenjali vrstni red vsote in integrala. Naj bosta $\mathcal{K}_{\rho_1}$ in $\mathcal{K}_{\rho_2}$ dve krožnici s središčem v z_0 ter polmeroma ρ_1 in ρ_2 (slika 5.3), tako da velja

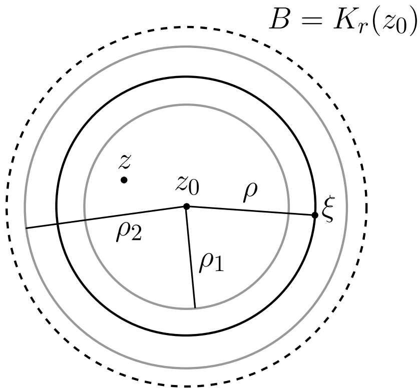
$$|z-z_0| < \rho_1 < \rho < \rho_2 < r.$$

Prav tako naj bo Q zaprti kolobar med krožnicama $\mathcal{K}_{\rho_1}$ in $\mathcal{K}_{\rho_2}$. Očitno je množica Q kompaktna v $\mathbb{C}$. Ker je f holomorfna na D, je tudi zvezna na D in posledično je zvezna tudi na $Q \subseteq D$. Funkcija f je torej zvezna na kompaktni množici Q, zato je na tej množici tudi omejena:

$$\exists M \in \mathbb{R}, M > 0, \forall \xi \in Q : |f(\xi)| \leq M.$$

Opazimo še, da za vsak $\xi \in Q$ in vsak $k \in \mathbb{N}_0$ velja

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(\xi)(z-z_0)^k}{(\xi-z_0)^{k+1}}\right| &= \frac{|f(\xi)|\cdot|z-z_0|^k}{|\xi-z_0|^{k+1}} \leq \frac{|f(\xi)|\cdot|z-z_0|^k}{\rho_1^{k+1}} \\
&\leq \frac{M\cdot|z-z_0|^k}{\rho_1^{k+1}} = \frac{M}{\rho_1}\left(\frac{|z-z_0|}{\rho_1}\right)^k.
\end{aligned}$$



Slika 5.3: Krog B in krožnice $\mathcal{K}_\rho(z_0)$, $\mathcal{K}_{\rho_1}(z_0)$, $\mathcal{K}_{\rho_2}(z_0)$.

Za poljuben $k \in \mathbb{N}_0$ označimo

$$b_k = \frac{M}{\rho_1}\left(\frac{|z - z_0|}{\rho_1}\right)^k.$$

Ker je

$$\frac{|z - z_0|}{\rho_1} < \frac{\rho_1}{\rho_1} = 1,$$

vrsta $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergira, zato po Weierstrassovem kriteriju (izrek 5.5) funkcijska vrsta

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\xi)(z - z_0)^k}{(\xi - z_0)^{k+1}}$$

konvergira enakomerno na Q. Posledično lahko zaradi izreka 5.7 zamenjamo vrstni red vsote in integrala v enakosti $(*)$. $\square$

Definicija 5.12 *Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ poljubno območje. Če lahko funkcijo $f : D \to \mathbb{C}$ razvijemo v potenčno vrsto okoli vsake točke iz D, pravimo, da je f* ***analitična funkcija*** *na D.*

Izrek 5.13 *Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ enostavno povezano območje in $f : D \to \mathbb{C}$ zvezna funkcija. Potem so naslednje trditve ekvivalentne:*

(1) f je holomorfna funkcija na D,

(2) za vsako enostavno sklenjeno krivuljo $\mathcal{K} \subseteq D$ z odsekoma zvezno odvedljivo parametrizacijo velja

$$\int_{\mathcal{K}} f(z)\, dz = 0,$$

(3) f je analitična funkcija na D.

Dokaz. Implikacija (1) $\implies$ (2) sledi iz Cauchyjevega izreka 4.9, implikacija (2) $\implies$ (1) pa iz Morerovega izreka 4.29. Po drugi strani implikacija (1) $\implies$ (3) sledi iz izreka 5.10, zato moramo dokazati le še implikacijo (3) $\implies$ (1).

Predpostavimo torej, da je f analitična funkcija in naj bo $z_0 \in D$ poljubna točka. Obstaja torej tak $r > 0$, da lahko funkcijo f razvijemo v potenčno vrsto na $K_r(z_0)$. To pomeni, da za vse $z \in K_r(z_0)$ velja:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k; \quad a_k \in \mathbb{C} \text{ za vse } k \in \mathbb{N}_0 \,.$$

Naj bo $\mathcal{K} \subseteq K_r(z_0)$ poljubna enostavno sklenjena krivulja z odsekoma zvezno odvedljivo parametrizacijo. Posledično z uporabo trditve 5.9 in izreka 4.9 dobimo

$$\int_{\mathcal{K}} f(z)\, dz = \int_{\mathcal{K}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \right) dz = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\mathcal{K}} a_k (z - z_0)^k dz \right) = \sum_{k=0}^{\infty} 0 = 0.$$

Po izreku 4.29 sledi, da je funkcija f holomorfna na $K_r(z_0)$. Ker smo $z_0 \in D$ izbrali poljubno, je f holomorfna na D. $\square$

Posledica 5.14 *Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ poljubno območje, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija in $a \in D$ ničla funkcije f, torej $f(a) = 0$. Potem velja natanko ena izmed naslednjih dveh možnosti:*

(1) Obstaja okolica $\mathcal{U} \subseteq D$ točke $a \in \mathcal{U}$, tako da za vsak $z \in \mathcal{U}$ velja $f(z) = 0$.

(2) Obstaja okolica $\mathcal{U} \subseteq D$ točke $a \in \mathcal{U}$, tako da za vsak $z \in \mathcal{U} \setminus \{a\}$ velja $f(z) \neq 0$.

Opomba 5.15 *V primeru (1) iz zgornje posledice rečemo, da ima f v točki $a \in D$* ***ničlo tipa I****, v primeru (2) pa* ***ničlo tipa II****.*

Dokaz. Po izreku 5.10 obstaja nek odprti krog V, na katerem lahko funkcijo f razvijemo v potenčno vrsto:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k = c_0 + c_1 (z - a) + c_2 (z - a)^2 + \cdots.$$

Ker je a ničla funkcije f, mora veljati $f(a) = c_0 = 0$. Ločimo dve možnosti:

(1) Če je $c_k = 0$ za vsak $k \in \mathbb{N}$, potem je $f(z) = 0$ za vsak $z \in V$. Za iskano odprto okolico $\mathcal{U}$ lahko torej izberemo kar V.

(2) Če obstaja $n \in \mathbb{N}$, tako da je $c_0 = c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0$ in $c_n \neq 0$, potem je

$$\begin{aligned} f(z) &= c_n (z - a)^n + c_{n+1} (z - a)^{n+1} + c_{n+2} (z - a)^{n+2} + \cdots \\ &= (z - a)^n \left(c_n + c_{n+1}(z - a) + c_{n+2}(z - a)^2 + \cdots \right) \\ &= (z - a)^n \varphi(z), \end{aligned}$$

kjer smo uporabili oznako

$$\varphi(z) = c_n + c_{n+1}(z-a) + c_{n+2}(z-a)^2 + \cdots .$$

Ker potenčna vrsta funkcije f konvergira na V, mora na V konvergirati tudi potenčna vrsta funkcije φ, in to celo enakomerno (po izreku 5.8). Funkcija φ je vsota zveznih funkcij, zato je po izreku 5.6 tudi sama zvezna funkcija. Ker je $\varphi(a) = c_n \neq 0$ in je φ zvezna, mora obstajati taka okolica $\mathcal{U} \subseteq V \subseteq D$ točke $a \in \mathcal{U}$, na kateri za vsak $z \in \mathcal{U}$ velja $\varphi(z) \neq 0$. Posledično za vsak $z \in \mathcal{U} \setminus \{a\}$ velja $f(z) \neq 0$.

$\square$

Posledica 5.16 *Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ enostavno povezano območje in $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ neko kompleksno zaporedje paroma različnih točk iz D s stekališčem $a \in D$. Če sta funkciji $f, g : D \to \mathbb{C}$ holomorfni in za vsak $k \in \mathbb{N}$ velja $f(z_k) = g(z_k)$, potem za vsak $z \in D$ velja $f(z) = g(z)$ (funkciji f in g sta enaki).*

Dokaz. Definirajmo novo funkcijo $h : D \to \mathbb{C}$ s predpisom

$$h(z) = f(z) - g(z),$$

ki je holomorfna na D in zato tudi zvezna na D. Za vsak $k \in \mathbb{N}$ je $h(z_k) = f(z_k) - g(z_k) = 0$. Zaporedje $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ima stekališče a, zato obstaja njegovo podzaporedje $(z_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$, ki konvergira proti a. Ker je h zvezna, velja

$$h(a) = h\left(\lim_{i\to\infty} z_{k_i}\right) = \lim_{i\to\infty} h(z_{k_i}) = \lim_{i\to\infty} 0 = 0.$$

Točka a je torej ničla funkcije h. Po posledici 5.14 vidimo, da je a ničla tipa I, saj za vsako okolico $\mathcal{U}$ točke a obstaja nek člen zaporedja $(z_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$, ki leži v $\mathcal{U}$. Zato mora obstajati okolica $\mathcal{U}$ točke a, tako da za vsak $z \in \mathcal{U}$ velja $h(z) = 0$. Definirajmo množico

$$A = \{z \in D \mid z \text{ je ničla funkcije } h \text{ tipa I}\}.$$

Potem je seveda $D \setminus A$ množica vseh $z \in D$, za katere je z ničla tipa II ali z ni ničla funkcije h.

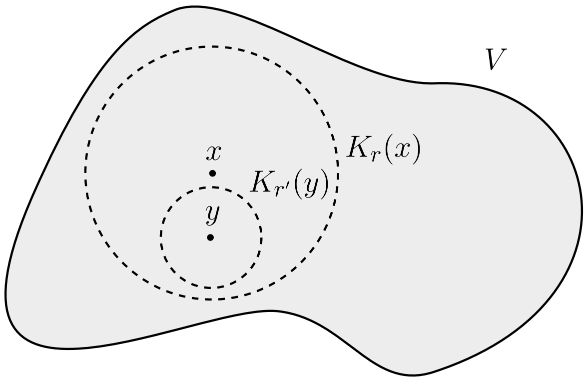
Dokažimo, da je množica A odprta. To pomeni:

$$\forall x \in A, \exists r > 0 : K_r(x) \subseteq A.$$

Naj bo $x \in A$ poljubna točka. Funkcija h ima v x ničlo tipa I, zato obstaja okolica V točke x, tako da za vsak $y \in V$ velja $h(y) = 0$. Ker je V okolica točke x, obstaja odprti krog $K_r(x)$, ki v celoti leži v V. Naj bo $y \in K_r(x)$ poljubna točka. Ker je y notranja točka množice $K_r(x)$, očitno obstaja tak $r' > 0$, da je $K_{r'}(y) \subseteq K_r(x) \subseteq V$ (slika 5.4). To pomeni, da velja $h(z) = 0$ za vsak $z \in K_{r'}(y)$, zato ima h v točki y ničlo tipa I in posledično je $y \in A$. S tem smo dokazali, da velja $K_r(x) \subseteq A$.

V nadaljevanju dokažimo še, da je tudi množica $D \setminus A$ odprta. To pomeni:

$$\forall x \in D \setminus A, \exists r > 0 : K_r(x) \subseteq D \setminus A.$$



Slika 5.4: Okolica V točke x.

Naj bo $x \in D \setminus A$ poljubna točka. Če ima h v x ničlo tipa II, potem obstaja taka okolica $\mathcal{U}$ točke x, da za vsak $z \in \mathcal{U} \setminus \{x\}$ velja $h(z) \neq 0$. To pomeni, da je $\mathcal{U} \subseteq D \setminus A$. Če pa po drugi strani h nima ničle v x, potem zaradi zveznosti f obstaja taka okolica $\mathcal{U}$ točke x, da za vsak $z \in \mathcal{U}$ velja $h(z) \neq 0$. Zato je $\mathcal{U} \subseteq D \setminus A$. V vsakem primeru po definiciji okolice torej obstaja tak $r > 0$, da je $K_r(x) \subseteq D \setminus A$.

Množica $D = A \cup (D \setminus A)$ je torej unija dveh odprtih množic. Seveda je množica A neprazna, saj je $a \in A$. Če bi bila množica $D \setminus A$ neprazna, bi to pomenilo, da je množica D nepovezana, kar je v nasprotju s predpostavko. To pomeni, da je množica $D \setminus A$ prazna in posledično je $D = A$. Sledi, da za vsak $z \in D = A$ velja $h(z) = 0$ oziroma $f(z) = g(z)$. □

Primer 5.17 Poiščimo vse holomorfne funkcije $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, za katere za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$.

Naj bo $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z^2}$. Potem je f holomorfna funkcija na $\mathbb{C}$, ki zadošča zgornjemu pogoju. Naj bo $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ še ena holomorfna funkcija, za katero velja $g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Vpeljimo zaporedje $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tako da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $z_n = \frac{1}{n}$. Očitno zaporedje $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira k 0, zato je to tudi stekališče danega zaporedja. Ker velja $f(z_n) = g(z_n)$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, po posledici 5.16 sledi $f(z) = g(z)$ za vsak $z \in \mathbb{C}$. To torej pomeni, da obstaja samo ena funkcija, ki zadošča zapisanemu pogoju.

Opomba 5.18 *Pogoj o obstoju stekališča v posledici 5.16 je res potreben, da posledica velja. Na primer, naj bo zaporedje $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ podano s splošnim členom $z_n = n\pi$. Očitno to zaporedje nima stekališča.*

Naj bosta $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funkciji, podani s predpisoma $f(z) = \sin z$ in $g(z) = 2\sin z$. Opazimo, da sta f, g holomorfni in da velja $f(z_n) = g(z_n)$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, vendar pa $f \neq g$.

Primer 5.19 Izrek 5.10 o Taylorjevi vrsti pove, da lahko funkcijo

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = \frac{1}{z-1} e^{\frac{1}{z}},$$

razvijemo v Taylorjevo vrsto okoli poljubne točke iz $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. V naslednjem razdelku bomo videli, da lahko funkcijo f razvijemo v primerno vrsto tudi okoli točk $z = 0$ in $z = 1$, ki jih bomo imenovali "singularne točke" funkcije f.

5.3 Laurentova vrsta

V tem razdelku bomo spoznali, kako lahko holomorfno funkcijo razvijemo v Laurentovo vrsto na nekem kolobarju okoli točke $a \in \mathbb{C}$.

Izrek 5.20 *Naj bo $a \in \mathbb{C}$ neka točka,*

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq r < |z-a| < R\}$$

kolobar v kompleksni ravnini in $f : A \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija na tem kolobarju. Tedaj za vsak $z \in A$ velja

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-a)^k, \tag{5.2}$$

kjer je

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{k+1}}\, d\xi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

in $\mathcal{C}$ poljubna pozitivno orientirana, enostavno sklenjena krivulja z odsekoma zvezno odvedljivo parametrizacijo, ki leži v A in obkroži točko $a \in \mathbb{C}$.

Opomba 5.21 *Vrsto v enakosti* (5.2) *imenujemo* ***Laurentova vrsta****.*

Dokaz. Naj bo $z \in A$ poljubna točka in $\mathcal{C}_0 = \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi - z| = r_0\}$ krožnica, ki v celoti leži v A. Definirajmo še dve krožnici

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi - a| = r_1\}, \\ \mathcal{C}_2 &= \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi - a| = r_2\}, \end{aligned}$$

tako da velja $r < r_1 < r_2 < R$ in da $\mathcal{C}_0$ leži v kolobarju med $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$.

Za točko $z \in A$ po izreku 4.22 velja:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_0} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi.$$

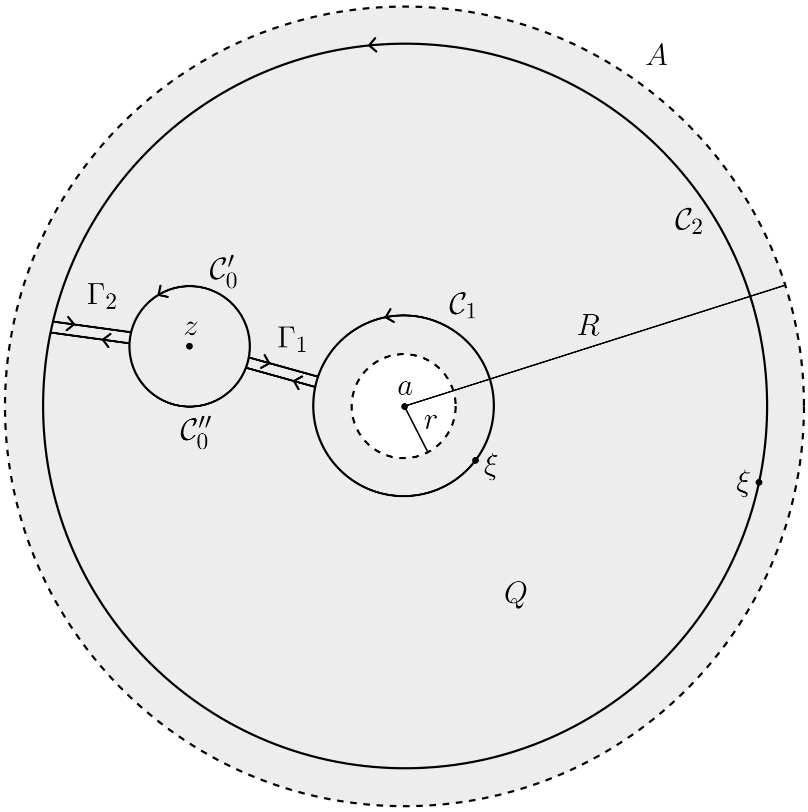
Naj bo Q kolobar med krožnicama $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$, brez kroga, ki ga omejuje $\mathcal{C}_0$, in brez daljic Γ_1 in Γ_2; glejte sliko 5.5.

Območje Q je enostavno povezano in funkcija $g : Q \to \mathbb{C}$, $g(\xi) = \dfrac{f(\xi)}{\xi - z}$, je holomorfna na Q. Zato funkcija g na območju Q zadošča pogojem (posplošenega) Cauchyjevega izreka 4.12:

$$\int_{\partial Q} g(\xi)\, d\xi = \int_{\partial Q} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = 0.$$

Rob območja Q pa je sestavljen iz več krivulj:

$$\partial Q = \mathcal{C}_2 \cup \Gamma_2 \cup (-\mathcal{C}_0') \cup \Gamma_1 \cup (-\mathcal{C}_1) \cup (-\Gamma_1) \cup (-\mathcal{C}_0'') \cup (-\Gamma_2),$$



Slika 5.5: Kolobar A (sivo) in območje Q, ki ga omejujejo krožnice $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0' \cup \mathcal{C}_0''$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ in daljici Γ_1, Γ_2.

kjer je $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0' \cup \mathcal{C}_0''$. Ko upoštevamo osnovna pravila integriranja, dobimo

$$\begin{aligned} 0 = \int\limits_{\partial Q} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi &= \int\limits_{\mathcal{C}_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - \int\limits_{\mathcal{C}_0'} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - \int\limits_{\mathcal{C}_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - \int\limits_{\mathcal{C}_0''} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \\ &= \int\limits_{\mathcal{C}_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - \int\limits_{\mathcal{C}_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - \int\limits_{\mathcal{C}_0} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi, \end{aligned}$$

kar nam da

$$\int\limits_{\mathcal{C}_0} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \int\limits_{\mathcal{C}_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - \int\limits_{\mathcal{C}_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

in posledično

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{C}_0} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{C}_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{C}_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi. \tag{5.3}$$

Najprej si oglejmo integral po krivulji $\mathcal{C}_2$. Opazimo, da za vsak $\xi \in \mathcal{C}_2$ velja $|\xi - a| >$

$|z-a|$ oziroma $\left|\dfrac{z-a}{\xi-a}\right| < 1$, zato je

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{\xi - a + a - z} = \frac{1}{(\xi-a)\left(1+\frac{a-z}{\xi-a}\right)} = \frac{1}{\xi-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{\xi-a}} \\
&= \frac{1}{\xi-a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-a)^k}{(\xi-a)^{k+1}}.
\end{aligned}$$

Tako dobimo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_2}\left(f(\xi)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-a)^k}{(\xi-a)^{k+1}}\right)d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(\xi)(z-a)^k}{(\xi-a)^{k+1}}\right)d\xi \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_2}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{k+1}}\,d\xi\right)(z-a)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-a)^k,
\end{aligned}$$

kjer enakost $(*)$, pri kateri zamenjamo vrstni red vsote in integrala, dokažemo enako kot pri izreku o Taylorjevi vrsti (glejte dokaz izreka 5.10). Pri tem opomnimo še, da lahko namesto krožnice $\mathcal{C}_2$ po izreku 4.17 uporabimo poljubno pozitivno orientirano in enostavno sklenjeno krivuljo $\mathcal{C}$, ki je homotopna s krožnico $\mathcal{C}_2$ glede na območje A (krivulja $\mathcal{C}$ torej leži v A in obkroži točko a).

Sedaj si oglejmo še integral po krivulji $\mathcal{C}_1$. Opazimo, da za vsak $\xi \in \mathcal{C}_1$ velja $|\xi-a| < |z-a|$ oziroma $\left|\dfrac{\xi-a}{z-a}\right| < 1$, zato je

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{\xi - a + a - z} = \frac{1}{(z-a)\left(\frac{\xi-a}{z-a}-1\right)} = -\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{\xi-a}{z-a}} \\
&= -\frac{1}{z-a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\xi-a}{z-a}\right)^k = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\xi-a)^k}{(z-a)^{k+1}}.
\end{aligned}$$

Tako dobimo

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{C}_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{C}_1}\left(f(\xi)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\xi-a)^k}{(z-a)^{k+1}}\right)d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{C}_1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(\xi)(\xi-a)^k}{(z-a)^{k+1}}\right)d\xi \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{C}_1} f(\xi)(\xi-a)^k\,d\xi\right)\frac{1}{(z-a)^{k+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{C}_1} f(\xi)(\xi-a)^{k-1}\,d\xi\right)\frac{1}{(z-a)^{k}} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{C}_1} f(\xi)(\xi-a)^{-k-1}\,d\xi\right)\frac{1}{(z-a)^{-k}} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{C}_1} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{k+1}}\,d\xi\right)(z-a)^{k} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z-a)^k.
\end{aligned}
$$

Dejstvo, da lahko zamenjamo vrstni red vsote in integrala, torej enakost $(*)$, ponovno dokažemo tako kot pri izreku o Taylorjevi vrsti. Tudi v tem primeru lahko po izreku 4.17 namesto krožnice $\mathcal{C}_1$ uporabimo poljubno pozitivno orientirano in enostavno sklenjeno krivuljo $\mathcal{C}$, ki je homotopna s krožnico $\mathcal{C}_1$ glede na območje A (krivulja $\mathcal{C}$ torej leži v A in obkroži točko a).

Iz enakosti 5.3 končno dobimo

$$
\begin{aligned}
f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{C}_0}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{C}_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathcal{C}_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z-a)^k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-a)^k.
\end{aligned}
$$

□

Primer 5.22 Razvijmo funkcijo $f:\mathbb{C}\setminus\{0,1\}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$, v Laurentovo vrsto okoli točke $a=0$.

Naj bo najprej $A_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$. Očitno za vsak $z \in A_1$ velja

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} z^k \\
&= -\sum_{k=0}^{\infty} z^{k-1} = -\sum_{k=-1}^{\infty} z^k = -\left(\frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \cdots\right) \\
&= -1 \cdot \frac{1}{z} - 1 \cdot z^0 - 1 \cdot z - 1 \cdot z^2 - \cdots.
\end{aligned}
$$

Po drugi strani pa lahko obravnavamo tudi kolobar $A_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$. Očitno za vsak $z \in A_2$ velja $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ in zato dobimo

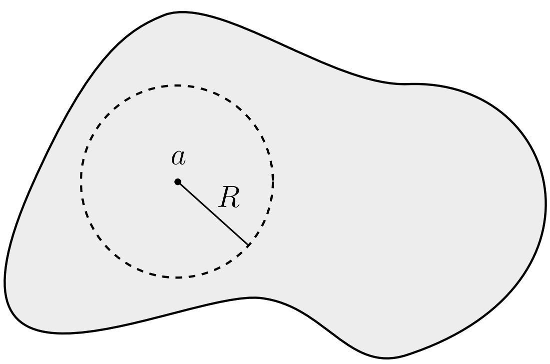
$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+2}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{z^k} = \sum_{k=-\infty}^{-2} z^k \\
&= \cdots + 1 \cdot \frac{1}{z^4} + 1 \cdot \frac{1}{z^3} + 1 \cdot \frac{1}{z^2}.
\end{aligned}
$$

Definicija 5.23 *Če je Laurentova vrsta funkcije f na kolobarju A enaka*

$$
f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z-a)^k}, \quad \forall z \in A,
$$

*potem levi vrsti pravimo **regularni del Laurentove vrste**, desni vrsti pa pravimo **glavni del Laurentove vrste**.*

Definicija 5.24 *Točka $a \in \mathbb{C}$ je **izolirana singularna točka** funkcije f, če je f holomorfna na neki okolici točke a, razen v točki a (slika 5.6).*



Slika 5.6: Izolirana singularna točka a.

Opomba 5.25 *Če je $a \in \mathbb{C}$ izolirana singularna točka funkcije f, potem lahko funkcijo f razvijemo v Laurentovo vrsto na nekem kolobarju $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-a| < R\}$.*

Definicija 5.26 *Denimo, da funkcijo f razvijemo v Laurentovo vrsto v okolici izolirane singularne točke $a \in \mathbb{C}$ na nekem kolobarju $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-a| < R\}$.*

*(1) Če glavnega dela te vrste ni (oziroma je enak 0), potem ima funkcija f v točki a **odpravljivo singularnost**.*

*(2) Če ima glavni del te vrste končno mnogo neničelnih členov in je $n \in \mathbb{N}$ največje število, za katerega je $a_{-n} \neq 0$, potem ima funkcija f v točki a **pol n-te stopnje**.*

*(3) Če ima glavni del te vrste neskončno mnogo neničelnih členov, potem ima funkcija f v točki a **bistveno singularnost**.*

Primer 5.27 (1) Naj bo $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z}$, in $a = 0$. Opazimo, da za vsak $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ velja

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right)\right) = \frac{z}{2!} - \frac{z^3}{4!} + \frac{z^5}{6!} - \cdots,$$

kar pomeni, da ima funkcija f v točki $a = 0$ odpravljivo singularnost.

(2) Naj bo $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^4}$, in $a = 0$. V tem primeru za vsak $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ velja

$$f(z) = \frac{1}{z^4}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \cdots.$$

Opazimo, da ima funkcija f v točki $a = 0$ pol 3. stopnje.

(3) Naj bo $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, in $a = 0$. Opazimo, da za vsak $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ velja

$$f(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots,$$

kar pomeni, da ima funkcija f v točki $a = 0$ bistveno singularnost.

Izrek 5.28 *Naj bo $a \in \mathbb{C}$ izolirana singularna točka funkcije f. Funkcija f ima v točki $a \in \mathbb{C}$ odpravljivo singularnost natanko tedaj, ko obstaja okolica $\mathcal{U}$ točke a, tako da je funkcija f omejena na $\mathcal{U} \setminus \{a\}$.*

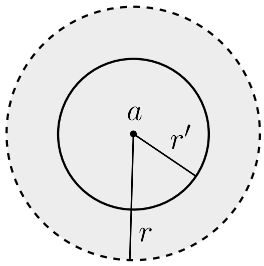
Dokaz. ($\Longrightarrow$) Najprej predpostavimo, da ima funkcija f v točki a odpravljivo singularnost. To pomeni, da lahko funkcijo f na nekem kolobarju $K_r(a) \setminus \{a\}$, torej na nekem odprtem krogu brez točke a, razvijemo v Laurentovo vrsto tako, da glavnega dela te vrste ni:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k, \quad \forall z \in K_r(a) \setminus \{a\}.$$

Definirajmo novo funkcijo $F : K_r(a) \to \mathbb{C}$, tako da za vsak $z \in K_r(a)$ velja

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k.$$

Funkcija F je dobro definirana, prav tako je po izrekih 5.8 in 5.6 zvezna na $K_r(a)$, saj je vsota potenčne vrste. Od tod dobimo, da je funkcija F zvezna tudi na zaprtem krogu $\overline{K}_{r'}(a)$, kjer je $0 < r' < r$ (slika 5.7), torej na zaprti in omejeni množici (oziroma kompaktni množici), zato je omejena na $\overline{K}_{r'}(a) \subseteq K_r(a)$ ter posledično tudi na $K_{r'}(a)$ in $K_{r'}(a) \setminus \{a\}$. Za iskano množico $\mathcal{U}$ lahko torej vzamemo kar $K_{r'}(a)$.



Slika 5.7: Kroga $K_r(a)$ in $\overline{K}_{r'}(a)$.

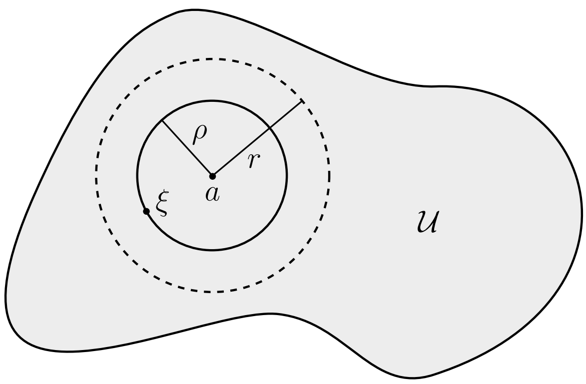
($\Longleftarrow$) Za drugo smer predpostavimo, da je f omejena na množici $\mathcal{U} \setminus \{a\}$, kjer je $\mathcal{U}$ neka okolica točke a. To pomeni:

$$\exists M > 0, \forall z \in \mathcal{U} : |f(z)| \leq M.$$

Naj bo $K_r(a)$ odprti krog, ki leži v $\mathcal{U}$. Potem za vsak $z \in K_r(a) \setminus \{a\}$ velja

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-a)^k.$$

Dokažimo, da je $a_{-m} = 0$ za vsak $m \in \mathbb{N}$. Naj bo torej $m \in \mathbb{N}$ poljubno število in $\mathcal{K}_\rho$ poljubna krožnica s središčem v a in polmerom ρ, ki leži v $K_r(a)$ (slika 5.8).



Slika 5.8: Okolica $\mathcal{U}$ točke a, krog $K_r(a)$ in krožnica $\mathcal{K}_\rho$.

Potem velja

$$
\begin{aligned}
|a_{-m}| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{K}_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{-m+1}}\, d\xi \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \right| \cdot \left| \int\limits_{\mathcal{K}_\rho} f(\xi)(\xi - a)^{m-1}\, d\xi \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{\mathcal{K}_\rho} f(\xi)(\xi - a)^{m-1}\, d\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathcal{K}_\rho} |f(\xi)| \cdot |\xi - a|^{m-1}\, ds \\
&= \frac{\rho^{m-1}}{2\pi} \int\limits_{\mathcal{K}_\rho} |f(\xi)|\, ds \leq \frac{M\rho^{m-1}}{2\pi} \int\limits_{\mathcal{K}_\rho} 1\, ds = \frac{M\rho^{m-1}}{2\pi} 2\pi\rho \\
&= M\rho^m.
\end{aligned}
$$

Ker zgornja ocena velja za vsak $\rho \in (0, r)$, izraz $M\rho^m$ pa gre proti 0, ko gre ρ proti 0, mora veljati $|a_{-m}| = 0$ in posledično tudi $a_{-m} = 0$. □

Izrek 5.29 *Naj bo $a \in \mathbb{C}$ izolirana singularna točka funkcije f. Funkcija f ima v točki $a \in \mathbb{C}$ pol n-te stopnje natanko tedaj, ko obstaja funkcija g, ki je holomorfna na neki okolici $\mathcal{U}$ točke a, tako da je $g(a) \neq 0$, za vsak $z \in \mathcal{U} \setminus \{a\}$ pa velja*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - a)^n}.$$

Dokaz. ($\Longrightarrow$) Najprej predpostavimo, da ima funkcija f v točki a pol n-te stopnje. To pomeni, da jo lahko na nekem kolobarju $K_r(a) \setminus \{a\}$ razvijemo v Laurentovo vrsto tako, da ima glavni del končno mnogo neničelnih členov. Za vsak $z \in K_r(a) \setminus \{a\}$ je

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{a_{-n}}{(z - a)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z - a)^{n-1}} + \cdots + a_0 + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \cdots \\
&= \frac{1}{(z - a)^n} \left(a_{-n} + a_{-(n-1)}(z - a) + \cdots + a_0(z - a)^n + a_1(z - a)^{n+1} + \cdots \right),
\end{aligned}
$$

kjer je $a_{-n} \neq 0$. Definirajmo funkcijo $g : K_r(a) \to \mathbb{C}$, tako da za vsak $z \in K_r(a)$ velja

$$g(z) = a_{-n} + a_{-(n-1)}(z - a) + \cdots + a_0(z - a)^n + a_1(z - a)^{n+1} + \cdots.$$

Funkcija g je vsota potenčne vrste in je zato analitična na krogu $K_r(a)$, kar pomeni, da je na tem krogu po izreku 5.13 tudi holomorfna. Poleg tega je $g(a) = a_{-n} \neq 0$, za vsak $z \in K_r(a) \setminus \{a\}$ pa velja

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - a)^n}.$$

($\Longleftarrow$) Za drugo smer predpostavimo, da obstaja funkcija g, ki je holomorfna na neki okolici $\mathcal{U}$ točke a, tako da je $g(a) \neq 0$, za vsak $z \in \mathcal{U} \setminus \{a\}$ pa velja

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - a)^n}.$$

Na nekem kolobarju $K_r(a) \setminus \{a\}$ lahko funkcijo f razvijemo v Laurentovo vrsto. To pomeni, da za vsak $z \in K_r(a) \setminus \{a\}$ velja

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-a)^k.$$

Najprej dokažimo, da je $a_{-n} \neq 0$. Naj bo $\mathcal{C}$ neka krožnica s središčem v a, ki v celoti leži v $K_r(a) \setminus \{a\}$. Izračunajmo

$$\begin{aligned} a_{-n} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{-n+1}}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{g(\xi)}{(\xi-a)^n (\xi-a)^{-n+1}}\, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{g(\xi)}{\xi - a}\, d\xi = g(a) \neq 0, \end{aligned}$$

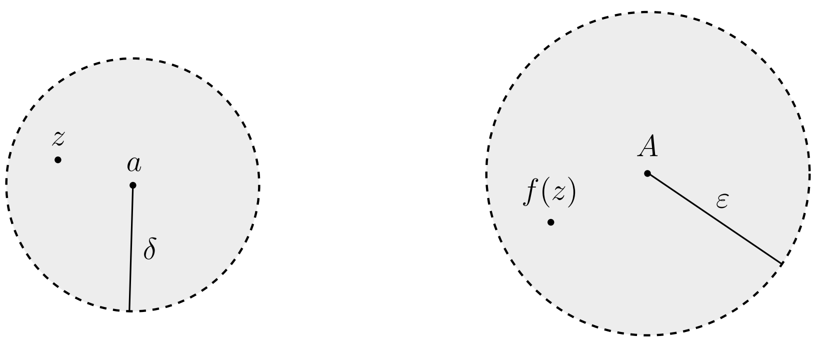
kjer smo pri zadnji enakosti uporabili izrek 4.22.

Sedaj dokažimo še, da je $a_{-(n+m)} = 0$ za vsak $m \in \mathbb{N}$. Ponovno naj bo $\mathcal{C}$ neka krožnica s središčem v a, ki v celoti leži v $K_r(a) \setminus \{a\}$. Potem je

$$\begin{aligned} a_{-(n+m)} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{-n-m+1}}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{g(\xi)}{(\xi-a)^n (\xi-a)^{-n-m+1}}\, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{g(\xi)}{(\xi-a)^{-m+1}}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} g(\xi)(\xi-a)^{m-1} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

kjer smo pri predzadnji enakosti uporabili Cauchyjev izrek 4.9. S tem smo preverili, da ima funkcija f v točki a pol n-te stopnje. □

Izrek 5.30 (Casorati-Weierstrassov izrek) *Naj ima funkcija f v točki $a \in \mathbb{C}$ bistveno singularnost. Potem za vsak $A \in \mathbb{C}$, za vsak $\varepsilon > 0$ in za vsak $\delta > 0$ obstaja $z \in \mathbb{C}$, za katerega velja $|z-a| < \delta$ in $|f(z) - A| < \varepsilon$ (slika 5.9).*



Slika 5.9: Točki z in $f(z)$, za kateri velja $|z-a| < \delta$ in $|f(z) - A| < \varepsilon$.

Dokaz. Denimo, da to ne velja. Potem obstajajo taki $A \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ in $\delta > 0$, da za vsak $z \in \mathbb{C}$ velja $|z-a| \geq \delta$ ali $|f(z) - A| \geq \varepsilon$. To pomeni, da je za vsak $z \in \mathbb{C}$ resnična implikacija:

$$|z-a| < \delta \implies |f(z) - A| \geq \varepsilon.$$

Zapisana izjava nam pove, da funkcija $f - A$ na kolobarju $K_\delta(a) \setminus \{a\}$ nima ničle, saj je $|f(z) - A| \geq \varepsilon$ za vsak $z \in K_\delta(a) \setminus \{a\}$. Zato definirajmo funkcijo $g : K_\delta(a) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$, tako da za vsak $z \in K_\delta(a) \setminus \{a\}$ velja

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - A}.$$

Očitno je funkcija g na množici $K_\delta(a) \setminus \{a\}$ dobro definirana, prav tako je na tej množici holomorfna. Opazimo, da je točka a izolirana singularna točka tudi za funkcijo g. Prav tako je funkcija g na množici $K_\delta(a) \setminus \{a\}$ omejena, saj za vsak $z \in K_\delta(a) \setminus \{a\}$ velja

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - A|} \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Po izreku 5.28 ima funkcija g v točki a odpravljivo singularnost, zato za vsak $z \in K_\delta(a) \setminus \{a\}$ velja

$$g(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots,$$

kjer seveda niso vsi koeficienti a_k enaki 0, saj g ni ničelna funkcija. Naj bo $n \in \mathbb{N}_0$ najmanjše število, za katerega je $a_n \neq 0$ in $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$. To pomeni, da za vsak $z \in K_\delta(a) \setminus \{a\}$ velja

$$\begin{aligned} g(z) &= a_n(z-a)^n + a_{n+1}(z-a)^{n+1} + a_{n+2}(z-a)^{n+2} + \cdots \\ &= (z-a)^n \big(a_n + a_{n+1}(z-a) + a_{n+2}(z-a)^2 + \cdots\big). \end{aligned}$$

Definirajmo funkcijo $h : K_\delta(a) \to \mathbb{C}$, tako da za vsak $z \in K_\delta(a)$ velja

$$h(z) = a_n + a_{n+1}(z-a) + a_{n+2}(z-a)^2 + \cdots.$$

Očitno je h holomorfna na $K_\delta(a)$ in $h(a) = a_n \neq 0$. Opazimo tudi, da za poljuben $z \in K_\delta(a) \setminus \{a\}$ velja

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - A} = (z-a)^n h(z),$$

od koder dobimo

$$f(z) = A + \frac{1}{h(z)(z-a)^n} = \frac{A(z-a)^n + \frac{1}{h(z)}}{(z-a)^n}.$$

Naj bo funkcija $k : K_\delta(a) \to \mathbb{C}$ podana s predpisom

$$k(z) = A(z-a)^n + \frac{1}{h(z)}.$$

Očitno je k dobro definirana, saj je $h(z) \neq 0$ za vse $z \in K_\delta(a)$. Prav tako je funkcija k holomorfna na $K_\delta(a)$. Ker je $k(a) \neq 0$ in za vse $z \in K_\delta(a) \setminus \{a\}$ velja

$$f(z) = \frac{k(z)}{(z-a)^n},$$

ima po izreku 5.29 funkcija f v točki a pol n-te stopnje, kar je protislovje. S tem smo torej zaključili dokaz izreka. $\square$

Opomba 5.31 *(1) Izrek nam pove, da so v okolici bistvene singularnosti $a \in \mathbb{C}$ točke, ki se s funkcijo f slikajo blizu poljubne točke v kompleksni ravnini.*

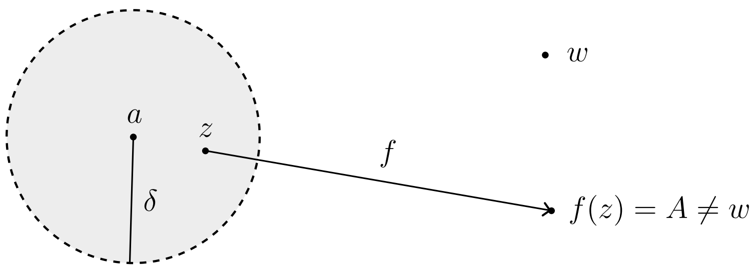
(2) Naj bo $n \in \mathbb{N}$ poljuben. Če izberemo $\varepsilon = \delta = \frac{1}{n}$, potem nam zgornji izrek pove, da obstaja tak $z_n \in \mathbb{C}$, za katerega velja

$$|z_n - a| < \frac{1}{n} \quad \text{in} \quad |f(z_n) - A| < \frac{1}{n}.$$

Ker zapisano velja za vsak $n \in \mathbb{N}$, sledi, da zaporedje $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira k a, zaporedje $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ pa konvergira k A.

Ob koncu razdelka navedimo še veliki Picardov izrek [4], ki pa ga ne bomo dokazovali.

Izrek 5.32 (veliki Picardov izrek) *Naj ima funkcija f v točki $a \in \mathbb{C}$ bistveno singularnost. Potem obstaja množica $E \subset \mathbb{C}$ z največ enim elementom, tako da za vsak $A \in \mathbb{C} \setminus E$ in vsak $\delta > 0$ obstaja $z \in \mathbb{C}$, da velja $|z - a| < \delta$ in $f(z) = A$ (slika 5.10).*



Slika 5.10: Ponazoritev velikega Picardovega izreka za $E = \{w\}$, kjer je $w \in \mathbb{C}$.

5.4 Izrek o residuumih

Definicija 5.33 *Naj bo $a \in \mathbb{C}$ izolirana singularna točka funkcije f, kar pomeni, da lahko funkcijo f razvijemo v Laurentovo vrsto na nekem kolobarju $K_r(a) \setminus \{a\}$:*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-a)^k.$$

*Koeficient a_{-1} v tej vrsti imenujemo **residuum funkcije** f **v točki** a in ga označimo z*

$$\operatorname{Res}(f, a) = a_{-1}.$$

Opomba 5.34 *(1) Po izreku 5.20 je*

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{-1+1}}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} f(\xi)\, d\xi,$$

zato velja

$$\int_{\mathcal{C}} f(\xi)\, d\xi = 2\pi i \cdot a_{-1} = 2\pi i \operatorname{Res}(f, a),$$

kjer je $\mathcal{C}$ pozitivno orientirana, enostavno sklenjena krivulja z odsekoma zvezno odvedljivo parametrizacijo, ki obkroži singularnost $a \in \mathbb{C}$.

(2) Če singularnosti v točki $a \in \mathbb{C}$ ni ali pa ima f v točki a odpravljivo singularnost, potem je $a_{-1} = 0$ in zgornja ugotovitev sovpada s Cauchyjevim izrekom.

Izrek 5.35 (izrek o residuumih) *Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ enostavno povezano območje v $\mathbb{C}$ in naj bo funkcija f holomorfna na $D_0 = D \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, kjer so $z_1, z_2, \ldots, z_n$ izolirane singularne točke funkcije f. Denimo, da neka pozitivno orientirana, enostavno sklenjena krivulja $\mathcal{K} \subseteq D$ z odsekoma zvezno odvedljivo parametrizacijo obkroži nekaj teh singularnosti, na primer $z_1, z_2, \ldots, z_k$, $k \leq n$. Potem je*

$$\int_{\mathcal{K}} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f, z_j).$$

Dokaz. Za vsak $j \in \{1, \ldots, k\}$ naj bo $\mathcal{C}_j$ pozitivno orientirana krožnica, ki obkroži singularnost z_j. Predpostavimo, da vsaka izmed teh krožnic leži v D_0 in da obkroži le eno singularnost. Prav tako naj bodo te krožnice paroma disjunktne. Glede na zgoraj zapisano opombo vemo, da za vsak $j \in \{1, \ldots, k\}$ velja

$$\int_{\mathcal{C}_j} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_j).$$

Za vsak $j \in \{1, \ldots, k\}$ naj bo $\mathcal{U}_j$ zaprti krog, ki ga omejuje krožnica $\mathcal{C}_j$. Naj bo še D_k notranjost območja, ki ga omejuje krivulja $\mathcal{K}$, in

$$\widetilde{D} = D_k \setminus (\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{U}_k \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \cdots \cup \Gamma_k),$$

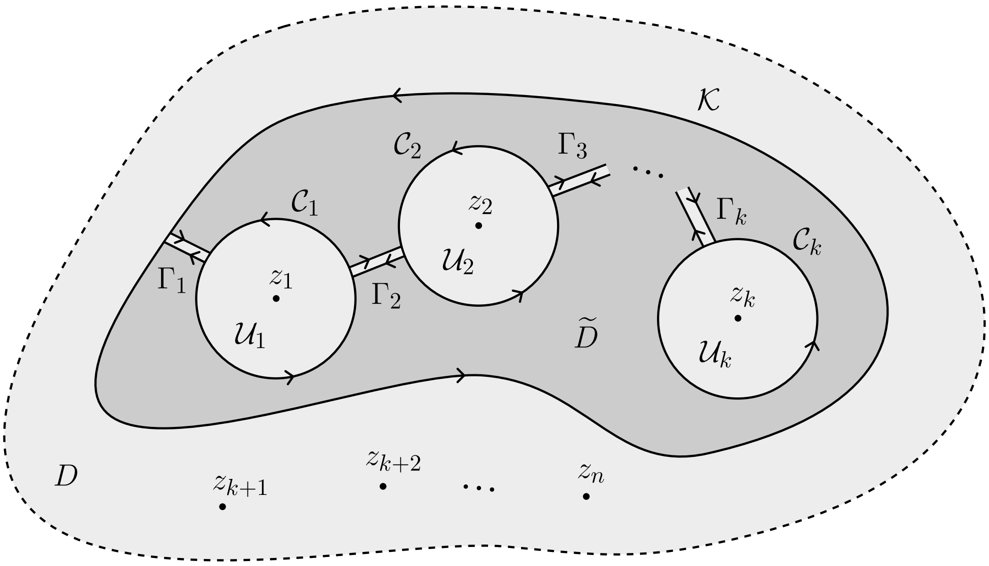
kjer so $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ daljice, prikazane na sliki 5.11.

Območje $\widetilde{D}$ je enostavno povezano in f je holomorfna na $\widetilde{D}$, zato za funkcijo f na območju $\widetilde{D}$ velja posplošeni Cauchyjev izrek 4.12:

$$\int_{\partial \widetilde{D}} f(z)\, dz = 0.$$

Če integral na levi strani zgornje enakosti razstavimo po krivuljah, ki sestavljajo $\partial \widetilde{D}$, in upoštevamo, da se integrali po daljicah $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ odštejejo, dobimo

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\partial \widetilde{D}} f(z)\, dz &= \int_{\mathcal{K}} f(z)\, dz + \int_{-\mathcal{C}_1} f(z)\, dz + \cdots + \int_{-\mathcal{C}_k} f(z)\, dz \\ &= \int_{\mathcal{K}} f(z)\, dz - \int_{\mathcal{C}_1} f(z)\, dz - \cdots - \int_{\mathcal{C}_k} f(z)\, dz. \end{aligned}$$



Slika 5.11: Krivulja $\mathcal{K}$ in območje $\widetilde{D}$.

Posledično velja

$$\int\limits_{\mathcal{K}} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{k} \left(\int\limits_{\mathcal{C}_j} f(z)\,dz \right) = \sum_{j=1}^{k} 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_j) = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f, z_j).$$

$\square$

Primer 5.36 Izračunajmo integral $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{z}\,dz$.

Funkcija $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z}$, je holomorfna na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ in je že razvita v Laurentovo vrsto na tem območju okoli točke $a = 0$:

$$f(z) = \cdots + 0 \cdot z^{-2} + 1 \cdot z^{-1} + 0 \cdot z^0 + 0 \cdot z + 0 \cdot z^2 + \cdots.$$

Opazimo, da je

$$\operatorname{Res}(f, 0) = a_{-1} = 1,$$

zato dobimo

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = 2\pi i.$$

V nadaljevanju si oglejmo, kako računamo residuume.

Računanje residuumov:

(1) *V točki $a \in \mathbb{C}$ ima funkcija f odpravljivo singularnost.*

V tem primeru očitno velja

$$\operatorname{Res}(f, a) = 0.$$

(2) *V točki $a \in \mathbb{C}$ ima funkcija f pol n-te stopnje, kjer je $n \in \mathbb{N}$.*

Obravnavajmo najprej situacijo, ko je v točki a pol 1. stopnje. To pomeni, da obstaja tak $r > 0$, da za vsak $z \in K_r(a) \setminus \{a\}$ velja

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots$$

oziroma

$$f(z)(z-a) = a_{-1} + a_0(z-a) + a_1(z-a)^2 + \cdots,$$

kar nam da

$$\mathrm{Res}(f,a) = \lim_{z\to a}\big(f(z)(z-a)\big).$$

Sedaj si oglejmo še splošno situacijo, ko je v točki a pol n-te stopnje. Obstaja torej tak $r > 0$, da za vsak $z \in K_r(a) \setminus \{a\}$ velja

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots$$

oziroma

$$f(z)(z-a)^n = a_{-n} + a_{-(n-1)}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{n-1} + a_0(z-a)^n + \cdots.$$

Če zadnji izraz $(n-1)$-krat odvajamo, dobimo

$$\big(f(z)(z-a)^n\big)^{(n-1)} = (n-1)! \cdot a_{-1} + n! \cdot a_0(z-a) + \cdots,$$

zato velja

$$\mathrm{Res}(f,a) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\big(f(z)(z-a)^n\big)^{(n-1)}.$$

(3) *V točki $a \in \mathbb{C}$ ima funkcija f bistveno singularnost.*

V tem primeru funkcijo f razvijemo v Laurentovo vrsto okoli točke a in razberemo koeficient a_{-1}.

Primer 5.37 (1) Izračunajmo $\mathrm{Res}\left(\dfrac{1}{z^2+1}, i\right)$.

Funkcija f s predpisom

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$$

ima pol 1. stopnje v točki $a = i$. Posledično je

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2+1}, i\right) = \lim_{z\to i}\left(\frac{1}{z^2+1}(z-i)\right) = \lim_{z\to i}\frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}.$$

(2) Izračunajmo $\mathrm{Res}\left(\dfrac{\cos(2z)}{z^3}, 0\right)$.

Očitno za vsak $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ velja

$$\frac{\cos(2z)}{z^3} = \frac{1}{z^3}\left(1 - \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} - \cdots\right) = \frac{1}{z^3} - \frac{2}{z} + \frac{2z}{3} - \cdots,$$

zato ima funkcija f s predpisom

$$f(z) = \frac{\cos(2z)}{z^3}$$

v točki $a = 0$ pol 3. stopnje. Posledično je

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{\cos(2z)}{z^3}, 0\right) &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{\cos(2z)}{z^3}z^3\right)'' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}(\cos(2z))'' \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}(-4\cos(2z)) = -2.\end{aligned}$$

Izrek 5.38 (L'Hospitalovo pravilo) *Naj bosta funkciji f in g holomorfni na neki okolici točke $a \in \mathbb{C}$ in naj bo $f(a) = g(a) = 0$. Dodatno predpostavimo, da funkcija g na nobeni okolici točke a ni identično enaka 0. Potem velja*

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a}\frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Dokaz. Funkciji f in g lahko razvijemo v Taylorjevo vrsto na neki okolici točke $a \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}f(z) &= a_n(z-a)^n + a_{n+1}(z-a)^{n+1} + \cdots; \quad a_n \neq 0,\\ g(z) &= b_m(z-a)^m + b_{m+1}(z-a)^{m+1} + \cdots; \quad b_m \neq 0,\end{aligned}$$

kjer sta $n, m \in \mathbb{N}$. Zato je

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{(z-a)^n(a_n + a_{n+1}(z-a) + \cdots)}{(z-a)^m(b_m + b_{m+1}(z-a) + \cdots)}$$

in posledično velja

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)} = \begin{cases} 0; & n > m \\ \frac{a_n}{b_m}; & n = m \\ \infty; & n < m \end{cases}.$$

Po drugi strani na okolici točke a velja

$$\begin{aligned}f'(z) &= na_n(z-a)^{n-1} + (n+1)a_{n+1}(z-a)^n + \cdots,\\ g'(z) &= mb_m(z-a)^{m-1} + (m+1)b_{m+1}(z-a)^m + \cdots\end{aligned}$$

in

$$\frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{(z-a)^{n-1}(na_n + (n+1)a_{n+1}(z-a) + \cdots)}{(z-a)^{m-1}(mb_m + (m+1)b_{m+1}(z-a) + \cdots)}.$$

Opazimo, da je

$$\lim_{z\to a}\frac{f'(z)}{g'(z)} = \begin{cases} 0; & n > m \\ \frac{na_n}{mb_m}; & n = m \\ \infty; & n < m \end{cases} = \begin{cases} 0; & n > m \\ \frac{a_n}{b_m}; & n = m \\ \infty; & n < m \end{cases} = \lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)},$$

kar zaključi dokaz izreka. □

Primer 5.39 Izračunajmo integral $\int\limits_{\mathcal{K}} \frac{1}{z^5 - 32}\, dz$, kjer je $\mathcal{K}$ pozitivno orientirana, enostavno sklenjena krivulja z odsekoma zvezno odvedljivo parametrizacijo, ki obkroži eno izmed singularnih točk funkcije pod integralom.

Najprej poiščimo vse singularne točke funkcije f, ki je podana s predpisom

$$f(z) = \frac{1}{z^5 - 32}.$$

Najti moramo torej vse $z \in \mathbb{C}$, za katere je $z^5 = 32$. Če uporabimo Eulerjev zapis, velja $z = |z|e^{i\varphi}$ in posledično

$$z^5 = |z|^5 e^{5i\varphi} = 32e^{i\cdot 0},$$

zato dobimo $|z|^5 = 32$ in $5\varphi = 0 + 2k\pi$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$. To pomeni, da je $|z| = 2$ in

$$\varphi_k = \frac{2k\pi}{5}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Singularne točke funkcije f so torej števila

$$z_k = 2e^{i\frac{2k\pi}{5}}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Denimo, da krivulja $\mathcal{K}$ obkroži singularno točko z_1. Potem z uporabo izreka 5.38 dobimo

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^5 - 32}, z_1\right) &= \lim_{z \to z_1} \left(\frac{1}{z^5 - 32}(z - z_1)\right) = \lim_{z \to z_1} \frac{z - z_1}{z^5 - 32} \\
&= \lim_{z \to z_1} \frac{1}{5z^4} = \frac{1}{5 \cdot 2^4 e^{i\frac{8\pi}{5}}} = \frac{1}{80} e^{-i\frac{8\pi}{5}}.
\end{aligned}$$

Posledično po izreku 5.35 velja

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{K}} \frac{1}{z^5 - 32}\, dz &= 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^5 - 32}, z_1\right) = 2\pi i \cdot \frac{1}{80} e^{-i\frac{8\pi}{5}} \\
&= \frac{\pi}{40} e^{i\frac{\pi}{2}} e^{-i\frac{8\pi}{5}} = \frac{\pi}{40} e^{-i\frac{11\pi}{10}} = \frac{\pi}{40} e^{2\pi i - i\frac{11\pi}{10}} = \frac{\pi}{40} e^{i\frac{9\pi}{10}}.
\end{aligned}$$

Podobno bi naredili izračun, če bi krivulja $\mathcal{K}$ obkrožila katero izmed preostalih izoliranih singularnih točk ali pa celo več izmed njih.

5.5 Uporaba izreka o residuumih pri računanju realnih integralov

V tem razdelku bomo predstavili nekaj primerov realnih integralov, ki jih lahko izračunamo s pomočjo kompleksne integracije.

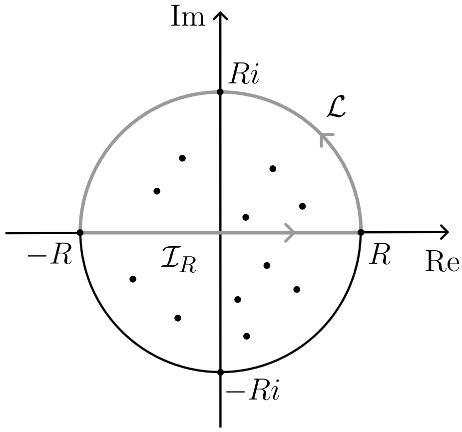
5.5.1 Integrali oblike $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$

Naj bo funkcija f podana s predpisom

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

kjer je p polinom stopnje n in q polinom stopnje m, tako da velja $m \geq n + 2$. Predpostavimo še, da polinom q nima realnih ničel.

Naj bo $R > 0$ takšen, da krog $K_R(0)$ obkroži vse ničle polinoma q v $\mathbb{C}$. Naj bo še $\mathcal{L}$ zgornja polkrožnica s središčem v 0 in polmerom R ter $\mathcal{I}_R$ daljica od $-R$ do R (slika 5.12).



Slika 5.12: Krivulja $\mathcal{C} = \mathcal{I}_R \cup \mathcal{L}$.

Sledi, da je krivulja $\mathcal{C} = \mathcal{I}_R \cup \mathcal{L}$ enostavno sklenjena in zato po izreku 5.35 velja

$$\int\limits_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f, z_j),$$

kjer so $z_1, z_2, \ldots, z_k$ ničle polinoma q, ki ležijo v zgornji polravnini. Po drugi strani pa lahko zgornji integral zapišemo kot

$$\int\limits_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = \int\limits_{\mathcal{I}_R} f(z)\,dz + \int\limits_{\mathcal{L}} f(z)\,dz.$$

Obravnavajmo najprej prvi integral na desni strani zgornje enakosti. Očitno je $z : [-R, R] \to \mathcal{I}_R$, $z(x) = x$, parametrizacija krivulje $\mathcal{I}_R$. Opazimo, da za vsak $x \in [-R, R]$ velja $\dot{z}(x) = 1$, zato dobimo

$$\int\limits_{\mathcal{I}_R} f(z)\,dz = \int\limits_{-R}^{R} f(x) \cdot 1\,dx = \int\limits_{-R}^{R} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx,$$

kar seveda konvergira proti

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx,$$

ko gre R proti neskončno.

Sedaj pokažimo še, da velja

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathcal{L}} f(z)\,dz = 0.$$

Krivulja $\mathcal{L}$ je kompaktna množica. Ker je f zvezna na $\mathcal{L}$, je na tej množici zvezna tudi funkcija $|f|$, ki zato na $\mathcal{L}$ doseže minimum in maksimum. To pomeni:

$$\exists z_0 \in \mathcal{L}, \forall z \in \mathcal{L} : |f(z)| \leq |f(z_0)|.$$

Posledično velja

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathcal{L}} f(z)\,dz\right| &\leq \int_{\mathcal{L}} |f(z)|\,ds \leq \int_{\mathcal{L}} |f(z_0)|\,ds = |f(z_0)| \int_{\mathcal{L}} ds = |f(z_0)| \cdot \pi R \\
&= |f(z_0)| \cdot \pi \cdot |z_0| = \pi |f(z_0) z_0| = \pi \left| \frac{p(z_0)}{q(z_0)} z_0 \right| \\
&= \pi \left| \frac{\left(a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \cdots + a_2 z_0^2 + a_1 z_0 + a_0\right) z_0}{b_m z_0^m + b_{m-1} z_0^{n-1} + \cdots + b_2 z_0^2 + b_1 z_0 + b_0} \right| \\
&= \pi \left| \frac{z_0^{n+1} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z_0} + \cdots + \frac{a_1}{z_0^{n-1}} + \frac{a_0}{z_0^n}\right)}{z_0^m \left(b_m + \frac{b_{m-1}}{z_0} + \cdots + \frac{b_1}{z_0^{m-1}} + \frac{b_0}{z_0^m}\right)} \right|.
\end{aligned}$$

Ker je $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ in $m \geq n+2$, gre zgornji izraz proti 0, ko gre $R = |z_0|$ proti neskončno, zato je

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathcal{L}} f(z)\,dz = 0.$$

Seveda je

$$\begin{aligned}
2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f, z_j) &= \lim_{R\to\infty} \int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\mathcal{I}_R} f(z)\,dz + \lim_{R\to\infty} \int_{\mathcal{L}} f(z)\,dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx + 0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx,
\end{aligned}$$

zato končno dobimo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f, z_j) = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}, z_j\right).$$

Primer 5.40 Izračunajmo integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+5x^2+4}$. Očitno je

$$z^4+5z^2+4=(z^2+1)(z^2+4)=(z+i)(z-i)(z+2i)(z-2i),$$

zato sta $z_1 = i$ in $z_2 = 2i$ edini ničli polinoma v imenovalcu, ki ležita v zgornji polravnini. Ker gre za pola 1. stopnje, lahko residuuma izračunamo tako:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+5z^2+4}, i\right) &= \lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z+i)(z-i)(z+2i)(z-2i)}(z-i)\right) = \frac{1}{6i},\\
\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+5z^2+4}, 2i\right) &= \lim_{z\to 2i}\left(\frac{1}{(z+i)(z-i)(z+2i)(z-2i)}(z-2i)\right) = -\frac{1}{12i}.
\end{aligned}$$

Posledično izpeljemo

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+5x^2+4} &= 2\pi i\left(\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+5z^2+4}, i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+5z^2+4}, 2i\right)\right)\\
&= 2\pi i\left(\frac{1}{6i}-\frac{1}{12i}\right) = \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

5.5.2 Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx$, kjer je $0 < a < 1$

Funkcija f naj bo podana s predpisom

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z},$$

kjer je $0 < a < 1$. Da poiščemo njene singularne točke, moramo rešiti enačbo

$$1+e^z = 0 \quad \text{oziroma} \quad e^z = -1.$$

Rešitve so torej

$$z = \log(-1) = \ln|-1| + i(\operatorname{Arg}(-1)+2k\pi) = i(\pi+2k\pi) = i\pi + 2k\pi i,$$

kjer je $k \in \mathbb{Z}$.

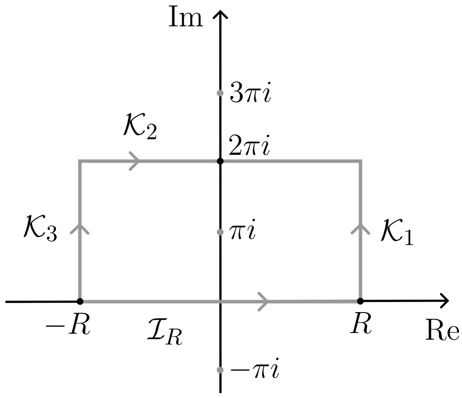
Naj bodo $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_3$ in $\mathcal{I}_R$ daljice, prikazane na sliki 5.13, tako da velja $R > 0$.

Krivulja

$$\mathcal{C} = \mathcal{I}_R \cup \mathcal{K}_1 \cup (-\mathcal{K}_2) \cup (-\mathcal{K}_3)$$

je enostavno sklenjena, opazimo pa tudi, da ima funkcija f v točki πi pol 1. stopnje, saj je

$$1+e^z = 1+e^{z-\pi i}e^{\pi i} = 1-e^{z-\pi i} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(z-\pi i)^k}{k!}$$



Slika 5.13: Krivulje $\mathcal{I}_R$, $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ in $\mathcal{K}_3$.

in posledično

$$\frac{e^{az}}{1+e^z} = \frac{1}{z-\pi i}\left(\frac{-e^{az}}{1+\frac{z-\pi i}{2!}+\frac{(z-\pi)^2}{3!}+\cdots}\right).$$

Zato po izreku 5.35 velja

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{C}} f(z)\,dz &= 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,\pi i) = 2\pi i \lim_{z\to\pi i}\left(\frac{e^{az}}{1+e^z}(z-\pi i)\right)\\
&= 2\pi i \lim_{z\to\pi i}\left(\frac{(z-\pi i)e^{az}}{1+e^z}\right) = 2\pi i \lim_{z\to\pi i}\left(\frac{e^{az}+(z-\pi i)ae^{az}}{e^z}\right)\\
&= 2\pi i\frac{e^{a\pi i}}{e^{\pi i}} = -2\pi i e^{a\pi i}.
\end{aligned}$$

Po drugi strani pa lahko zgornji integral zapišemo kot

$$\int\limits_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = \int\limits_{\mathcal{I}_R} f(z)\,dz + \int\limits_{\mathcal{K}_1} f(z)\,dz - \int\limits_{\mathcal{K}_2} f(z)\,dz - \int\limits_{\mathcal{K}_3} f(z)\,dz.$$

Obravnavajmo najprej prvi integral na desni strani zgornje enakosti. Očitno je $z : [-R,R] \to \mathcal{I}_R$, $z(x)=x$, parametrizacija krivulje $\mathcal{I}_R$. Opazimo, da za vsak x velja $\dot{z}(x)=1$, zato dobimo

$$\int\limits_{\mathcal{I}_R} f(z)\,dz = \int\limits_{-R}^{R} f(x)\cdot 1\,dx = \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx,$$

kar seveda konvergira proti

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx,$$

ko gre R proti neskončno.

Podobno je $z : [-R,R] \to \mathcal{K}_2$, $z(x) = x+2\pi i$, parametrizacija krivulje $\mathcal{K}_2$ in za vsak $x \in [-R,R]$ velja $\dot{z}(x)=1$, zato dobimo

$$\int\limits_{\mathcal{K}_2} f(z)\,dz = \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}}\,dx = e^{2a\pi i}\int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx,$$

kar konvergira proti

$$e^{2a\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx,$$

ko gre R proti neskončno.

Pri oceni integralov po krivuljah $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_3$ bomo potrebovali še eno neenakost. Očitno za vsaka $z,w\in\mathbb{C}$ velja

$$|w|=|w+z+(-z)|\le|w+z|+|-z|=|z+w|+|z|$$

in posledično

$$|z+w|\ge|w|-|z|.$$

Podobno izpeljemo še

$$|z+w|\ge|z|-|w|$$

in skupaj dobimo

$$|z+w|\ge\big||z|-|w|\big|. \tag{5.4}$$

Za krivuljo $\mathcal{K}_1$ lahko uporabimo parametrizacijo $z:[0,2\pi]\to\mathcal{K}_1$, $z(y)=R+iy$, zato je $\dot z(y)=i$ za vsak y. Velja torej

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{\mathcal{K}_1}f(z)\,dz\right| &= \left|\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}}i\,dy\right|\le\int\limits_0^{2\pi}\frac{|e^{aR}|\cdot|e^{aiy}|\cdot|i|}{|1+e^{R+iy}|}\,dy\\ &= \int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{aR}}{|1+e^Re^{iy}|}\,dy\le\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{aR}}{\big||1|-|e^R|\cdot|e^{iy}|\big|}\,dy\\ &= \int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{aR}}{|1-e^R|}\,dy=\frac{e^{aR}}{e^R-1}\int\limits_0^{2\pi}dy=\frac{2\pi e^{aR}}{e^R-1}=\frac{2\pi}{e^{(1-a)R}-e^{-aR}},\end{aligned}$$

kjer smo pri drugi neenakosti uporabili neenakost (5.4). Opazimo, da gre zadnji izraz proti 0, ko gre R proti neskončno, zato sledi

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\mathcal{K}_1}f(z)\,dz=0.$$

Podobno za krivuljo $\mathcal{K}_3$ uporabimo parametrizacijo $z:[0,2\pi]\to\mathcal{K}_3$, $z(y)=-R+iy$, zato je $\dot z(y)=i$ za vsak y. Z uporabo neenakosti (5.4) izpeljemo

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{\mathcal{K}_3}f(z)\,dz\right| &= \left|\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{a(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}}i\,dy\right|\le\int\limits_0^{2\pi}\frac{|e^{-aR}|\cdot|e^{aiy}|\cdot|i|}{|1+e^{-R+iy}|}\,dy\\ &= \int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{-aR}}{|1+e^{-R}e^{iy}|}\,dy\le\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{-aR}}{\big||1|-|e^{-R}|\cdot|e^{iy}|\big|}\,dy\\ &= \int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{-aR}}{|1-e^{-R}|}\,dy=\frac{e^{-aR}}{1-e^{-R}}\int\limits_0^{2\pi}dy=\frac{2\pi e^{-aR}}{1-e^{-R}},\end{aligned}$$

kar gre proti 0, ko gre R proti neskončno. Posledično velja tudi

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\mathcal{K}_3} f(z)\,dz = 0.$$

Ker je

$$\begin{aligned}
-2\pi i e^{a\pi i} &= \lim_{R\to\infty}\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_{\mathcal{I}_R} f(z)\,dz + \lim_{R\to\infty}\int_{\mathcal{K}_1} f(z)\,dz - \lim_{R\to\infty}\int_{\mathcal{K}_2} f(z)\,dz - \lim_{R\to\infty}\int_{\mathcal{K}_3} f(z)\,dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx + 0 - e^{2a\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx - 0 \\
&= \left(1-e^{2a\pi i}\right)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx,
\end{aligned}$$

lahko izpeljemo še

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx = \frac{-2\pi i e^{a\pi i}}{1-e^{2a\pi i}} = \frac{-2\pi i}{e^{-a\pi i}-e^{a\pi i}} = \frac{\pi}{\frac{e^{a\pi i}-e^{-a\pi i}}{2i}} = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}.$$

Spomnimo se, da je Eulerjeva funkcija beta definirana kot

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,$$

kjer sta $p, q > 0$. Vpeljimo novo spremenljivko:

$$t = \frac{x}{1-x} \iff x = \frac{t}{1+t}.$$

Posledično velja

$$B(p,q) = \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{1+t}\right)^{p-1}\left(1-\frac{t}{1+t}\right)^{q-1}\frac{1}{(1+t)^2}\,dt = \int_0^{\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt.$$

Po drugi strani lahko v integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx$ vpeljemo novo spremenljivko $u = e^x$ in dobimo

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}\,dx &= \int_0^{\infty}\frac{u^a}{1+u}u^{-1}\,du = \int_0^{\infty}\frac{u^{a-1}}{1+u}\,du = \int_0^{\infty}\frac{u^{a-1}}{(1+u)^{a+1-a}}\,du \\
&= B(a,1-a) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}{\Gamma(a+1-a)} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}{\Gamma(1)} = \Gamma(a)\Gamma(1-a),
\end{aligned}$$

pri čemer smo uporabili Eulerjevo funkcijo gama in njene osnovne lastnosti. Vidimo torej, da za vsak $a \in (0,1)$ velja

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}.$$

Če v zgornjo enakost vstavimo $a = \frac{1}{2}$, sledi

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \pi$$

in s tem smo dokazali, da je

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

5.5.3 Integrali oblike $\int\limits_0^{2\pi} f(\cos x, \sin x)\,dx$, kjer je f racionalna funkcija

Naj bo $\mathcal{K} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ pozitivno orientirana krožnica s polmerom 1. Očitno je funkcija $z : [0, 2\pi] \to \mathcal{K}$, $z(x) = e^{ix}$, parametrizacija krivulje $\mathcal{K}$. Ker je $z(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x$, velja

$$(z(x))^{-1} = e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i \sin x$$

in dobimo:

$$\begin{aligned} z(x) + (z(x))^{-1} = 2\cos x &\implies \cos x = \frac{z(x) + (z(x))^{-1}}{2}, \\ z(x) - (z(x))^{-1} = 2i\sin x &\implies \sin x = \frac{z(x) - (z(x))^{-1}}{2i}. \end{aligned}$$

Prav tako opazimo, da za vse x velja $\dot{z}(x) = ie^{ix} = iz(x)$.

Definirajmo funkcijo F s predpisom

$$F(z) = f\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right)\frac{1}{zi}.$$

Potem je

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathcal{K}} F(z)\,dz &= \int\limits_0^{2\pi} f\left(\frac{z(x) + (z(x))^{-1}}{2}, \frac{z(x) - (z(x))^{-1}}{2i}\right)\frac{1}{z(x)i} iz(x)\,dx \\ &= \int\limits_0^{2\pi} f(\cos x, \sin x)\,dx. \end{aligned}$$

To pomeni, da lahko iskani integral izračunamo kot

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\cos x, \sin x)\,dx = \int\limits_{\mathcal{K}} F(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(F, z_j),$$

kjer so $z_1, z_2, \ldots, z_k$ singularne točke funkcije F, ki ležijo na krogu $|z| < 1$.

Primer 5.41 Izračunajmo integral $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos(2x)}{5-4\cos x}\,dx = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{5-4\cos x}\,dx$. Naj bo

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{iz} \cdot \frac{\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^2}{5-4\cdot\frac{z+z^{-1}}{2}} = \frac{z^2+2+z^{-2}+z^2-2+z^{-2}}{4iz\left(5-2z-2z^{-1}\right)} \\ &= \frac{z^2+z^{-2}}{2iz\left(5-2z-2z^{-1}\right)} = \frac{z^4+1}{2iz^2(-2z^2+5z-2)}. \end{aligned}$$

Singularne točke funkcije F so $z_{1,2}=0$ in

$$z_{3,4} = \frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{-4} = \frac{-5\pm 3}{-4},$$

torej $z_3 = 2$, $z_4 = \frac{1}{2}$. Singularna točka $z=0$ je pol 2. stopnje, zato velja

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(F,0) &= \lim_{z\to 0}\left(z^2\frac{z^4+1}{2iz^2(-2z^2+5z-2)}\right)' = \frac{1}{2i}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z^4+1}{-2z^2+5z-2}\right)' \\ &= \frac{1}{2i}\lim_{z\to 0}\frac{4z^3(-2z^2+5z-2)-(z^4+1)(-4z+5)}{(-2z^2+5z-2)^2} \\ &= \frac{1}{2i}\cdot\frac{-5}{(-2)^2} = -\frac{5}{8i}. \end{aligned}$$

Edina preostala singularna točka na krogu $|z|<1$ je $z=\frac{1}{2}$. Ker je to pol 1. stopnje, dobimo

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(F,\frac{1}{2}\right) &= \lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(\left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{z^4+1}{2iz^2(-2z^2+5z-2)}\right) \\ &= \lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(\left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{z^4+1}{-4iz^2\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}\right) \\ &= \lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(\frac{z^4+1}{-4iz^2(z-2)}\right) = \frac{17}{24i}. \end{aligned}$$

Končno lahko izračunamo iskani integral:

$$\begin{aligned} \int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos(2x)}{5-4\cos x}\,dx &= 2\pi i\left(\operatorname{Res}(F,0)+\operatorname{Res}\left(F,\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= 2\pi i\left(-\frac{5}{8i}+\frac{17}{24i}\right) = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

5.5.4 Fresnelova integrala

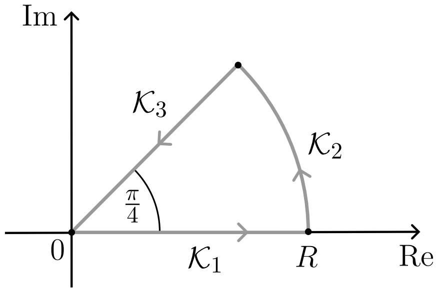
Izračunati želimo integrala

$$F_c = \int\limits_0^{\infty}\cos\left(x^2\right)dx \quad \text{in} \quad F_s = \int\limits_0^{\infty}\sin\left(x^2\right)dx.$$

Funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ naj bo podana s predpisom

$$f(z) = e^{-z^2}$$

in naj bo $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3$ krivulja, prikazana na sliki 5.14.



Slika 5.14: Krivulje $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ in $\mathcal{K}_3$.

Ker je f holomorfna na $\mathbb{C}$, po Cauchyjevem izreku 4.9 velja

$$0 = \int_{\mathcal{K}} f(z)\,dz = \int_{\mathcal{K}_1} f(z)\,dz + \int_{\mathcal{K}_2} f(z)\,dz + \int_{\mathcal{K}_3} f(z)\,dz.$$

Obravnavajmo najprej integral po krivulji $\mathcal{K}_1$. Očitno je $z : [0, R] \to \mathcal{K}_1$, $z(x) = x$, parametrizacija krivulje $\mathcal{K}_1$. Opazimo, da za vsak x velja $\dot{z}(x) = 1$, zato dobimo

$$\int_{\mathcal{K}_1} f(z)\,dz = \int_0^R f(x) \cdot 1\,dx = \int_0^R e^{-x^2} dx,$$

kar seveda konvergira proti

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx,$$

ko gre R proti neskončno. Če v zadnji integral vpeljemo novo spremenljivko $t = x^2$ in uporabimo Eulerjevo funkcijo gama, dobimo

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Sedaj obravnavajmo integral po krivulji $\mathcal{K}_3$. Očitno je $z : [0, R] \to (-\mathcal{K}_3)$, $z(r) = re^{i\frac{\pi}{4}}$, parametrizacija krivulje $(-\mathcal{K}_3)$. Opazimo, da za vsak r velja $\dot{z}(r) = e^{i\frac{\pi}{4}}$, zato dobimo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{K}_3} e^{-z^2} dz &= -\int_0^R e^{-\left(re^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2} e^{i\frac{\pi}{4}}\,dr = -\int_0^R e^{-r^2 e^{i\frac{\pi}{2}}} e^{i\frac{\pi}{4}}\,dr \\
&= -e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^R e^{i(-r^2)}\,dr = -e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^R \left(\cos\left(r^2\right) - i \sin\left(r^2\right)\right) dr \\
&= -e^{i\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^R \cos\left(r^2\right) dr - i \int_0^R \sin\left(r^2\right) dr \right),
\end{aligned}$$

kar konvergira proti

$$-e^{i\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{\infty}\cos\left(r^2\right)dr - i\int_0^{\infty}\sin\left(r^2\right)dr\right) = -e^{i\frac{\pi}{4}}\left(F_c - iF_s\right),$$

ko gre R proti neskončno.

Za obravnavo integrala po krivulji $\mathcal{K}_2$ bomo potrebovali naslednjo neenakost: za vsak $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ je

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi}x. \tag{5.5}$$

Naj bo $z : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathcal{K}_2$, $z(t) = Re^{it}$, parametrizacija krivulje $\mathcal{K}_2$. Opazimo, da za vsak t velja $\dot{z}(t) = iRe^{it}$, zato je

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathcal{K}_2} e^{-z^2}dz\right| &= \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2e^{2it}} iRe^{it}\,dt\right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left|e^{-R^2e^{2it}}\right|\cdot|i|\cdot|R|\cdot\left|e^{it}\right|\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left|e^{-R^2(\cos(2t)+i\sin(2t))}\right| R\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left|e^{-R^2\cos(2t)}\right|\cdot\left|e^{-R^2 i\sin(2t)}\right| R\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos(2t)} R\,dt.
\end{aligned}$$

Če v zadnji integral vpeljemo novo spremenljivko $u = 2t$, dobimo

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos(2t)} R\,dt = \frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\cos u}\,du.$$

Sedaj vpeljimo še novo spremenljivko $v = \frac{\pi}{2} - u$ in uporabimo neenakost (5.5):

$$\begin{aligned}
\frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\cos u}\,du &= -\frac{R}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{-R^2\cos\left(\frac{\pi}{2}-v\right)}\,dv = \frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\sin v}\,dv \\
&\leq \frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\frac{2v}{\pi}}\,dv = \frac{R}{2}\left(-\frac{\pi}{2R^2}e^{-\frac{2R^2v}{\pi}}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{\pi}{4R}\left(e^{-R^2}-1\right) = \frac{\pi}{4R}\left(1-e^{-R^2}\right),
\end{aligned}$$

kar konvergira proti 0, ko gre R proti neskončno. Velja torej

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\mathcal{K}_2} e^{-z^2}dz = 0.$$

Ker je

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\mathcal{K}} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\mathcal{K}_1} f(z)\,dz + \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\mathcal{K}_2} f(z)\,dz + \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\mathcal{K}_3} f(z)\,dz \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} + 0 - e^{i\frac{\pi}{4}}\,(F_c - iF_s), \end{aligned}$$

sledi še

$$F_c - iF_s = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} - i\frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Od tod končno dobimo

$$F_c = F_s = \int\limits_0^\infty \cos\left(x^2\right) dx = \int\limits_0^\infty \sin\left(x^2\right) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

5.6 Izpitne naloge: Taylorjeva in Laurentova vrsta ter izrek o residuumih

Opomba: nekatere naloge v tem razdelku so prirejene po nalogah iz zbirk [3] in [6].

1. Podana je funkcija f s predpisom

$$f(z) = \frac{3z-1}{z^2-2z-3}.$$

   (a) Razvij funkcijo f v Taylorjevo vrsto v okolici točke $z = 0$ in zapiši območje, kjer konvergira.

   (b) Razvij funkcijo f v Laurentovo vrsto okoli točke $z = 3$ (upoštevaj vse možnosti).

2. Razvij funkcijo f s predpisom $f(z) = \dfrac{3z+1}{z^2-z-6}$ v Laurentovo vrsto:

   (a) okoli točke $z = 3$ na območju $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-3| > 5\}$,

   (b) okoli točke $z = 1$ na območju $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z-1| < 3\}$.

   V obeh primerih posebej zapiši glavni in regularni del vrste ter ju čim bolj poenostavi.

3. Dana je funkcija f s predpisom $f(z) = \dfrac{4z-2}{z^2+2z-8}$.

   (a) Funkcijo f razvij v Taylorjevo vrsto okoli točke $z = 1$. Zapiši tudi območje, na katerem vrsta konvergira.

   (b) Funkcijo f na območju $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+4| > 6\}$ razvij v Laurentovo vrsto okoli točke $z = -4$.

4. Razvij funkcijo f s predpisom $f(z) = \dfrac{z-9}{z^2-3z-4}$ v Laurentovo vrsto:

   (a) okoli točke $z = 4$ na območju $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-4| > 5\}$,

   (b) okoli točke $z = 2$ na območju $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z-2| < 3\}$.

   V obeh primerih posebej zapiši glavni in regularni del vrste ter ju čim bolj poenostavi. Preveri tudi območje konvergence.

5. (a) Razvij funkcijo f s predpisom $f(z) = \frac{4z-17}{z^2-z-6}$ v Laurentovo vrsto okoli točke $z = 3$ na območju $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-3| < 5\}$. Posebej zapiši glavni in regularni del vrste ter ju čim bolj poenostavi. Preveri tudi območje konvergence.

   (b) Funkcija f je podana s predpisom $f(z) = (z - 2z^3)\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{z}\right)$. Poišči in klasificiraj singularne točke funkcije f in izračunaj integral $\displaystyle\int_{|z|=1} f(z)\,dz$.

6. Podana je funkcija f s predpisom

$$f(z) = (z^2+3)\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{z-1}\right).$$

   Razvij funkcijo f v Laurentovo vrsto okoli točke $z = 1$ in izračunaj residuum v tej točki. Kakšno singularnost ima funkcija f v točki $z = 1$?

7. Podana je funkcija f s predpisom

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{z^5+z^7}.$$

   (a) Klasificiraj singularnost v točki $z = 0$ in zapiši glavni del Laurentove vrste pri razvoju funkcije f okoli točke $z = 0$.

   (b) Izračunaj integral $\displaystyle\int_{|z|=2} f(z)\,dz$.

8. Podana je funkcija f s predpisom

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^6-z^4}.$$

   (a) Klasificiraj singularnost v točki $z = 0$ in zapiši glavni del Laurentove vrste pri razvoju funkcije f okoli točke $z = 0$.

   (b) Izračunaj integral $\displaystyle\int_{|z|=2} f(z)\,dz$.

9. Podana je funkcija f s predpisom $f(z) = \dfrac{e^{4z}-1}{z^3(z-1)}$.

   (a) Določi in klasificiraj singularne točke funkcije f in izračunaj residuume v teh točkah.

(b) Glede na realno število $r \in (0,\infty) \setminus \{1\}$ izračunaj integral $\displaystyle\int_{\mathcal{K}_r} f(z)\,dz$, kjer je $\mathcal{K}_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = r\}$ pozitivno orientirana krožnica.

10. Podana je funkcija f s predpisom

$$f(z) = \frac{z^2 + 2\cos z - 2}{4z^7 - z^5}.$$

(a) Ugotovi in utemelji, kakšno singularnost ima funkcija f v točki $z = 0$. Zapiši tudi glavni del Laurentove vrste pri razvoju funkcije f okoli točke $z = 0$.

(b) Naj bo $z_0 = 1+i$. Glede na realno število $r > 0$ izračunaj integral $\displaystyle\int_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz$.

11. Podana je funkcija f s predpisom

$$f(z) = \frac{z^3 - 6\,\mathrm{sh}\,z + 6z}{z^9 - z^7}.$$

(a) Ugotovi in utemelji, kakšno singularnost ima funkcija f v točki $z = 0$. Zapiši tudi glavni del Laurentove vrste pri razvoju funkcije f okoli točke $z = 0$.

(b) Glede na pozitivno realno število r izračunaj integral $\displaystyle\int_{|z-2|=r} f(z)\,dz$.

12. Podana je funkcija f s predpisom $f(z) = \dfrac{z - \sin z}{z^7 + z^6}$.

(a) Klasificiraj singularnost v točki $z = 0$ in zapiši glavni del Laurentove vrste pri razvoju funkcije f okoli točke $z = 0$.

(b) Glede na realno število $r \in (0,\infty) \setminus \{1,2\}$ izračunaj integral $\displaystyle\int_{|z-1|=r} f(z)\,dz$.

13. Podana je funkcija f s predpisom

$$f(z) = \frac{z + 1 - e^z}{z^7 + z^6 - 2z^5}.$$

(a) Ugotovi in utemelji, kakšno singularnost ima funkcija f v točki $z = 0$. Zapiši tudi glavni del Laurentove vrste pri razvoju funkcije f okoli točke $z = 0$.

(b) Glede na realno število $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1, \sqrt{2}, \sqrt{5}\}$ izračunaj integral $\displaystyle\int_{|z-i|=r} f(z)\,dz$.

14. Podana je funkcija f s predpisom $f(z) = \dfrac{z\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{z^2}\right)}{z^2+1}$.

(a) Določi in klasificiraj singularne točke funkcije f in izračunaj residuume v teh točkah.

(b) Glede na realno število $r \in (0, \infty) \setminus \{1, 2\}$ izračunaj integral $\int\limits_{\mathcal{K}} f(z)\, dz$, kjer je $\mathcal{K} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + i| = r\}$ pozitivno orientirana krožnica.

15. Klasificiraj singularne točke za funkcijo pod integralom in s pomočjo izreka o residuumih izračunaj:

(a) $$\int\limits_{|z-i|=2} \frac{z^2}{z^4 + 8z^2 + 16}\, dz,$$

(b) $$\int\limits_{|z|=2} \sin\left(\frac{z}{z+1}\right) dz.$$

16. Klasificiraj singularne točke za funkcijo pod integralom in s pomočjo izreka o residuumih izračunaj:

(a) $$\int\limits_{|z-1|=4} \frac{1 - \cos z}{z^3(z-1)}\, dz,$$

(b) $$\int\limits_{|z|=3} z^3 \sin \frac{1}{z-2}\, dz.$$

17. Klasificiraj singularne točke za funkcijo pod integralom in s pomočjo izreka o residuumih izračunaj:

(a) $$\int\limits_{|z|=5} (z+1) \operatorname{ch}\left(\frac{1}{z-4}\right) dz,$$

(b) $$\int\limits_{|z-1|=2} \frac{z - \sin z}{z^4(z-2)}\, dz.$$

18. Klasificiraj singularne točke za funkcijo pod integralom in s pomočjo izreka o residuumih izračunaj:

(a) $$\int\limits_{|z|=2} z^2 \operatorname{sh}\left(\frac{1}{z+1}\right) dz,$$

(b) $$\int\limits_{|z-1|=4} \frac{e^z - 1}{z^3 - 3z^2}\, dz.$$

19. Klasificiraj singularne točke za funkcijo pod integralom in s pomočjo izreka o residuumih izračunaj:

(a) $$\int\limits_{|z|=3} \frac{1 - \operatorname{ch} z}{z^6 + 2z^5}\, dz,$$

(b) $$\int\limits_{|z|=1} z^3 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{z}\right) dz.$$

5.7 Izpitne naloge: računanje realnih integralov

Opomba: večina nalog v tem razdelku je povzetih ali prirejenih po nalogah iz zbirk [5, 6, 9, 10, 13]. Ponekod je to tudi posebej označeno.

1. [6] S pomočjo kompleksne integracije izračunaj integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2}\,dx.$$

2. [13] S pomočjo kompleksne integracije izračunaj integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}\,dx.$$

3. S pomočjo kompleksne integracije izračunaj realni integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2-2x+2)}.$$

4. [6] S pomočjo kompleksne integracije izračunaj realni integral

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^4+8x^2+16)(x^2+1)}.$$

5. Naj bo $a > 0$. S pomočjo kompleksne integracije izračunaj integral

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^4\,dx}{(a^2+x^2)^3}.$$

6. [9] S pomočjo kompleksne integracije izračunaj integral

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{5-4\cos x}\,dx.$$

7. [13] S pomočjo kompleksne integracije izračunaj integral

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{(5-3\sin x)^2}.$$

8. [6] S pomočjo kompleksne integracije izračunaj integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t}{13 + 12\cos t}\, dt.$$

9. [9] S pomočjo kompleksne integracije izračunaj realni integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{10 - 6\cos t}\, dt.$$

10. [13] S pomočjo kompleksne integracije izračunaj realni integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{4\cos^3 x - 3\cos x}{5 - 4\cos x}\, dx.$$

11. [6] Naj bo $a \in (0, 1)$. S pomočjo kompleksne integracije izračunaj integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(1 - 2a\cos x + a^2)^2}.$$

12. [5] S pomočjo integracije funkcije f s predpisom

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 4}$$

po pozitivno orientiranem robu območja $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R,\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$, kjer je $R > 2$, izračunaj realni integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + 4}\, dx.$$

13. [10] Naj bo $m \in (0, \infty)$. S pomočjo integracije funkcije f s predpisom

$$f(z) = \frac{e^{miz}}{z^2 + 9}$$

po pozitivno orientiranem robu območja $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R,\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$, kjer je $R \in (3, \infty)$, izračunaj realni integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(mx)}{x^2 + 9}\, dx.$$

14. [9] Naj bo $a \in (0, \infty)$. S pomočjo integracije funkcije f s predpisom

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{\pi(1+z^2)}$$

po pozitivno orientiranem robu območja $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R,\ \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$, kjer je $R \in (1, \infty)$, izračunaj integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{\pi(1+x^2)}\, dx.$$

S pomočjo prejšnjega rezultata določi tudi $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{\pi(1+x^2)}\, dx$ in $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{\pi(1+x^2)}\, dx$.

15. [9, 10] S pomočjo integracije funkcije f s predpisom

$$f(z) = \frac{ze^{2iz}}{z^2+1}$$

po pozitivno orientiranem robu območja $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R,\ \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$, kjer je $R \in (1, \infty)$, izračunaj realni integral

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x \sin(2x)}{x^2+1}\, dx.$$

16. [10] Z integracijo funkcije f s predpisom $f(z) = e^{-z^2}$ po pozitivno orientiranem robu območja $D = \{z \in \mathbb{C} \mid -R \leq \operatorname{Re}(z) \leq R,\ 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 1\}$, kjer je $R > 0$, izračunaj integral

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2x)\, dx.$$

Poglavje 6

Dokaz Cauchyjevega izreka

V poglavju 4.2 smo Cauchyjev izrek dokazali ob dodatni predpostavki, da je funkcija f' zvezna. V nadaljevanju bomo izrek dokazali brez dodatnih omejitev. Zaradi celovitosti izrek navedimo ponovno:

Izrek 4.9 (Cauchyjev izrek) *Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ enostavno povezano območje, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija in $\mathcal{K} \subseteq D$ enostavno sklenjena krivulja z odsekoma zvezno odvedljivo parametrizacijo. Tedaj je*

$$\int_{\mathcal{K}} f(z)\, dz = 0.$$

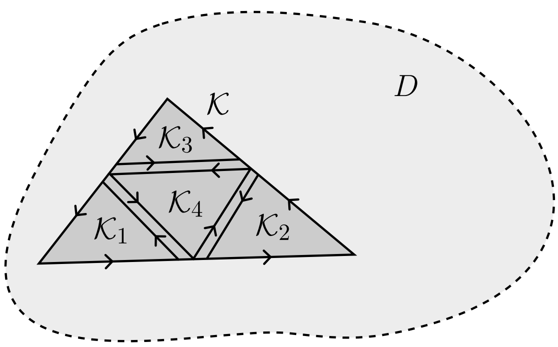
Dokaz. Dokaz izreka ločimo na več manjših trditev, ki jih označimo z I.–IV.

I. Izrek velja v primeru, ko je f' zvezna funkcija.

To trditev smo dokazali v poglavju 4.2.

II. Izrek velja v primeru, ko je krivulja $\mathcal{K}$ rob trikotnika.

Označimo ta trikotnik, ki ga obdaja krivulja $\mathcal{K}$, z Δ_0. Vanj vrišemo središčni trikotnik, ki nam trikotnik Δ_0 razdeli na štiri nove trikotnike. Robove dobljenih trikotnikov naj predstavljajo krivulje $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_3$ in $\mathcal{K}_4$. Krivuljo $\mathcal{K}$ in krivulje $\mathcal{K}_i$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, orientiramo tako, kot prikazuje slika 6.1.



Slika 6.1: Krivulje $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_3$ in $\mathcal{K}_4$.

Opazimo, da velja

$$\int\limits_{\mathcal{K}} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{4} \int\limits_{\mathcal{K}_i} f(z)\,dz.$$

Označimo z

$$M = \left| \int\limits_{\mathcal{K}} f(z)\,dz \right|,$$

kjer je $M \geq 0$. Sledi

$$M = \left| \int\limits_{\mathcal{K}} f(z)\,dz \right| = \left| \sum_{i=1}^{4} \int\limits_{\mathcal{K}_i} f(z)\,dz \right| \leq \sum_{i=1}^{4} \left| \int\limits_{\mathcal{K}_i} f(z)\,dz \right|.$$

Zato obstaja $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, da je

$$\left| \int\limits_{\mathcal{K}_i} f(z)\,dz \right| \geq \frac{M}{4}.$$

Označimo trikotnik, ki ga obdaja krivulja $\mathcal{K}_i$, z Δ_1 in njegov rob $\partial\Delta_1$ z $\mathcal{L}_1$. Torej je

$$\left| \int\limits_{\mathcal{L}_1} f(z)\,dz \right| \geq \frac{M}{4}.$$

Postopek ponavljamo in trikotnik Δ_1 s središčnim trikotnikom ponovno razdelimo na štiri trikotnike. Znotraj trikotnika Δ_1 obstaja trikotnik Δ_2, za katerega velja

$$\left| \int\limits_{\mathcal{L}_2} f(z)\,dz \right| \geq \frac{M}{4^2},$$

kjer je $\mathcal{L}_2 = \partial\Delta_2$. Po $n \in \mathbb{N}$ korakih dobimo trikotnik $\Delta_n \subset \Delta_{n-1} \subset \ldots \subset \Delta_2 \subset \Delta_1$, za katerega velja

$$\left| \int\limits_{\mathcal{L}_n} f(z)\,dz \right| \geq \frac{M}{4^n},$$

kjer je $\mathcal{L}_n = \partial\Delta_n$. Ker je trikotnik Δ_0 omejen, obstaja dolžina krivulje $\mathcal{K}$, ki jo označimo z $o = \ell(\mathcal{K})$. Iz konstrukcije središčnih trikotnikov sledi, da je $\ell(\mathcal{L}_n) = \frac{o}{2^n}$ in $\mathrm{diam}(\Delta_n) = \frac{1}{2^n}\mathrm{diam}(\Delta_0)$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Dokažimo, da obstaja točka $z_0 \in D$, za katero velja

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \Delta_i = \{z_0\}.$$

Zagotovo v preseku $\bigcap_{i=1}^{\infty} \Delta_i$ ni več kot ena točka, saj bi (evklidska) razdalja med poljubnima dvema takšnima točkama bila strogo pozitivna, kar bi bilo v protislovju z

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}(\Delta_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\mathrm{diam}(\Delta_0) = 0.$$

Zato zadošča dokazati, da presek ni prazen. Za vsak $k \in \mathbb{N}$ izberimo poljubno točko $z_k \in \Delta_k$ in dokažimo, da je zaporedje (z_k) Cauchyjevo, kar je ekvivalentno pogoju

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \in \mathbb{N}, m > n : m, n \geq n_0 \implies |z_m - z_n| < \varepsilon.$$

Naj bo $\varepsilon > 0$ poljubno pozitivno število. Za tako izbrani ε obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za vsako naravno število $n \geq n_0$ velja $\operatorname{diam}(\Delta_n) < \varepsilon$, kar sledi iz $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(\Delta_n) = 0$. Če je $m > n$, potem je $\Delta_m \subset \Delta_n$, kar implicira $z_m, z_n \in \Delta_n$. Ob predpostavki $m, n \geq n_0$ je zato tudi $|z_m - z_n| \leq \operatorname{diam}(\Delta_n) < \varepsilon$. Ker je $\mathbb{C}$ (z običajno evklidsko metriko) polni metrični prostor, je zaporedje (z_k) tudi konvergentno in zato obstaja $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = z_0$. Glede na konstrukcijo trikotnikov Δ_n je očitno $z_0 \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \Delta_i$ in $z_0 \in D$.

Funkcija f je po predpostavki odvedljiva v točki $z_0 \in D$, zato po definiciji obstaja limita

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Definirajmo izraz $\alpha(z, z_0) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)$, ki ga preoblikujemo v $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \alpha(z, z_0)(z - z_0)$. Zaradi odvedljivosti funkcije f v točki $z_0 \in D$ je $\lim\limits_{z\to z_0} \alpha(z, z_0) = 0$, kar je ekvivalentno pogoju

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in D : 0 < |z - z_0| < \delta \implies |\alpha(z, z_0)| < \varepsilon.$$

Izberimo $n \in \mathbb{N}$ tako velik, da bo $\ell(\mathcal{L}_n) = \frac{o}{2^n} < \delta$. Slednje je mogoče zato, ker je $\lim\limits_{n\to\infty} \ell(\mathcal{L}_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{o}{2^n} = 0$. Za vsak $z \in \mathcal{L}_n$ velja

$$|z - z_0| \leq \operatorname{diam}(\Delta_n) \leq \ell(\mathcal{L}_n) = \frac{o}{2^n} < \delta.$$

Izračunajmo integral

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{L}_n} f(z)\,dz &= \int_{\mathcal{L}_n} f(z_0)\,dz + \int_{\mathcal{L}_n} f'(z_0)(z - z_0)\,dz + \int_{\mathcal{L}_n} \alpha(z, z_0)(z - z_0)\,dz \\
&= f(z_0)\int_{\mathcal{L}_n} dz + f'(z_0)\int_{\mathcal{L}_n} (z - z_0)\,dz + \int_{\mathcal{L}_n} \alpha(z, z_0)(z - z_0)\,dz \\
&= \int_{\mathcal{L}_n} \alpha(z, z_0)(z - z_0)\,dz,
\end{aligned}$$

kjer sta prva dva integrala enaka 0 po točki I., ker integriramo konstantno in linearno funkcijo, ki sta obe holomorfni funkciji z zveznima prvima odvodoma. Ocenimo integral:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathcal{L}_n} f(z)\,dz\right| &= \left|\int_{\mathcal{L}_n} \alpha(z, z_0)(z - z_0)\,dz\right| \leq \int_{\mathcal{L}_n} |\alpha(z, z_0)|\,|(z - z_0)|\,ds \\
&< \int_{\mathcal{L}_n} \varepsilon \cdot \frac{o}{2^n}\,ds = \varepsilon \cdot \frac{o}{2^n}\int_{\mathcal{L}_n} ds = \varepsilon \cdot \frac{o^2}{4^n}.
\end{aligned}$$

Skupaj s predhodno izpeljano spodnjo mejo dobimo

$$0 \le \frac{M}{4^n} \le \left| \int_{\mathcal{L}_n} f(z)dz \right| < \varepsilon \cdot \frac{o^2}{4^n},$$

kar je ekvivalentno pogoju

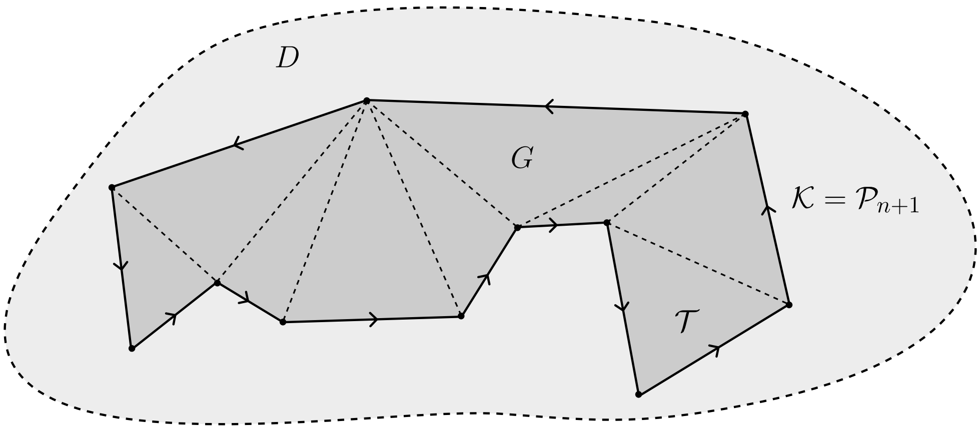
$$0 \le M < \varepsilon \cdot o^2.$$

Ker slednje velja za poljubno izbran $\varepsilon > 0$, je edina smiselna rešitev

$$M = \left| \int_{\mathcal{K}} f(z)\, dz \right| = 0 \quad \text{oziroma} \quad \int_{\mathcal{K}} f(z)\, dz = 0.$$

III. Izrek velja v primeru, ko je $\mathcal{K}$ enostavno sklenjena poligonska črta.

Krivulja $\mathcal{K}$ omejuje območje, ki ga označimo z $G \subseteq D$. Območje G lahko trianguliramo (slika 6.2).



Slika 6.2: Poligonska črta $\mathcal{K} = \mathcal{P}_{n+1}$ in njena triangulacija.

Naj bo $n \in \mathbb{N} \backslash \{1, 2\}$ število oglišč poligonske črte $\mathcal{K}$. Izrek bomo dokazali s pomočjo indukcije po številu oglišč $n \ge 3$. Za $n = 3$ izrek velja po točki II., zato predpostavimo, da izrek velja za poljubno poligonsko črto z $n \ge 3$ oglišči in pokažimo, da velja tudi za poligonsko črto z $n+1$ oglišči. Denimo, da poligonsko črto z $n+1$ oglišči označimo s $\mathcal{P}_{n+1}$. To poligonsko črto skrajšamo za eno diagonalo glede na predhodno triangulacijo (slika 6.2). Tako dobimo poligonsko črto z n oglišči, ki jo bomo označili s $\mathcal{P}_n$, in še poligonsko črto, ki obdaja "odrezan" trikotnik. Slednjo poligonsko črto označimo s $\mathcal{T}$. Iz konstrukcije je razvidno, da velja $\mathcal{P}_{n+1} = \mathcal{P}_n \cup \mathcal{T}$. Sledi

$$\int_{\mathcal{P}_{n+1}} f(z)\, dz = \int_{\mathcal{P}_n} f(z)\, dz + \int_{\mathcal{T}} f(z)\, dz = 0.$$

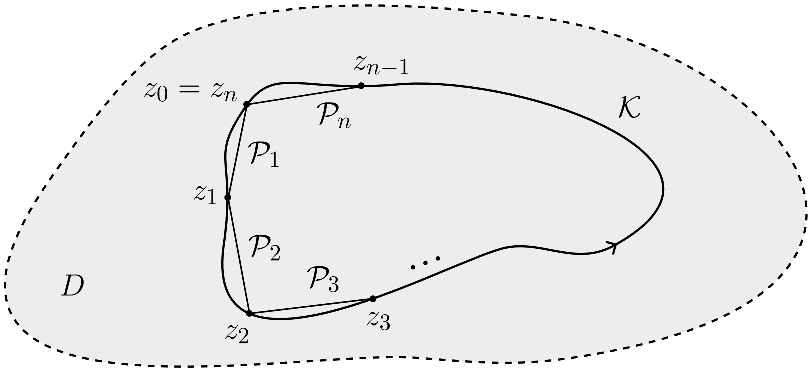
Prvi integral je enak 0 po indukcijski predpostavki, drugi pa po točki II.

IV. Izrek velja v splošnem.

Enostavno sklenjena krivulja $\mathcal{K}$ ima končno (pozitivno) dolžino, zato je v množici $\mathbb{C}$ zaprta in omejena oz. kompaktna. Ker je funkcija f holomorfna (in zato zvezna) na $\mathcal{K} \subset D$, je tudi enakomerno zvezna na $\mathcal{K}$, kar je ekvivalentno pogoju

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall u, v \in \mathcal{K} : |u - v| < \delta \implies |f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{2\ell(\mathcal{K})}.$$

Na krivulji $\mathcal{K}$ v pozitivni smeri zaporedoma izberemo točke $z_0, z_1, \ldots, z_n = z_0$ tako, da bo veljalo $\ell(\widehat{z_{k-1}z_k}) < \delta$ za vsak $k \in \{1, \ldots, n\}$, kjer naj $\mathcal{L}_k = \widehat{z_{k-1}z_k}$ predstavlja del krivulje $\mathcal{K}$ med točkama z_{k-1} in z_k, $\mathcal{P}_k = z_{k-1}z_k$ pa daljico med točkama z_{k-1} in z_k (slika 6.3).



Slika 6.3: Krivulja $\mathcal{K}$ in daljice $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$.

Naj bo $\varepsilon > 0$. Za vsak $k \in \{1, \ldots, n\}$ in vsak $z \in \mathcal{L}_k$ je $|z - z_k| \leq \ell(\mathcal{L}_k) < \delta$, zato iz pogoja enakomerne zveznosti sledi $|f(z) - f(z_k)| < \frac{\varepsilon}{2\ell(\mathcal{K})}$ za vsak $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Množica točk $\Delta = \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ skupaj z daljicami $\mathcal{P}_k$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, tvori poligonsko črto, ki jo bomo označili s $\mathcal{P}_\Delta$. Opazimo, da je dolžina krivulje $\mathcal{K}$ v splošnem večja od dolžine poligonske črte, tj. $\ell(\mathcal{K}) \geq \ell(\mathcal{P}_\Delta)$. Po točki III. je

$$\int_{\mathcal{P}_\Delta} f(z)\, dz = 0.$$

Za vsak $k \in \{1, \ldots, n\}$ izračunajmo integrala

$$\int_{\mathcal{L}_k} f(z_k)\, dz = f(z_k) \int_{\mathcal{L}_k} dz = f(z_k)(z_k - z_{k-1})$$

in

$$\int_{\mathcal{P}_k} f(z_k)\, dz = f(z_k) \int_{\mathcal{P}_k} dz = f(z_k)(z_k - z_{k-1}).$$

Iz obeh računov sledi, da je

$$\int_{\mathcal{L}_k} f(z_k)\, dz = \int_{\mathcal{P}_k} f(z_k)\, dz$$

za vsak $k \in \{1, \ldots, n\}$. Ocenimo še integral $\int\limits_{\mathcal{K}} f(z)\, dz$:

$$\begin{aligned}
0 \leq \left| \int\limits_{\mathcal{K}} f(z)\, dz \right| &= \left| \int\limits_{\mathcal{K}} f(z)\, dz - 0 \right| = \left| \int\limits_{\mathcal{K}} f(z)\, dz - \int\limits_{\mathcal{P}_\Delta} f(z)\, dz \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\mathcal{L}_k} f(z)\, dz - \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\mathcal{P}_k} f(z)\, dz \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{n} \left(\int\limits_{\mathcal{L}_k} f(z)\, dz - \int\limits_{\mathcal{P}_k} f(z)\, dz \right) \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{n} \left(\int\limits_{\mathcal{L}_k} f(z)\, dz - \int\limits_{\mathcal{L}_k} f(z_k)\, dz + \int\limits_{\mathcal{P}_k} f(z_k)\, dz - \int\limits_{\mathcal{P}_k} f(z)\, dz \right) \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{n} \left(\int\limits_{\mathcal{L}_k} (f(z) - f(z_k))\, dz + \int\limits_{\mathcal{P}_k} (f(z_k) - f(z))\, dz \right) \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \left(\left| \int\limits_{\mathcal{L}_k} (f(z) - f(z_k))\, dz \right| + \left| \int\limits_{\mathcal{P}_k} (f(z_k) - f(z))\, dz \right| \right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \left(\int\limits_{\mathcal{L}_k} |f(z) - f(z_k)|\, ds + \int\limits_{\mathcal{P}_k} |f(z_k) - f(z)|\, ds \right) \\
&< \sum_{k=1}^{n} \left(\int\limits_{\mathcal{L}_k} \frac{\varepsilon}{2\ell(\mathcal{K})} ds + \int\limits_{\mathcal{P}_k} \frac{\varepsilon}{2\ell(\mathcal{K})} ds \right) = \frac{\varepsilon}{2\ell(\mathcal{K})} \sum_{k=1}^{n} \left(\int\limits_{\mathcal{L}_k} ds + \int\limits_{\mathcal{P}_k} ds \right) \\
&= \frac{\varepsilon}{2\ell(\mathcal{K})} \sum_{k=1}^{n} (\ell(\mathcal{L}_n) + \ell(\mathcal{P}_n)) = \frac{\varepsilon}{2\ell(\mathcal{K})} (\ell(\mathcal{K}) + \ell(\mathcal{P}_\Delta)) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\ell(\mathcal{K})} (\ell(\mathcal{K}) + \ell(\mathcal{K})) = \frac{\varepsilon}{2\ell(\mathcal{K})} 2\ell(\mathcal{K}) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ker slednje velja za poljubno izbran $\varepsilon > 0$, je edina smiselna rešitev

$$\left| \int\limits_{\mathcal{K}} f(z)\, dz \right| = 0 \quad \text{oziroma} \quad \int\limits_{\mathcal{K}} f(z)\, dz = 0.$$

$\square$

Poglavje 7

Rezultati izpitnih nalog

7.1 Rezultati izpitnih nalog: linearna funkcija

1. (a) Iskana preslikava f ima predpis $f(z) = \frac{1}{2}(-1+i)(z-i)$.

   (b) Naj bo $D_1 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \left(\left|z - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$ in $D_2 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \left(\left|z - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$. Trikotnik T se preslika na območje $D = \{z \in \mathbb{C} \mid (\operatorname{Im} z \leq 0) \ \wedge \ (z \in D_1 \cap D_2)\}$.

2. (a) Iskana funkcija f ima predpis $f(z) = (1+i)z + 1 - i$.

   (b) Naj bo $R_1 = [0,2] \times \{0\}$, $R_2 = [0,2] \times \{-2\}$, $R_3 = \{0\} \times [-2,0]$, $R_4 = \{2\} \times [-2,0]$. R_1 se preslika na $R_1' = [1, e^4] \times \{0\}$, R_2 se preslika na

   $$R_2' = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Arg}(z) = 2\pi - 4, \ 1 \leq |z| \leq e^4\},$$

   R_3 se preslika na

   $$R_3' = \{z \in \mathbb{C} \mid 2\pi - 4 \leq \arg(z) \leq 2\pi, \ |z| = 1\},$$

   R_4 se preslika na

   $$R_4' = \{z \in \mathbb{C} \mid 2\pi - 4 \leq \arg(z) \leq 2\pi, \ |z| = e^4\}.$$

   Kvadrat K_2 se preslika na območje

   $$K_2' = \{z \in \mathbb{C} \mid 2\pi - 4 \leq \arg(z) \leq 2\pi, \ 1 \leq |z| \leq e^4\}.$$

3. (a) Iskana preslikava f ima predpis $f(z) = \frac{1+i}{4}z + \frac{1}{2}(1+i)$.

   (b) Naj bo $R_1 = [0,1] \times \{0\}$, $R_2 = [0,1] \times \{1\}$, $R_3 = \{0\} \times [0,1]$, $R_4 = \{1\} \times [0,1]$. R_1 se preslika na $R_1' = [1, e^3] \times \{0\}$, R_2 se preslika na

   $$R_2' = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Arg}(z) = 3, \ 1 \leq |z| \leq e^3\},$$

   R_3 se preslika na

   $$R_3' = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Arg}(z) \leq 3, \ |z| = 1\},$$

R_4 se preslika na

$$R_4' = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Arg}(z) \leq 3,\ |z| = e^3\}.$$

Kvadrat K_2 se preslika na območje

$$K_2' = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Arg}(z) \leq 3,\ 1 \leq |z| \leq e^3\}.$$

7.2 Rezultati izpitnih nalog: ulomljene linearne preslikave

1. Iskana preslikava f ima predpis $f(z) = \frac{z}{z-1}$. Dani kolobar se preslika na območje $D = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \left(\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}\right) \wedge \left(\left|z - \frac{4}{3}\right| > \frac{2}{3}\right)\right\}$.
2. Iskana preslikava f ima predpis $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$. Preslikano območje je $D' = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid (|z| > 1) \wedge (y > x - 1) \wedge (y < -x + 1)\}$.
3. Iskana preslikava f ima predpis $f(z) = \frac{z}{z-1}$. Preslikano območje je $D' = \left\{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid \left(x < \frac{1}{2}\right) \wedge (y < x - 1)\right\}$.
4. Iskana preslikava f ima predpis $f(z) = \frac{z+3}{z-i}$. Krožnica se preslika na premico z enačbo $x - 3y - 6 = 0$. Premica se preslika na krožnico z enačbo $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$.
5. Iskana preslikava f ima predpis $f(z) = \frac{z+2}{z}$. Preslikano območje je $D' = \left\{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid 0 < x < \frac{1}{2}\right\}$.
6. Iskana preslikava f ima predpis $f(z) = \frac{z}{z-1}$. Preslikano območje je $D' = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < 0 \ \wedge \ \operatorname{Im} z < 0\}$.
7. Iskana preslikava f ima predpis $f(z) = \frac{-z}{z+2}$. Preslikano območje je $D' = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left|z + \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2} \ \wedge \ \operatorname{Im} z < 0\right\}$.
8. Iskana preslikava f ima predpis $f(z) = \frac{z+4}{z}$. Preslikano območje je $D' = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0 < \operatorname{Re} z < \frac{3}{2}\right\}$.
9. Iskana preslikava f ima predpis $f(z) = \frac{3z}{z+2}$. Preslikano območje je $D' = \left\{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid \left(x < \frac{3}{2}\right) \wedge (y < -x + 3)\right\}$.
10. Iskana preslikava f ima predpis $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$. Preslikano območje je $D' = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid (|z| > 1) \wedge (y > x - 1) \wedge (y < -x + 1)\}$.
11. Iskana preslikava f ima predpis $f(z) = \frac{-iz+i}{z+1}$.
12. Iskana preslikava f ima predpis $f(z) = \frac{-z-1}{z-1}$.
13. (a) Iskana preslikava f ima predpis $f(z) = \frac{1}{2}(-1 + i)(z - i)$.

    (b) Naj bo $D_1 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \left(\left|z - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$ in $D_2 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \left(\left|z - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$. Trikotnik T se preslika na območje $D = \{z \in \mathbb{C} \mid (\operatorname{Im} z \leq 0) \ \wedge \ (z \in D_1 \cap D_2)\}$.

7.3 Rezultati izpitnih nalog: druge elementarne funkcije

1. Iskana preslikava f ima predpis $f(z) = 3z^6 + 2i$.

2. (a) Iskana funkcija f ima predpis $f(z) = (1+i)z + 1 - i$.

   (b) Naj bo $R_1 = [0,2] \times \{0\}$, $R_2 = [0,2] \times \{-2\}$, $R_3 = \{0\} \times [-2,0]$, $R_4 = \{2\} \times [-2,0]$. R_1 se preslika na $R_1' = [1, e^4] \times \{0\}$, R_2 se preslika na

   $$R_2' = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Arg}(z) = 2\pi - 4,\ 1 \le |z| \le e^4\},$$

   R_3 se preslika na

   $$R_3' = \{z \in \mathbb{C} \mid 2\pi - 4 \le \arg(z) \le 2\pi,\ |z| = 1\},$$

   R_4 se preslika na

   $$R_4' = \{z \in \mathbb{C} \mid 2\pi - 4 \le \arg(z) \le 2\pi,\ |z| = e^4\}.$$

   Kvadrat K_2 se preslika na območje

   $$K_2' = \{z \in \mathbb{C} \mid 2\pi - 4 \le \arg(z) \le 2\pi,\ 1 \le |z| \le e^4\}.$$

3. (a) Iskana preslikava f ima predpis $f(z) = \frac{1+i}{4} z + \frac{1}{2}(1+i)$.

   (b) Naj bo $R_1 = [0,1] \times \{0\}$, $R_2 = [0,1] \times \{1\}$, $R_3 = \{0\} \times [0,1]$, $R_4 = \{1\} \times [0,1]$. R_1 se preslika na $R_1' = [1, e^3] \times \{0\}$, R_2 se preslika na

   $$R_2' = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Arg}(z) = 3,\ 1 \le |z| \le e^3\},$$

   R_3 se preslika na

   $$R_3' = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le \operatorname{Arg}(z) \le 3,\ |z| = 1\},$$

   R_4 se preslika na

   $$R_4' = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le \operatorname{Arg}(z) \le 3,\ |z| = e^3\}.$$

   Kvadrat K_2 se preslika na območje

   $$K_2' = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le \operatorname{Arg}(z) \le 3,\ 1 \le |z| \le e^3\}.$$

4. Iskana funkcija f ima predpis $f(z) = e^{\frac{2\pi i z}{z-4}}$.

5. (a) Rešitvi enačbe sta $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} i$ in $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} i$. Vrednost funkcije f v točki $-1 - \sqrt{3}i$ je $f(-1 - \sqrt{3}i) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} i$.

   (b) Preslikana množica je

   $$D_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| > 1 \ \wedge\ \arg z \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{8}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right] \right\}.$$

(c) Preslikana množica je

$$D_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Re} z > 0 \;\wedge\; \operatorname{Im} z \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{8}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right] \right\}.$$

6. (a) Preslikana množica je

$$D_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \in (\sqrt{e}, e) \;\wedge\; \arg z \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \right\}.$$

(b) Preslikana množica je

$$D_2 = \left(\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \times (1,2)\right) \cup \left(\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \times (1,2)\right).$$

7. (a) Preslikana množica je

$$D_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \;\middle|\; \operatorname{Arg} z \in \left\{ -\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8} \right\} \right\}.$$

(b) Preslikana množica je

$$D_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Im} z \in \left\{ -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\} \right\}.$$

8. (a) $\operatorname{Log}(3+3i) = \ln(3\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4} i$, rešitve enačbe so $z = \ln(3\sqrt{2}) + \left(\frac{\pi - 4}{4} + 2k\pi\right) i$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Množica I se preslika na $D = [0,1] \times [0, \pi]$.

9. (a) Če je $a = 0$, se poltrak preslika na

$$S_1 = \{ w = u + vi \in \mathbb{C} \mid v = 0 \;\wedge\; u > 1 \}.$$

Če je $a > 0$, se poltrak preslika na del hiperbole

$$S_2 = \left\{ z = u + vi \in \mathbb{C} \;\middle|\; u > 0 \;\wedge\; v < 0 \;\wedge\; \frac{u^2}{(\cos a)^2} - \frac{v^2}{(\sin a)^2} = 1 \right\}.$$

Če je $a < 0$, se poltrak preslika na del hiperbole

$$S_3 = \left\{ z = u + vi \in \mathbb{C} \;\middle|\; u > 0 \;\wedge\; v > 0 \;\wedge\; \frac{u^2}{(\cos a)^2} - \frac{v^2}{(\sin a)^2} = 1 \right\}.$$

(b) Daljica se preslika v del elipse

$$S_4 = \left\{ z = u + vi \in \mathbb{C} \;\middle|\; u > 0 \;\wedge\; \frac{u^2}{(\operatorname{ch} b)^2} + \frac{v^2}{(\operatorname{sh} b)^2} = 1 \right\}.$$

(c) Območje D se preslika na
$D' = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \} \setminus \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0 \;\wedge\; \operatorname{Re} z \in (0,1] \}$.

(d) Rešitve enačbe so $z_1 = -i\ln(\sqrt{2}+1) + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$, in $z_2 = -i\ln(\sqrt{2}-1) + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$.

10. (a) Rešitve enačbe so $z_1 = 2k\pi - i\ln(2)$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$, in $z_2 = 2k\pi + i\ln(2)$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Če je $a = 0$, se premica preslika na $S_1 = \{z = x + yi \in \mathbb{C} \mid x \geq 1 \ \wedge \ y = 0\}$.
Če je $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, se premica preslika na del hiperbole

$$S_2 = \left\{z = x + yi \in \mathbb{C} \ \middle| \ x \geq 0 \ \wedge \ \frac{x^2}{\cos^2 a} - \frac{y^2}{\sin^2 a} = 1\right\}.$$

Če je $a = \frac{\pi}{2}$, se premica preslika na $S_3 = \{z = x + yi \in \mathbb{C} \mid x = 0\}$.
Če je $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, se premica preslika na del hiperbole

$$S_4 = \left\{z = x + yi \in \mathbb{C} \ \middle| \ x \leq 0 \ \wedge \ \frac{x^2}{\cos^2 a} - \frac{y^2}{\sin^2 a} = 1\right\}.$$

Če je $a = \pi$, se premica preslika na $S_5 = \{z = x + yi \in \mathbb{C} \mid x \leq -1 \ \wedge \ y = 0\}$.

(c) Množica D se preslika na celotno kompleksno ravnino, torej $f(D) = \mathbb{C}$.

11. (a) V želeno enakost vstavimo $\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\operatorname{sh} w = \frac{e^w - e^{-w}}{2}$, $\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\operatorname{ch} w = \frac{e^w + e^{-w}}{2}$ in $\operatorname{sh}(z+w) = \frac{e^{z+w} - e^{-z-w}}{2}$. Ko desno stran pomnožimo in poenostavimo, ugotovimo, da enakost velja.

(b) Če je $a = 0$, se daljica preslika na

$$S_1 = \{z = x + yi \in \mathbb{C} \mid x = 0 \ \wedge \ y \in [-1, 1]\}.$$

Če je $a > 0$, se daljica preslika na del elipse

$$S_2 = \left\{z = x + yi \in \mathbb{C} \ \middle| \ x \geq 0 \ \wedge \ \frac{x^2}{(\operatorname{sh} a)^2} + \frac{y^2}{(\operatorname{ch} a)^2} = 1\right\}.$$

Če je $a < 0$, se daljica preslika na del elipse

$$S_3 = \left\{z = x + yi \in \mathbb{C} \ \middle| \ x \leq 0 \ \wedge \ \frac{x^2}{(\operatorname{sh} a)^2} + \frac{y^2}{(\operatorname{ch} a)^2} = 1\right\}.$$

Množica $[0, \infty) \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ se preslika na desno polravnino, torej na $[0, \infty) \times \mathbb{R}$.

12. (a) Rešitve enačbe so $z = 2k\pi i$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$.

(b) V želeno enakost vstavimo $\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\operatorname{ch} w = \frac{e^w + e^{-w}}{2}$, $\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\operatorname{sh} w = \frac{e^w - e^{-w}}{2}$ in $\operatorname{ch}(z+w) = \frac{e^{z+w} + e^{-z-w}}{2}$. Ko desno stran pomnožimo in poenostavimo, ugotovimo, da enakost velja.
Če je $z = x + iy$, potem je $\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y$. Realni del funkcije f je torej $u(x, y) = \operatorname{ch} x \cos y$, imaginarni del pa je $v(x, y) = \operatorname{sh} x \sin y$.

(c) Množica D_a se preslika na del hiperbole

$$H_a = \left\{ z = x + yi \in \mathbb{C} \;\middle|\; x \geq 0 \;\wedge\; \frac{x^2}{\cos^2 a} - \frac{y^2}{\sin^2 a} = 1 \right\}.$$

13. Naj bo $z = x + iy$. Vemo, da je $\cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$. Zato dobimo

$$|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y}.$$

Najprej $\operatorname{sh}^2 y$ nadomestimo s $\operatorname{ch}^2 y - 1$ in dobimo

$$\begin{aligned} |\cos z| &= \sqrt{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x} \\ &= \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x} \leq \sqrt{\operatorname{ch}^2 y} = |\operatorname{ch} y| = \operatorname{ch}(\operatorname{Im} z). \end{aligned}$$

Po drugi strani pa lahko $\operatorname{ch}^2 y$ nadomestimo s $\operatorname{sh}^2 y + 1$, da dobimo

$$\begin{aligned} |\cos z| &= \sqrt{\cos^2 x \operatorname{sh}^2 y + \cos^2 x + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y} \\ &= \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \cos^2 x} \geq \sqrt{\operatorname{sh}^2 y} = |\operatorname{sh} y| = |\operatorname{sh}(\operatorname{Im} z)|. \end{aligned}$$

Če je $z \in \mathbb{R}$, je $\operatorname{Im} z = 0$ in tako dobimo znano neenakost $0 \leq |\cos z| \leq 1$.

7.4 Rezultati izpitnih nalog: kompleksni odvod

1. (a) Naj bo $z = x + iy$. Realni del funkcije f je $u(x, y) = -\operatorname{ch} x \sin y - x^2 + y^2$, imaginarni del pa je $v(x, y) = \operatorname{sh} x \cos y - 2xy$. Od tod lahko hitro preverimo, da je f holomorfna.

   (b) Rezultat je -2π.

2. (a) Funkcija f ni cela. Odvedljiva je v vseh točkah, ki pripadajo množici $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}$.

   (b) Naj bo funkcija $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definirana s predpisom $F(z) = f(z) - g(z)$ za vsak $z \in \mathbb{C}$. Očitno je f holomorfna na $\mathbb{C}$, prav tako velja $F'(z) = f'(z) - g'(z) = 0$ za vsak $z \in \mathbb{C}$. Če zapišemo $z = x + ix$ in $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, potem vemo, da je $F'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y)$. Veljati mora torej $u_x(x, y) = 0$ in $v_x(x, y) = 0$ za vsak $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Iz Cauchy-Riemannovih enačb dobimo še, da velja $u_y(x, y) = 0$ in $v_y(x, y) = 0$ za vsak $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

   Ker je $u_x(x, y) = 0$ za vse $z = x + iy \in \mathbb{C}$, sledi, da mora biti $u(x, y) = C(y)$ za vse $z = x + iy \in \mathbb{C}$, torej je u neka funkcija spremenljivke y. Po drugi strani pa je tudi $u_y(x, y) = C'(y) = 0$ za vse $z = x + iy \in \mathbb{C}$, zato mora biti $u(x, y) = C_0$ za vse $z = x + iy \in \mathbb{C}$, kar pomeni, da je funkcija u neka realna konstanta. Podobno lahko pokažemo, da je tudi funkcija v neka realna konstanta C_1. Velja torej $F(z) = C_0 + iC_1$ za vse $z \in \mathbb{C}$, od tod pa zlahka opazimo, da se f in g razlikujeta za konstanto.

3. Iskane funkcije f imajo predpis $f(z) = \frac{1+i}{2} z^2 + C(1 - i)$, kjer je $C \in \mathbb{R}$.

4. Iskana funkcija f ima predpis $f(z) = iz - z^2 + 3 + i$.
5. Iskana funkcija f ima predpis $f(z) = 2z^2 - 3z$.
6. Iskana funkcija f ima predpis $f(z) = z^3 + iz + i$.
7. Iskana funkcija f ima predpis $f(z) = z^3 + 2z^2 - iz + 1$.
8. Iskana funkcija f ima predpis $f(z) = z^3 - iz^2 + 2i$.
9. Iskane funkcije f imajo predpis $f(z) = 2i\,\mathrm{ch}\,z + C$, kjer je $C \in \mathbb{R}$.
10. Iskana funkcija f ima predpis $f(z) = z\cos z$.
11. Iskana funkcija f ima predpis $f(z) = ze^z + \frac{\pi}{2}$.
12. Iskana funkcija f ima predpis $f(z) = \sin z + z^2 - iz + 2$.
13. Iskana funkcija f ima predpis $f(z) = z\sin z + iz$.
14. Iskana funkcija f ima predpis $f(z) = \cos z - z^2 + 3iz + i$.
15. Iskana funkcija f ima predpis $f(z) = ie^z - iz^2 + 2z$.
16. Iskana funkcija f ima predpis $f(z) = \sin z + z^3 + 2iz + 3i$.

7.5 Rezultati izpitnih nalog: osnovni primeri integralov

1. (a) Rezultat je $\frac{\sqrt{5}}{2}(2-i)$.
   (b) Rezultat je $-\frac{\pi}{2}$.
2. (a) Rezultat je $\mathrm{ch}(3) - \mathrm{ch}(1)$.
   (b) Rezultat je $-\frac{16}{3}(1+i)$.
3. (a) Rezultat je $3 + \frac{3i}{2}$.
   (b) Rezultat je 72.
4. (a) Rezultat je $-\frac{32i}{3}$.
   (b) Rezultat je $8 - 4i$.

7.6 Rezultati izpitnih nalog: Cauchyjeve formule

1. (a) Naj bo $z = x + iy$. Realni del funkcije f je $u(x, y) = -\operatorname{ch} x \sin y - x^2 + y^2$, imaginarni del pa je $v(x, y) = \operatorname{sh} x \cos y - 2xy$. Od tod lahko hitro preverimo, da je f holomorfna.

   (b) Rezultat je -2π.

2. Opazimo, da velja $g'(z) = 3z^2 f(z) + z^3 f'(z)$, zato je $g'(2) = 12f(2) + 8f'(2)$. Če dobljeno pomnožimo z $2\pi i$ in uporabimo Cauchyjeve formule, dobimo želeno enakost.

3. Naravno definicijsko območje funkcije F je $D = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid z = 0 \ \vee \ |z| = 2\}$. Eksplicitni predpis funkcije F: za vsak $z \in D$ velja

$$F(z) = \begin{cases} f'(z); & |z| < 2 \text{ in } z \neq 0 \\ g'\left(\frac{1}{z}\right); & |z| > 2 \end{cases}.$$

   Kar sta f in g holomorfni, je tudi funkcija F holomorfna na D.

7.7 Rezultati izpitnih nalog: Taylorjeva in Laurentova vrsta ter izrek o residuumih

1. (a) Iskana vrsta je $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n - \frac{2}{3^{n+1}}\right) z^n$, ki konvergira za $|z| < 1$.

   (b) Če je $|z-3| < 4$, je $f(z) = \dfrac{2}{z-3} + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(z-3)^n$.

   Če je $|z-3| > 4$, je $f(z) = \dfrac{3}{z-3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(z-3)^{n+1}}$.

2. (a) Glavni del vrste: $\dfrac{3}{z-3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{(z-3)^{n+1}}$. Regularni del vrste je 0.

   (b) Glavni del vrste: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(z-1)^{n+1}}$. Regularni del vrste: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-1)^n$.

3. (a) Iskana vrsta je $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3(-1)^n}{5^{n+1}} - 1\right)(z-1)^n$, ki konvergira za $|z-1| < 1$.

   (b) Laurentova vrsta je $f(z) = \dfrac{4}{z+4} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{(z+4)^{n+1}}$.

4. (a) Glavni del vrste: $\dfrac{1}{z-4} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-5)^n}{(z-4)^{n+1}}$. Regularni del vrste je 0.

   (b) Glavni del vrste: $-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(z-2)^{n+1}}$. Regularni del vrste: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{3^{n+1}}(z-2)^n$.

5. (a) Glavni del vrste: $-\dfrac{1}{z-3}$. Regularni del vrste: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}(z-3)^n$.

   (b) Edina singularna točka je $z=0$ (bistvena singularnost). Integral je enak $\frac{5\pi i}{6}$.

6. Iskana Laurentova vrsta je
$$(z-1)^2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n)!(z-1)^{2n-1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{(2n)!}+\frac{1}{(2n+2)!}\right)\frac{1}{(z-1)^{2n}}.$$
V točki $z=1$ ima funkcija f bistveno singularnost, residuum pa je enak $\mathrm{Res}(f,1)=1$.

7. (a) V $z=0$ ima funkcija f pol 3. stopnje. Glavni del Laurentove vrste pri razvoju funkcije f okoli točke $z=0$ je $-\frac{13}{24z}+\frac{1}{2z^3}$.

   (b) Rezultat je $\left(-\frac{37}{12}+2\,\mathrm{ch}(1)\right)\pi i$.

8. (a) V točki $z=0$ ima funkcija f pol 3. stopnje. Glavni del Laurentove vrste pri razvoju funkcije f okoli točke $z=0$ je $-\frac{5}{6z}-\frac{1}{z^3}$.

   (b) Rezultat je $2\pi i\left(-\frac{5}{6}+\sin(1)\right)$.

9. (a) Singularni točki sta $z_1=1$ (pol 1. stopnje) in $z_2=0$ (pol 2. stopnje). Residuuma sta $\mathrm{Res}(f,1)=e^4-1$ in $\mathrm{Res}(f,0)=-12$.

   (b) Za $r\in(0,1)$ je rezultat $2\pi i\,(e^4-1)$, za $r>1$ pa je integral enak $2\pi i\,(e^4-13)$.

10. (a) V točki $z=0$ ima funkcija f pol 1. stopnje. Glavni del Laurentove vrste pri razvoju funkcije f okoli točke $z=0$ je $-\frac{1}{12z}$.

    (b) Za $r\in\left(0,\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ je rezultat 0, za $r\in\left(\frac{\sqrt{5}}{2},\sqrt{2}\right)$ dobimo $4\pi i\left(-7+8\cos\left(\frac{1}{2}\right)\right)$, za $r\in\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{13}}{2}\right)$ je rezultat $\pi i\left(-\frac{169}{6}+32\cos\left(\frac{1}{2}\right)\right)$, za $r>\frac{\sqrt{13}}{2}$ pa je vrednost integrala $\pi i\left(-\frac{337}{6}+64\cos\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.

11. (a) V točki $z=0$ ima funkcija f pol 2. stopnje. Glavni del Laurentove vrste pri razvoju funkcije f okoli točke $z=0$ je $\frac{1}{20z^2}$.

    (b) Za $r\in(0,1)\cup(3,\infty)$ je rezultat 0, za $r\in(1,3)\setminus\{2\}$ pa dobimo vrednost $\pi i\,(7-6\,\mathrm{sh}\,(1))$.

12. (a) V točki $z=0$ ima funkcija f pol 3. stopnje. Glavni del Laurentove vrste pri razvoju funkcije f okoli točke $z=0$ je $\frac{1}{6z^3}-\frac{1}{6z^2}+\frac{19}{120z}$.

    (b) Za $r\in(0,1)$ je rezultat 0, za $r\in(1,2)$ dobimo vrednost $\frac{19\pi i}{60}$, za $r>2$ pa je rezultat $2\pi i\left(\sin(1)-\frac{101}{120}\right)$.

13. (a) V točki $z=0$ ima funkcija f pol 3. stopnje. Glavni del Laurentove vrste pri razvoju funkcije f okoli točke $z=0$ je $\frac{1}{4z^3}+\frac{5}{24z^2}+\frac{1}{4z}$.

    (b) Za $r\in(0,1)$ je rezultat 0, za $r\in\left(1,\sqrt{2}\right)$ dobimo vrednost $\frac{\pi i}{2}$, za $r\in\left(\sqrt{2},\sqrt{5}\right)$ je rezultat $\frac{(11-4e)\pi i}{6}$, za $r>\sqrt{5}$ pa je vrednost integrala $\pi i\left(\frac{11-4e}{6}-\frac{e^2+1}{48e^2}\right)$.

14. (a) Singularne točke so $z_1 = i$ (pol 1. stopnje), $z_2 = -i$ (pol 1. stopnje) in $z_3 = 0$ (bistvena singularnost). Residuumi so $\operatorname{Res}(f, i) = \operatorname{Res}(f, -i) = -\frac{\operatorname{sh}(1)}{2}$ in $\operatorname{Res}(f, 0) = \operatorname{sh}(1)$.

    (b) Za $r \in (0, 1)$ je rezultat $-\pi \operatorname{sh}(1) i$, za $r \in (1, 2)$ je integral enak $\pi \operatorname{sh}(1) i$, za $r > 2$ pa je rezultat 0.

15. (a) Singularni točki sta $z_1 = 2i$ (pol 2. stopnje) in $z_2 = -2i$ (pol 2. stopnje). Integral je enak $\frac{\pi}{4}$.

    (b) Singularna točka je $z = -1$ (bistvena singularnost). Integral je enak $-2\pi i \cos(1)$.

16. (a) Singularni točki sta $z_1 = 0$ (pol 1. stopnje) in $z_2 = 1$ (pol 1. stopnje). Integral je enak $\pi i(1 - 2\cos(1))$.

    (b) Singularna točka je $z = 2$ (bistvena singularnost). Integral je enak $14\pi i$.

17. (a) Singularna točka je $z = 4$ (bistvena singularnost). Integral je enak πi.

    (b) Singularni točki sta $z_1 = 0$ (pol 1. stopnje) in $z_2 = 2$ (pol 1. stopnje). Integral je enak $\pi i \left(\frac{1}{12} - \frac{\sin(2)}{8}\right)$.

18. (a) Singularna točka je $z = -1$ (bistvena singularnost). Integral je enak $\frac{7\pi i}{3}$.

    (b) Singularni točki sta $z_1 = 0$ (pol 1. stopnje) in $z_2 = 3$ (pol 1. stopnje). Integral je enak $\frac{2\pi i}{9}(e^3 - 4)$.

19. (a) Singularni točki sta $z_1 = 0$ (pol 3. stopnje) in $z_2 = -2$ (pol 1. stopnje). Integral je enak $\pi i \left(-\frac{1}{6} + \frac{\operatorname{ch}(2)-1}{16}\right)$.

    (b) Singularna točka je $z = 0$ (bistvena singularnost). Integral je enak $\frac{\sqrt{3}\pi i}{24}$.

7.8 Rezultati izpitnih nalog: računanje realnih integralov

1. Rezultat je $-\frac{\pi}{27}$.
2. Rezultat je $\frac{7\pi}{50}$.
3. Rezultat je $\frac{13\pi}{50}$.
4. Rezultat je $\frac{5\pi}{288}$.
5. Rezultat je $\frac{3\pi}{16a}$.
6. Rezultat je $\frac{\pi}{4}$.
7. Rezultat je $\frac{5\pi}{32}$.
8. Rezultat je $\frac{13\pi}{45}$.
9. Rezultat je $\frac{\pi}{9}$.

10. Rezultat je $\frac{\pi}{12}$.

11. Rezultat je $\frac{2\pi(1+a^2)}{(1-a^2)^3}$.

12. Rezultat je $\frac{\pi}{2e^2}$.

13. Rezultat je $\frac{\pi}{6e^{3m}}$.

14. Rezultati so $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{\pi(1+x^2)}\, dx = e^{-a}$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{\pi(1+x^2)}\, dx = e^{-a}$ in $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)}{\pi(1+x^2)}\, dx = 0$.

15. Rezultat je $\frac{\pi}{2e^2}$.

16. Rezultat je $\frac{\sqrt{\pi}}{2e}$.

Literatura

[1] L. Ahlfors, *Complex Analysis*, 3rd edition, McGraw-Hill, New York, 1979.

[2] R. B. Ash, W. P. Novinger, *Complex Variables*, 2nd edition, Dover Publications, New York, 2007.

[3] D. Benkovič, *Analiza II, Zbrano gradivo: naloge na vajah, kolokviji in pisni izpiti*, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Maribor, 2010.

[4] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable I*, 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1995.

[5] M. Dobovišek, *Rešene naloge iz analize II*, DMFA, Ljubljana, 2014.

[6] N. Elezović, D. Petrizio, *Funkcije kompleksne varijable: zbirka zadataka*, Element, Zagreb, 1994.

[7] B. Hvala, *Zbirka izpitnih nalog iz analize*, DMFA, Ljubljana, 2007.

[8] S. G. Krantz, *Handbook of Complex Variables*, Birkhäuser, Boston, 1999.

[9] P. Mizori-Oblak, *Matematika za študente tehnike in naravoslovja. Del 3*, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 1991.

[10] M. Razpet, *Rešene naloge iz kompleksne analize: študijsko gradivo* (druga, popravljena in razširjena izdaja), Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta, Ljubljana, 2008. Dostopno 21. 7. 2025 na povezavi:
`https://repozitorij.uni-lj.si/Dokument.php?id=208850&lang=slv`

[11] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3rd edition, McGraw-Hill Education, New York, 1986.

[12] M. Slapar, *Osnove kompleksne analize*, Pedagoška fakulteta Univerze v Ljubljani, Ljubljana, 2012. Dostopno 21. 7. 2025 na povezavi:
`https://repozitorij.uni-lj.si/Dokument.php?id=208260&lang=slv`

[13] M. R. Spiegel, S. Lipschutz, J. J. Schiller, D. Spellman, *Schaum's outlines complex variables: with an introduction to conformal mapping and its applications*, 2nd edition, McGraw-Hill, New York, 2009.

Kompleksna analiza: učbenik z izpitnimi nalogami

Marko Jakovac, Niko Tratnik
Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Maribor, Slovenija
marko.jakovac@um.si, niko.tratnik@um.si

Učbenik je namenjen študentom enopredmetne matematike na Fakulteti za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru. Obravnava temeljne pojme kompleksne analize, vključno s funkcijami kompleksne spremenljivke, kompleksnim odvodom in integracijo, Cauchyjevim izrekom, Taylorjevimi in Laurentovimi vrstami ter izrekom o residuumih. Poseben poudarek je na povezavi med teorijo in reševanjem problemov. V skoraj vseh poglavjih so vključeni zgledi, na koncu izbranih poglavij pa so zbrane izpitne naloge iz pisnih izpitov in kolokvijev iz obdobja 2016–2023. Učbenik vključuje tudi rezultate nalog, kar omogoča samostojno učenje in učinkovito pripravo na izpite. Gradivo je zasnovano kot celovit študijski pripomoček za razumevanje osnov kompleksne analize ter utrjevanje znanja z reševanjem tipičnih izpitnih problemov.

DOI
https://doi.org/10.18690/um.fnm.2.2026

ISBN
978-961-299-139-5

Ključne besede:
kompleksna analiza,
funkcije kompleksne spremenljivke,
kompleksni odvod,
kompleksna integracija,
Cauchyjev izrek,
Taylorjeva vrsta,
Laurentova vrsta,
izrek o residuumih

Univerzitetna založba Univerze v Mariboru

DOI
https://doi.org/
10.18690/um.fnm.2.2026

ISBN
978-961-299-139-5

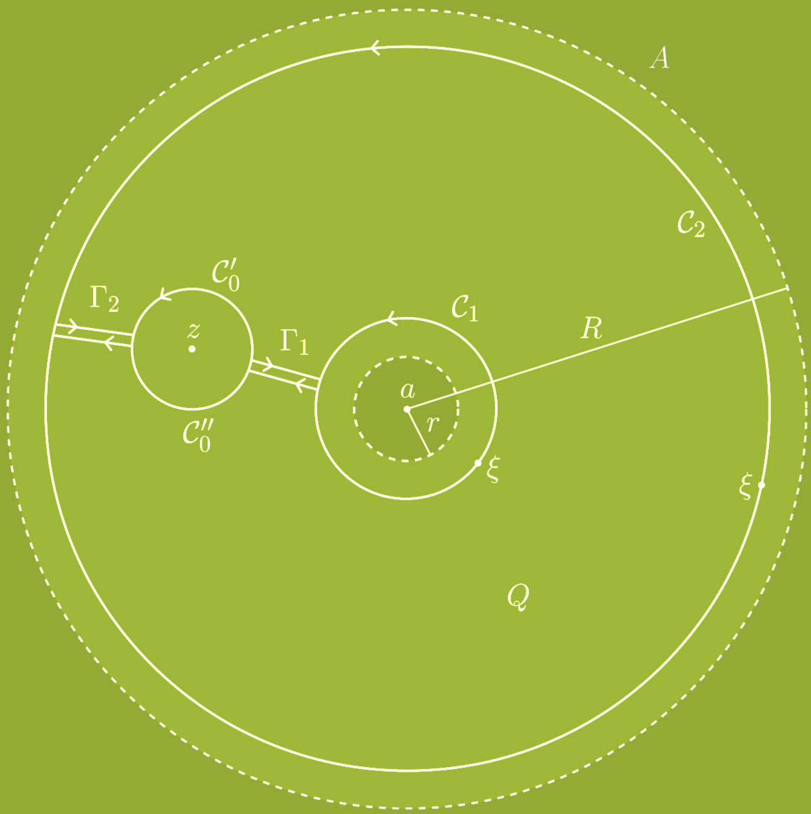
Complex Analysis: A Textbook with Exam Problems

Marko Jakovac, Niko Tratnik
University of Maribor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Maribor, Slovenia
marko.jakovac@um.si, niko.tratnik@um.si,

Keywords:
complex analysis,
functions of a complex variable,
complex differentiation,
complex integration,
Cauchy's theorem,
Taylor series,
Laurent series,
residue theorem

The textbook is intended for undergraduate mathematics majors at the Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Maribor. It covers fundamental topics in complex analysis, including functions of a complex variable, complex differentiation and integration, Cauchy's theorem, Taylor and Laurent series, and the residue theorem. Special emphasis is placed on the connection between theory and problem solving. Almost all chapters include illustrative examples, while selected chapters conclude with exam problems drawn from written exams and midterms from 2016 to 2023. The textbook also provides answers to exam problems, supporting independent study and effective exam preparation. The material is designed as a comprehensive study resource for understanding the core concepts of complex analysis and reinforcing knowledge through solving typical exam-type problems.

University of Maribor Press



Univerza v Mariboru

Fakulteta za naravoslovje
in matematiko