

Primeri seminarskih nalog iz področja problemov linearnega programiranja

ZBRANO GRADIVO

Tea Vizinger
Martin Fale



Univerzitetna založba
Univerze v Mariboru





Univerza v Mariboru

Fakulteta za logistiko

Primeri seminarskih nalog iz področja problemov linearnega programiranja

Zbrano gradivo

Avtorja

Tea Vizinger

Martin Fale

Oktober 2026

Naslov <i>Title</i>	Primeri seminarskih nalog iz področja problemov linearnega programiranja <i>Practical Applications of Linear Programming</i>
Podnaslov <i>Subtitle</i>	Zbrano gradivo <i>Student Seminar Projects</i>
Avtorja <i>Authors</i>	Tea Vizinger (Univerza v Mariboru, Fakulteta za logistiko) Martin Fale (Univerza v Mariboru, Fakulteta za logistiko)
Jezikovni pregled <i>Language editing</i>	Mateja Forte (Univerza v Mariboru, Fakulteta za logistiko)
Tehnični urednik <i>Technical editor</i>	Jan Perša (Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba)
Oblikovanje ovitka <i>Cover designer</i>	Jan Perša (Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba)
Grafika na ovitku <i>Cover graphics</i>	Ilustracija, avtor: Maximalfocus, unsplash.com, 2021
Grafične priloge <i>Graphics material</i>	Viri so lastni, če ni navedeno drugače. Vizinger, Fale (avtorja), 2026
Založnik <i>Published by</i>	Univerza v Mariboru Univerzitetna založba Slomškov trg 15, 2000 Maribor, Slovenija https://press.um.si , zalozba@um.si
Izdajatelj <i>Issued by</i>	Univerza v Mariboru Fakulteta za logistiko Mariborska cesta 7, 3000 Celje, Slovenija https://www.fl.um.si , info.fl@um.si
Izdaja <i>Edition</i>	Prva elektronska izdaja
Vrsta publikacije <i>Publication type</i>	E-knjiga
Dostopno na <i>Available at</i>	https://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/1173
Izdano <i>Published</i>	Maribor, Slovenija, oktober 2026



© Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba

/ University of Maribor, University of Maribor Press

Besedilo / *Text* © Vizinger, Fale (avtorja), 2026

To delo je objavljeno pod licenco Creative Commons Priznanje avtorstva-Nekomercialno-Brez predelav 4.0 Mednarodna. / *This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivs 4.0 International License.*

Uporabnikom je dovoljeno reproduciranje brez predelave avtorskega dela, distribuiranje, dajanje v najem in priobčitev javnosti samega izvirnega avtorskega dela, in sicer pod pogojem, da navedejo avtorja in da ne gre za komercialno uporabo.

Vsa gradiva tretjih oseb v tej knjigi so objavljena pod licenco Creative Commons, razen če to ni navedeno drugače. Če želite ponovno uporabiti gradivo tretjih oseb, ki ni zajeto v licenci Creative Commons, boste morali pridobiti dovoljenje neposredno od imetnika avtorskih pravic.

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Kataložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v Narodni in univerzitetni
knjižnici v Ljubljani
COBISS.SI-ID 301730307
ISBN 978-961-299-211-8 (PDF)

ISBN 978-961-299-211-8 (pdf)

DOI <https://doi.org/10.18690/um.fl.7.2026>

Cena
Price Brezplačni izvod

Odgovorna oseba založnika Prof. dr. Dean Korošak,
For publisher rektor Univerze v Mariboru

Citiranje Vizinger, T., Fale, M. (2026). *Primeri seminarskih nalog iz področja*
Attribution problemov linearnega programiranja. Univerza v Mariboru,
Univerzitetna založba. doi: 10.18690/um.fl.7.2026



Kazalo

Predgovor.....	1
1 Proizvodni problem	3
1.1 Opis in predstavitev problema	3
1.2 Model linearnega programiranja	4
1.2.1 Parametri.....	4
1.2.2 Odločitvene spremenljivke.....	4
1.2.3 Ciljna funkcija	4
1.2.4 Omejitve	4
1.3 Rešitev	5
1.4 Analiza rezultatov.....	6
2 Mešalni problem.....	7
2.1 Opis in predstavitev problema	7
2.2 Model linearnega programiranja.....	8
2.2.1 Parametri.....	8
2.2.2 Odločitvene spremenljivke.....	9
2.2.3 Ciljna funkcija	9
2.2.4 Omejitve	9
2.3 Rešitev	10
2.4 Analiza rezultatov.....	11
3 Transportni problem	13
3.1 Opis in predstavitev problema	13
3.2 Model linearnega programiranja.....	14
3.2.1 Odločitvene spremenljivke.....	14
3.2.2 Ciljna funkcija	14
3.2.3 Omejitve	15
3.3 Rešitev	15
3.4 Analiza rezultatov.....	16
4 Maksimalni pretok izdelkov skozi proizvodni proces brusnega papirja	17
4.1 Opis in predstavitev problema	17
4.2 Model linearnega programiranja.....	19
4.2.1 Odločitvene spremenljivke.....	19

4.2.2	Ciljna funkcija	19
4.2.3	Omejitve	19
4.3	Rešitev	21
4.4	Analiza rezultatov	21
5	Zaključek.....	23
	Viri in literatura.....	25

Predgovor

Optimizacijske metode predstavljajo pomembno podporo pri sprejemanju odločitev na različnih področjih logistike, proizvodnje, transporta in oskrbovalnih sistemov. Njihova uporabnost se kaže predvsem pri reševanju problemov, kjer je treba omejene vire razporediti na čim učinkovitejši način ter poiskati rešitve, ki zagotavljajo najboljše možne rezultate glede na postavljene cilje.

Pričujoči zbornik predstavlja zbirko izbranih primerov seminarskih nalog študentov, ki obravnavajo različne probleme linearne programiranja in omrežne optimizacije. Vsebina zbranega gradiva odraža vsebino predmeta Operacijske raziskave v logistiki v 1. letniku univerzitetnega študijskega programa Logistika sistemov, kjer študenti obravnavajo tipične optimizacijske probleme: proizvodni problem, mešalni problem, transportni problem, omrežni pretoki ter izpeljanke teh problemov, ki vključujejo pogoj celoštevilskosti in binarnosti. Cilj predmeta je v tem, da študenti pridobijo sposobnost prepoznave optimizacijskega problema v realnem okolju, ga znajo matematično zapisati, z uporabo optimizacijskih orodij, poiskati rešitev ter jo argumentirati. Zbornik pa se lahko uporabi kot učni pripomoček tudi pri vseh drugih predmetih, ki v vsebine vključujejo linearno programiranje.

Namen publikacije ni podrobna predstavitev matematičnega ozadja, metod modeliranja ali postopkov reševanja v posameznih programskih orodjih. Poudarek je predvsem na predstavitvi problemov iz prakse, njihovem matematičnem zapisu, dobljenih rešitvah ter interpretaciji in analizi rezultatov. Posamezna poglavja so pripravljena v obliki strnjenih izvlečkov. Pri vsakem primeru je najprej predstavljen problem in njegovo praktično ozadje, nato matematični model ter ključne ugotovitve, ki izhajajo iz dobljenih rešitev. Zaradi večje preglednosti in primerljivosti

med primeri niso vključeni podrobni postopki modeliranja, programske implementacije, slike posameznih korakov reševanja ali izpisi programskih orodij. Takšen pristop omogoča, da je pozornost bralca usmerjena predvsem v razumevanje problema, interpretacijo rezultatov in prepoznavanje možnosti uporabe optimizacijskih metod v različnih praktičnih okoljih.

V prvem delu je predstavljen proizvodni problem, v katerem je obravnavana optimizacija konfiguracij proizvodnega sistema z namenom učinkovitejše izrabe razpoložljivih virov in zmanjšanja operativnih stroškov. Sledi problem mešanja, ki ponazarja odločanje o optimalni kombinaciji vhodnih materialov oziroma sestavin ob upoštevanju stroškovnih in kakovostnih zahtev. Tretji primer predstavlja transportni problem, eno najpogostejših aplikacij linearnega programiranja, kjer je cilj minimizirati stroške prevoza med več izhodiščnimi in ponornimi točkami. V zadnjem delu zbornika je predstavljen še primer problema maksimalnega pretoka, ki sodi med klasične probleme omrežne optimizacije. Takšni modeli omogočajo določanje največje možne količine pretoka skozi omrežje ob upoštevanju kapacitet povezav in imajo številne praktične uporabe pri načrtovanju logističnih, prometnih, telekomunikacijskih in drugih omrežnih sistemov.

Zbornik je namenjen študentom, pedagogom in vsem zainteresiranim bralcem, ki želijo skozi konkretne primere spoznati uporabnost optimizacijskih metod pri reševanju realnih problemov. Predstavljeni primeri dokazujejo, da lahko matematični modeli in optimizacijski pristopi pomembno prispevajo k učinkovitejšemu odločanju, boljšemu upravljanju virov ter izboljšanju organizacijskih in logističnih procesov.

1 Proizvodni problem

V nadaljevanju je predstavljen referenčni primer problema linearnega programiranja, pripravljen na osnovi seminarske naloge študenta Daliborja Źekša. Primer je povzet po dokumentu (Źekš, 2026) in je v zbornik vključen kot ilustrativen primer uporabe optimizacijskih metod pri reševanju proizvodnih problemov v logistiki.

Namen tega prispevka ni podrobna predstavitev metodologije modeliranja in reševanja optimizacijskega problema, temveč prikaz zanimivega primera uporabe linearnega programiranja v praksi. Zato je poudarek na opisu in predstavitvi problema, matematičnem modelu, dobljenih rešitvah ter analizi rezultatov, medtem ko je metodološko ozadje predstavljeno le v osnovnem obsegu.

1.1 Opis in predstavitev problema

V sodobni elektronski industriji imajo SMT (Surface Mount Technology) postavljalni stroji ključno vlogo pri avtomatizirani montaži elektronskih komponent na tiskana vezja (PCB). Pomemben dejavnik učinkovitosti proizvodnje je priprava stroja, saj vsaka menjava konfiguracije povzroči dodatne nastavitve, časovne izgube in stroške proizvodnje (Źekš, 2026).

Obravnavani problem vključuje razporejanje šestih različnih PCB-jev med dve konfiguraciji SMT postavljalnega stroja. Na voljo je osem različnih elektronskih komponent, vsaka konfiguracija pa ima omejeno kapaciteto 20 mest za podajalnike komponent. Posamezni PCB zahteva določeno kombinacijo komponent, zato morajo biti vse potrebne komponente nameščene v konfiguraciji, ki ji je PCB dodeljen. Cilj optimizacije je določiti optimalno razporeditev PCB-jev in komponent

med konfiguracijama tako, da se zagotovi izvedljivost proizvodnje ob čim manjši porabi virov (Žekš, 2026).

1.2 Model linearnega programiranja

1.2.1 Parametri

- $i = 1, \dots, 6$ (predstavlja PCB-je);
- $j = 1, \dots, 8$ (predstavlja komponente);
- $k \in \{A, B\}$ (predstavlja konfiguraciji stroja);
- $a_{ij} = 1$, če PCB i uporablja komponento j , sicer 0;
- In kapaciteta posamezne konfiguracije znaša 20 podajalnikov.

1.2.2 Odločitvene spremenljivke

$$\begin{aligned} x_{ik} &= \begin{cases} 1, & \text{če je PCB } i \text{ dodeljen konfiguraciji } k \\ 0, & \text{sicer} \end{cases} \\ y_{jk} &= \begin{cases} 1, & \text{če je komponenta } j \text{ vključena v konfiguracijo } k \\ 0, & \text{sicer} \end{cases} \end{aligned} \quad [1.1]$$

1.2.3 Ciljna funkcija

Minimizirati želimo skupno število uporabljenih podajalnikov (Žekš, 2026):

$$\min \sum_j y_{jA} + \sum_j y_{jB} \quad [1.2]$$

1.2.4 Omejitve

Vsak PCB mora biti dodeljen natanko eni konfiguraciji (Žekš, 2026):

$$x_{iA} + x_{iB} = 1, \forall i \quad [1.3]$$

Kapacitetni omejitvi konfiguracij (Žekš, 2026):

$$\sum_j y_{jA} \leq 20 \quad [1.4]$$

$$\sum_j y_{jB} \leq 20 \quad [1.5]$$

Logične omejitve med PCB-ji in komponentami (Žekš, 2026):

$$y_{jk} \geq x_{ik} \quad \forall i, j, k, \text{ kjer } a_{ij} = 1 \quad [1.6]$$

Binarnost spremenljivk (Žekš, 2026):

$$x_{ik}, y_{jk} \in \{0, 1\} \quad [1.7]$$

1.3 Rešitev

Reševanje modela v programih LINGO in Microsoft Excel je podalo enako optimalno rešitev. Optimalna vrednost ciljne funkcije znaša 2, kar pomeni, da proizvodni sistem uspešno deluje z dvema konfiguracijama SMT postavljalnega stroja (Žekš, 2026).

Optimalna razporeditev PCB-jev je (Žekš, 2026):

- Konfiguracija A: PCB3, PCB5, PCB6,
- Konfiguracija B: PCB1, PCB2, PCB4.

Pri dobljeni razporeditvi so v vsaki konfiguraciji vključene vse komponente, ki jih zahtevajo pripadajoči PCB-ji, zato so izpolnjene vse tehnološke zahteve proizvodnega procesa. Prav tako nobena konfiguracija ne presega razpoložljive kapacitete podajalnikov (Žekš, 2026).

1.4 Analiza rezultatov

Rezultati optimizacije kažejo, da zadoščata dve konfiguraciji SMT postavljalnega stroja za izvedbo celotnega proizvodnega programa. S tem se izognemo dodatnim nastavitvam stroja in zmanjšamo potrebo po menjavah konfiguracij med proizvodnjo. Primerjava rezultatov, dobljenih v programih LINGO in MS Excel, je pokazala popolno ujemanje rešitev. To potrjuje pravilno oblikovan matematični model in zanesljivost dobljenih rezultatov (Žekš, 2026).

Optimizirana razporeditev prinaša več koristi za proizvodni proces (Žekš, 2026):

- učinkovitejšo uporabo podajalnikov komponent,
- zmanjšanje pripravljalnih časov,
- nižje proizvodne stroške,
- boljšo organizacijo proizvodnje,
- večjo fleksibilnost proizvodnega sistema ob ohranjanju vseh kapacitetnih omejitev.

Primer prikazuje, kako lahko z uporabo linearnega programiranja učinkovito rešujemo probleme razporejanja virov v proizvodnem okolju ter podpiramo odločanje pri načrtovanju proizvodnih procesov (Žekš, 2026).

2 Mešalni problem

V nadaljevanju je predstavljen referenčni primer mešalnega problema, pripravljen na osnovi seminarske naloge študenta Benjamin Mwando Mpweto, študenta Erasmus iz Kenije. Primer je povzet po dokumentu (Mwando, 2025) ter je v zbornik vključen kot ilustrativen primer uporabe linearnega programiranja pri optimizaciji sestave izdelkov.

Namen tega prispevka ni podrobna predstavitev metodologije modeliranja in reševanja optimizacijskega problema, temveč prikaz praktičnega primera uporabe optimizacijskih metod. Zato je poudarek na opisu in predstavitvi problema, matematičnem modelu, dobljenih rešitvah ter analizi rezultatov, medtem ko je metodološko ozadje predstavljeno zgolj v osnovnem obsegu.

2.1 Opis in predstavitev problema

Nedohranjenost in prehranska negotovost še vedno predstavljata pomemben izziv v številnih afriških državah. Hkrati proizvajalci moke stremijo k uporabi lokalno dostopnih surovin, saj s tem zmanjšujejo odvisnost od uvoza in podpirajo lokalno gospodarstvo. Pri tem se pogosto srečujejo z vprašanjem, kako združiti prehransko kakovost izdelka in sprejemljive proizvodne stroške (Mwando, 2025).

Obravnavani problem se nanaša na pripravo optimalne mešanice moke iz štirih lokalno dostopnih sestavin (Mwando, 2025):

- kasava (cassava);
- proso (millet);

- sirek (sorghum);
- in sladki krompir (sweet potato).

Vsaka sestavina ima drugačno ceno in drugačno hranilno vrednost. Cilj proizvajalca je pripraviti en kilogram moke, ki bo izpolnjevala minimalne prehranske zahteve glede vsebnosti beljakovin, energije, železa in cinka, hkrati pa bo cena izdelka čim nižja (Mwando, 2025).

Poleg prehranskih zahtev so bile določene tudi proizvodne omejitve glede deležev posameznih sestavin v mešanici (Mwando, 2025):

- delež kasave ne sme preseči 35 % mešanice;
- delež prosa mora znašati najmanj 20 %;
- delež sirka je omejen navzgor;
- in delež sladkega krompirja mora znašati najmanj 10 %.

Problem predstavlja tipičen mešalni problem (angl. blending problem), pri katerem je treba določiti optimalne deleže posameznih sestavin tako, da so hkrati izpolnjene vse prehranske in proizvodne zahteve ob minimalnih stroških (Mwando, 2025).

2.2 Model linearnega programiranja

2.2.1 Parametri

Za posamezne sestavine so podani stroški (Mwando, 2025):

- kasava = 0,40 \$/kg;
- proso = 0,60 \$/kg;
- sirek = 0,50 \$/kg;
- in sladki krompir = 0,45 \$/kg.

Minimalne prehranske zahteve za 1 kg mešanice so (Mwando, 2025):

- beljakovine: najmanj 7 g;
- energija: najmanj 1400 kcal;
- železo: najmanj 2,5 mg;
- in cink: najmanj 1 mg.

2.2.2 Odločitvene spremenljivke

- x_1 predstavlja delež kasave;
- x_2 predstavlja delež prosa;
- x_3 predstavlja delež sirka;
- In x_4 predstavlja delež sladkega krompirja.

2.2.3 Ciljna funkcija

Cilj je minimizirati strošek enega kilograma mešanice (Mwando, 2025):

$$\min Z = 0,40x_1 + 0,60x_2 + 0,50x_3 + 0,45x_4 \quad [2.1]$$

2.2.4 Omejitve

Skupni delež sestavin mora znašati 100 % (Mwando, 2025):

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \quad [2.2]$$

Poleg tega morajo biti izpolnjene vse prehranske in proizvodne omejitve glede minimalnih hranilnih vrednosti ter dovoljenih deležev posameznih sestavin (Mwando, 2025).

Minimalna vsebnost beljakovin:

$$1,5x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 2x_4 \geq 7 \quad [2.3]$$

Minimalna energijska vrednost:

$$1600x_1 + 1450x_2 + 1350x_3 + 1200x_4 \geq 1400 \quad [2.4]$$

Minimalna vsebnost železa:

$$1,0x_1 + 3,5x_2 + 3,0x_3 + 1,8x_4 \geq 2,5 \quad [2.5]$$

Minimalna vsebnost cinka:

$$0,4x_1 + 1,2x_2 + 1,1x_3 + 0,6x_4 \geq 1,0 \quad [2.6]$$

V danem problemu so omejeni tudi deleži posameznih sestavin (Mwando, 2025):

Delež kasave ne sme presegati 35 % mešanice:

$$x_1 \leq 0,35 \quad [2.7]$$

Delež prosa mora znašati najmanj 20 %:

$$x_2 \geq 0,20 \quad [2.8]$$

Delež sirka ne sme presegati 40 %:

$$x_3 \leq 0,40 \quad [2.9]$$

Delež sladkega krompirja mora znašati najmanj 10 %:

$$x_4 \geq 0,10 \quad [2.10]$$

Spremenljivke so nenegativne (Mwando, 2025):

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \quad [2.11]$$

2.3 Rešitev

Optimizacija je pokazala, da je mogoče zagotoviti vse zahtevane prehranske standarde ob relativno nizkem proizvodnem strošku. Optimalna sestava mešanice je naslednja (Mwando, 2025):

- kasava: 12 %;
- proso: 35 %;
- sîrek: 43 %;
- in sladki krompir: 10 %.

Pri takšni sestavi znaša skupni strošek proizvodnje **0,519 USD/kg**, kar predstavlja optimalno vrednost ciljne funkcije. Analiza dobljene rešitve je pokazala, da so izpolnjene vse prehranske zahteve glede vsebnosti beljakovin, energije, železa in cinka, prav tako pa so zadovoljene vse omejitve glede deležev posameznih sestavin v mešanici (Mwando, 2025).

2.4 Analiza rezultatov

Rezultati kažejo, da lahko s primerno kombinacijo lokalnih surovin dosežemo ravnovesje med prehransko kakovostjo in stroškovno učinkovitostjo. Posebej zanimivo je, da optimalna rešitev vsebuje visok delež prosa in sirka, ki zagotavljata večino potrebnih hranil, medtem ko je delež kasave omejen zaradi njene relativno nižje prehranske vrednosti (Mwando, 2025).

V predstavitvi je bila prikazana tudi primerjava z intuitivnim pristopom, pri katerem bi bile vse sestavine zastopane v enakih deležih. Takšna rešitev sicer ne zahteva posebne analize, vendar ne doseže vseh prehranskih zahtev in zato ne predstavlja ustrezne alternative optimalni mešanici (Mwando, 2025).

Ključne ugotovitve optimizacije so (Mwando, 2025):

- doseženi so vsi zahtevani prehranski standardi;
- uporabljene so lokalno dostopne sestavine;
- strošek mešanice je minimiziran na 0,519 USD/kg; izpolnjene so vse proizvodne omejitve glede deležev posameznih sestavin; in rešitev prispeva k izboljšanju prehranske kakovosti izdelka ob racionalni porabi sredstev. Predstavljeni primer potrjuje, da je linearno programiranje učinkovito orodje za reševanje mešalnih problemov v živilski industriji. S pomočjo optimizacije je mogoče določiti takšno sestavo izdelka, ki hkrati zadosti prehranskim zahtevam potrošnikov in ekonomskim ciljem pro/kg;
- izpolnjene so vse proizvodne omejitve glede deležev posameznih sestavin;
- in rešitev prispeva k izboljšanju prehranske kakovosti izdelka ob racionalni porabi sredstev.

Predstavljeni primer potrjuje, da je linearno programiranje učinkovito orodje za reševanje mešalnih problemov v živilski industriji. S pomočjo optimizacije je mogoče določiti takšno sestavo izdelka, ki hkrati zadosti prehranskim zahtevam potrošnikov in ekonomskim ciljem proizvajalcev (Mwando, 2025).

3 Transportni problem

V nadaljevanju je predstavljen referenčni primer transportnega problema, pripravljen na osnovi seminarske naloge študentov Gregor Struna in Robi Goli. Primer je povzet po dokumentu (Struna & Goli, 2026) in je v zbornik vključen kot ilustrativen primer uporabe linearnega programiranja pri optimizaciji distribucijskih procesov v logistiki.

Namen tega prispevka ni podrobna predstavitev metodologije modeliranja in postopkov reševanja optimizacijskega problema, temveč prikaz zanimivega logističnega primera iz prakse. Zato je poudarek na opisu in predstavitvi problema, matematičnem modelu, dobljenih rešitvah ter analizi rezultatov, medtem ko je metodološko ozadje predstavljeno le v osnovnem obsegu.

3.1 Opis in predstavitev problema

Transportni problem predstavlja eno izmed najpogostejših aplikacij linearnega programiranja v logistiki. Njegov cilj je določiti takšno razporeditev prevozov med izvori in ponori, da so skupni transportni stroški čim nižji, ob hkratnem upoštevanju razpoložljivih kapacitet in potreb kupcev (Struna & Goli, 2026).

V obravnavanem primeru je analizirano podjetje RGS, d. o. o., ki distribuira prehranske izdelke po Sloveniji. Podjetje razpolaga z dvema skladiščema (Struna & Goli, 2026):

- S1 – Novo mesto, kapaciteta 120 enot;
- In S2 – Ptuj, kapaciteta 80 enot.

Blago je treba dostaviti v tri prodajalne (Struna & Goli, 2026):

- P1 – Ljubljana potrebuje 90 enot;
- P2 – Maribor potrebuje 50 enot;
- In P3 – Celje potrebuje 60 enot.

Skupna ponudba znaša 200 enot, skupno povpraševanje pa prav tako 200 enot, zato gre za uravnotežen transportni problem. Transportni stroški so podani v Tabeli 3.1 (Struna & Goli, 2026):

Tabela 3.1: Transportni stroški

Skladišče / Prodajalna	Ljubljana	Maribor	Celje
Novo mesto	4 €	8 €	5 €
Ptuj	5 €	6 €	2 €

Cilj problema je določiti optimalne količine prevoza med skladišči in prodajalnami tako, da bodo izpolnjene vse potrebe prodajaln ob minimalnih skupnih transportnih stroških (Struna & Goli, 2026).

3.2 Model linearnega programiranja

3.2.1 Odločitvene spremenljivke

- x_{11} predstavlja količino prevoza iz Novega mesta v Ljubljano;
- x_{12} predstavlja količino prevoza iz Novega mesta v Maribor;
- x_{13} predstavlja količino prevoza iz Novega mesta v Celje;
- x_{21} predstavlja količino prevoza s Ptuja v Ljubljano;
- x_{22} predstavlja količino prevoza s Ptuja v Maribor;
- in x_{23} predstavlja količino prevoza s Ptuja v Celje.

3.2.2 Ciljna funkcija

Cilj je minimizirati skupne transportne stroške (Struna & Goli, 2026):

$$\min Z = 4x_{11} + 8x_{12} + 5x_{13} + 5x_{21} + 6x_{22} + 2x_{23} \quad [3.1]$$

3.2.3 Omejitve

Količina odpremljenega blaga iz posameznega skladišča ne sme presegati njegove kapacitete (Struna & Goli, 2026):

$$\begin{aligned}x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leq 120 \\x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leq 80\end{aligned}\quad [3.2]$$

Povpraševanje vsake prodajalne mora biti v celoti zadovoljeno (Struna & Goli, 2026):

$$\begin{aligned}x_{11} + x_{21} &\geq 90 \\x_{12} + x_{22} &\geq 50 \\x_{13} + x_{23} &\geq 60\end{aligned}\quad [3.3]$$

Nenegativnost spremenljivk za vse kombinacije skladišč in prodajaln (Struna & Goli, 2026):

$$x_{ij} \geq 0 \quad [3.4]$$

3.3 Rešitev

Model je bil rešen z uporabo programov LINGO in MS Excel, pri čemer sta obe orodji podali enako optimalno rešitev. Optimalna vrednost ciljne funkcije znaša $Z = 840$ €, kar predstavlja minimalne skupne transportne stroške distribucije (Struna & Goli, 2026). Optimalni prevozní načrt je prikazan v tabeli, razčlenitev stroškov optimalne rešitve pa v tabeli

Tabela 3.2: Optimalni prevozní načrt

Izvor	Ljubljana	Maribor	Celje
Novo mesto	90	30	0
Ptuj	0	20	60

Tabela 3.3: Razčlenitev stroškov optimalne rešitve

Relacija	Strošek
Novo mesto → Ljubljana (90 enot)	360 €
Novo mesto → Maribor (30 enot)	240 €
Ptuj → Maribor (20 enot)	120 €
Ptuj → Celje (60 enot)	120 €
Skupaj	840 €

3.4 Analiza rezultatov

Rezultati kažejo, da optimalna rešitev učinkovito izkorišča stroškovne prednosti posameznih transportnih relacij. Najcenejša povezava v celotnem omrežju je relacija Ptuj–Celje, kjer znaša strošek prevoza le 2 € na enoto. Zaradi tega optimalni načrt v celoti pokrije potrebe prodajalne v Celju iz skladišča na Ptuj (Struna & Goli, 2026).

Skladišče Novo mesto v celoti oskrbuje Ljubljano, saj je strošek prevoza na tej relaciji nižji od alternative s Ptuja. Preostanek zmogljivosti skladišča Novo mesto je namenjen oskrbi dela povpraševanja v Mariboru, medtem ko preostale potrebe Maribora pokrije skladišče Ptuj (Struna & Goli, 2026).

Zanimivo je, da relaciji Novo mesto–Celje in Ptuj–Ljubljana v optimalni rešitvi nista uporabljene. To pomeni, da glede na podane stroške ne prispevata k stroškovno najugodnejši distribuciji in ju model izloči iz optimalnega načrta (Struna & Goli, 2026).

Ključne ugotovitve optimizacije so (Struna & Goli, 2026):

- minimalni skupni transportni stroški znašajo 840 €;
- vse potrebe prodajaln so v celoti zadovoljene;
- vse kapacitete skladišč so v celoti izkoriščene;
- relacija Ptuj–Celje je zaradi najnižjih stroškov maksimalno izkoriščena;
- in rezultati, dobljeni v programih LINGO in MS Excel, se popolnoma ujemajo.

Predstavljeni primer nazorno prikazuje uporabnost linearnega programiranja pri načrtovanju logističnih procesov. Z uporabo optimizacijskega modela je bilo mogoče določiti takšen transportni načrt, ki ob upoštevanju vseh kapacitetnih in povpraševalnih omejitev zagotavlja najnižje možne stroške distribucije (Struna & Goli, 2026).

4 **Maksimalni pretok izdelkov skozi proizvodni proces brusnega papirja**

V nadaljevanju je predstavljen referenčni primer problema maksimalnega pretoka, pripravljen na osnovi študije primera študentke Pacek Saše. Primer (Pacek, 2017) je v zbornik vključen kot ilustrativen prikaz uporabe optimizacijskih metod pri načrtovanju proizvodnih zmogljivosti in analizi ozkih grl v proizvodnem procesu.

Namen tega prispevka ni podrobna predstavitev metodologije modeliranja in implementacije matematičnega modela, temveč prikaz praktične uporabe problema maksimalnega pretoka v proizvodnem okolju. Zato je poudarek na opisu in predstavitvi problema, matematičnem modelu, dobljenih rešitvah ter analizi rezultatov, medtem ko je metodološko ozadje predstavljeno zgolj v osnovnem obsegu.

4.1 Opis in predstavitev problema

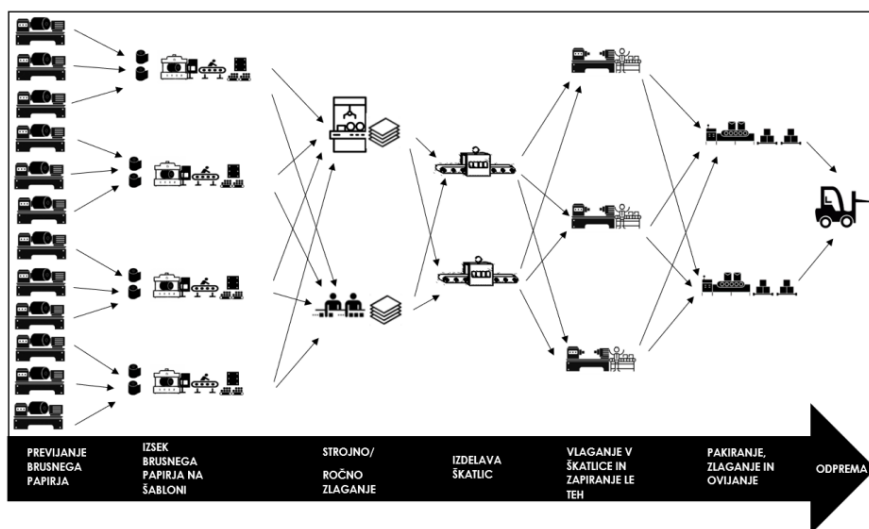
Podjetje XSP, d. o. o., se ukvarja s proizvodnjo brusnega papirja za vibracijske, orbitalne in rotacijske brusilnike. Podjetje se v obdobjih povečanega povpraševanja, predvsem v poletnih mesecih, srečuje s kopičenjem delovnih nalogov in težavami pri pravočasnem izpolnjevanju naročil. Zaradi rasti obsega poslovanja je bilo izvedenih več investicij v proizvodno opremo, vendar vodstvo ni imelo natančnega vpogleda v dejansko zmogljivost celotnega proizvodnega sistema (Pacek, 2017).

Osnovni cilj analize je bil ugotoviti največjo možno produktivnost proizvodnega sistema ter preveriti, ali lahko obstoječa oprema zadosti pričakovanim naročilom v obdobjih največje obremenitve. Poleg tega je bilo treba ugotoviti, katere proizvodne faze predstavljajo omejitve sistema ter kakšne organizacijske ukrepe je smiselno uvesti za povečanje proizvodne zmogljivosti (Pacek, 2017).

Proizvodni proces obsega več medsebojno povezanih faz (Pacek, 2017):

- previjanje brusnega papirja;
- izrez brusnega papirja;
- ročno ali strojno zlaganje;
- izdelavo škatlic;
- vlaganje izdelkov v embalažo;
- pakiranje in ovijanje;
- in odpremo izdelkov.

Proizvodni proces brusnega papirja je prikazan tudi na Sliki 4.1 in poteka skozi več zaporednih faz obdelave, od previjanja materiala do končne odprave. Vsaka faza predstavlja del proizvodnega omrežja, katerega zmogljivosti neposredno vplivajo na skupni pretok izdelkov skozi sistem (Pacek, 2017).



Slika 4.1: Shematski prikaz proizvodnega procesa

4.2 Model linearnega programiranja

Proizvodni sistem je bil predstavljen kot omrežje vozlišč in povezav. Posamezna vozlišča predstavljajo proizvodne operacije, povezave med njimi pa tok materiala oziroma izdelkov skozi proizvodni proces. Cilj modela je določiti največjo količino izdelkov, ki lahko v določenem časovnem obdobju preide skozi celoten sistem (Pacek, 2017).

4.2.1 Odločitvene spremenljivke

Odločitvena spremenljivka x_{ij} predstavlja količino pretoka med vozliščema i in j , kjer posamezna vozlišča predstavljajo posamezne proizvodne operacije (Pacek, 2017).

4.2.2 Ciljna funkcija

Cilj modela je maksimirati skupni pretok skozi proizvodno omrežje $\text{Max } F$, kjer F predstavlja skupni pretok izdelkov od vhoda v proizvodni proces do odpreme končnih izdelkov (Pacek, 2017).

4.2.3 Omejitve

Pretok po posamezni povezavi ne sme presegati zmogljivosti ustrezne proizvodne faze (Pacek, 2017):

$$x_{ij} \leq c_{ij} \quad [4.1]$$

kjer c_{ij} predstavlja kapaciteto posamezne povezave oziroma proizvodne operacije.

Tedenske zmogljivosti ključnih proizvodnih faz znašajo (glej Tabelo 4.1.; Pacek, 2017):

Tabela 4.1: Tedenske zmogljivosti proizvodnih faz

Proizvodna faza	Tedenska zmogljivost
Previjanje brusnega papirja	144.000 kosov
Izrez brusnega papirja	32.000 kosov
Strojno zlaganje	12.800 kosov
Ročno zlaganje	6.000 kosov
Izdelava škatlic	32.000 kosov
Vlaganje v škatlice	15.600 kosov
Pakiranje in ovijanje	38.640 kosov
Odprema	50.000 kosov

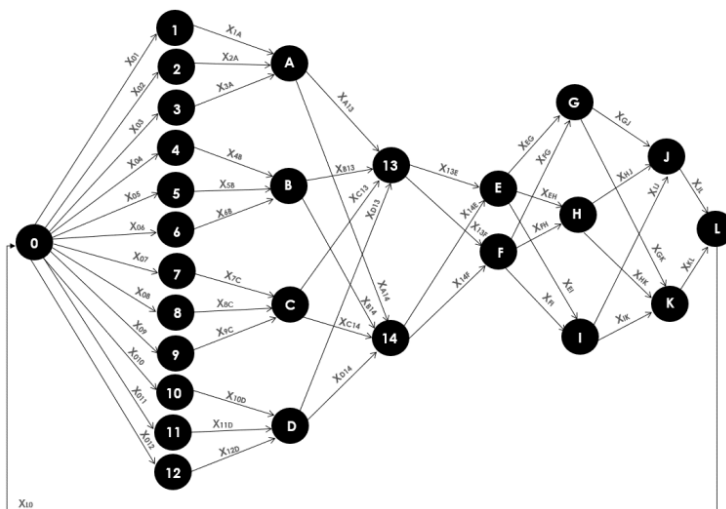
Za vsako vozlišče mora veljati ravnotežje med vhodnim in izhodnim tokom (Pacek, 2017):

$$\sum x_{ij} = \sum x_{jk} \quad [4.2]$$

To pomeni, da se tok izdelkov med posameznimi fazami ohranja in da v omrežju ni izgub pretoka.

Pogoj nenegativnosti za vse povezave v proizvodnem omrežju (Pacek, 2017).

$$x_{ij} \geq 0 \quad [4.3]$$



Slika 4.2: Omrežni prikaz modela maksimalnega pretoka

Omrežni model proizvodnega sistema je prikazan na Sliki 4.2 in prikazuje medsebojno povezanost posameznih proizvodnih faz. Zmogljivosti povezav predstavljajo omejitve sistema, na podlagi katerih se določi maksimalni pretok izdelkov skozi celotno proizvodno omrežje (Pacek, 2017).

4.3 Rešitev

Analiza proizvodnega omrežja je pokazala, da lahko sistem pri predvidenem enoizmenskem delovnem času doseže največji tedenski pretok 15.600 izdelkov na teden, kar predstavlja maksimalno možno količino izdelkov, ki jo lahko proizvodni sistem izdela z obstoječimi zmogljivostmi (Pacek, 2017).

Ugotovljena je bila tudi povprečna produktivnost sistema 6,93 izdelka na minuto oziroma približno 253 izdelkov na uro pri običajnem delovnem režimu. V nadaljnji analizi so bila uporabljena dejanska naročila iz dveh najbolj obremenjenih tednov v avgustu. Skupna količina naročil je znašala 34.700 izdelkov, kar bistveno presega zmogljivosti tekoče dnevne proizvodnje brez dodatnih organizacijskih ukrepov (Pacek, 2017).

Rezultati simulacij so pokazali, da proizvodnja prve dni še uspešno sledi naročilom, v nadaljevanju opazovanega obdobja pa začne prihajati do kopičenja delovnih nalogov, saj dnevna zmogljivost proizvodnega sistema ne zadošča več za sprotno obdelavo vseh naročil (Pacek, 2017).

4.4 Analiza rezultatov

Rezultati študije primera potrjujejo, da produktivnost posameznih strojev ni zadosten kazalnik zmogljivosti celotnega sistema. Skupna zmogljivost proizvodnje je odvisna od najšibkejših členov proizvodnega procesa, ki predstavljajo ozka grla in omejujejo skupni pretok skozi omrežje (Pacek, 2017).

Analiza je pokazala, da lahko proizvodni sistem v rednih razmerah dosega zadovoljivo produktivnost, vendar ob izrazito povečanem povpraševanju osemurni delovnik ne omogoča sprotne proizvodnje vseh naročil. Posledično prihaja do prenašanja naročil v naslednje delovne dni in do povečevanja zaostankov v proizvodnji (Pacek, 2017).

Posebej pomembna ugotovitev je, da dodatne investicije v opremo same po sebi ne zagotavljajo sorazmernega povečanja produktivnosti. Simulacije so pokazale, da je v obravnavanem primeru učinkovitejši ukrep podaljšanje delovnega časa oziroma uvedba dodatnega delovnega dne, saj je omejitev pogosto povezana z razpoložljivim časom delovanja in ne zgolj s številom strojev (Pacek, 2017).

Ključne ugotovitve analize so (Pacek, 2017):

- maksimalni tedenski pretok sistema znaša 15.600 izdelkov;
- povprečna produktivnost dosega 6,93 izdelka na minuto;
- ob povečanem povpraševanju redni delovni čas ne omogoča tekoče proizvodnje vseh naročil;
- glavno ozko grlo predstavlja omejena razpoložljivost delovnega časa in nenujno pomanjkanje opreme;
- in podaljšanje izmene ali uvedba dodatnega delovnega dne predstavlja učinkovitejšo rešitev kot uvedba celotne dodatne izmene.

Predstavljeni primer prikazuje uporabnost problema maksimalnega pretoka pri načrtovanju proizvodnje in upravljanju zmogljivosti proizvodnih sistemov. Z uporabo omrežnega modela je bilo mogoče določiti dejanske meje proizvodnega sistema, prepoznati ozka grla ter oceniti vpliv različnih organizacijskih ukrepov na produktivnost in sposobnost podjetja za odzivanje na povečano povpraševanje (Pacek, 2017).

5 Zaključek

Predstavljeni zbornik združuje primere uporabe optimizacijskih metod pri reševanju različnih problemov s področja logistike, proizvodnje in omrežne optimizacije. Prikazani primeri obsegajo proizvodni problem, problem mešanja, transportni problem ter problem maksimalnega pretoka. Vsak izmed njih predstavlja področje, kjer lahko matematični modeli pomembno prispevajo k učinkovitejšemu odločanju in boljšemu izkoriščanju razpoložljivih virov.

Namen zbornika ni bil podrobno predstaviti postopkov modeliranja in reševanja, temveč skozi izbrane primere prikazati uporabnost optimizacijskih pristopov pri obravnavi realnih problemov. Zato so posamezna poglavja zasnovana kot strnjeni izvlečki, ki bralcu omogočajo hitro razumevanje problema, vpogled v matematični model ter pregled ključnih rezultatov in njihovih praktičnih implikacij. Za podrobnejši vpogled v teorijo linearnega programiranja ter v postopke reševanja v posameznih programskih orodjih bralcu predlagamo delo prof. dr. Tomaža Krambergerja in doc. dr. Simone Šinko (2022)¹ ali temeljno gradivo iz področja operacijskih raziskav avtorja Wayne L. Winston (2004)².

Predstavljeni primeri potrjujejo, da lahko z uporabo linearnega programiranja in omrežnih modelov uspešno rešujemo vprašanja razporejanja virov, določanja optimalnih kombinacij proizvodnih dejavnikov, minimizacije transportnih stroškov ter načrtovanja pretokov v omrežjih. Ne glede na različnost obravnavanih

¹Kramberger, T. & Šinko, S. (2022). *Optimizacijske metode v logistiki: Osnovni problemi linearnega programiranja*. Fakulteta za logistiko, Univerza v Mariboru.

²Winston, W.L. (2004). *Operations research: Applications and Algorithms*. Brooks/Cole—Thomson Learning, Belmont, CA (4th ed.).

problemov je skupna značilnost vseh iskanje optimalne rešitve ob upoštevanju številnih omejitev, s katerimi se organizacije srečujejo v praksi.

Pomembna ugotovitev je tudi, da optimizacijske metode niso zgolj teoretična orodja, temveč predstavljajo učinkovito podporo pri vsakodnevnem odločanju v gospodarskih in logističnih sistemih. Njihova uporaba omogoča večjo preglednost odločanja, boljšo izrabo virov, zmanjševanje stroškov in izboljšanje učinkovitosti procesov.

Zbornik tako predstavlja zbirko primerov dobrih praks, ki lahko služi kot učni vir študentom, pomoč pedagogom pri predstavitvi optimizacijskih metod ter izhodišče vsem, ki jih zanimajo praktične možnosti uporabe matematičnega modeliranja pri reševanju realnih organizacijskih in logističnih problemov. Pri tem predstavljeni primeri jasno kažejo, da lahko premišljena uporaba optimizacijskih metod pomembno prispeva h kakovostnejšemu in bolj utemeljenemu sprejemanju odločitev v sodobnem poslovnem okolju.

Viri in literatura

- Mwando, B.M. (2025). *Optimizing Flour Blends for Cost and Nutritional Quality in Africa: A Blending Problem Approach* [Seminarska naloga pri predmetu Operations research in logistics]. Fakulteta za logistiko, Univerza v Mariboru.
- Pacek, S. (2017). Maksimalni pretok izdelkov skozi proizvodni proces brusnega papirja [Seminarska naloga pri predmetu Optimizacija logističnih procesov]. Fakulteta za logistiko, Univerza v Mariboru.
- Struna, G. & Goli, R. (2026). *Transportni problem* [Seminarska naloga pri predmetu Uporaba optimizacijskih metod v logistiki]. Fakulteta za logistiko, Univerza v Mariboru.
- Žekš, D. (2026). *Proizvodni problem* [Seminarska naloga pri predmetu Uporaba optimizacijskih metod v logistiki]. Fakulteta za logistiko, Univerza v Mariboru.



PRIMERI SEMINARSKIH NALOG IZ PODROČJA PROBLEMOV LINEARNEGA PROGRAMIRANJA: ZBRANO GRADIVO

TEA VIZINGER, MARTIN FALC

Univerza v Mariboru, Fakulteta za logistiko, Celje, Slovenija
tea.vizinger@um.si, martin.falc@um.si

Publikacija predstavlja zbirko izbranih primerov seminarskih nalog s področja linearnega programiranja in omrežne optimizacije, pripravljenih v okviru študija logistike. Obravnava štiri temeljne tipe optimizacijskih problemov: proizvodni problem, mešalni problem, transportni problem in problem maksimalnega pretoka. Pri vsakem primeru so predstavljeni praktično ozadje problema, matematični model, dobljene rešitve ter analiza rezultatov. Namen publikacije ni podrobna razlaga metodologije modeliranja ali uporabe programskih orodij, temveč prikaz uporabnosti optimizacijskih pristopov pri reševanju realnih logističnih in proizvodnih izzivov. Predstavljeni primeri dokazujejo, da lahko matematični modeli pomembno prispevajo k učinkovitejšemu odločanju, boljši izrabi virov, zmanjševanju stroškov ter izboljšanju organizacijskih in logističnih procesov. Publikacija je namenjena študentom, pedagogom in vsem, ki želijo spoznati praktične možnosti uporabe optimizacijskih metod v sodobnem poslovnem okolju.

DOI
[https://doi.org/
10.18690/um.fl.7.2026](https://doi.org/10.18690/um.fl.7.2026)

ISBN
978-961-299-211-8

Ključne besede:
linearno programiranje,
omrežna optimizacija,
logistični procesi,
optimizacijski modeli,
podpora odločanju

DOI
[https://doi.org/
10.18690/um.fl.7.2026](https://doi.org/10.18690/um.fl.7.2026)

ISBN
978-961-299-211-8

Keywords:

linear programming,
network optimization,
logistics processes,
optimization models,
decision support

PRACTICAL APPLICATIONS OF LINEAR PROGRAMMING: STUDENT SEMINAR PROJECTS

TEA VIZINGER, MARTIN FALE

University of Maribor, University of Maribor, Faculty of Logistics, Celje, Slovenia
tea.vizinger@um.si, martin.fale1@um.si

This publication presents a collection of selected student seminar projects in the fields of linear programming and network optimization, developed within logistics education. It covers four fundamental types of optimization problems: the production problem, the blending problem, the transportation problem, and the maximum flow problem. For each case, the practical background, mathematical model, obtained solution, and analysis of results are presented. The purpose of the publication is not to provide a detailed explanation of modelling methodologies or software implementation, but rather to demonstrate the practical applicability of optimization techniques to real-world logistics and production challenges. The presented case studies illustrate how mathematical models can support more effective decision-making, improve resource utilization, reduce costs, and enhance organizational and logistical processes. The publication is intended for students, educators, and anyone interested in understanding the practical application of optimization methods in contemporary business and logistics environments.





Univerza v Mariboru

Fakulteta za logistiko

