



Univerzitetna založba  
Univerze v Mariboru

# Metoda končnih elementov v analizi statičnega odziva ravninskih linijskih konstrukcij

Matjaž  
**SKRINAR**

Zbirka rešenih  
primerov





Univerza v Mariboru

Fakulteta za gradbeništvo,  
prometno inženirstvo in arhitekturo

# Metoda končnih elementov v analizi statičnega odziva ravninskih linijskih konstrukcij

Zbirka rešenih primerov

**Avtor**

Matjaž Skrinar

Junij 2026

<b>Naslov</b> <i>Title</i>	<b>Metoda končnih elementov v analizi statičnega odziva ravninskih linijskih konstrukcij</b> <i>Finite Element Method in the Analysis of Static Response of Planar One-Dimensional Structures</i>
<b>Podnaslov</b> <i>Subtitle</i>	<b>Zbirka rešenih primerov</b> <i>A Collection of Solved Examples</i>
<b>Avtorica</b> <i>Author</i>	Matjaž Skrinar (Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo)
<b>Recenzija</b> <i>Review</i>	Iztok Peruš (Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo)  Marina Trajković-Milenković (Univerza v Nišu, Fakulteta za gradbeništvo in arhitekturo)  Mojmir Uranjek (Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo)
<b>Lektoriranje</b> <i>Language editing</i>	Zvezdana Sabol Golob (Univerza v Mariboru, Knjižnica tehniških fakultet Maribor)
<b>Tehnični urednik</b> <i>Technical editor</i>	Marina Bajič (Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba)  Jan Perša (Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba)
<b>Oblikovanje ovitka</b> <i>Cover designer</i>	Jan Perša (Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba)
<b>Grafike na ovitku</b> <i>Cover graphics</i>	Nebotičnik, foto: SevenStorm JUHASZIMRUS, pexels.com, 2014
<b>Grafične priloge</b> <i>Graphic material</i>	Vsi viri so lastni, če ni navedeno drugače. Skrinar (avtor), 2026

<b>Založnik</b> <i>Published by</i>	<b>Univerza v Mariboru</b> <b>Univerzitetna založba</b> Slomškovo trgo 15, 2000 Maribor, Slovenija <a href="https://press.um.si">https://press.um.si</a> , <a href="mailto:zalozba@um.si">zalozba@um.si</a>
<b>Izdajatelj</b> <i>Issued by</i>	<b>Univerza v Mariboru</b> <b>Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo</b> Smetanova ulica 17, 2000 Maribor, Slovenija <a href="https://fgpa.um.si">https://fgpa.um.si</a> , <a href="mailto:fgpa@um.si">fgpa@um.si</a>
<b>Izdaja</b> <i>Edition</i>	Prva izdaja
<b>Vrsta publikacije</b> <i>Publication type</i>	E-knjiga
<b>Izdano</b> <i>Published at</i>	Maribor, Slovenija, junij 2026
<b>Dostopno na</b> <i>Available at</i>	<a href="https://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/1106">https://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/1106</a>

CIP - Kataložni zapis o publikaciji  
Univerzitetna knjižnica Maribor

624.072:519.6(076) (0.034.2)

SKRINAR, Matjaž

Metoda končnih elementov v analizi statičnega odziva ravninskih linijskih konstrukcij [Elektronski vir] : zbirka rešenih primerov / avtor Matjaž Skrinar. - 1. izd. - E-knjiga. - Maribor : Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba, 2026

Način dostopa (URL) : <https://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/1106>

ISBN 978-961-299-163-0 (PDF)  
doi: 10.18690/um.fgpa.1.2026  
COBISS.SI-ID 282702083



© Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba  
/ University of Maribor, University of Maribor Press

**Besedilo** / Text © Skrinar (avtor), 2026

To delo je objavljeno pod licenco Creative Commons Priznanje avtorstva-Nekomercialno-Brez predelav 4.0 Mednarodna. / *This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivs 4.0 International License.*

Uporabnikom je dovoljeno reproduciranje brez predelave avtorskega dela, distribuiranje, dajanje v najem in priobčitev javnosti samega izvirnega avtorskega dela, in sicer pod pogojem, da navedejo avtorja in da ne gre za komercialno uporabo.

Vsa gradiva tretjih oseb v tej knjigi so objavljena pod licenco Creative Commons, razen če to ni navedeno drugače. Če želite ponovno uporabiti gradivo tretjih oseb, ki ni zajeto v licenci Creative Commons, boste morali pridobiti dovoljenje neposredno od imetnika avtorskih pravic.

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

**ISBN** 978-961-299-163-0 (pdf)

**DOI** <https://doi.org/10.18690/um.fgpa.1.2026>

**Cena** Brezplačni izvod

**Odgovorna oseba založnika** Prof. dr. Deam Korošak,  
*For publisher* rektor Univerze v Mariboru

**Citiranje** Skrinar, M. (2026). *Metoda končnih elementov v analizi statičnega odziva ravninskih linijskih konstrukcij: Zbirka rešenih primerov*. Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba. doi: 10.18690/um.fgpa.1.2026  
*Attribution*



# Kazalo

<b>Predgovor</b> .....	<b>1</b>
<b>Poglavje I – Matematične osnove – navadne diferencialne enačbe in variacijski račun</b> .....	<b>5</b>
Primer 1 – Reševanje upogibnice (diferencialne enačbe 4. reda).....	5
<b>Poglavje II – Osni pomiki nosilcev in prečni pomiki kablov</b> .....	<b>25</b>
Primer 2.a – Analiza stebra, obremenjenega z lastno težo .....	25
Primer 2.b – Analiza stebra, obremenjenega z lastno težo in koncentrirano silo $F_1$ na vrhu stebra .....	44
Primer 2.c – Steber, obremenjen z lastno težo in koncentrirano silo $F_1$ v stebru .....	51
Primer 3.a* – Konzolni nosilec pravokotnega prereza z linearno spreminjajočo višino.....	58
Primer 3.b* – Konzolni nosilec z linearno spreminjajočo višino prereza in enakomerno zvezno obtežbo .....	102
Primer 3.c* – Steber z linearno spreminjajočo višino prereza in obremenjen z lastno težo .....	112
Primer 4.a – Kabel z znano silo $H$ .....	117
Primer 4.b – Kabel z enakomerno zvezno obtežbo .....	124
Primer 5 – Osni pomiki konzole zaradi temperaturne obtežbe.....	140
<b>Poglavje III – Prečni premiki (upogib nosilcev)</b> .....	<b>145</b>
Primer 6.a – Levo vpeta konzola s koncentrirano silo.....	145
Primer 6.b – Analiza levo vpete konzole z upoštevanjem strižnih deformacij .....	175
Primer 6.c* – Analiza levo vpete konzole z večvozličnimi končnimi elementi.....	184
Primer 7.a – Kontinuirni nosilec, na obeh straneh polno vpet .....	196
Primer 7.b – Pomik podpore kontinuirnega nosilca, na obeh straneh polno vpetega.....	215
Primer 8 – Obojestransko vpeti nosilec s členkom .....	229
Primer 9.a – Temeljni nosilec na Winklerjevi elastični podlagi.....	253
Primer 9.b – Členkasto podprti nosilec na Winklerjevi elastični podlagi.....	280
Primer 10.a – Prostoležeči nosilec s koncentrirano silo na sredini .....	304
Primer 10.b – Nosilec, na levi strani členkasto podprt, na desni polno vpet .....	321
Primer 11 – Osni in prečni pomiki nosilca zaradi temperaturne obtežbe .....	335
<b>Poglavje IV – Ravninske linijske konstrukcije</b> .....	<b>347</b>
Primer 12 – Enostavna okvirna konstrukcija.....	347
Primer 13 – Enostavna členkasta konstrukcija.....	362
Primer 14 – Ravninska okvirna konstrukcija .....	374
Primer 15 – Ravninska palična konstrukcija .....	402
Primer 16 – Enostavni okvir s poševno drsno podporo .....	412
<b>Poglavje V – Alternativni pristopi analiz</b> .....	<b>439</b>
Primer 17 – Analiza obojestransko polnovpetega nosilca s statično in Guyanovo kondenzacijo .....	439
Primer 18 – Levo vpeta konzola – analiza s statično in Guyanovo kondenzacijo .....	452
Primer 19 – Ravninska okvirna konstrukcija - analiza s statično kondenzacijo .....	461
Primer 20.a – Levo vpeta konzola – analiza z uporabo podkonstrukcij I.....	470
Primer 20.b – Levo vpeta konzola – analiza podkonstrukcij s statično kondenzacijo – II.....	479
Primer 21 – Levo vpeta konzola – uporaba superkonstrukcij .....	488
Primer 22* – Levo vpeta konzola – analiza s frontalno metodo.....	495
Primer 23* – Ravninska okvirna konstrukcija – analiza s frontalno metodo.....	510
Primer 24* – Ravninska okvirna konstrukcija – analiza s frontalno metodo.....	516
Primer 25* – Ravninska okvirna konstrukcija – analiza s tremi podkonstrukcijami.....	527



# Predgovor

Pričujoče delo z naslovom *Metoda končnih elementov v analizi statičnega odziva ravninskih linijskih konstrukcij, zbirka rešenih primerov* predstavlja nadgradnjo gradiva s podobnim naslovom, ki je bilo pripravljeno že leta 2018, a je bilo izdano v fizični obliki šele leta 2020. Vsi izvodi so bili nepričakovano razprodani že leta 2022, zadnjih 15 izvodov pa je nabavil Građevinsko-arhitektonski fakultet iz Niša, Republika Srbija. Takšen odziv bralcev je jasno nakazoval potrebo po ponatisu. Ker pa zgolj navadni ponatis ne pomeni napredka, je bilo smiselno razmisliti o novi, dopoljnjeni izdaji. V tej znatno razširjeni izdaji z bolj natančno definiranim naslovom so odpravljene odkrite napake iz prve izdaje (in verjetno tudi napravljene kakšne nove), obstoječi primeri so dopoljnjeni oz. razširjeni (tudi z izračunom celotne potencialne energije  $\Pi$ , ki služi za oceno kakovosti rešitve), dodani so novi, dodano pa je tudi poglavje, namenjeno zmanjšanju računskega modela, posvečeno prikazu alternativnih možnosti pridobitve primarnih spremenljivk.

Delo je še vedno namenjeno predvsem študentom magistrskih programov Gradbeništva in Gospodarskega inženirstva smer Gradbeništvo Fakultete za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo Univerze v Mariboru kot študijsko gradivo za pisni izpit pri predmetu *Metoda končnih elementov* in *Osnove metode končnih elementov*, nekateri novi primeri pa služijo tudi kot delno študijsko gradivo za izpit pri predmetu *Izbrana poglavja iz metode končnih elementov*. Primeri so narejeni tako, da služijo predvsem kot komplement oz. dopolnitev predavanjem in ne kot popolnoma samostojno uporabno delo.

Delo je razdeljeno na pet sklopov oz. poglavij.

Poglavje 1, ki bo iz vidika površnega ali nepoučenega bralca precej odstopalo od vsebin preostalih poglavij, zajema matematične (pred)osnove metode končnih elementov – reševanje navadne diferencialne enačbe z variacijskim računom. Za to poglavje velja načelo »pot je cilj«, kar pomeni, da glavni poudarek niso dobljeni rezultati, temveč način njihove pridobitve. Tak pristop vsebinsko precej opazno odstopa od rigoroznih matematičnih pravil za reševanje diferencialnih enačb, ki jih študentje spoznajo pri matematičnih predmetih.

Poglavje 2 je namenjeno reševanju tipičnih diferencialnih enačb (DE) 2. reda gradbenih konstrukcij, s katerimi rešujemo osne pomike ravninskih linijskih elementov ter prečne pomike kablov.

Najobsežnejše je poglavje 3, ki pokriva reševanje diferencialne enačbe 4. reda prečnega premika oz. upogiba nosilcev, s posebnim poudarkom na modeliranju členkov konstrukcije.

Poglavje 4 predstavlja evolucijo prejšnjih dveh poglavij, saj prikazuje reševanje vezanih diferencialnih enačb 2. & 4. reda, ki nastopijo, ko se hkrati pojavijo osni in prečni premiki združenih ravninskih linijskih elementov.

Poglavje 5 prikazuje alternativne pristope k analizi, ki temeljijo na manjših računskih modelih, ne da bi bila izgubljena kakovost rezultatov.

Naloge, ki jih delo obravnava, so večinoma izračunane s (pre)veliko natančnostjo, torej z velikim številom decimalnih mest. Število uporabljenih decimalk v vseh analizah je enako dvojni natančnosti (FP64), a je število dejansko izpisanih decimalnih mest ponekod manjše, saj so izpisane vrednosti prilagojene dejanskemu prostoru na posamezni strani. Takšna natančnost za inženirsko prakso običajno ni potrebna in zahtevana, vendar tako veliko število decimalnih mest omogoča bralcu, da lahko razlikuje med napako zaradi metode in napako zaradi zaokrožitve, saj razlike med rezultati, pridobljenimi z različnimi pristopi, ne smejo izvirati iz uporabljene metode.

Rezultate primerov poglavij 2, 3, 4 in 5 sem preveril bodisi z rešitvami diferencialnih enačb, bodisi z lastno programsko opremo. Nekatero primere pa je s programskim paketom SAP 2000 preveril še doc. dr. Denis Imamović, za kar se mu iskreno zahvaljujem.

Upam, da bo to delo našlo pot do študentov in da ga bodo uporabljali predvsem za samostojni študij predmeta še *pred* pisnim delom izpita in ne zgolj za listanje *med* opravljanjem izpita. Pri reševanju nalog si lahko bralci pomagajo s programskim paketom *Mathematica* ali sorodnimi paketi, kot tudi z naprednimi sodobnimi kalkulatorji, ki imajo vgrajen CAS (*Computer Algebra System*). Ti nudijo matematično podporo reševanju, kar omogoči študentom, da več časa posvetijo inženirskemu razmisleku o najustreznejši diskretizaciji in njenem vplivu na kakovost rešitve problema, matematični del analize pa »prevalijo« na ustrezno orodje.

Delo pokriva osnovni spekter vsebin statičnih analiz omenjenih predmetov. Obravnava vsa *potrebna* in *žadostna orodja* za rešitev nalog na izpitih. Z \* so označeni primeri, ki presegajo osnovne vsebine, potrebne za pisni del izpita.

Za vse konstruktivne predloge, ki bodo vodili k izboljšanju kakovosti (in obsega) dela, bom hvaležen.

Delo je sicer prvenstveno namenjeno študentom magistrskih programov *Gradbeništvo* in *Gospodarsko inženirstvo smer Gradbeništvo*, vendar zaradi vsebine nalog menim, da ga bodo lahko uporabili tudi vedoželjnejši študentje visokošolskega programa Gradbeništvo FGPA UM.

Pričujoče delo so izredno skrbno pregledali izr. prof. dr. Marina Trajković-Milenković, izr. prof. dr. Iztok Peruš in doc. dr. Mojmir Uranjek, za kar se jim iskreno zahvaljujem. Zahvaljujem se tudi gospe Zvezdani Sabol Golob za kvalitetno in temeljito opravljeno lektoriranje.

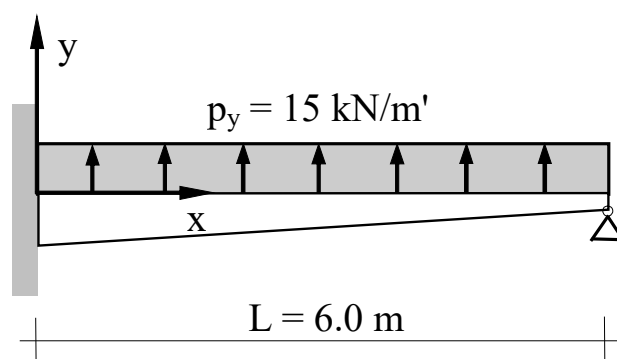


Poglavje I

# Matematične osnove – navadne diferencialne enačbe in variacijski račun

## Primer 1 – Reševanje upogibnice (diferencialne enačbe 4. reda)

Določi upogibnico enostransko vpetega nosilca na sliki 1, če se njegova višina linearno spreminja od 0.75 m na levem robu do 0.25 m na desnem robu, širina pa je konstanta in znaša  $b=0.25$  m. Modul elastičnosti znaša 25 GPa.



Slika 1: Obravnavani nosilec in uporabljeni koordinatni sistem

**Rešitev**

Iščemo rešitev diferencialne enačbe 4. reda:

$$E \cdot \frac{d^2}{dx^2} \left( I_z(x) \cdot \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right) - p_y(x) = 0 \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m}$$

oziroma

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI_z(x) \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} \right) - p_y(x) = 0 \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m}$$

Višina nosilca  $h(x)$  se spreminja po linearni funkciji v splošni obliki:

$$h(x) = C_1 + C_2 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m}$$

za katero vrednosti konstant določimo na osnovi robnih vrednosti višine:

$$h(0) = C_1 + C_2 \cdot 0 = 0.75 \text{ m}$$

$$h(6) = C_1 + C_2 \cdot 6 = 0.25 \text{ m}$$

kar vodi do funkcije:

$$h(x) = 0.75 \text{ m} - 0.5 \text{ m} \cdot \frac{x}{6} = \frac{3}{4} \text{ m} - \frac{x}{12} = 0.75 \text{ m} - 0.0833333333333333 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m}$$

Tudi vztrajnostni moment je funkcija koordinate  $x$ :

$$I_z(x) = \frac{b \cdot h(x)^3}{12} = 0.0208333333333333 \text{ m} \cdot (0.75 \text{ m} - 0.0833333333333333 \cdot x)^3 \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m}$$

Upogibna togost  $EI(x)$  pa znaša:

$$EI_z(x) = 5.20833333333333 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0.75 \text{ m} - 0.0833333333333333 \cdot x)^3 \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m}$$

Približno rešitev za celoten interval ( $0 \leq x \leq 6 \text{ m}$ ) iščemo v obliki:

$$v(x) \approx v_N(x) = \phi_0(x) + \sum_{j=1}^N c_j \cdot \phi_j(x) \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m}$$

### Izbira osnovne funkcije rešitve

Osnovna funkcija rešitve mora zadoščati trem kinematičnim in enemu statičnemu robnemu pogoju. Vsi pogoji so homogeni, kar pomeni, da lahko izbira osnovne funkcije, ki je ne variiramo, bistveno vpliva na kakovost numerične rešitve. Zato kot osnovno funkcijo rešitve izberemo upogibnico nosilca, ki ima enako obremenitev in robne pogoje, a izbrano konstantno višino, npr.  $b=0.375 \text{ m}$ , za katero lahko menimo, da bo dokaj podobna iskani upogibnici:

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= \frac{96}{78125} \cdot x^2 - \frac{16}{46875} \cdot x^3 + \frac{16}{703125} \cdot x^4 \\ &= 1.2288 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 - 3.413333333333335 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 + 2.275555555555557 \cdot 10^{-5} \cdot x^4 \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m} \end{aligned}$$

Opomba: če bi osnovno funkcijo rešitve poskusili poiskati iz popolnega polima tretjega reda, ki zadošča predpisanim homogenim robnim pogojem, bi sledila rešitev  $\phi_0(x) \equiv 0$ .

Ker mora izbrana funkcija  $\phi_0(x)$  zadoščati (morebitnim neničelnim) robnim pogojem, je ne variiramo, kar pomeni, da je ne množimo z neznano konstanto.

### Izbira testnih funkcij

Če izberemo  $N=4$  (izhajajoč iz predpostavke, da večje število funkcij vodi do kvalitetnejše rešitve), lahko izberemo naslednje štiri testne funkcije (ker jih variiramo, njihova izbira ne vpliva tako drastično na kakovost rešitve kot izbira osnovne funkcije rešitve). Izberemo jih lahko npr. tako, da poleg homogene oblike robnih pogojev vpeljemo še nek kinematično možen pomik (npr. enotski pomik na sredini razpona), da se izognemo ničelni rešitvi.

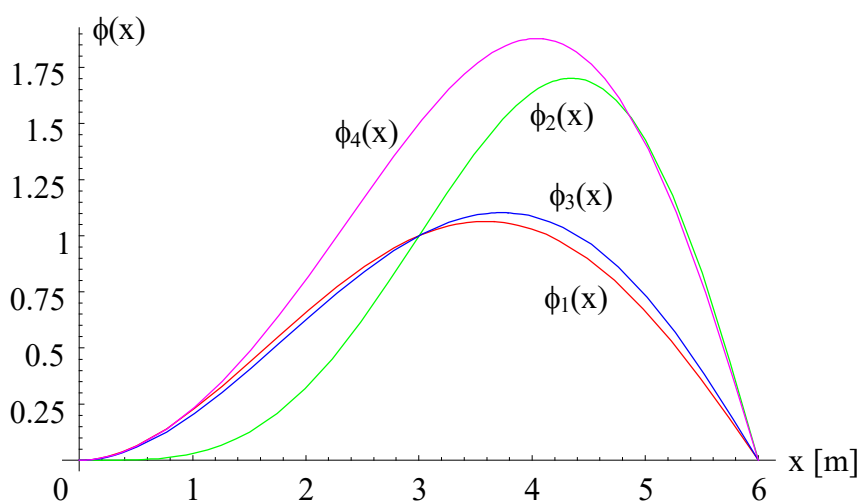
$$\phi_1(x) = \frac{28}{99} \cdot x^2 - \frac{2}{3} \cdot x^3 + \frac{1}{2673} \cdot x^5 \quad (\text{rdeča})$$

$$\phi_2(x) = \frac{10}{243} \cdot x^4 - \frac{5}{81} \cdot x^5 + \frac{2}{2187} \cdot x^6 \quad (\text{zelena})$$

$$\phi_3(x) = \frac{32}{129} \cdot x^2 - \frac{160}{3483} \cdot x^3 + \frac{1}{282123} \cdot x^7 \quad (\text{modra})$$

Četrto funkcijo pa npr. dobimo tako, da vsoto prvih treh funkcij delimo z 2:

$$\phi_4(x) = \frac{1130}{4257} \cdot x^2 - \frac{2041}{38313} \cdot x^3 + \frac{5}{243} \cdot x^4 - \frac{16}{2673} \cdot x^5 + \frac{1}{2187} \cdot x^6 + \frac{1}{564246} \cdot x^7 \quad (\text{vijolična})$$



Slika 2: Primerjava izbranih testnih funkcij

S pomočjo slike se lahko prepričamo, da za vsako vrednost neodvisnega parametra  $x$  znotraj opazovanega intervala ( $0 \leq x \leq 6$  m) velja

$$0 \neq \phi_o(x)$$

$$0 \neq \phi_j(x)$$

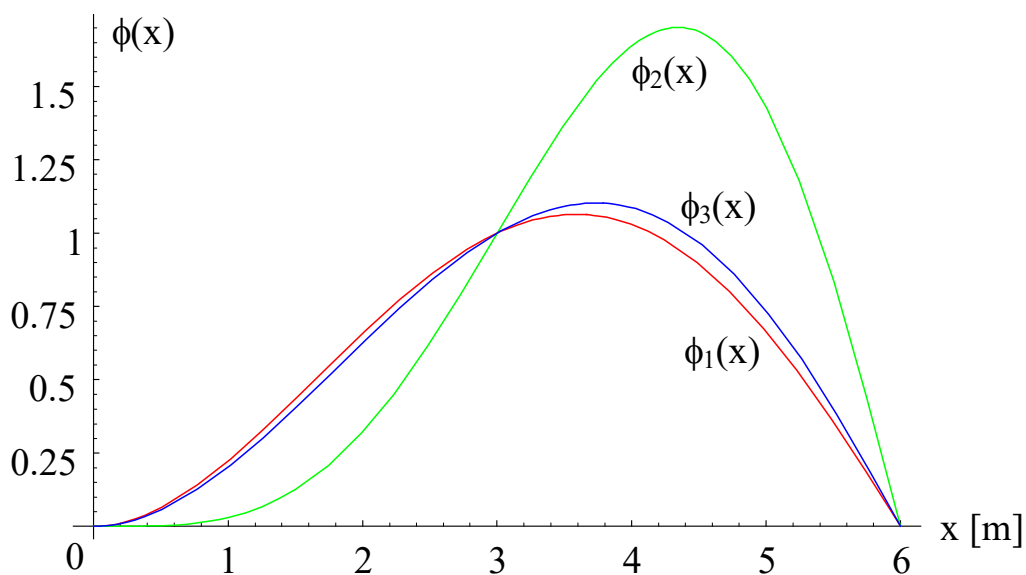
razen na mestih predpisanih pomikov (to je v robnih točkah  $x = 0$  m in  $x = 6$  m).

Linearno neodvisnost izbranih funkcij preverimo z determinanto Wronskega, ki jo izračunamo kot (ker so vsi robni pogoji homogeni, moramo v izračun vključiti tudi osnovno funkcijo):

$$W(t) = W(\phi_0(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t), \phi_4(t)) = \begin{vmatrix} \phi_0(t) & \phi_1(t) & \phi_2(t) & \phi_3(t) & \phi_4(t) \\ \phi_0'(t) & \phi_1'(t) & \phi_2'(t) & \phi_3'(t) & \phi_4'(t) \\ \phi_0''(t) & \phi_1''(t) & \phi_2''(t) & \phi_3''(t) & \phi_4''(t) \\ \phi_0'''(t) & \phi_1'''(t) & \phi_2'''(t) & \phi_3'''(t) & \phi_4'''(t) \\ \phi_0^{(4)}(t) & \phi_1^{(4)}(t) & \phi_2^{(4)}(t) & \phi_3^{(4)}(t) & \phi_3^{(5)}(t) \end{vmatrix} = 0$$

ki bi morala biti od nič različna. Kadar funkcijo  $\phi_0(x)$  in njene odvode vstavimo z racionalno zapisanimi členi (torej v obliki ulomkov) polinoma, je vrednost determinante enaka 0. Če pa funkcijo  $\phi_0(x)$  in njene odvode vstavimo z izvrednotenimi členi, pa je determinanta od nič različna v obliki polinoma z zelo majhnimi koeficienti, kar pa je posledica zgolj zaokroževanj. V tem primeru je vrednost determinante smiselno preveriti grafično.

Ker je determinanta Wronskega pokazala, da izbrane testne funkcije niso medsebojno neodvisne, to pomeni, da je med njimi vsaj ena linearno odvisna. Ker pa determinanta Wronskega ne pokaže, katera je oz. so te funkcije, je potrebno to oz. te funkcije poiskati s poskušanjem. Če ponovimo izračun determinante Wronskega samo s prvimi tremi testnimi funkcijami, je le-ta od nič različna, kar pomeni, da je bila četrta testna funkcija linearna kombinacija prvih treh, in zato analizo nadaljujemo samo s prvimi tremi testnimi funkcijami.



Slika 3: Primerjava izbranih testnih funkcij

Prepričamo se lahko, da za vsako vrednost neodvisnega parametra  $x$  ( $0 \leq x \leq 6$  m) velja:

$$\begin{aligned} 0 &\neq \phi_o(x) \\ 0 &\neq \phi_j(x) \end{aligned}$$

razen na mestih predpisanih pomikov (to je v robnih točkah  $x = 0$  m in  $x = 6$  m).

Tako sledi predpostavljena numerična rešitev v obliki:

$$\begin{aligned} v_N(x) &= 1.2288 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 - 3.4133333 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 + 2.27555556 \cdot 10^{-5} \cdot x^4 \\ &+ c_1 \cdot \left( \frac{28}{99} \cdot x^2 - \frac{2}{3} \cdot x^3 + \frac{1}{2673} \cdot x^5 \right) + c_2 \cdot \left( \frac{10}{243} \cdot x^4 - \frac{5}{81} \cdot x^5 + \frac{2}{2187} \cdot x^6 \right) \\ &+ c_3 \cdot \left( \frac{32}{129} \cdot x^2 - \frac{160}{3483} \cdot x^3 + \frac{1}{282123} \cdot x^7 \right) \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m} \end{aligned}$$

kjer so konstante  $C_1$ ,  $C_2$  in  $C_3$  uteži, ki jih moramo določiti tako, da se bo dobljena približna rešitev čim bolj ujemala z (neznano) točno rešitvijo oz. da bo ostanek čim manjši.

Prvi odvod aproksimativne rešitve je:

$$\begin{aligned} \frac{dv_N(x)}{dt} &= 2.4576 \cdot 10^{-3} \cdot x - 1.024 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 9.102222222 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 + \\ &\left( \frac{56}{99} \cdot x - \frac{2}{11} \cdot x^2 + \frac{5}{2673} \cdot x^4 \right) \cdot c_1 + \left( \frac{40}{243} \cdot x^3 - \frac{5}{81} \cdot x^4 + \frac{4}{729} \cdot x^5 \right) \cdot c_2 \\ &+ \left( \frac{64}{129} \cdot x - \frac{160}{1161} \cdot x^2 + \frac{7}{282123} \cdot x^6 \right) \cdot c_3 \end{aligned}$$

Drugi odvod aproksimativne rešitve je:

$$\begin{aligned} \frac{d^2v_N(x)}{dt^2} &= 2.4576 \cdot 10^{-3} - 2.048 \cdot 10^{-3} \cdot x + 2.730666666666667 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + \\ &\left( \frac{56}{99} - \frac{4}{11} \cdot x + \frac{20}{2673} \cdot x^4 \right) \cdot c_1 + \left( \frac{40}{81} \cdot x^3 - \frac{20}{81} \cdot x^4 + \frac{20}{729} \cdot x^5 \right) \cdot c_2 + \left( \frac{64}{129} - \frac{320}{1161} \cdot x + \frac{14}{94041} \cdot x^6 \right) \cdot c_3 \end{aligned}$$

Produkt drugega odvoda aproksimativne rešitve z upogibno togostjo je:

$$\begin{aligned}
 EI_z \cdot \frac{d^2 v_N(x)}{dt^2} = & 540000 + 1.2428977272727273 \cdot 10^8 \cdot c_1 + 1.0901162790697674 \cdot 10^8 \cdot c_3 \\
 & - (630000 + 1.2133049242424244 \cdot 10^8 \cdot c_1 + 9.689922480620155 \cdot 10^7 \cdot c_3) \cdot x \\
 & + (230000 + 3.1236847643098 \cdot 10^7 \cdot c_1 + 1.08506944444445 \cdot 10^8 \cdot c_2 + 2.422480620155 \cdot 10^7 \cdot c_3) \cdot x^2 \\
 & - (37407.40740741 + 1.48572920564 \cdot 10^6 \cdot c_1 + 9.0422453704 \cdot 10^7 \cdot c_2 + 2.392573452 \cdot 10^6 \cdot c_3) \cdot x^3 \\
 & + (2839.5061728395 - 438411.8967452 \cdot c_1 + 2.8131430041152 \cdot 10^7 \cdot c_2 + 83075.4670835 \cdot c_3) \cdot x^4 \\
 & + (-82.30452674897 + 60890.54121462 \cdot c_1 - 4.1676192653559 \cdot 10^6 \cdot c_2 + 32710.96516413 \cdot c_3) \cdot x^5 \\
 & (-2255.2052301709364 \cdot c_1 + 297687.0903825636 \cdot c_2 - 10903.65505471018 \cdot c_3) \cdot x^6 \\
 & + (-8269.0858439601 \cdot c_2 + 1211.517228301131 \cdot c_3) \cdot x^7 - 44.87100845559745 \cdot c_3 \cdot x^8
 \end{aligned}$$

Njegov drugi odvod vstavimo v diferencialno enačbo in ostanek oz. rezidual je tako:

$$\begin{aligned}
 R(x) = & 445000 + 6.2473695286195 \cdot 10^7 \cdot c_1 + 2.170138888889 \cdot 10^8 \cdot c_2 + 4.844961240310 \cdot 10^7 \cdot c_3 + \\
 & (-224444.4444445 - 8.91437523382 \cdot 10^6 \cdot c_1 - 5.425347222222 \cdot 10^8 \cdot c_2 - 1.435544071203 \cdot 10^7 \cdot c_3) \cdot x \\
 & + (34074.07407407 - 5.260942760943 \cdot 10^6 \cdot c_1 + 3.3757716049383 \cdot 10^8 \cdot c_2 + 996905.605002 \cdot c_3) \cdot x^2 \\
 & + (-1646.0905349794 + 1.2178108242923 \cdot 10^6 \cdot c_1 - 8.33523853071 \cdot 10^7 \cdot c_2 + 654219.3032826 \cdot c_3) \cdot x^3 \\
 & + (-67656.1569051281 \cdot c_1 + 8.930612711476909 \cdot 10^6 \cdot c_2 - 327109.6516413054 \cdot c_3) \cdot x^4 \\
 & + (-347301.6054463242 \cdot c_2 + 50883.723588647495 \cdot c_3) \cdot x^5 - 2512.776473513457 \cdot c_3 \cdot x^6
 \end{aligned}$$

V primeru natančne oz. točne rešitve mora biti rezidual identično enak nič (tj. za vsako točko opazovanega intervala), kar vodi do sistema sedmih enačb s tremi neznankami, kar pomeni, da je sistem predoločen:

$$\begin{aligned}
 445000 + 6.2473695286195 \cdot 10^7 \cdot c_1 + 2.170138888889 \cdot 10^8 \cdot c_2 + 4.844961240310 \cdot 10^7 \cdot c_3 &= 0 \\
 -224444.4444445 - 8.91437523382 \cdot 10^6 \cdot c_1 - 5.425347222222 \cdot 10^8 \cdot c_2 - 1.435544071203 \cdot 10^7 \cdot c_3 &= 0 \\
 34074.07407407 - 5.260942760943 \cdot 10^6 \cdot c_1 + 3.3757716049383 \cdot 10^8 \cdot c_2 + 996905.605002 \cdot c_3 &= 0 \\
 -1646.0905349794 + 1.2178108242923 \cdot 10^6 \cdot c_1 - 8.33523853071 \cdot 10^7 \cdot c_2 + 654219.3032826 \cdot c_3 &= 0 \\
 -67656.1569051281 \cdot c_1 + 8.930612711476909 \cdot 10^6 \cdot c_2 - 327109.6516413054 \cdot c_3 &= 0 \\
 -347301.6054463242 \cdot c_2 + 50883.723588647495 \cdot c_3 &= 0 \\
 -2512.776473513457 \cdot c_3 &= 0
 \end{aligned}$$

in nima enolične rešitve.

Če želimo dobiti uporabne približne rešitve, moramo za določitev optimalnih vrednosti  $c_1$ ,  $c_2$  in  $c_3$  uporabiti drugačne metode, ki jih prikazujemo v nadaljevanju.

Iskanje rešitve s kolokacijsko metodo

Izberemo ekvidistančne točke na razdaljah 1.5 m, 3 m in 4.5 m od levega konca, pri čemer je število izbranih točk enako številu iskanih konstant. Za izbrane točke sledijo trije reziduali:

$$R(1.5) = 179444.44444444455 + 4.103261346099888 \cdot 10^7 \cdot c_1 - 7.597997845936213 \cdot 10^7 \cdot c_2 + 3.006926266493803 \cdot 10^7 \cdot c_3$$

$$R(3.0) = 33888.888888888956 + 1.5782828282828283 \cdot 10^7 \cdot c_1 + 1.6075102880658437 \cdot 10^7 \cdot c_2 + 1.6056410900564648 \cdot 10^7 \cdot c_3$$

ter

$$R(4.5) = -25000 - 945325.6523569021 \cdot c_1 + 3.7299262152777776 \cdot 10^7 \cdot c_2 + 2.5470743499677004 \cdot 10^6 \cdot c_3$$

za katere zahtevamo, da so enaki nič, in tako dobimo sistem treh linearnih enačb s tremi neznankami  $c_1$ ,  $c_2$ , in  $c_3$ .

$$\begin{aligned} 4.1032613461 \cdot 10^7 \cdot c_1 - 7.597997846 \cdot 10^7 \cdot c_2 + 3.006926266 \cdot 10^7 \cdot c_3 &= -179444.4444 \\ 1.57828282828 \cdot 10^7 \cdot c_1 + 1.60751028807 \cdot 10^7 \cdot c_2 + 1.6056410901 \cdot 10^7 \cdot c_3 &= -33888.88889 \\ -945325.652357 \cdot c_1 + 3.72992621528 \cdot 10^7 \cdot c_2 + 2.54707434997 \cdot 10^6 \cdot c_3 &= 25000 \end{aligned}$$

Njihove rešitve so:

$$\begin{aligned} c_1 &= -2.4563160422955938 \cdot 10^{-2} \\ c_2 &= -1.5638470377769748 \cdot 10^{-3} \\ c_3 &= 2.3599686039346486 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

Približna rešitev diferencialne enačbe z izbranimi funkcijami  $\phi_i(x)$  po kolokacijski metodi z ekvidistančno izbranimi točkami je tako:

$$\begin{aligned} v_N(x) &= 1.3582920091871013 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 6.323459590358029 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 \\ &- 4.1600289620451626 \cdot 10^{-5} \cdot x^4 + 1.0117393125209215 \cdot 10^{-5} \cdot x^5 \\ &- 1.43012989280016 \cdot 10^{-6} \cdot x^6 + 8.365034413835982 \cdot 10^{-8} \cdot x^7 \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m} \end{aligned}$$

Iskanje rešitve  $z$  metodo poddomen (podintervalov)

Pri tej metodi dobimo enačbe za določitev konstant tako, da celoten opazovani interval razdelimo na  $N$  posameznih podintervalov (običajno *izberemo* enako dolge podintervale, vendar se podintervali smejo tudi prekrivati, ali pa se medsebojno ne dotikajo), nato pa na vsakem podintervalu izvedemo integriranje ostanka  $R(x)$ . Ko posamezne integrale izenačimo z nič, sledi  $N$  linearnih enačb, iz katerih izračunamo konstante  $c_1, c_2, \dots, c_N$ .

Če izberemo tri enako dolge intervale, dobimo:

$$\int_{x=0}^{2m} R(x) \cdot dx = 525390.9465020581 + 9.752770330188024 \cdot 10^7 \cdot c_1 - 3.0794075682907462 \cdot 10^7 \cdot c_2 + 7.186694557706049 \cdot 10^7 \cdot c_3$$

$$\int_{x=2m}^{4m} R(x) \cdot dx = 80617.28395061765 + 3.2902542226101905 \cdot 10^7 \cdot c_1 + 1.7563538332571983 \cdot 10^7 \cdot c_2 + 3.2088565815987 \cdot 10^7 \cdot c_3$$

in

$$\int_{x=4m}^{6m} R(x) \cdot dx = -56008.230452674674 - 5.482854955591619 \cdot 10^6 \cdot c_1 + 3.734319167132759 \cdot 10^7 \cdot c_2 - 1.4486925587094426 \cdot 10^6 \cdot c_3$$

Sledi sistem treh linearnih enačb s tremi neznankami - konstantami  $c_1, c_2$  in  $c_3$ .

$$\begin{aligned} 9.7527703302 \cdot 10^7 \cdot c_1 - 3.079407568291 \cdot 10^7 \cdot c_2 + 7.18669455771 \cdot 10^7 \cdot c_3 &= -525390.9465 \\ 3.29025422261 \cdot 10^7 \cdot c_1 + 1.756353833257 \cdot 10^7 \cdot c_2 + 3.208856582 \cdot 10^7 \cdot c_3 &= -80617.283951 \\ -5.4828549556 \cdot 10^6 \cdot c_1 + 3.7343191671 \cdot 10^7 \cdot c_2 - 1.44869255871 \cdot 10^6 \cdot c_3 &= 56008.23045267 \end{aligned}$$

Rešitve tega sistema so:

$$\begin{aligned} c_1 &= -1.5074798850326167 \cdot 10^{-2} \\ c_2 &= -2.0693202233604523 \cdot 10^{-4} \\ c_3 &= 1.3058121160092707 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

Približna rešitev diferencialne enačbe z izbranimi funkcijami  $\phi_i(x)$  po metodi poddomen pri ekvidistančnih intervalih je tako enaka:

$$\begin{aligned} v_N(x) = & 2.0444438084688682 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 - 2.756542978377607 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 \\ & + 1.4239834471767687 \cdot 10^{-5} \cdot x^4 - 3.084939062191049 \cdot 10^{-6} \cdot x^5 \\ & - 1.892382463063971 \cdot 10^{-7} \cdot x^6 + 4.628520595659591 \cdot 10^{-8} \cdot x^7 \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m} \end{aligned}$$

*Iskanje rešitve z metodo najmanjših kvadratov*

Pri uporabi metode najmanjših kvadratov utežne funkcije  $w_i(x)$  izračunamo iz ostanka oz. reziduala  $R(x)$  kot:

$$w_i(x) = \frac{\partial R(x)}{\partial c_i}$$

Za obravnavani primer sledijo utežne funkcije:

$$\begin{aligned} w_1(x) = \frac{\partial R(x)}{\partial c_1} = & 6.2473695286195286 \cdot 10^7 - 8.914375233819678 \cdot 10^6 \cdot x \\ & - 5.260942760942761 \cdot 10^6 \cdot x^2 + 1.2178108242923056 \cdot 10^6 \cdot x^3 - 67656.1569051281 \cdot x^4 \\ w_2(x) = \frac{\partial R(x)}{\partial c_2} = & 2.170138888888889 \cdot 10^8 - 5.425347222222222 \cdot 10^8 \cdot x + 3.3757716049382716 \cdot 10^8 \cdot x^2 \\ & - 8.33523853071178 \cdot 10^7 \cdot x^3 + 8.930612711476909 \cdot 10^6 \cdot x^4 - 347301.6054463242 \cdot x^5 \\ w_3(x) = \frac{\partial R(x)}{\partial c_3} = & 4.844961240310077 \cdot 10^7 - 1.435544071202986 \cdot 10^7 \cdot x + 996905.6050020735 \cdot x^2 \\ & + 654219.3032826107 \cdot x^3 - 327109.6516413054 \cdot x^4 + 50883.723588647495 \cdot x^5 \\ & - 2512.776473513457 \cdot x^6 \end{aligned}$$

ki vodijo do sistema treh linearnih enačb:

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^6 \frac{\partial R(x)}{\partial c_1} \cdot R(x) \cdot dx = & 2.9437083299930625 \cdot 10^{13} + 5.629430664938992 \cdot 10^{15} \cdot c_1 \\ & - 6.1570123147776 \cdot 10^{14} \cdot c_2 + 4.26352878970288 \cdot 10^{15} \cdot c_3 = 0 \\ \int_{x=0}^6 \frac{\partial R(x)}{\partial c_2} \cdot R(x) \cdot dx = & 2.523153251336 \cdot 10^{12} - 6.1570123147776 \cdot 10^{14} \cdot c_1 \\ & + 1.6437157287100416 \cdot 10^{16} \cdot c_2 - 1.03277722904576 \cdot 10^{14} \cdot c_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\int_{x=0}^6 \frac{\partial R(x)}{\partial c_3} \cdot R(x) \cdot dx = 2.1908454490594375 \cdot 10^{13} + 4.263528789702864 \cdot 10^{15} \cdot c_1 \\ - 1.03277722908672 \cdot 10^{14} \cdot c_2 + 3.273482494211488 \cdot 10^{15} \cdot c_3 = 0$$

Rešitve zgornjega sistema enačb so:

$$c_1 = -1.5989398746737413 \cdot 10^{-2} \\ c_2 = -6.637660015759061 \cdot 10^{-4} \\ c_3 = 1.4111654861957562 \cdot 10^{-2}$$

Približna rešitev diferencialne enačbe z izbranimi funkcijami  $\phi_i(x)$  po metodi najmanjših kvadratov je tako:

$$v_N(x) = 2.0711135615582472 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 - 2.053174293636733 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 \\ - 4.559917760325352 \cdot 10^{-6} \cdot x^4 + 2.2128242818060176 \cdot 10^{-6} \cdot x^5 - 6.070105181306868 \cdot 10^{-7} \cdot x^6 \\ + 5.00195122764098 \cdot 10^{-8} \cdot x^7 \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m}$$

*Iskanje rešitve z Galerkinovo (Galjorkinovo) metodo*

Pri Galerkinovi metodi kot utežne funkcije uporabimo funkcije  $w_i(x) = \phi_i(x)$ , ki vodijo do sistema treh linearnih enačb:

$$\int_{x=0}^6 \phi_1(x) \cdot R(x) \cdot dx = 133560.3655603677 + 4.8678524057310104 \cdot 10^7 \cdot c_1 \\ + 2.691456816040039 \cdot 10^7 \cdot c_2 + 4.6459473383755684 \cdot 10^7 \cdot c_3 = 0 \\ \int_{x=0}^6 \phi_2(x) \cdot R(x) \cdot dx = 9312.169312238693 + 2.69145681603508 \cdot 10^7 \cdot c_1 \\ + 9.68681524230957 \cdot 10^7 \cdot c_2 + 3.370596609183502 \cdot 10^7 \cdot c_3 = 0 \\ \int_{x=0}^6 \phi_3(x) \cdot R(x) \cdot dx = 121039.58745818213 + 4.6459473383755684 \cdot 10^7 \cdot c_1 \\ + 3.3705966091796875 \cdot 10^7 \cdot c_2 + 4.513399742051983 \cdot 10^7 \cdot c_3 = 0$$

Rešitve sistema enačb so:

$$c_1 = -1.6411582094939002 \cdot 10^{-2}$$

$$c_2 = -6.502800139912735 \cdot 10^{-4}$$

$$c_3 = 1.4697395047643901 \cdot 10^{-2}$$

Približna rešitev diferencialne enačbe z izbranimi funkcijami  $\phi_i(x)$  po Galerkinovi metodi je tako:

$$\begin{aligned} v_N(x) = & 2.330058557682424 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 - 2.185226057486783 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 - 4.004938847377507 \cdot 10^{-6} \cdot x^4 \\ & + 1.8883869684897203 \cdot 10^{-6} \cdot x^5 - 5.946776533985125 \cdot 10^{-7} \cdot x^6 \\ & + 5.209569956240328 \cdot 10^{-8} \cdot x^7 \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m} \end{aligned}$$

*Iskanje rešitve z metodo momentov*

Pri uporabi metode momentov so utežne funkcije enake:

$$w_i(x) = x^i$$

ki vodijo do sistema treh linearnih enačb:

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^6 x \cdot R(x) \cdot dx = & 330000 + 1.4599116161616158 \cdot 10^8 \cdot c_1 \\ & + 1.4467592592593384 \cdot 10^8 \cdot c_2 + 1.426571920757959 \cdot 10^8 \cdot c_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^6 x^2 \cdot R(x) \cdot dx = & -488000 + 1.920995670995674 \cdot 10^8 \cdot c_1 \\ & + 9.217923280424194 \cdot 10^8 \cdot c_2 + 2.628840080390377 \cdot 10^8 \cdot c_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^6 x^3 \cdot R(x) \cdot dx = & -5.744571428571403 \cdot 10^6 - 3.449675324674988 \cdot 10^7 \cdot c_1 \\ & + 4.34027777777832 \cdot 10^9 \cdot c_2 + 3.924418604650955 \cdot 10^8 \cdot c_3 = 0 \end{aligned}$$

Rešitve zgornjega sistema enačb so:

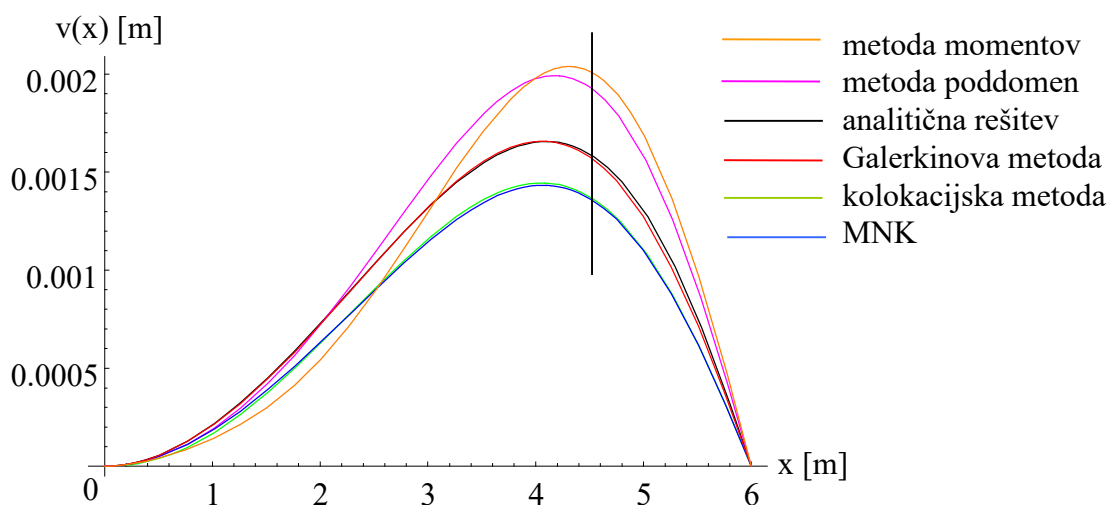
$$\begin{aligned}c_1 &= 2.1310595160688927 \cdot 10^{-3} \\c_2 &= 1.9231903087421165 \cdot 10^{-3} \\c_3 &= -6.444506438796704 \cdot 10^{-3}\end{aligned}$$

Približna rešitev diferencialne enačbe z metodo momentov je tako enaka:

$$\begin{aligned}v_N(x) &= 2.3288664739902118 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 - 1.7444451919791654 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 \\&+ 1.0189918966016941 \cdot 10^{-4} \cdot x^4 - 2.2945836390729873 \cdot 10^{-5} \cdot x^5 + 1.7587474245469744 \cdot 10^{-6} \cdot x^6 \\&- 2.2842896321096487 \cdot 10^{-8} \cdot x^7 \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m}\end{aligned}$$

*Primerjava dobljenih približnih rešitev*

Dobljene približne funkcije prečnega pomika so prikazane na sliki 4.



Slika 4: Primerjava dobljenih rešitev za prečni pomik

Na osnovi grafov rešitev lahko ocenimo (ker je točna analitična rešitev znana), da v obravnavanem primeru Galerkinova metoda vodi do najboljše aproksimacije rešitve. Ker pa v splošnem točna rešitev ni znana, je potrebno uporabiti drugačne pristope za identifikacijo najboljše približne rešitve.

*Izračun in primerjava rezidualov za oceno najboljše rešitve*

Ker je znano, da je v primeru točne rešitve rezidual enak nič, je za identifikacijo najboljše približne rešitve mogoče uporabiti integral kvadrata reziduala na opazovanem intervalu iskane rešitve.

V primeru metode najmanjših kvadratov je ostanek enak:

$$R(x) = 90975.39614046882 - 165249.30778552796 \cdot x + 56543.91761821101 \cdot x^2 \\ + 5786.808836735085 \cdot x^3 - 5099.564256522881 \cdot x^4 + 736.3136512727896 \cdot x^5 \\ - 32.81213963936921 \cdot x^6$$

in integral kvadrata ostanka po opazovanem intervalu znaša:

$$\int_{x=0}^6 R(x)^2 \cdot dx = 3.461049409687744 \cdot 10^9$$

V primeru Galerkinove metode je ostanek enak:

$$R(x) = -14259.057999185145 + 75628.13431321859 \cdot x - 91810.86855404581 \cdot x^2 \\ + 43440.44312639236 \cdot x^3 - 9462.114326669338 \cdot x^4 + 948.5805433622418 \cdot x^5 \\ - 35.45943433946876 \cdot x^6$$

in integral kvadrata ostanka po opazovanem intervalu znaša:

$$\int_{x=0}^6 R(x)^2 \cdot dx = 3.197720024309082 \cdot 10^8$$

ki je manjši od prejšnjega, s čimer nakazuje boljšo rešitev.

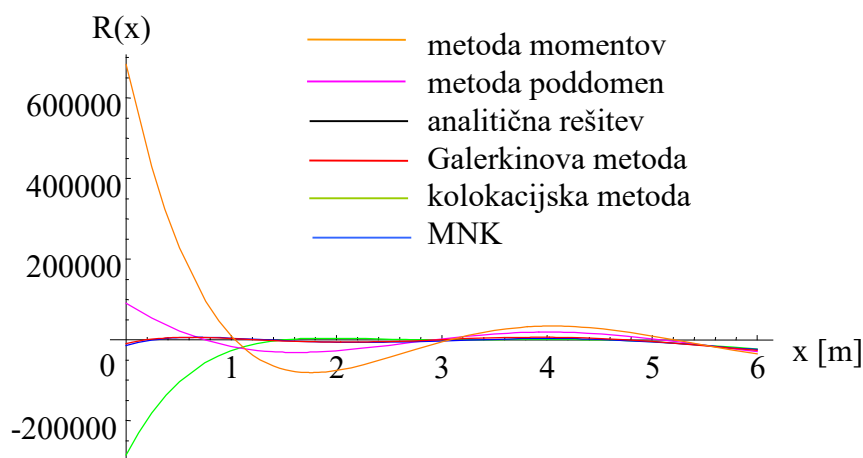
V primeru momentne metode je ostanek enak:

$$R(x) = 683260.331728197 - 1.194325298449718 \cdot 10^6 \cdot x + 665663.2508639754 \cdot x^2 \\ - 163569.48333467724 \cdot x^3 + 19139.148777043163 \cdot x^4 - 995.8475661019395 \cdot x^5 \\ + 16.193604162814346 \cdot x^6$$

integral kvadrata ostanka po opazovanem intervalu pa znaša:

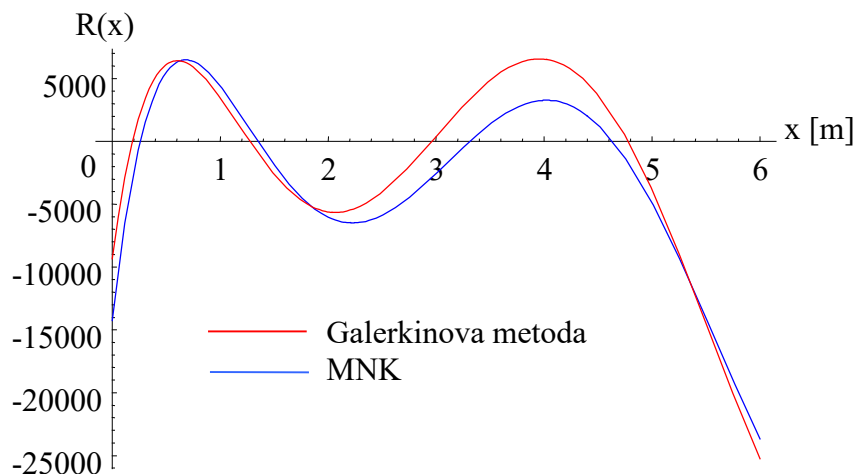
$$\int_{x=0}^6 R(x)^2 \cdot dx = 1.1902230604252795 \cdot 10^{11}$$

Integral kvadrata ostanka pri uporabi Galerkinove metode je najmanjši izmed vseh treh integralov pri uporabi metod uteženih ostankov, kar nakazuje, da je aproksimativna rešitev, dobljena z Galerkinovo metodo, najkvalitetnejša (to potrди tudi grafična primerjava rešitev, ki pa je neuporabna brez poznavanja točne rešitve). Po drugi strani je kvadrat ostanka pri metodi momentov največji, kar nakazuje, da je aproksimativna rešitev, pridobljena z metodo momentov, izmed teh treh najslabša (tudi to je razvidno iz grafične primerjave rešitev). Integrala kvadrata ostanka pri uporabi kolokacijske metode in metode poddomen pa sta  $2.0741190691996582 \cdot 10^{10}$  oz.  $3.461049409762085 \cdot 10^9$ .



Slika 5: Primerjava vseh rezidualov

Iz slike 5 je brez posebne matematične analize (in tudi brez poznavanja točne rešitve) očitno, da je najslabša rešitev dobljena z metodo momentov, nekoliko manj slabi pa sta rešitvi, dobljeni z kolokacijsko metodo in metodo poddomen. Hkrati pa je razvidno, da sta reziduala, dobljena z metodo najmanjših kvadratov ter Galerkinovo metodo ne samo najmanjša, temveč tudi zelo podobna, in zato ju je smiselno prikazati in proučiti ločeno, kot kaže slika 6.



Slika 6: Primerjava rezidualov metode najmanjših kvadratov in Galerkinove metode

#### *Izračun energij za oceno najboljše rešitve*

Uporaba reziduala za oceno najkvalitetnejšega približka je mogoča za vsako diferencialno enačbo ne glede na analizirani problem. Kadar pa analiziramo pomike oz. deformacije konstrukcij, pa lahko za oceno za iskanje najkvalitetnejše rešitve uporabimo tudi energije, npr. izrek o minimumu celotne potencialne energije  $\Pi$ .

Notranjo deformacijsko energijo  $U$  v nosilcu zaradi prečnega pomika izračunamo kot:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_L E(x) \cdot I_z(x) \cdot \left( \frac{dv^2(x)}{dx^2} \right)^2 \cdot dx$$

potencialno energijo zunanjih sil oz. obtežbe  $V$  pa izračunamo kot:

$$V = \int_{x=0}^L q(x) \cdot v'(x) \cdot dx$$

Celotna potencialna energija je tako:

$$\Pi = U - V$$

**Preglednica 1: Primerjava energij izračunanih iz funkcij pomika iz različnih pristopov**

	$U$	$V$	$\Pi = U - V$
Točna rešitev	40.15904158663994	80.31808391519846	-40.15904232855852
Kolokacijska	30.30120795804295	69.21340314965339	-38.91219519161044
Metoda poddomen	54.80324219870152	91.43958721384755	-36.63634501514603
Metoda naj. kvadratov	29.803566135611383	69.02844259481279	-39.224876459201404
Galerkinova metoda	39.678994711144526	79.6174888801274	<b>-39.93849416898287</b>
Metoda momentov	60.97512223948532	87.48773422205291	-26.512611982567584

Tudi energije identificirajo rešitev, dobljeno z metodo momentov kot najslabšo (kar je nezanimivo), metodo najmanjših kvadratov in Galerkinovo metodo kot najboljši, pa čeprav obe posamezni energiji, ki skupaj tvorita končno vrednost energije pri metodi najmanjših kvadratov, opazno odstopata od točnih vrednosti.

### *Izračun funkcij upogibnega momenta*

Funkcijo upogibnega momenta izračunamo s pomočjo drugega odvoda (približne) funkcije prečnega pomika. Ker so vse dobljene funkcije prečnega pomika približki, bodo tudi iz odvodov izračunane funkcije upogibnega momenta približki, pri čemer imamo v obravnavanem primeru znano eno diskretno vrednost momenta (v desni podpori), ki bi lahko potencialno služila kot parameter identifikacije najboljše rešitve, vendar so vse dobljene funkcije momenta tam točne.

Izmed vseh dobljenih funkcij upogibnega momenta lahko tako najkvalitetnejšo ponovno identificiramo s pomočjo celotne potencialne energije  $\Pi$ , pri čemer sedaj celotno notranjo deformacijsko energijo  $U$  izračunamo s pomočjo funkcije upogibnega momenta kot:

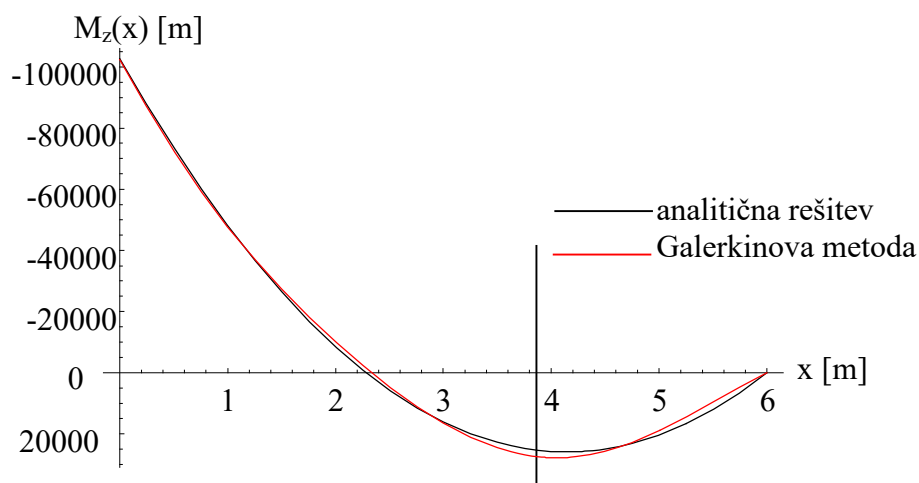
$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_L \frac{M_z(x)^2}{E(x) \cdot I_z(x)} \cdot dx$$

Potencialne energije obtežbe se ne spremenijo in tako sledijo vrednosti celotnih notranjih deformacijskih energij, kot tudi celotnih potencialnih energij:

**Preglednica 2: Primerjava energij izračunanih iz funkcij upogibnega momenta iz različnih pristopov**

	$U_{\text{momenti}}$	$\Pi = U - V$
Točna rešitev	40.15904443533375	-40.15903947986471
Kolokacijska	30.30115282690832	-38.91225032274558
Metoda poddomen	54.803240705506845	-36.63634650834077
Metoda naj. kvadratov	29.803559757436577	-39.224882837367005
Galerkinova metoda	39.67897438501006	<b>-39.938514495156134</b>
Metoda momentov	60.97510889602704	-26.512625326027532

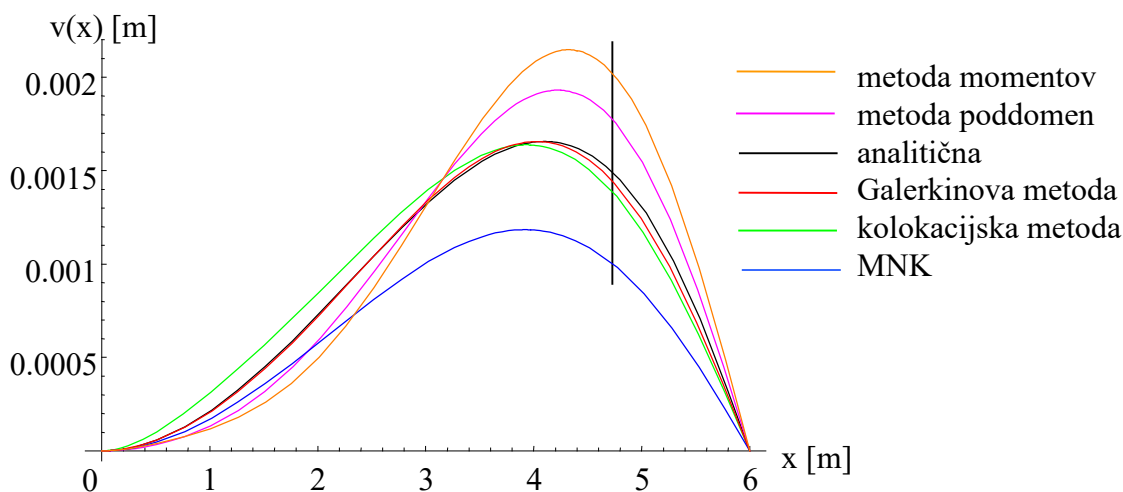
Iz preglednice 2 vidimo, da v obravnavanem primeru Galerkinova metoda vodi do najboljše aproksimacije rešitve za upogibni moment.



Slika 7: Primerjava funkcij upogibnega momenta

#### *Diskusija variacije reševanja problema*

Pri predhodnem reševanju smo kot osnovno funkcijo  $\phi_0(x)$  uporabili upogibnico podobnega nosilca (s konstantno povprečno višino), vendar v splošnem osnovne funkcije ne poznamo. Zato je bila izvedena dodatna analiza (ki ni prikazana), kjer je bila uporabljena osnovna funkcija  $\phi_0(x)=0$ , ki prav tako zadošča predpisanim homogenim robnim pogojem. Rešitve z osnovno funkcijo  $\phi_0(x)=0$  so prikazane na sliki 8.



Slika 8: Primerjava dobljenih rešitev za prečni pomik z drugačno osnovno funkcijo  $\phi_0(x)$

Iz grafov aproksimativnih rešitev je razvidno, da je rešitev z Galerkinovo metodo sedaj nekoliko slabša kot prej (kar potrди tudi celotna potencialna energija  $\Pi$ ), rešitev s kolokacijsko metodo pa se je dokaj približala pravi rešitvi (čprav izračun celotne potencialne energije  $\Pi$  tega ne nakazuje).

**Preglednica 3: Primerjava energij izračunanih iz funkcij upogibnice iz različnih pristopov**

	$U$	$V$	$\Pi = U - V$
Točna rešitev	40.15904158663994	80.31808391519846	-40.15904232855852
Kolokacijska	49.03009598838378	82.07848003322236	-33.048384044838585
Metoda poddomen	52.775839110663625	85.05711363692289	-32.28127452625927
Metoda naj. kvadratov	21.741416829427664	58.02343377079052	-36.282016941362855
Galerkinova metoda	39.558682985488886	79.11736597083487	-39.55868298534598
Metoda momentov	71.44911681053493	89.55092815584712	-18.101811345312186



Poglavje II

# Osni pomiki nosilcev in prečni pomiki kablov

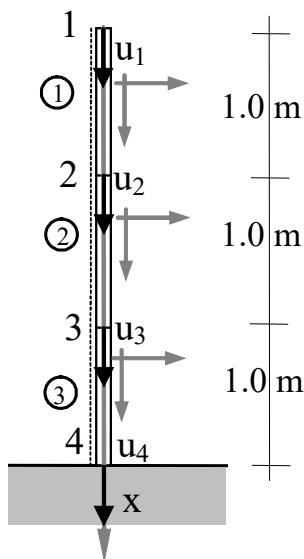
## Primer 2.a – Analiza stebra, obremenjenega z lastno težo

Poiskati je potrebno približno rešitev diferencialne enačbe osnega pomika ter razporeditev osne sile AB stebra dolžine 3 m, obremenjenega z lastno težo. Prerez stebra je pravokotnik z dimenzijama  $b/h = 0.2 \text{ m}/0.4 \text{ m}$ , modul elastičnosti pa znaša 30 GPa.

### Rešitev

Izhodišče koordinatnega sistema npr. postavimo v prosti konec stebra in os  $x$  usmerimo proti vpetemu delu stebra navzol.

Čeprav bi za izvedbo analize zadoščala diskretizacija z enim samim končnim elementom, iz demonstracijskih razlogov izberemo npr. diskretizacijo s tremi linearnimi končnimi elementi enakih dolžin (lahko so tudi različnih, edini pogoj je, da je njihova vsota enaka 3 m), elemente in vozlišča pa npr. oštevilčimo po vrsti od prostega konca proti vpetemu delu.



Slika 9: Izbrana diskretizacija

Ker so končni elementi enakih dolžin, so vse tri togostne matrike elementov medsebojno enake:

$$\begin{aligned}
 [k_1] &= [k_2] = [k_3] = \frac{EA}{L_e} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2.4 \cdot 10^9 \text{ N}}{1 \text{ m}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 \\ -2.4 & 2.4 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}}
 \end{aligned}$$

Medsebojno enaki pa so tudi obtežni vektorji elementov:

$$\{F_1\} = \{F_2\} = \{F_3\} = \frac{q_x \cdot L_e}{2} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{2000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 1 \text{ m}}{2} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1000 \text{ N} \\ 1000 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

Vektorji pomikov elementov pa so različni in imajo oblike:

$$\{U_1\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad \{U_2\} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}, \quad \{U_3\} = \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}.$$

*Formalni matematični pristop reševanja – reševanje enačb na nivoju končnih elementov*

Vektorji sekundarnih spremenljivk elementov so (kjer je že upoštevana znana ničelna vrednost osne sile na prostem koncu):

$$\{Q_1\} = \begin{Bmatrix} -N_{x,1} \\ N_{x,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ N_{x,2} \end{Bmatrix} \quad \{Q_2\} = \begin{Bmatrix} -N_{x,2} \\ N_{x,3} \end{Bmatrix} \quad \{Q_3\} = \begin{Bmatrix} -N_{x,3} \\ N_{x,4} \end{Bmatrix}$$

Tako sledijo matrične enačbe vseh končnih elementov:

$$\begin{aligned} [k_1] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} &= \{F_1\} + \{Q_1\} \rightarrow \begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 \\ -2.4 & 2.4 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1000 \\ 1000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ N_{x,2} \end{Bmatrix} \\ [k_2] \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} &= \{F_2\} + \{Q_2\} \rightarrow \begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 \\ -2.4 & 2.4 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1000 \\ 1000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -N_{x,2} \\ N_{x,3} \end{Bmatrix} \\ [k_3] \cdot \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} &= \{F_3\} + \{Q_3\} \rightarrow \begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 \\ -2.4 & 2.4 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1000 \\ 1000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -N_{x,3} \\ N_{x,4} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Enačbe lahko zapišemo tudi v nematrični obliki:

$$\begin{aligned} 2.4 \cdot 10^9 \cdot u_1 - 2.4 \cdot 10^9 \cdot u_2 &= 1000 + 0 \\ -2.4 \cdot 10^9 \cdot u_1 + 2.4 \cdot 10^9 \cdot u_2 &= 1000 + N_{x,2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.4 \cdot 10^9 \cdot u_2 - 2.4 \cdot 10^9 \cdot u_3 &= 1000 - N_{x,2} \\ -2.4 \cdot 10^9 \cdot u_2 + 2.4 \cdot 10^9 \cdot u_3 &= 1000 + N_{x,3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.4 \cdot 10^9 \cdot u_3 - 2.4 \cdot 10^9 \cdot u_4 &= 1000 - N_{x,3} \\ -2.4 \cdot 10^9 \cdot u_3 + 2.4 \cdot 10^9 \cdot u_4 &= 1000 + N_{x,4} \end{aligned}$$

ki jasno pokažejo, da gre za šest enačb, v katerih nastopa tudi šest neznank: trije vozliščni osni pomiki (pomik  $u_4$  je namreč znan in enak nič), ki so primarne spremenljivke, in tri neznane vozliščne vrednosti osne sile, ki predstavljajo sekundarne spremenljivke.

Ta sistem je rešljiv in njegove rešitve so:

$$\begin{aligned} u_1 &= 3.75 \cdot 10^{-6} \text{ m} & N_{x,2} &= -2000 \text{ N} \\ u_2 &= 3.3333333333333333 \cdot 10^{-6} \text{ m} & N_{x,3} &= -4000 \text{ N} \\ u_3 &= 2.0833333333333334 \cdot 10^{-6} \text{ m} & N_{x,4} &= -6000 \text{ N} \end{aligned}$$

in so enake pravilnim oz. točnim rešitvam (rezultate za vrednosti osne sile zlahka preverimo z elementarno mehaniko, saj gre za statično določeno konstrukcijo).

*Reševanje enačb na nivoju konstrukcije*

Slabost prej prikazanega pristopa je v tem, da smo za pridobitev primarnih spremenljivk morali hkrati izračunati tudi vrednosti sekundarnih spremenljivk, ki pa včasih niso zanimive, in je tako bil računski napor po nepotrebnem prevelik. Zato je smiselno enačbe preurediti tako, da iz njih eliminiramo sekundarne spremenljivke, ki jih, kadar so zanimive, po določitvi primarnih spremenljivk v fazi poprocesiranja določimo iz enačb elementov.

Vizualni pregled enačb pokaže, da če seštejemo drugo in tretjo, ter četrto in peto enačbo, sledi (brez upoštevanja znane vrednosti  $u_4$ ) nov, ekvivalenten manjši sistem enačb:

$$\begin{aligned} 2.4 \cdot 10^9 \cdot u_1 - 2.4 \cdot 10^9 \cdot u_2 &= 1000 \\ -2.4 \cdot 10^9 \cdot u_1 + 4.8 \cdot 10^9 \cdot u_2 - 2.4 \cdot 10^9 \cdot u_3 &= 2000 \\ -2.4 \cdot 10^9 \cdot u_2 + 4.8 \cdot 10^9 \cdot u_3 - 2.4 \cdot 10^9 \cdot u_4 &= 2000 \\ -2.4 \cdot 10^9 \cdot u_3 + 2.4 \cdot 10^9 \cdot u_4 &= 1000 + N_{x,4} \end{aligned}$$

Ta sistem obsega zgolj štiri enačbe, v katerih nastopajo samo še štiri neznanke: trije vozliščni osni pomiki (pomik  $u_4$  je namreč znan) in (ena) neznanca vozliščna vrednost osne sile  $N_{x,4}$ .

Če želimo pridobiti izključno vrednosti primarnih spremenljivk, moramo rešiti zgolj prve tri enačbe:

$$\begin{aligned} 2.4 \cdot 10^9 \cdot u_1 - 2.4 \cdot 10^9 \cdot u_2 &= 1000 \\ -2.4 \cdot 10^9 \cdot u_1 + 4.8 \cdot 10^9 \cdot u_2 - 2.4 \cdot 10^9 \cdot u_3 &= 2000 \\ -2.4 \cdot 10^9 \cdot u_2 + 4.8 \cdot 10^9 \cdot u_3 - 2.4 \cdot 10^9 \cdot u_4 &= 2000 \end{aligned}$$

oziroma

$$\begin{aligned} 2.4 \cdot 10^9 \cdot u_1 - 2.4 \cdot 10^9 \cdot u_2 &= 1000 \\ -2.4 \cdot 10^9 \cdot u_1 + 4.8 \cdot 10^9 \cdot u_2 - 2.4 \cdot 10^9 \cdot u_3 &= 2000 \\ -2.4 \cdot 10^9 \cdot u_2 + 4.8 \cdot 10^9 \cdot u_3 &= 2000 \end{aligned}$$

ki jih lahko zapišemo tudi v matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 & 0 \\ -2.4 & 4.8 & -2.4 \\ 0 & -2.4 & 4.8 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1000 \text{ N} \\ 2000 \text{ N} \\ 2000 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

pri čemer je matrika simetrična. Rešitve sistema so:

$$u_1 = 3.75 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$u_2 = 3.3333333333333333 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$u_3 = 2.0833333333333334 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

morebitne zanimive vrednosti sekundarnih spremenljivk lahko sedaj poiščemo iz posameznih matričnih enačb elementov.

#### *Združevanje in reševanje matričnih enačb na nivoju konstrukcije – inženirski pristop*

Prej prikazani pristop združevanja enačb s seštevanjem posameznih enačb je sicer korekten, a lahko pri zapletenejših konstrukcijah (ali pri drugačnem oštevilčenju končnih elementov) hitro postane nepregleden oz. slabo razviden.

Zato enačbe raje združimo v bistvene enačbe »konstrukcije« v matrični obliki, kar naredimo v posameznih korakih.

Najprej pripravimo splošno matrično obliko enačb ( $[K]$  je togostna matrika konstrukcije,  $\{u\}$  je vektor pomikov konstrukcije,  $\{F\}$  je obtežni vektor konstrukcije):

$$[K] \cdot \{u\} = \{F\} + \{Q\}$$

oz. v konkretni obliki za obravnavani primer, ko imamo štiri primarne spremenljivke:

$$\begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} \end{matrix}$$

Sedaj iz matričnih enačb vsakega končnega elementa v to formo na pripadajoča mesta prepíšemo ustrezne koeficiente oz. člene matrik in vektorjev.

Po upoštevanju členov matrične enačbe prvega končnega elementa sledi zapis:

$$\begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \left[ \begin{array}{cc|cc} 2.4 \cdot 10^9 & -2.4 \cdot 10^9 & 0 & 0 \\ -2.4 \cdot 10^9 & 2.4 \cdot 10^9 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ N_{x,2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Po upoštevanju členov matrične enačbe drugega končnega elementa sledi zapis:

$$\begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} 2.4 \cdot 10^9 & -2.4 \cdot 10^9 & 0 & 0 \\ -2.4 \cdot 10^9 & 4.8 \cdot 10^9 & -2.4 \cdot 10^9 & 0 \\ \hline 0 & -2.4 \cdot 10^9 & 2.4 \cdot 10^9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 1000 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_{x,3} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Po upoštevanju členov matrične enačbe tretjega končnega elementa pa sledi zapis:

$$\begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} 2.4 \cdot 10^9 & -2.4 \cdot 10^9 & 0 & 0 \\ -2.4 \cdot 10^9 & 4.8 \cdot 10^9 & -2.4 \cdot 10^9 & 0 \\ \hline 0 & -2.4 \cdot 10^9 & 4.8 \cdot 10^9 & -2.4 \cdot 10^9 \\ 0 & 0 & -2.4 \cdot 10^9 & 2.4 \cdot 10^9 \end{array} \right] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 2000 \\ 1000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ N_{x,4} \end{Bmatrix}$$

Ker gre za spodaj (oz. »desno«) vpeti steber, velja robni pogoj  $u_4=0$ , kar pomeni, da v zgoraj zapisanih enačbah nastopajo 4 neznanke: tri primarne spremenljivke ( $u_1$ ,  $u_2$  in  $u_3$ ) ter sekundarna spremenljivka ( $N_{x,4}$ ). Kljub temu, da je sistem že rešljiv, običajno poiščemo tisto obliko sistema enačb, kjer nastopajo zgolj neznanke primarne spremenljivke, torej  $u_1$ ,  $u_2$  in  $u_3$ .

Ob upoštevanju, da je  $u_4 = 0$ , lahko enačbe zapišemo v obliki dveh ločenih »sistemov« enačb:

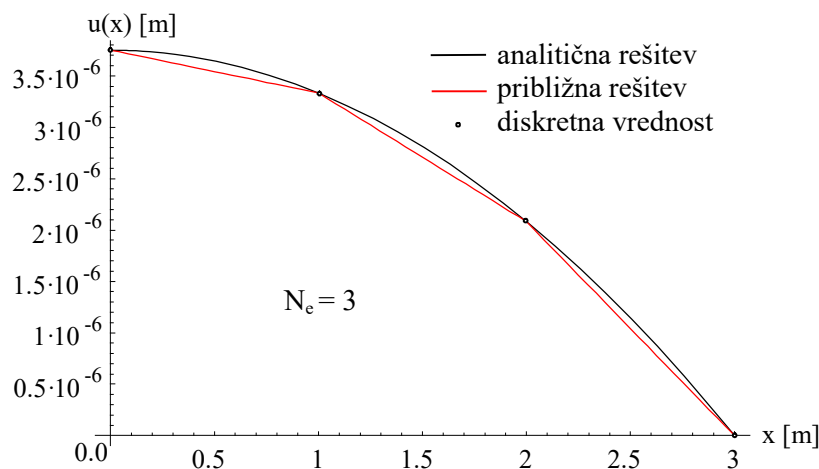
$$\begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 & 0 & 0 \\ -2.4 & 4.8 & -2.4 & 0 \\ 0 & -2.4 & 4.8 & -2.4 \\ 0 & 0 & -2.4 & 2.4 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 2000 \\ 1000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ N_{x,4} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 & 0 \\ -2.4 & 4.8 & -2.4 \\ 0 & -2.4 & 4.8 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 2000 \end{Bmatrix}$$

$$-2.4 \cdot 10^9 \cdot u_3 = 1000 + N_{x,4}$$

Iz prvih treh enačb tako sledijo vse tri vozliščne vrednosti primarne spremenljivke:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.75 \cdot 10^{-6} \\ 3.333333333333333 \cdot 10^{-6} \\ 2.0833333333333334 \cdot 10^{-6} \end{Bmatrix} \text{ m}$$

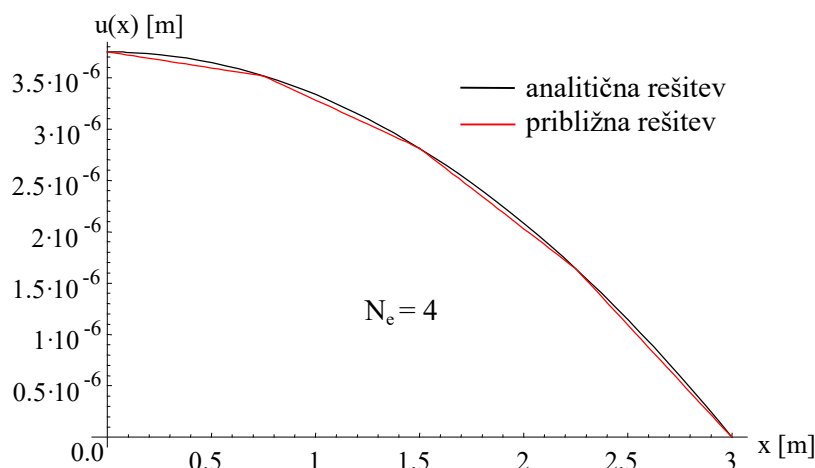
Z dobljenimi diskretnimi vozliščnimi vrednostmi pomika že lahko izrišemo graf približne rešitve, saj gre za odsekovno linearne funkcije (slika 10).



Slika 10: Primerjava dobljene približne rešitve za osni pomik s točno rešitvijo

Iz primerjave obeh grafov vidimo, da s približno rešitvijo dobimo točne vrednosti v vozliščih in približne vrednosti med vozlišči. Iz slike je razvidno, da bo največja napaka znotraj končnega elementa nastopila na njegovi sredini. Za obravnavani primer znaša ta razlika za vse tri elemente  $-1.0416666666666668 \cdot 10^{-7}$  m.

Očitno je, da se bo s povečevanjem števila končnih elementov razlika med obema rešitvama zmanjševala. Pri uporabi 4 končnih elementov enakih dolžin je tako že opazno boljše ujemanje točne in približne rešitve (slika 11).



Slika 11: Primerjava dobljene približne rešitve za osni pomik s točno rešitvijo

Tudi sedaj največja napaka znotraj končnega elementa nastopi na njegovi sredini, a za obravnavani primer ta razlika sedaj za vse štiri elemente znaša  $-5.85937499999999307 \cdot 10^{-8}$  m oz. kar 43.75 % manj kot v prejšnji diskretizaciji.

Ker pa običajno točna rešitev ni znana (v tem primeru bi bila analiza z metodo končnih elementov celo nepotrebna), lahko na osnovi informacije, da gre za kvalitetnejši model, zgolj sklepamo, da bodo tudi rešitve kvalitetnejše.

*Poprocesiranje: iskanje (lokalnih) linearnih približnih funkcij osnega pomika po končnih elementih*

Funkcije osnega pomika (približne rešitve) po posameznih elementih so dobljene z lokalno linearno interpolacijo vozliščnih vrednosti pomika s pomočjo interpolacijskih funkcij  $H_0$  in so tako enake:

$$u_{N,1}(x) = u_1 \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + u_2 \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 3.75 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{x - 1}{0 - 1} + 3.3333333333333333 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{x - 0}{1 - 0}$$

$$= 3.75 \cdot 10^{-6} - 4.1666666666666677 \cdot 10^{-7} \cdot x \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ m}$$

$$\begin{aligned}
 u_{N,2}(x) &= u_2 \cdot \frac{x-x_3}{x_2-x_3} + u_3 \cdot \frac{x-x_2}{x_3-x_2} = 3.3333333333333333 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{x-2}{1-2} \\
 &+ 2.0833333333333334 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{x-1}{2-1} = 4.5833333333333333 \cdot 10^{-6} - 1.25 \cdot 10^{-6} \cdot x \quad 1 \text{ m} \leq x \leq 2 \text{ m} \\
 u_{N,3}(x) &= u_3 \cdot \frac{x_4-x}{x_4-x_3} + u_4 \cdot \frac{x-x_3}{x_4-x_3} = 2.0833333333333334 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{3-x}{3-2} + 0 \cdot \frac{x-2}{3-2} \\
 &= 6.25 \cdot 10^{-6} - 2.0833333333333334 \cdot 10^{-6} \cdot x \quad 2 \text{ m} \leq x \leq 3 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Če dobljene funkcije vstavimo v diferencialne enačbe elementov, izračunamo ostanke oz. rezidualne, ki veljajo za posamezni končni element:

$$R_e = EA \cdot \frac{d^2 u_{N,e}(x)}{dx^2} + q_x(x) \quad x_A \leq x \leq x_B$$

Ker pa so bili uporabljeni linearni končni elementi, so drugi odvodi rešitev enaki 0 in izraz za rezidual se poenostavi v:

$$R_e = q_x(x) \quad x_A \leq x \leq x_B$$

Kadar na končnem elementu torej ne deluje zvezna osna obtežba  $q_x(x)$ , je vrednost ostanka enaka nič, kar pomeni, da je znotraj elementa dobljena (formalno približna) numerična rešitev enaka analitični rešitvi (seveda pod pogojem, da so vozliščne vrednosti pomika točne).

Integrali kvadratov ostanka po posameznih končnih elementih so:

$$\begin{aligned}
 \int_{x=0}^1 R_1^2 \cdot dx &= \int_{x=0}^1 2000^2 \cdot dx = 4 \cdot 10^6 \\
 \int_{x=1}^2 R_2^2 \cdot dx &= \int_{x=1}^2 2000^2 \cdot dx = 4 \cdot 10^6 \\
 \int_{x=2}^3 R_3^2 \cdot dx &= \int_{x=2}^3 2000^2 \cdot dx = 4 \cdot 10^6
 \end{aligned}$$

Na osnovi izračunanih vrednosti sicer ne moremo soditi o kvaliteti približka, je pa očitno, da je kvaliteta približkov za vse elemente enaka. Če pa bi za nek končni element dobili odstopajočo višjo vrednost, bi to bil, kljub nepoznavanju pravilne rešitve, indikator, da je smiselno takemu končnemu elementu pripadajoče področje analizirati z večjim številom krajših končnih elementov.

Alternativno možnost ugotavljanja kvalitete rešitve predstavlja izračun celotne potencialne energije, pri čemer notranjo deformacijsko energijo  $U$  zaradi osnega pomika izračunamo kot:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_{x=0}^L \left( \frac{du(x)}{dx} \right)^2 \cdot E(x) \cdot A(x) \cdot dx$$

(zunanjo) potencialno energijo  $V$  (ali  $V_E$ ) zunanjih sil oz. obtežbe pa izračunamo kot:

$$V = \int_{x=0}^L \frac{du(x)}{dx} \cdot q_x(x) \cdot dx$$

Z njima izračunamo celotno potencialno energijo  $\Pi$ , ki ob točni rešitvi doseže svoj minimum.

Notranja deformacijska energija za izračunane funkcije osnega pomika znaša  $U = 0.007083333333333334$  J, (zunanja) potencialna energija pa znaša  $V = 0.014166666666666668$  J. Celotna potencialna energija  $\Pi$  tako znaša  $-0.007083333333333334$  J.

Če pa analizo izvedemo s 4 končnimi elementi enakih dolžin, za funkcije pomika, prikazane na sliki 11, sledi vrednost  $\Pi = -0.007294921875$  J. Ker gre za manjšo vrednost, to potrjuje, da gre kvalitetnejšo rešitev.

*Poprocesiranje: iskanje globalne (enovite) približne funkcije osnega pomika po celem stebru*

Ker pa je očitno, da bo za celo konstrukcijo oz. steber veljala enovita funkcija osnega pomika (saj znotraj konstrukcije oz. stebra ni sprememb togosti ali obtežb), lahko enovito funkcijo pomika (v splošnem približno rešitev) po celi konstrukciji oz. stebru dobimo z globalno interpolacijo, v kateri hkrati zajamemo vse znane vrednosti funkcije. Če to storimo z Lagrangeovo interpolacijo oz. Lagrangeovim interpolacijskim polinomom, ki za naš primer dobi obliko:

$$u_L(x) = u_1 \cdot \frac{(x-x_2) \cdot (x-x_3) \cdot (x-x_4)}{(x_1-x_2) \cdot (x_1-x_3) \cdot (x_1-x_4)} + u_2 \cdot \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_3) \cdot (x-x_4)}{(x_2-x_1) \cdot (x_2-x_3) \cdot (x_2-x_4)} \\ + u_3 \cdot \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot (x-x_4)}{(x_3-x_1) \cdot (x_3-x_2) \cdot (x_3-x_4)} + u_4 \cdot \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot (x-x_3)}{(x_4-x_1) \cdot (x_4-x_2) \cdot (x_4-x_3)}$$

kjer produkti ulomkov predstavljajo Lagrangeove bazne polinome, tako sledi:

$$u_L(x) = 3.75 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)}{(0-1) \cdot (0-2) \cdot (0-3)} + 3.3333333333333333 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{(x-0) \cdot (x-2) \cdot (x-3)}{(1-0) \cdot (1-2) \cdot (1-3)} \\ + 2.0833333333333334 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{(x-0) \cdot (x-1) \cdot (x-3)}{(2-0) \cdot (2-1) \cdot (2-3)} + 0 \cdot \frac{(x-0) \cdot (x-1) \cdot (x-2)}{(3-0) \cdot (3-1) \cdot (3-2)} \\ = 3.75 \cdot 10^{-6} - 4.1666666666666677 \cdot 10^{-7} \cdot x^2 \quad 0 \leq x \leq 3 \text{ m}$$

in vodi do rešitve, ki je enaka pravilni rešitvi.

Ker pa za tvorbo kvadratnega polinoma, ki v obravnavanem primeru predstavlja točno rešitev, zadoščajo samo tri točke, lahko izračun izvedemo s samo tremi poljubnimi vrednostmi pomikov, npr. brez prve točke, kar vodi do:

$$u_L(x) = u_2 \cdot \frac{(x-x_3) \cdot (x-x_4)}{(x_2-x_3) \cdot (x_2-x_4)} + u_3 \cdot \frac{(x-x_2) \cdot (x-x_4)}{(x_3-x_2) \cdot (x_3-x_4)} + u_4 \cdot \frac{(x-x_2) \cdot (x-x_3)}{(x_4-x_2) \cdot (x_4-x_3)} \\ = 3.3333333333333333 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{(x-2) \cdot (x-3)}{(1-2) \cdot (1-3)} + 2.0833333333333334 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{(x-1) \cdot (x-3)}{(2-1) \cdot (2-3)} \\ + 0 \cdot \frac{(x-1) \cdot (x-2)}{(3-1) \cdot (3-2)} = 3.75 \cdot 10^{-6} - 4.1666666666666677 \cdot 10^{-7} \cdot x^2 \quad 0 \leq x \leq 3 \text{ m}$$

ki ponovno predstavlja enako (točno) funkcijo osnega pomika.

Opomba: enako interpolirano funkcijo osnega pomika bi dobili, če bi z *reševanjem sistema* enačb določili konstante funkcije:

$$u(x) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2$$

oziroma

$$u(x) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2 + C_4 \cdot x^3$$

pri čemer bi iz sistema 4 enačb formalno moralo slediti  $C_4 = 0$ , kar pa zaradi zaokroževanj ni nujno popolnoma izpolnjeno.

Za točno funkcijo osnega pomika sledi vrednost  $\Pi = -0.0075 \text{ J}$ , ki je tudi najmanjša vrednost.

Za izračun funkcije osne sile lahko sedaj uporabimo diferencialno zvezo:

$$\begin{aligned} \frac{du(x)}{dx} &= \frac{N_x(x)}{AE} \rightarrow N_x(x) = AE \cdot \frac{du(x)}{dx} = 2.4 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot 2 \cdot (-4.1666666666666677 \cdot 10^{-7}) \cdot x \\ &= -1999.9999999999984 \cdot x \cong -2000 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 3 \text{ m} \end{aligned}$$

ki je prav tako enaka pravi rešitvi (izjemno majhna razlika nastopi zaradi zaokroževanja).

*Poprocesiranje: reševanje diferencialnih enačb osnega pomika po končnih elementih*

Za vsak končni element lahko ločeno analitično rešimo diferencialno enačbo:

$$EA \cdot \frac{d^2 u_1(x)}{dx^2} = -q_x(x) \quad x_A \leq x \leq x_B$$

pri čemer za določitev integracijskih konstant uporabimo prej izračunani vrednosti primarnih spremenljivk (vozliščnih pomikov).

Za prvi končni element tako sledi diferencialna enačba v obliki:

$$\frac{d^2 u_1(x)}{dx^2} = -\frac{q_x(x)}{EA} = -\frac{2000}{2.4 \cdot 10^9} = -8.333333333333333 \cdot 10^{-7} \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ m}$$

ki jo lahko rešimo kar z dvakratnim zaporednim integriranjem:

$$u_1(x) = -8.333333333333333 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \cdot x + C_2 \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ m}$$

Za določitev integracijskih konstant  $C_1$  in  $C_2$  sta na razpolago dva kinematična robna pogoja pomika:

$$u_1(0) = 3.75 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$u_1(1) = 3.333333 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

ki vodita do funkcije osnega pomika:

$$u_1(x) = -4.1666667 \cdot 10^{-7} \cdot x^2 + 3.75 \cdot 10^{-6} \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ m}$$

Za drugi končni element sledi:

$$\frac{d^2 u_2(x)}{dx^2} = -8.333333333333333 \cdot 10^{-7}$$

$$u_2(x) = -8.333333333333333 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{x^2}{2} + C_3 \cdot x + C_4 \quad 1 \text{ m} \leq x \leq 2 \text{ m}$$

Za določitev integracijskih konstant  $C_3$  in  $C_4$  sta na razpolago dva robna pogoja pomikov:

$$u_2(1) = 3.3333333 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$u_2(2) = 2.0833333 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

ki ponovno vodita do enake funkcije pomika kot za prvi končni element:

$$u_2(x) = -4.166666666666667 \cdot 10^{-7} \cdot x^2 + 3.75 \cdot 10^{-6} \quad 1 \text{ m} \leq x \leq 2 \text{ m}$$

Enaka funkcija sledi tudi za tretji končni element, kar posredno potrди, da so dobljene funkcije točne, saj za celotno obravnavano konstrukcijo oz. steber velja enovita rešitev.

*Poprocesiranje: izračun funkcij osne sile iz enačb elementov z interpoliranjem med vozliščnimi vrednostmi*

Funkcije osne sile bi formalno morali izračunati neposredno s pomočjo odvoda funkcij osnega pomika. Ker pa le-te niso vselej točne, uporabimo drug pristop, ki pa omogoča kvalitetnejše rezultate.

Zato za vsak končni element najprej določimo vozliščni vrednosti osne sile, ki ju izračunamo iz lokalnih matričnih enačb elementov, kjer izhajamo iz enačbe elementa, kar najprej vodi do vektorja sekundarnih spremenljivk:

$$[k_e] \cdot \{u_e\} = \{F_e\} + \{Q_e\} \rightarrow \{Q_e\} = [k_e] \cdot \{u_e\} - \{F_e\}$$

Čeprav je v enačbah za prvi element zanimiva zgolj vrednost osne sile  $N_{x,2}$  na koncu prvega elementa (ki je v tem primeru tudi enaka osni sili na začetku drugega elementa), bomo zaradi prikaza postopka izračunali obe vozliščni vrednosti osne sile:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 \\ -2.4 & 2.4 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 1000 \\ 1000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -N_{x,1} \\ N_{x,2} \end{Bmatrix} \rightarrow \\ \{Q_1\} = \begin{Bmatrix} -N_{x,1} \\ N_{x,2} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 \\ -2.4 & 2.4 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1000 \text{ N} \\ 1000 \text{ N} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2000 \text{ N} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,1} \\ N_{x,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2000 \text{ N} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

kjer negativni predznak pomeni, da gre za tlačno osno silo.

Iz enačb za drugi element sledi osna sila  $N_{x,3}$  (osna sila  $N_{x,2}$  na koncu prvega elementa je v našem primeru enaka osni sili na začetku drugega in je zato formalno ni potrebno računati ponovno):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 \\ -2.4 & 2.4 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 1000 \\ 1000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -N_{x,2} \\ N_{x,3} \end{Bmatrix} \rightarrow \\ \{Q_2\} = \begin{Bmatrix} -N_{x,2} \\ N_{x,3} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 \\ -2.4 & 2.4 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1000 \\ 1000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2000 \text{ N} \\ -4000 \text{ N} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,2} \\ N_{x,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2000 \text{ N} \\ -4000 \text{ N} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Iz enačb za tretji element sledi še manjkajoča vozliščna vrednost osne sile  $N_{x,4}$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 \\ -2.4 & 2.4 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 1000 \\ 1000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -N_{x,3} \\ N_{x,4} \end{Bmatrix} \rightarrow \\ \{Q_3\} = \begin{Bmatrix} -N_{x,3} \\ N_{x,4} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 \\ -2.4 & 2.4 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1000 \\ 1000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4000 \text{ N} \\ -6000 \text{ N} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,3} \\ N_{x,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4000 \text{ N} \\ -6000 \text{ N} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

V vseh elementih torej nastopa tlačna osna sila.

Opomba: funkcija osne sile je v obravnavanem primeru zvezna linearna funkcija, in zato bi lahko za določitev vozliščnih vrednosti osne sile uporabili samo prvi in tretji končni element, ali pa samo drugi in tretji končni element ob upoštevanju znane vrednosti osne sile v začetnem vozlišču prvega elementa.

Izračuni pokažejo, da je v vektorju, ki sledi iz produkta  $[k_e] \cdot \{u_e\} - \{F_e\}$ , vedno potrebno spremeniti predznak prvega člena, kar je posledica različnih usmeritev pozitivne osne sile v začetnem vozlišču med metodo končnih elementov in standardnim dogovorom iz mehanike.

Ker vozliščna vrednost osne sile pripada vozlišču 4, ki je podpora, lahko to informacijo izkoristimo tudi za izračun reakcije.

Tako sledi iz ravnotežja sil v vertikalni smeri (kjer je usmeritev reakcije  $V_A$  predpostavljena navzgor):

$$N_{x,4} + V_A = 0 \rightarrow V_A = -N_{x,4} = 6000 \text{ N}$$

Vrednost reakcije lahko izračunamo tudi iz »preostale« enačbe iz matrične enačbe konstrukcije (četrte, ki je nismo uporabili za izračun neznanih vozliščnih pomikov):

$$-2.4 \cdot 10^9 \cdot u_3 = 1000 + N_{x,4} \rightarrow -2.4 \cdot 10^9 \cdot u_3 = 1000 - V_A$$

$$V_A = 1000 + 2.4 \cdot 10^9 \cdot u_3 = 1000 + 2.4 \cdot 10^9 \cdot 2.0833333333333334 \cdot 10^{-6} = 6000 \text{ N}$$

Ker pa posamezni vektor sekundarnih spremenljivk predstavlja vozliščne sile, ki delujejo na posamezni končni element, lahko vrednost in usmeritev reakcije odčitamo direktno iz drugega člena vektorja  $\{Q_3\}$ . Ker so te sile zapisane v globalnem koordinatnem sistemu, negativna vrednost sile pomeni, da je usmerjena nasprotno kot globalna X os, in torej deluje navzgor.

Če za izračun *funkcij* spreminjanja osne sile (sekundarne spremenljivke) med vozlišči uporabimo enake (linearne) interpolacijske funkcije kot za izračun funkcij pomika (primarne spremenljivke), potem zapišemo:

$$N_{xN,e}(x) = N_{x,A} \cdot \frac{x - x_B}{x_A - x_B} + N_{x,B} \cdot \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \quad x_A \leq x \leq x_B$$

kar za prvi končni element vodi do funkcije:

$$N_{xN,1}(x) = N_{x,1} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + N_{x,2} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 0 \cdot \frac{x - 1}{0 - 1} - 2000 \cdot \frac{x - 0}{1 - 0} = -2000 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ m}$$

Za drugi končni element sledi funkcija:

$$N_{xN,2}(x) = N_{x,2} \cdot \frac{x-x_3}{x_2-x_3} + N_{x,3} \cdot \frac{x-x_2}{x_3-x_2} = -2000 \cdot \frac{x-2}{1-2} - 4000 \cdot \frac{x-1}{2-1} = -2000 \cdot x \quad 1 \text{ m} \leq x \leq 2 \text{ m}$$

Za tretji končni element sledi funkcija:

$$N_{xN,3}(x) = N_{x,3} \cdot \frac{x-x_4}{x_3-x_4} + N_{x,4} \cdot \frac{x-x_3}{x_4-x_3} = -4000 \cdot \frac{x-3}{2-3} - 6000 \cdot \frac{x-2}{3-2} = -2000 \cdot x \quad 2 \text{ m} \leq x \leq 3 \text{ m}$$

Prepričamo se lahko, da je približna rešitev za funkcije osne sile enaka pravi rešitvi, ki sledi iz diferencialne enačbe (ali elementarne mehanike).

Ker je očitno, da bo za celo konstrukcijo oz. steber veljala enovita funkcija osne sile (saj ni sprememb obtežbe znotraj konstrukcije oz. stebra), lahko enovito funkcijo osne sile (formalno približno rešitev) po celi konstrukciji oz. stebri dobimo tudi z interpolacijo. To lahko storimo npr. ponovno z Lagrangeovo interpolacijo oz. Lagrangeovim interpolacijskim polinomom, v katerem upoštevamo vse štiri diskretne vozliščne vrednosti osne sile (in uporabimo že znane Lagrangeove bazne polinome):

$$N_{x,L}(x) = 0 \cdot \frac{(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)}{(0-1) \cdot (0-2) \cdot (0-3)} - 2000 \cdot \frac{(x-0) \cdot (x-2) \cdot (x-3)}{(1-0) \cdot (1-2) \cdot (1-3)} - 4000 \cdot \frac{(x-0) \cdot (x-1) \cdot (x-3)}{(2-0) \cdot (2-1) \cdot (2-3)} - 6000 \cdot \frac{(x-0) \cdot (x-1) \cdot (x-2)}{(3-0) \cdot (3-1) \cdot (3-2)} = -2000 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 3 \text{ m}$$

ki je enaka pravi oz. točni funkciji osne sile.

*Poprocesiranje: iskanje točnih funkcij osnega pomika iz točnih funkcij osne sile*

Za (neobvezno) pridobitev točnih funkcij osnega pomika znotraj vsakega končnega elementa lahko sedaj uporabimo še drug pristop, ki predstavlja uporabo rešitve diferencialne zveze oz. enačbe, ki povezuje osni pomik in osno silo:

$$\frac{du_i(x)}{dx} = \frac{N_{x,i}(x)}{AE} \quad x_A \leq x \leq x_B$$

ki pa je diferencialna enačba zgolj 1. reda, kar pomeni, da potrebujemo za njeno rešitev zgolj en robni pogoj. Ker so prej pridobljene numerične funkcije za osno silo točne, tudi na tak način sledijo točne rešitve za funkcije osnega pomika.

Za prvi končni element tako sledi:

$$u_1(x) = \int \frac{N_{x,1}(x)}{AE} \cdot dx = \int \frac{-2000 \cdot x}{2.4 \cdot 10^9} \cdot dx = -4.166666666666667 \cdot 10^{-7} \cdot x^2 + C_1 \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ m}$$

Za določitev integracijske konstante  $C_1$  sta na razpolago dve diskretni robni oz. vozliščni vrednosti pomika:

$$u_1(0) = 3.75 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$
$$u_1(1) = 3.333333333333333 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

ki obe vodita do enake vrednosti integracijske konstante  $C_1 = 3.75 \cdot 10^{-6}$  kar vodi do funkcije:

$$u_1(x) = -4.166666666666667 \cdot 10^{-7} \cdot x^2 + 3.75 \cdot 10^{-6} \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ m}$$

Za drugi končni element sledi:

$$u_2(x) = \int \frac{N_{x,2}(x)}{AE} \cdot dx = \int \frac{-2000 \cdot x}{2.4 \cdot 10^9} \cdot dx = -4.166666666666667 \cdot 10^{-7} \cdot x^2 + C_2 \quad 1 \text{ m} \leq x \leq 2 \text{ m}$$

Za določitev integracijske konstante  $C_2$  sta na razpolago dve diskretni robni vrednosti pomika:

$$u_2(1) = 3.333333333333333 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$
$$u_2(2) = 2.083333333333334 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

ki obe vodita do enake vrednosti integracijske konstante  $C_2 = 3.75 \cdot 10^{-6}$  kar ponovno (pričakovano, saj znotraj konstrukcije ne pride do spremembe obtežbe) vodi do enake funkcije pomika:

$$u_2(x) = -4.166666666666667 \cdot 10^{-7} \cdot x^2 + 3.75 \cdot 10^{-6} \quad 1 \text{ m} \leq x \leq 2 \text{ m}$$

Enaka funkcija osnega pomika sledi tudi za tretji končni element, kar posredno potrди, da gre za točne rešitve.

*Poprocesiranje: iskanje funkcij osnega pomika po končnih elementih s kvalitetnejšo interpolacijo*

V enem izmed prejšnjih pristopov smo približek funkcije osnega pomika z interpolacijo dobili tako, da smo za vsak element upoštevali zgolj diskretni točni vozliščni vrednosti osnega pomika, kar je omogočalo zgolj linearno interpolacijo. Funkcije osnega pomika pa lahko izboljšamo tako, da v analizi upoštevamo še znani oz. izračunljivi diskretni točni vozliščni vrednosti prvega odvoda osnega pomika. Zato najprej s pomočjo konstitutivne enačbe izračunamo vozliščne vrednosti specifične deformacije, torej prvih odvodov osnega pomika (in nato uporabimo Hermitsko interpolacijo H1):

$$N_{x,1} = 0 \rightarrow \varepsilon_{x,1} = 0$$

$$N_{x,2} = -2000 \text{ N} \rightarrow \varepsilon_{x,2} = \frac{N_{x,2}}{EA} = \frac{-2000 \text{ N}}{30 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 0.2 \text{ m} \cdot 0.4 \text{ m}} = \frac{-2000 \text{ N}}{2.4 \cdot 10^9 \text{ N}} = -8.333333333333334 \cdot 10^{-7}$$

$$N_{x,3} = -4000 \text{ N} \rightarrow \varepsilon_{x,4} = \frac{N_{x,4}}{EA} = \frac{-4000 \text{ N}}{2.4 \cdot 10^9 \text{ N}} = -1.6666666666666665 \cdot 10^{-6}$$

$$N_{x,4} = -6000 \text{ N} \rightarrow \varepsilon_{x,4} = \frac{N_{x,4}}{EA} = \frac{-6000 \text{ N}}{2.4 \cdot 10^9 \text{ N}} = -2.65 \cdot 10^{-6}$$

Približno rešitev za prvi končni element tako sedaj izračunamo kot:

$$u_{1,N}(x) = u_1 \cdot N_{1,1}(x) + \varepsilon_1 \cdot N_{1,2}(x) + u_2 \cdot N_{1,3}(x) + \varepsilon_2 \cdot N_{1,4}(x)$$

kjer so interpolacijske funkcije, ki upoštevajo odvode iskane funkcije, naslednji polinomi 3. stopnje (zapisani v lokalnem koordinatnem sistemu, ki je identičen globalnemu):

$$N_{1,1}(x) = 1 - 3 \cdot \frac{x^2}{L_e^2} + 2 \cdot \frac{x^3}{L_e^3} = 1 - 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq L_e = 1 \text{ m}$$

$$N_{1,2}(x) = x - 2 \cdot \frac{x^2}{L_e} + \frac{x^3}{L_e} = x - 2 \cdot x^2 + x^3 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq L_e = 1 \text{ m}$$

$$N_{1,3}(x) = 3 \cdot \frac{x^2}{L_e^2} - 2 \cdot \frac{x^3}{L_e^3} = 3 \cdot x^2 - 2 \cdot x^3 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq L_e = 1 \text{ m}$$

$$N_{1,4}(x) = -\frac{x^2}{L_e} + \frac{x^3}{L_e^2} = -x^2 + x^3 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq L_e = 1 \text{ m}$$

Približna rešitev za prvi končni element tako dobi obliko:

$$\begin{aligned}u_{1,N}(x) &= 3.75 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot N_{1,1}(x) + 0 \cdot N_{1,2}(x) + 3.333333333333333 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot N_{1,3}(x) \\ &\quad - 8.333333333333334 \cdot 10^{-7} \cdot N_{1,4}(x) \\ &= -4.166666666666689 \cdot 10^{-7} \cdot x^2 + 3.75 \cdot 10^{-6} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 1 \text{ m}\end{aligned}$$

in je dejansko enaka pravi rešitvi.

Približno rešitev za drugi končni element izračunamo kot:

$$u_{2,N}(x) = u_2 \cdot N_{2,1}(x) + \varepsilon_2 \cdot N_{2,2}(x) + u_3 \cdot N_{2,3}(x) + \varepsilon_3 \cdot N_{2,4}(x)$$

kjer so interpolacijske funkcije sedaj naslednje (zapisane npr. v globalnem koordinatnem sistemu):

$$\begin{aligned}N_{2,1}(x) &= -4 + 12 \cdot x - 9 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3 & N_{2,2}(x) &= -4 + 8 \cdot x - 5 \cdot x^2 + x^3 \\ N_{2,3}(x) &= 5 - 12 \cdot x + 9 \cdot x^2 - 2 \cdot x^3 & N_{2,4}(x) &= -2 + 5 \cdot x - 4 \cdot x^2 + x^3 \quad 1 \text{ m} \leq x \leq 2 \text{ m}\end{aligned}$$

Približna rešitev za drugi končni element dobi obliko:

$$\begin{aligned}u_{2,N}(x) &= 3.333333333333333 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot N_{2,1}(x) - 8.333333333333334 \cdot 10^{-7} \cdot N_{2,2}(x) \\ &\quad + 2.083333333333334 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot N_{2,3}(x) - 1.666666666666665 \cdot 10^{-6} \cdot N_{2,4}(x) \\ &= -4.166666666666689 \cdot 10^{-7} \cdot x^2 + 3.75 \cdot 10^{-6} \quad 1 \text{ m} \leq x \leq 2 \text{ m}\end{aligned}$$

in je enaka pravi rešitvi (in seveda s tem tudi funkciji, ki je bila dobljena za prvi končni element).

Čeprav je že brez izračuna jasno, da moramo dobiti enako funkcijo osnega pomika tudi za tretji končni element, bomo račun izvedli za kontrolo, pri čemer približno rešitev za tretji končni element tako izračunamo kot:

$$u_{3,N}(x) = u_3 \cdot N_{3,1}(x) + \varepsilon_3 \cdot N_{3,2}(x) + u_4 \cdot N_{3,3}(x) + \varepsilon_4 \cdot N_{3,4}(x)$$

kjer so interpolacijske funkcije sedaj naslednje (zapisane npr. v globalnem koordinatnem sistemu):

$$\begin{aligned} N_{3,1}(x) &= -27 + 36 \cdot x - 15 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3 & N_{3,2}(x) &= -18 + 21 \cdot x - 8 \cdot x^2 + x^3 \\ N_{3,3}(x) &= 28 - 36 \cdot x + 15 \cdot x^2 - 2 \cdot x^3 & N_{3,4}(x) &= -12 + 16 \cdot x - 7 \cdot x^2 + x^3 \end{aligned} \quad 2 \text{ m} \leq x \leq 3 \text{ m}$$

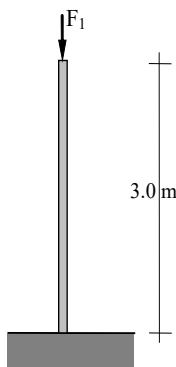
Približna rešitev za tretji končni element je ponovno:

$$\begin{aligned} u_{3,N}(x) &= 2.0833333333333334 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot N_{3,1}(x) - 1.6666666666666665 \cdot 10^{-6} \cdot N_{3,2}(x) \\ &+ 0 \text{ m} \cdot N_{3,3}(x) - 2.65 \cdot 10^{-6} \cdot N_{3,4}(x) = -4.166666666666689 \cdot 10^{-7} \cdot x^2 + 3.75 \cdot 10^{-6} \quad 2 \text{ m} \leq x \leq 3 \text{ m} \end{aligned}$$

Opomba: dobljene funkcije osnega pomika, kot tudi osne sile smo zapisali v skupnem oz. globalnem koordinatnem sistemu, za katerega smo izhodišče izbrali v zgornji točki konstrukcije oz. stebra. Čeprav je tak zapis formalno vedno mogoč (in omogoča neposredno primerjavo funkcij), je pri zahtevnejših konstrukcijah pogosto nepraktičen. Zato običajno vse funkcije raje zapišemo v lokalnih koordinatnih sistemih, katerih izhodišče se nahaja v začetnem vozlišču posameznega končnega elementa. Tako funkcije dobijo drugačen zapis iste informacije, njihovi grafi pa so identični grafom funkcij, zapisanih v globalnem koordinatnem sistemu. Ker so v obravnavanem primeru vsi trije elementi enakih dolžin, bi za vse tri elemente tako uporabili kar funkcije, prikazane pri prvem elementu.

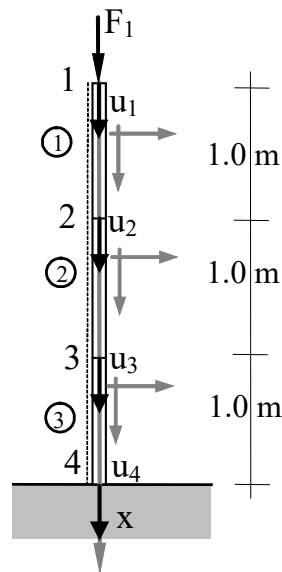
### Primer 2.b – Analiza stebra, obremenjenega z lastno težo in koncentrirano silo $F_1$ na vrhu stebra

Poiskati je potrebno približno rešitev diferencialne enačbe osnega pomika ter razporeditev osne sile AB stebra dolžine 3 m, obremenjenega z lastno težo in vertikalno silo  $F_1 = 1000$  N, ki deluje tlačno na vrhu stebra. Prerez stebra je pravokotnik z dimenzijama  $b/b = 0.2$  m/0.4 m, modul elastičnosti pa znaša 30 GPa.



Slika 12: Obravnavani stebel

## Rešitev



Slika 13: Izbrana diskretizacija

Zaradi dodatne obtežbe (koncentrirane sile  $F_1$ ) se matrična enačba, že znana iz prejšnjega primera, ki velja za posamezni linearni končni element za konstantno obtežbo  $q$ , ne spremeni in tako ponovno velja:

$$\frac{EA}{L_e} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_A \\ u_B \end{Bmatrix} = \frac{q \cdot L_e}{2} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -N_{x,A} \\ N_{x,B} \end{Bmatrix}$$

Če izberemo že iz prejšnjega primera znano diskretizacijo s tremi linearnimi končnimi elementi enakih dolžin (elemente oštevilčimo npr. po vrsti od prostega konca proti vpetemu delu), sledijo popolnoma enake matrične enačbe kot v prejšnjem primeru, razen za prvi končni element, kjer osna sila v začetnem vozlišču ni več enaka 0:

$$\begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 \\ -2.4 & 2.4 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1000 \\ 1000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -N_{x,1} \\ N_{x,2} \end{Bmatrix}$$

Iz mehanskega ravnotežja sil v prvem vozlišču sledi:

$$N_{x,1} + F_1 = 0 \rightarrow N_{x,1} = -F_1$$

Matrična enačba prvega končnega elementa tako dobi obliko:

$$\begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 \\ -2.4 & 2.4 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1000 \\ 1000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -(-F_1) \\ N_{x,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1000 \\ 1000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_1 \\ N_{x,2} \end{Bmatrix}$$

Tudi togostna matrika  $[K]$  celotne »konstrukcije« ter vektor pomikov  $\{U\}$  in obtežni vektor  $\{F\}$  (v katerem so zbrani samo členi, ki izvirajo iz lastne teže) se ne spremenijo. Spremeni se zgolj vektor sekundarnih spremenljivk  $\{Q\}$  na desni strani sistema

$$\begin{bmatrix} 2.4 \cdot 10^9 & -2.4 \cdot 10^9 & 0 & 0 \\ -2.4 \cdot 10^9 & 4.8 \cdot 10^9 & -2.4 \cdot 10^9 & 0 \\ 0 & -2.4 \cdot 10^9 & 4.8 \cdot 10^9 & -2.4 \cdot 10^9 \\ 0 & 0 & -2.4 \cdot 10^9 & 2.4 \cdot 10^9 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 2000 \\ 1000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \\ N_{x,4} \end{Bmatrix}$$

Matrični sistem bistvenih enačb konstrukcije, ki jih uporabimo za pridobitev iskanih neznanih vozliščnih vrednosti pomikov, tako dobi obliko:

$$\begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 & 0 & 0 \\ -2.4 & 4.8 & -2.4 & 0 \\ 0 & -2.4 & 4.8 & -2.4 \\ 0 & 0 & -2.4 & 2.4 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2000 \\ 2000 \\ 2000 \\ 1000 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 & 0 \\ -2.4 & 4.8 & -2.4 \\ 0 & -2.4 & 4.8 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2000 \\ 2000 \\ 2000 \end{Bmatrix}$$

ki je enaka, kot da v ustreznem vozlišču, kjer nastopi koncentrirana sila  $F_1$ , neposredno upoštevamo (torej prištejemo ali odštejemo, odvisno od njene usmeritve ter *izbranega* koordinatnega sistema) vrednost sile  $F_1$ .

Iz tega sistema sledijo vozliščne vrednosti primarne spremenljivke, torej osnega pomika:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \cdot 10^{-6} \\ 4.166666666666667 \cdot 10^{-6} \\ 2.5 \cdot 10^{-6} \end{Bmatrix} \text{ m}$$

ki so (pričakovano) nekoliko večje od vrednosti v prejšnjem primeru.

Poprocesiranje: iskanje (lokalnih) približnih funkcij osnega pomika po končnih elementih  $\zeta$  interpolacijo po elementih

Funkcije osnega pomika (približne rešitve) po elementih so tako (interpolacijske funkcije so enake kot v prejšnjem primeru):

$$u_{N,1}(x) = u_1 \cdot \frac{x-x_2}{x_1-x_2} + u_2 \cdot \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = 5 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-5} \cdot \frac{x-1}{0-1} + 4.166666666666667 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{x-0}{1-0}$$

$$= 5 \cdot 10^{-6} - 8.333333333333335 \cdot 10^{-7} \cdot x \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ m}$$

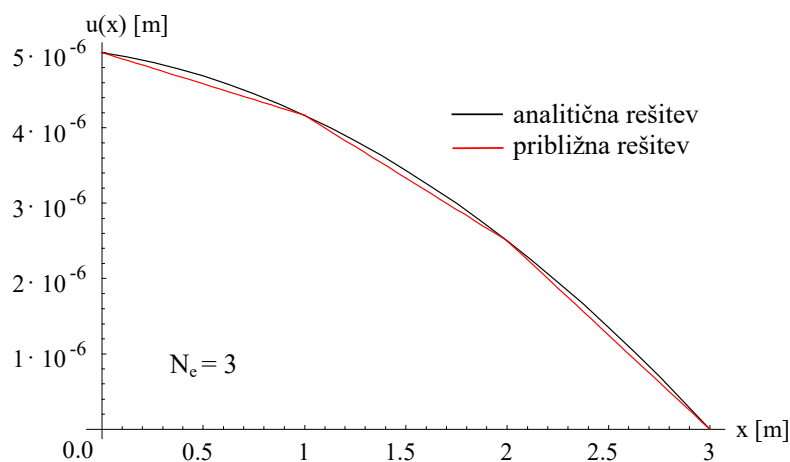
$$u_{N,2}(t) = u_2 \cdot \frac{x-x_3}{x_2-x_3} + u_3 \cdot \frac{x-x_2}{x_3-x_2} = 4.166666666666667 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{2-x}{2-1}$$

$$+ 2.5 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1-x}{1-2} = 5.833333333333334 \cdot 10^{-6} - 1.666666666666667 \cdot 10^{-6} \cdot x \quad 1 \text{ m} \leq x \leq 2 \text{ m}$$

$$u_{N,3}(t) = u_3 \cdot \frac{x_3-x}{x_3-x_4} + u_4 \cdot \frac{x-x_3}{x_4-x_3} = 2.5 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{x-3}{2-3} + 0 \cdot \frac{x-2}{3-2}$$

$$= 7.5 \cdot 10^{-6} - 2.5 \cdot 10^{-6} \cdot x \quad 2 \text{ m} \leq x \leq 3 \text{ m}$$

Notranja deformacijska energija za te funkcije pomika znaša  $U = 0.010833333333333334$  J, (zunanja) potencialna energija obtežbe pa znaša  $V = 0.0225$  J. Celotna potencialna energija  $\Pi$  tako znaša  $-0.011666666666666669$  J.



Slika 14: Primerjava dobljene približne rešitve za osni pomik s točno rešitvijo

Iz primerjave obeh grafov na sliki 14 vidimo, da tudi sedaj s približno rešitvijo dobimo točne vrednosti v vozliščih in približne vrednosti med vozlišči. Prav tako je mogoče razumno predvideti, da bi s povečanjem števila vozlišč (npr. s povečanjem števila končnih elementov), ujemanje obeh rešitev postalo boljše.

*Poprocesiranje: iskanje globalne (enovite) približne funkcije osnega pomika po celem stebru*

Ker je očitno, da bo tudi v tem primeru za celo konstrukcijo oz. steber veljala enovita funkcija osnega pomika (saj ni sprememb togosti ali obtežb znotraj konstrukcije oz. stebra), lahko enovito funkcijo osnega pomika (formalno približno rešitev) po celi konstrukciji oz. stebru dobimo z interpolacijo. Pridobimo jo lahko npr. z Lagrangeovo interpolacijo (pri čemer so interpolacijski polinomi znani že iz prejšnjega primera), ki za naš primer dobi obliko:

$$\begin{aligned} u_L(x) &= 5 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)}{(0-1) \cdot (0-2) \cdot (0-3)} + 4.166666666666667 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{(x-0) \cdot (x-2) \cdot (x-3)}{(1-0) \cdot (1-2) \cdot (1-3)} \\ &+ 2.5 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{(x-0) \cdot (x-1) \cdot (x-3)}{(2-0) \cdot (2-1) \cdot (2-3)} + 0 \cdot \frac{(x-0) \cdot (x-1) \cdot (x-2)}{(3-0) \cdot (3-1) \cdot (3-2)} \\ &= 5 \cdot 10^{-6} - 4.16666666666666714 \cdot 10^{-7} \cdot x - 4.1666666666666677 \cdot 10^{-7} \cdot x^2 \quad 0 \leq x \leq 3 \text{ m} \end{aligned}$$

in je enaka pravi rešitvi. Zanj sledi vrednost celotne potencialne energije  $\Pi = -0.0118750$  J, ki je tudi manjša vrednost od prej dobljene.

Za izračun funkcije osne sile zato lahko uporabimo diferencialno zvezo:

$$\begin{aligned} \frac{du(x)}{dx} &= \frac{N_x(x)}{AE} \rightarrow N_x(x) = AE \cdot \frac{du(x)}{dx} \\ &= 2.4 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot (-4.16666666666666714 \cdot 10^{-7} - 2 \cdot 4.1666666666666677 \cdot 10^{-7} \cdot x) \\ &= -1000 - 2000 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 3 \text{ m} \end{aligned}$$

ki je prav tako enaka pravi rešitvi.

*Poprocesiranje: izračun funkcij osne sile iz enačb elementov z interpoliranjem med vozliščnimi vrednostmi elementov*

Vozliščne vrednosti osnih sil izračunamo iz lokalnih matričnih enačb elementov. Iz enačb za prvi končni element tako sledi osna sila  $N_{x,2}$  na koncu prvega končnega elementa (ki je enaka osni sili na začetku drugega elementa):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 \\ -2.4 & 2.4 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 1000 \\ 1000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -N_{x,1} \\ N_{x,2} \end{Bmatrix} \\ \{Q_1\} = \begin{Bmatrix} -N_{x,1} \\ N_{x,2} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 \\ -2.4 & 2.4 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1000 \text{ N} \\ 1000 \text{ N} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1000 \text{ N} \\ -3000 \text{ N} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,1} \\ N_{x,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1000 \text{ N} \\ -3000 \text{ N} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Iz enačb za drugi končni element sledi osna sila  $N_{x,3}$ :

$$\begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 \\ -2.4 & 2.4 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1000 \\ 1000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -N_{x,2} \\ N_{x,3} \end{Bmatrix}$$

$$\{Q_2\} = \begin{Bmatrix} -N_{x,2} \\ N_{x,3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 \\ -2.4 & 2.4 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1000 \\ 1000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3000 \text{ N} \\ -5000 \text{ N} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,2} \\ N_{x,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3000 \text{ N} \\ -5000 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

Iz enačb za tretji končni element sledi še  $N_{x,4}$ :

$$\begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 \\ -2.4 & 2.4 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1000 \\ 1000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -N_{x,3} \\ N_{x,4} \end{Bmatrix}$$

$$\{Q_3\} = \begin{Bmatrix} -N_{x,3} \\ N_{x,4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 \\ -2.4 & 2.4 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1000 \\ 1000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5000 \text{ N} \\ -7000 \text{ N} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,3} \\ N_{x,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5000 \text{ N} \\ -7000 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

V vseh elementih torej nastopa tlačna osna sila.

Iz ravnotežja sil v vertikalni smeri v vozlišču 4 (usmeritev reakcije  $V_A$  je predpostavljena navzgor) pa sledi:

$$N_{x,4} + V_A = 0 \rightarrow V_A = -N_{x,4} = 7000 \text{ N}$$

ki torej deluje navzgor.

Vrednost reakcije lahko izračunamo tudi iz »preostale« enačbe iz matrične enačbe konstrukcije (četrte, ki je nismo uporabili za izračun neznanih vrednosti primarne spremenljivke oz. vozliščnega pomika):

$$-2.4 \cdot 10^9 \cdot u_3 = 1000 + N_{x,4} \rightarrow -2.4 \cdot 10^9 \cdot u_3 = 1000 - V_A$$

$$V_A = 1000 + 2.4 \cdot 10^9 \cdot u_3 = 1000 + 2.4 \cdot 10^9 \cdot 2.5 \cdot 10^{-6} = 7000 \text{ N}$$

Še najenostavneje lahko vrednost in usmeritev reakcije odčitamo iz drugega člena vektorja sekundarnih spremenljivk  $\{Q_3\}$ , ki pokaže, da je velikost reakcije 7000 N, usmerjena pa je navzgor.

Če za spreminjanje osne sile (sekundarne spremenljivke) med vozlišči uporabimo enake interpolacijske funkcije kot za funkcije osnega pomika (primarne spremenljivke), potem zapišemo:

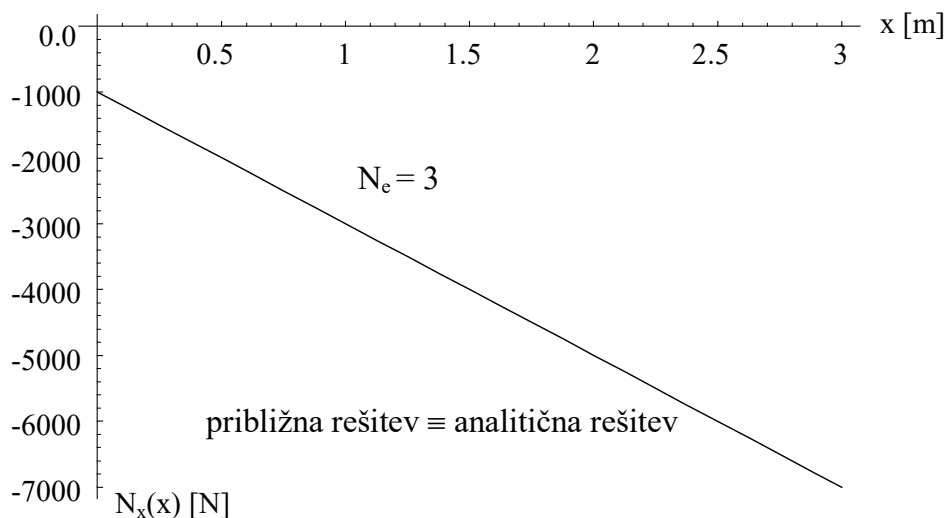
$$N_{xN,e}(x) = N_{x,A} \cdot \frac{x - x_B}{x_A - x_B} + N_{x,B} \cdot \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \quad x_A \leq x \leq x_B$$

kar za prvi končni element vodi do:

$$N_{xN,1}(t) = N_{x,1} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + N_{x,2} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = -1000 \cdot \frac{x - 1}{0 - 1} - 3000 \cdot \frac{x - 0}{1 - 0} = -1000 - 2000 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ m}$$

Prepričamo se lahko, da enaka funkcija osne sile sledi tudi iz enačb, ki pripadajo ostalima končnima elementoma.

Prav tako se lahko prepričamo, da je približna rešitev za osno silo enaka pravi rešitvi, ki sledi iz diferencialne enačbe (in jo tudi zlahka preverimo z elementarno mehaniko).

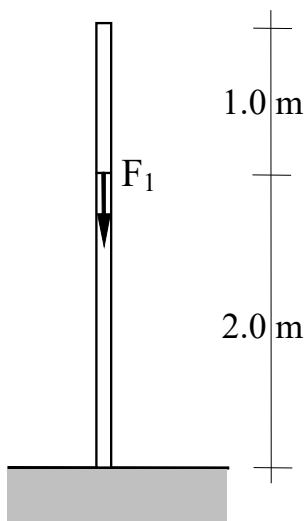


Slika 15: Primerjava dobljene rešitve za osno silo s točno rešitvijo

Z enkratno integracijo posamezne funkcije osne sile končnega elementa pa lahko dobimo tudi posamezne funkcije osnega pomika znotraj končnega elementa. Ker pa so vse funkcije osne sile medsebojno enake, iz njih sledi enaka funkcija osnega pomika, slika 15.

### Primer 2.c – Steber, obremenjen z lastno težo in koncentrirano silo $F_1$ v stebru

Poiskati je potrebno približno rešitev diferencialne enačbe osnega pomika ter razporeditev osne sile AB stebra dolžine 3 m, obremenjenega z lastno težo in vertikalno silo  $F_1 = 1000$  N, ki deluje tlačno na razdalji 1 m od vrha. Prerez stebra je  $b/b = 0.2$  m/0.4 m, modul elastičnosti pa znaša 30 GPa.



Slika 16: Obravnavani steber

### Rešitev

Pri iskanju analitične rešitve bi sedaj morali rešiti dve vezani diferencialni enačbi. Čeprav je (ob uporabi ustreznega obtežnega vektorja) steber (ki, ne glede na obtežbo, predstavlja en sam konstrukcijski element) mogoče modelirati tudi s samo enim končnim elementom, je zaradi dejstva, da bo točni osni pomik opisan z dvema funkcijama, primerno uporabiti vsaj dva končna elementa, ki se seveda stikujeta na mestu delovanja sile  $F_1$ .

Zaradi dodatne obtežbe se matrična enačba, ki velja za posamezni linearni končni element za konstantno obtežbo  $q$ , ne spremeni in tako velja:

$$\frac{EA}{L_e} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_A \\ u_B \end{Bmatrix} = \frac{q \cdot L_e}{2} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -N_{x,A} \\ N_{x,B} \end{Bmatrix}$$

Če pa ponovno izberemo že iz prejšnjega primera znano diskretizacijo s tremi linearnimi končnimi elementi enakih dolžin (kjer elemente oštevilčimo po vrsti od prostega konca proti vpetemu delu), se spremenita matrični enačbi prvih dveh končnih elementov, saj

osna sila v končnem vozlišču prvega končnega elementa zaradi koncentrirane sile  $F_1$  ni več enaka vrednosti osne sile v začetnem vozlišču drugega končnega elementa:

$$[k_1] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \{F_1\} + \{Q_1\} \rightarrow \begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 \\ -2.4 & 2.4 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1000 \\ 1000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ N_{x,2zgoraj} \end{Bmatrix}$$

$$[k_2] \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \{F_2\} + \{Q_2\} \rightarrow \begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 \\ -2.4 & 2.4 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1000 \\ 1000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -N_{x,2spodaj} \\ N_{x,3} \end{Bmatrix}$$

V štirih enačbah sicer nastopa 5 neznank, a iz mehanskega ravnotežja sil v drugem vozlišču sledi:

$$N_{x,2zgoraj} - F_1 - N_{x,2spodaj} = 0 \rightarrow N_{x,2zgoraj} = F_1 + N_{x,2spodaj}$$

Opomba: prav tako bi lahko enakovredno izrazili tudi:

$$N_{x,2zgoraj} - F_1 - N_{x,2spodaj} = 0 \rightarrow N_{x,2spodaj} = N_{x,2zgoraj} - F_1$$

Matrični enačbi prvega in drugega končnega elementa tako dobita obliki:

$$[k_1] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \{F_1\} + \{Q_1\} \rightarrow \begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 \\ -2.4 & 2.4 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1000 \\ 1000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ F_1 + N_{x,2spodaj} \end{Bmatrix}$$

$$[k_2] \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \{F_2\} + \{Q_2\} \rightarrow \begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 \\ -2.4 & 2.4 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1000 \\ 1000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -N_{x,2spodaj} \\ N_{x,3} \end{Bmatrix}$$

Tudi togostna matrika  $[K]$  celotne »konstrukcije« in vektorja  $\{U\}$  ter  $\{F\}$  se ne spremenijo. Spremeni se zgolj vektor sekundarnih spremenljivk  $\{Q\}$  na desni strani sistema

$$\begin{bmatrix} 2.4 \cdot 10^9 & -2.4 \cdot 10^9 & 0 & 0 \\ -2.4 \cdot 10^9 & 4.8 \cdot 10^9 & -2.4 \cdot 10^9 & 0 \\ 0 & -2.4 \cdot 10^9 & 4.8 \cdot 10^9 & -2.4 \cdot 10^9 \\ 0 & 0 & -2.4 \cdot 10^9 & 2.4 \cdot 10^9 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 2000 \\ 1000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1000 \\ 0 \\ N_{x,4} \end{Bmatrix}$$

Matrični sistem bistvenih enačb konstrukcije, ki jih uporabimo za pridobitev iskanih neznanih vozliščnih vrednosti pomikov (primarnih spremenljivk), tako dobi obliko:

$$\begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 & 0 \\ -2.4 & 4.8 & -2.4 \\ 0 & -2.4 & 4.8 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1000 \\ 3000 \\ 2000 \end{Bmatrix}$$

ki je enaka, kot da se k ustreznemu členu obtežnega vektorja konstrukcije, kjer nastopi koncentrirana sila  $F_1$ , doda (torej prišteje ali odšteje, odvisno od njene usmeritve oz. predznaka) vrednost koncentrirane sile  $F_1$ .

Iz tega sistema sledijo vozliščne vrednosti primarne spremenljivke:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.583333333333333 \cdot 10^{-6} \\ 4.166666666666667 \cdot 10^{-6} \\ 2.5 \cdot 10^{-6} \end{Bmatrix} \text{ m}$$

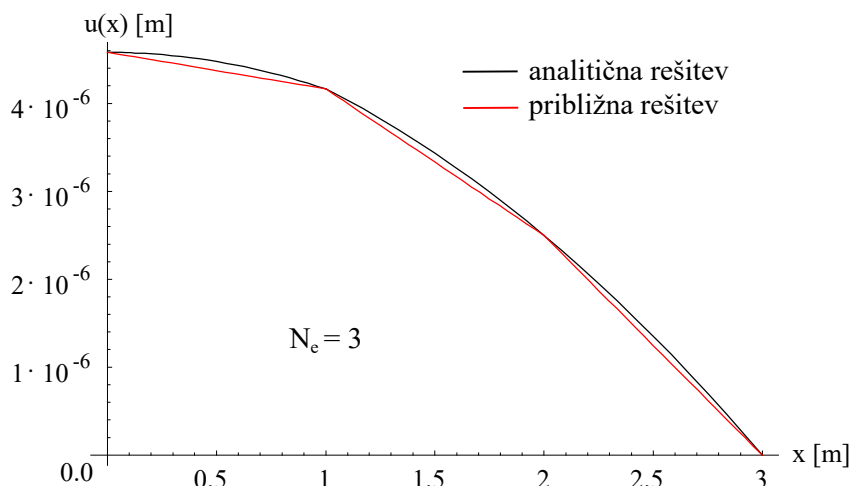
*Poprocesiranje: iskanje (lokalnih) približnih funkcij osnega pomika po končnih elementih*

Funkcije pomika (približne rešitve) po elementih so tako:

$$\begin{aligned} u_{N,1}(x) &= u_1 \cdot \frac{x-x_2}{x_1-x_2} + u_2 \cdot \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \\ &= 4.583333333333333 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-5} \cdot \frac{x-1}{0-1} + 4.166666666666667 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{x-0}{1-0} \\ &= 4.583333333333333 \cdot 10^{-6} - 4.166666666666667 \cdot 10^{-7} \cdot x \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ m} \\ u_{N,2}(t) &= u_2 \cdot \frac{x-x_3}{x_2-x_3} + u_3 \cdot \frac{x-x_2}{x_3-x_2} = 4.166666666666667 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{x-2}{1-2} \\ &+ 2.5 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{x-1}{2-1} = 5.833333333333334 \cdot 10^{-6} - 1.666666666666667 \cdot 10^{-6} \cdot x \quad 1 \text{ m} \leq x \leq 2 \text{ m} \end{aligned}$$

ter

$$\begin{aligned} u_{N,3}(t) &= u_3 \cdot \frac{x-x_4}{x_3-x_4} + u_4 \cdot \frac{x-x_3}{x_4-x_3} = 2.5 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{x-3}{2-3} + 0 \cdot \frac{x-2}{3-2} \\ &= 7.5 \cdot 10^{-6} - 2.5 \cdot 10^{-6} \cdot x \quad 2 \text{ m} \leq x \leq 3 \text{ m} \end{aligned}$$



Slika 17: Primerjava dobljene približne rešitve za osni pomik s točno rešitvijo

Iz primerjave obeh grafov vidimo, da tudi sedaj s približno rešitvijo dobimo točne vrednosti v vozliščih in približne vrednosti med vozlišči.

Notranja deformacijska energija za te funkcije pomika znaša  $U = 0.010833333333333334$  J, (zunanja) potencialna energija obtežbe pa znaša  $V = 0.021666666666666667$  J. Celotna potencialna energija  $\Pi$  tako znaša  $-0.010833333333333334$  J.

*Poprocesiranje: iskanje globalne (enovite) približne funkcije osnega pomika*

Ker je očitno, da za celo konstrukcijo sedaj ne bo več veljala enovita funkcija osnega pomika (nastopi namreč sprememba obtežbe znotraj konstrukcije), lahko enovito funkcijo pomika (približno rešitev) z interpolacijo dobimo samo za del stebra pod koncentrirano silo. Če uporabimo Lagrangeovo interpolacijo oz. Lagrangeov interpolacijski polinom, ta za naš primer dobi obliko:

$$\begin{aligned}
 u_L(x) &= u_2 \cdot \frac{(x-x_3) \cdot (x-x_4)}{(x_2-x_3) \cdot (x_2-x_4)} + u_3 \cdot \frac{(x-x_2) \cdot (x-x_4)}{(x_3-x_2) \cdot (x_3-x_4)} + u_4 \cdot \frac{(x-x_2) \cdot (x-x_3)}{(x_4-x_2) \cdot (x_4-x_3)} \\
 &= 4.583333333333333 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{(x-2) \cdot (x-3)}{(1-2) \cdot (1-3)} + 4.166666666666667 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{(x-1) \cdot (x-3)}{(2-1) \cdot (2-3)} \\
 &\quad + 0 \cdot \frac{(x-1) \cdot (x-2)}{(3-1) \cdot (3-2)} \\
 &= 5 \cdot 10^{-6} - 4.166666666666667 \cdot 10^{-7} \cdot x - 4.166666666666667 \cdot 10^{-7} \cdot x^2 \quad 1 \text{ m} \leq x \leq 3 \text{ m}
 \end{aligned}$$

ki je enaka pravi rešitvi za ta del konstrukcije.

Za del stebra nad koncentrirano silo pa točne funkcije pomika z interpolacijo zgolj dveh vrednosti pomika za analizirani del ne moremo dobiti.

*Poprocesiranje: analiza osnih sil*

Za izračun funkcije osne sile spodnjega dela stebra uporabimo zvezo:

$$\begin{aligned} \frac{du(x)}{dx} &= \frac{N_x(x)}{AE} \rightarrow N_x(x) = AE \cdot \frac{du(x)}{dx} \\ &= 2.4 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot (-4.1666666666666677 \cdot 10^{-7} - 2 \cdot 4.1666666666666677 \cdot 10^{-7} \cdot x) \\ &= -1000 - 2000 \cdot x \quad 1 \text{ m} \leq x \leq 3 \text{ m} \end{aligned}$$

ki je prav tako enaka pravi rešitvi za ta del konstrukcije oz. stebra.

*Poprocesiranje: izračun funkcij osne sile iz enačb elementov z interpoliranjem med vozliščnimi vrednostmi*

Vozliščne vrednosti osne sile izračunamo iz lokalnih matričnih enačb elementov. Iz enačb za prvi element tako sledi osna sila na koncu prvega elementa (ki pa v obravnavanem primeru ni enaka osni sili na začetku drugega elementa, in je zato analiza drugega končnega elementa pravzaprav potrebna):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 \\ -2.4 & 2.4 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0000 \\ 1000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -N_{x,1} \\ N_{x,2\text{zgoraj}} \end{Bmatrix} \\ \{Q_1\} = \begin{Bmatrix} -N_{x,1} \\ N_{x,2\text{zgoraj}} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 \\ -2.4 & 2.4 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1000 \text{ N} \\ 1000 \text{ N} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0000 \text{ N} \\ -2000 \text{ N} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,1} \\ N_{x,2\text{zgoraj}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0 \text{ N} \\ -2000 \text{ N} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Iz enačb za drugi element sledi:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 \\ -2.4 & 2.4 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 1000 \\ 1000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -N_{x,2\text{spodaj}} \\ N_{x,3} \end{Bmatrix} \\ \{Q_2\} = \begin{Bmatrix} -N_{x,2\text{spodaj}} \\ N_{x,3} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 \\ -2.4 & 2.4 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1000 \\ 1000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3000 \text{ N} \\ -5000 \text{ N} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,2\text{spodaj}} \\ N_{x,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3000 \text{ N} \\ -5000 \text{ N} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Iz enačb za tretji element sledi še  $N_{x,4}$ :

$$\begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 \\ -2.4 & 2.4 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1000 \\ 1000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -N_{x,3} \\ N_{x,4} \end{Bmatrix}$$

$$\{Q_3\} = \begin{Bmatrix} -N_{x,3} \\ N_{x,4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 \\ -2.4 & 2.4 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1000 \\ 1000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5000 \text{ N} \\ -7000 \text{ N} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,3} \\ N_{x,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5000 \text{ N} \\ -7000 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

V vseh elementih torej nastopa tlačna osna sila.

Iz ravnotežja sil v vertikalni smeri v vozlišču 4 (usmeritev reakcije  $V_A$  je predpostavljena navzgor) sledi:

$$N_{x,4} + V_A = 0 \rightarrow V_A = -N_{x,4} = 7000 \text{ N}$$

ki torej deluje navzgor.

Vrednost reakcije lahko izračunamo tudi iz »preostale« enačbe iz matrične enačbe konstrukcije (četrt, ki je nismo uporabili za izračun neznanih vozliščnih pomikov):

$$\begin{aligned} -2.4 \cdot 10^9 \cdot u_3 &= 1000 + N_{x,4} \rightarrow -2.4 \cdot 10^9 \cdot u_3 = 1000 - V_A \\ V_A &= 1000 + 2.4 \cdot 10^9 \cdot u_3 = 1000 + 2.4 \cdot 10^9 \cdot 2.5 \cdot 10^{-6} = 7000 \text{ N} \end{aligned}$$

Še najenostavneje lahko vrednost in usmeritev reakcije odčitamo iz drugega člena vektorja sekundarnih spremenljivk  $\{Q_3\}$ , ki pokaže, da je velikost reakcije 7000 N, usmerjena pa je navzgor.

Če za spreminjanje osne sile (sekundarne spremenljivke) med vozlišči uporabimo enake interpolacijske funkcije kot za funkcije pomika (primarne spremenljivke), potem zapišemo:

$$N_{xN,e}(x) = N_{x,A} \cdot \frac{x - x_B}{x_A - x_B} + N_{x,B} \cdot \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \quad x_A \leq x \leq x_B$$

kar za prvi končni element vodi do:

$$N_{xN,1}(t) = N_{x,1} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + N_{x,2\text{zgoraj}} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 0 \cdot \frac{x - 1}{0 - 0} - 2000 \cdot \frac{x - 0}{1 - 0} = -2000 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ m}$$

Za drugi končni element sledi:

$$N_{xN,2}(x) = N_{x,2\text{spodaj}} \cdot \frac{x-x_3}{x_2-x_3} + N_{x,3} \cdot \frac{x-x_2}{x_3-x_2} = -3000 \cdot \frac{x-2}{1-2} - 5000 \cdot \frac{x-1}{2-1}$$

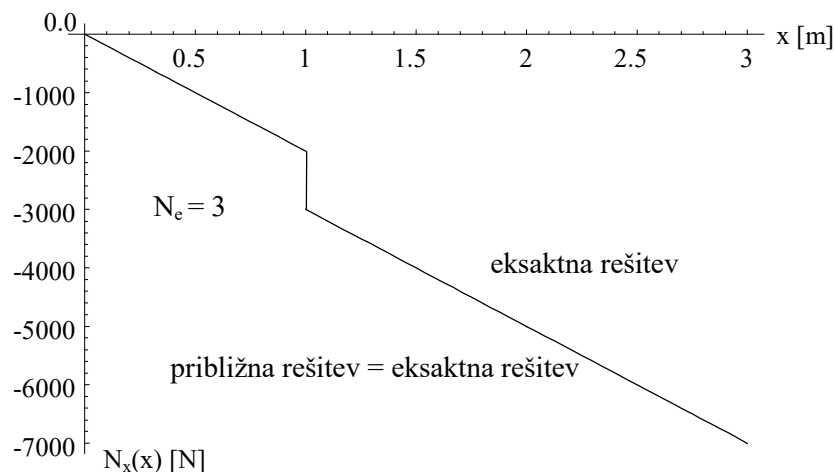
$$= -1000 - 2000 \cdot x \quad 1 \text{ m} \leq x \leq 2 \text{ m}$$

Za tretji končni element sledi:

$$N_{xN,3}(x) = N_{x,3} \cdot \frac{x-x_4}{x_3-x_4} + N_{x,4} \cdot \frac{x-x_3}{x_4-x_3} = -5000 \cdot \frac{x-3}{2-3} - 7000 \cdot \frac{x-2}{3-2}$$

$$= -1000 - 2000 \cdot x \quad 2 \text{ m} \leq x \leq 3 \text{ m}$$

Prepričamo se lahko, da sta približni rešitvi za osno silo dejansko enaki pravima rešitvama, ki sledita iz diferencialnih enačb ali elementarne mehanike.



Slika 18: Primerjava dobljene rešitve za osno silo s točno rešitvijo

Z enkratno integracijo posamezne funkcije osne sile pa lahko dobimo tudi posamezni funkciji osnega pomika, kar je dejansko aktualno samo za zgornji del stebra oz. prvi končni element, kjer pa lahko uporabimo tudi Hermitsko interpolacijo H1 z upoštevanjem vozliščnih vrednosti specifične deformacije, ki ju izračunamo kot:

$$N_{x,1} = 0 \text{ N} \rightarrow \varepsilon_{x,1} = \frac{N_{x,1}}{EA} = \frac{0 \text{ N}}{30 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 0.2 \text{ m} \cdot 0.4 \text{ m}} = 0$$

$$N_{x,2} = -2000 \text{ N} \rightarrow \varepsilon_{x,2} = \frac{N_{x,2}}{EA} = \frac{-2000 \text{ N}}{30 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 0.2 \text{ m} \cdot 0.4 \text{ m}} = \frac{-2000 \text{ N}}{2.4 \cdot 10^9 \text{ N}} = -8.333333333333334 \cdot 10^{-7}$$

Približno rešitev za prvi končni element tako sedaj izračunamo kot:

$$u_{1,N}(x) = u_1 \cdot N_{1,1}(x) + \varepsilon_1 \cdot N_{1,2}(x) + u_2 \cdot N_{1,3}(x) + \varepsilon_2 \cdot N_{1,4}(x)$$

kjer so interpolacijske funkcije, ki upoštevajo odvode iskane funkcije, naslednji polinomi 3. stopnje (že znani iz primera 2.a):

$$N_{1,1}(x) = 1 - 3 \cdot \frac{x^2}{L_e^2} + 2 \cdot \frac{x^3}{L_e^3} = 1 - 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq L_e = 1 \text{ m}$$

$$N_{1,2}(x) = x - 2 \cdot \frac{x^2}{L_e} + \frac{x^3}{L_e^2} = x - 2 \cdot x^2 + x^3 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq L_e = 1 \text{ m}$$

$$N_{1,3}(x) = 3 \cdot \frac{x^2}{L_e^2} - 2 \cdot \frac{x^3}{L_e^3} = 3 \cdot x^2 - 2 \cdot x^3 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq L_e = 1 \text{ m}$$

$$N_{1,4}(x) = -\frac{x^2}{L_e} + \frac{x^3}{L_e^2} = -x^2 + x^3 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq L_e = 1 \text{ m}$$

Rešitev za prvi končni element tako dobi obliko:

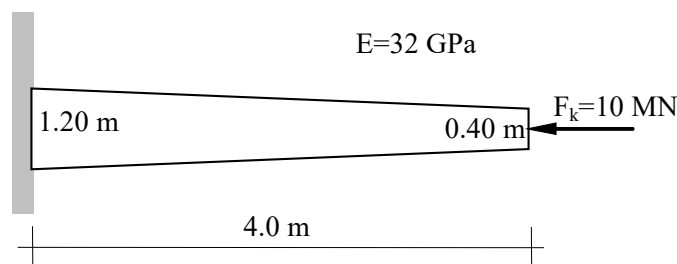
$$\begin{aligned} u_{1,N}(x) &= 4.583333333333333 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot N_{1,1}(x) + 0 \cdot N_{1,2}(x) + 4.166666666666667 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot N_{1,3}(x) \\ &- 8.333333333333334 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-7} \cdot N_{1,4}(x) \\ &= -4.166666666666655 \cdot 10^{-7} \cdot x^2 + 4.583333333333333 \cdot 10^{-6} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 1 \text{ m} \end{aligned}$$

in je enaka pravi rešitvi za ta odsek stebra.

### Primer 3.a\* – Konzolni nosilec pravokotnega prereza z linearno spreminjajočo višino

Izračunati je potrebno osne pomike, osne sile in specifične deformacije zaradi koncentrirane osne sile na koncu konzolnega nosilca pravokotnega prereza z linearno spreminjajočo višino.

Širina nosilca  $b$  je konstantna vzdolž nosilca in znaša 0.40 m, višina prereza pa se spreminja od  $h=1.20$  m na vpetem delu, do 0.4 m na prostem koncu. Modul elastičnosti znaša 32 GPa.



Slika 19: Konzola z linearno spreminjajočo višino

## Rešitev

Analitična oz. točna funkcija horizontalnega oz. osnega pomika, ki ni del rešitve z metodo končnih elementov (prikazana je zgolj za primerjavo z rezultati, dobljenimi z različnimi diskretizacijami z metodo končnih elementov), je (izhodišče koordinate  $x$  je v levem koncu konzole):

$$u(x) = 0.00390625 \cdot \ln(6 - x) - 0.006999060426672088$$

in pomik prostega konca je tako:

$$u(4) = 0.00390625 \cdot \ln(6 - 4) - 0.006999060426672088 = -42.91454252609804 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

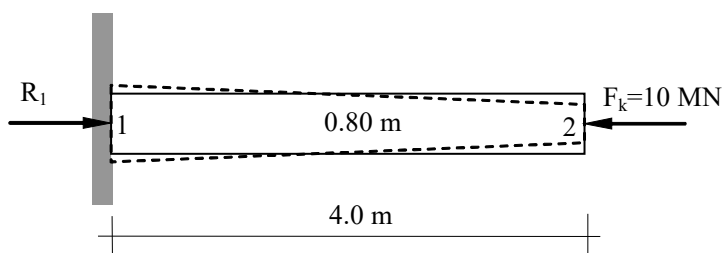
Celotna potencialna energija znaša  $-21457.271263049035 \text{ J}$ .

### 1. pristop - uporaba več standardnih končnih elementov odsekovno enakomernih višin

Če ne poznamo togostne matrike končnega elementa z linearno spreminjajočo ploščino prereza (pri analizi osnega pomika pravokotnih prerezov je vseeno, ali gre za linearno spreminjanje širine ali višine prereza), je potrebno linijski konstrukcijski element opisati z več končnimi elementi, ki bodo imeli odsekovno enakomerne prereze. Jasno je, da bodo tako dobljene zgolj približne rešitve oz. rezultati, ki pa bodo s povečevanjem števila končnih elementov konvergirali k točni rešitvi.

Da si lahko ustvarimo sliko o konvergenci, bo prikazan izračun s tremi diskretizacijami - z enim, z dvema in s štirimi (oz. petimi) končnimi elementi, kjer bomo za vsak končni element vedno izbrali povprečno vrednost dejanske višine prereza.

– Diskretizacija konzole z enim končnim elementom



Slika 20: Diskretizacija z enim končnim elementom

### Element 1

Kot višino elementa vzamemo vrednost višine na sredini konzole ( $h = 0.8$  m), kar dejansko predstavlja tudi povprečno vrednost višine.

$$L_e = 4 \text{ m}$$

$$A = 0.8 \text{ m} \cdot 0.4 \text{ m} = 0.32 \text{ m}^2$$

$$[k_1] = \frac{EA}{L_e} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{32 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.32 \text{ m}^2}{4.0 \text{ m}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.56 \cdot 10^9 & -2.56 \cdot 10^9 \\ -2.56 \cdot 10^9 & 2.56 \cdot 10^9 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Globalni obtežni vektor elementa ima obliko:

$$\{F_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ N}$$

Sistem enačb tako dobi obliko:

$$[k_1] \cdot \{U_1\} = \{F_1\}$$

$$\begin{bmatrix} 2.56 \cdot 10^9 & -2.56 \cdot 10^9 \\ -2.56 \cdot 10^9 & 2.56 \cdot 10^9 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ -10 \cdot 10^6 \end{Bmatrix}$$

Ker pa je konstrukcija v vozlišču 1 nepremično podprta, velja  $u_1=0$ , in za pridobitev primarne spremenljivke rešimo eno samo bistveno enačbo z eno neznanko (namesto da bi reševali sistem dveh enačb z dvema neznankama – eno primarno in eno sekundarno spremenljivko).

$$\begin{bmatrix} -2.56 \cdot 10^9 & -2.56 \cdot 10^9 \\ -2.56 \cdot 10^9 & 2.56 \cdot 10^9 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ -10 \cdot 10^6 \end{Bmatrix}$$

Sistem bistvenih enačb tako dobi obliko ene same enačbe:

$$2.56 \cdot 10^9 \cdot u_2 = -10 \cdot 10^6$$

Rešitev sistema je:

$$u_2 = -39.0625 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Primerjava dobljene vrednosti pomika s točno vrednostjo pokaže, da je napaka (nesprejemljivih) -8.976077337316266 %.

*Poprocesiranje: iskanje vektorja sekundarnih spremenljivk in notranjih statičnih količin*

Vektor sekundarnih spremenljivk je:

$$\{Q_1\} = [k_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\} = \begin{bmatrix} 2.56 \cdot 10^9 & -2.56 \cdot 10^9 \\ -2.56 \cdot 10^9 & 2.56 \cdot 10^9 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -39.0625 \cdot 10^{-4} \text{ m} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \cdot 10^6 \text{ N} \\ -10 \cdot 10^6 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

Prvi člen tega vektor pokaže, da je horizontalna reakcija v podpori usmerjena v desno, vozliščni vrednosti osne sile pa sta:

$$\begin{Bmatrix} N_{x,1} \\ N_{x,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10 \cdot 10^6 \text{ N} \\ -10 \cdot 10^6 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

kar (pričakovano) pokaže, da je ves končni element tlačjen z enakomerno osno silo.

*Poprocesiranje: iskanje funkcije osnega pomika z interpolacijskimi funkcijami H0*

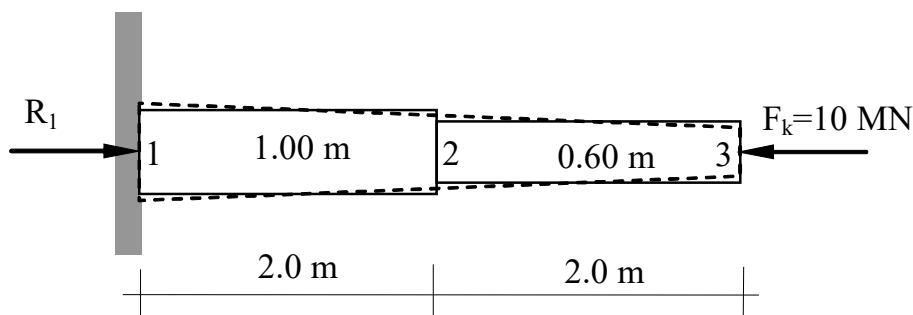
Linearno funkcijo osnega pomika vzdolž konstrukcije (v tem primeru kar enega samega elementa) dobimo s pomočjo interpolacijskih funkcij za osni pomik:

$$u_{1,N}(x) = \{\bar{N}_1, \bar{N}_2\} \cdot \{U_1\} = \left\{ 1 - \frac{x}{4}, \frac{x}{4} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{x}{4} \cdot (-39.0625 \cdot 10^{-4} \text{ m}) = -9.765625 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot x \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Pomik na sredini konstrukcije je tako enak polovici pomika na koncu.

Če za izbrano diskretizacijo izračunamo notranjo deformacijsko energijo  $U$  s pomočjo specifičnih deformacij, izračunanih iz funkcije osnega pomika, sledi vrednost 19531.25 J, kar predstavlja vrednost z napako -8.976077337316237 % (točno vrednost lahko namreč izračunamo s pomočjo osne sile), potencialna energija  $V$  sile pa znaša 39062.5 J. Celotna potencialna energija  $\Pi$  je tako - 19531.25 J (napaka prav tako znaša -8.976077337316237 %).

– Diskretizacija konzole z dvema končnima elementoma enakih dolžin



Slika 21: Diskretizacija z dvema končnima elementoma

Kot višino posameznega končnega elementa ponovno vzamemo dejansko vrednost višine na sredini končnega elementa, kar predstavlja tudi povprečno vrednost višine v posameznem elementu (1.00 m oz. 0.6 m). Za vsak element je torej potrebno ponovno izračunati povprečno višino (če bi pri obeh elementih spet upoštevali višino 0.8 m, računskega modela ne bi izboljšali).

*Element 1*

$$L_e = 2 \text{ m}$$

$$A = 1.0 \text{ m} \cdot 0.4 \text{ m} = 0.40 \text{ m}^2$$

$$[k_1] = \frac{EA}{L_e} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{32 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.40 \text{ m}^2}{2.0 \text{ m}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.64 \cdot 10^{10} & -0.64 \cdot 10^{10} \\ -0.64 \cdot 10^{10} & 0.64 \cdot 10^{10} \end{bmatrix} \quad \{F_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Element 2

$$L_e = 2 \text{ m}$$

$$A = 0.6 \text{ m} \cdot 0.4 \text{ m} = 0.24 \text{ m}^2$$

$$[k_2] = \frac{EA}{L_e} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{32 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.24 \text{ m}^2}{2.0 \text{ m}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.384 \cdot 10^{10} & -0.384 \cdot 10^{10} \\ -0.384 \cdot 10^{10} & 0.384 \cdot 10^{10} \end{bmatrix} \quad \{F_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Globalna togostna matrika konstrukcije dobi obliko:

$$[k] = [k_1] + [k_2]$$

$$[k] = \begin{bmatrix} 0.64 \cdot 10^{10} & -0.64 \cdot 10^{10} & 0 \\ -0.64 \cdot 10^{10} & 1.024 \cdot 10^{10} & -0.384 \cdot 10^{10} \\ 0 & -0.384 \cdot 10^{10} & 0.384 \cdot 10^{10} \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

globalni obtežni vektor konstrukcije, v katerem sta upoštevana tako reakcija v podpori in koncentrirana obtežna sila  $F_k$ , pa je:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ -10 \cdot 10^6 \end{Bmatrix} \text{ N}$$

Celoten sistem torej zapišemo kot:

$$[k] \cdot \{U\} = \{F\}$$

$$\begin{bmatrix} 0.64 \cdot 10^{10} & -0.64 \cdot 10^{10} & 0 \\ -0.64 \cdot 10^{10} & 1.024 \cdot 10^{10} & -0.384 \cdot 10^{10} \\ 0 & -0.384 \cdot 10^{10} & 0.384 \cdot 10^{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ -10 \cdot 10^6 \end{Bmatrix}$$

Ker pa je konstrukcija v vozlišču 1 nepremično podprta, velja  $u_1=0$ , kar sistem reducira v sistem dveh bistvenih enačb z dvema neznankama (primarnima spremenljivkama):

$$\begin{bmatrix} 1.024 \cdot 10^{10} & -0.384 \cdot 10^{10} \\ -0.384 \cdot 10^{10} & 0.384 \cdot 10^{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -10 \cdot 10^6 \end{Bmatrix}$$

Rešitvi sistema sta (najenostavneje ju v obravnavanem primeru dobimo kar s seštevanjem prve in druge vrstice, kar vodi do  $u_2$ ):

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15.625 \\ -41.66666666 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Primerjava dobljene vrednosti pomika prostega s točno vednostjo pokaže, da se je napaka zmanjšala in znaša  $-2.907815826470687\%$ .

*Poprocesiranje: iskanje vektorjev sekundarnih spremenljivk in notranjih statičnih količin*

Za prvi končni element sledi:

$$\{Q_1\} = [k_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\} = \begin{bmatrix} 0.64 \cdot 10^{10} & -0.64 \cdot 10^{10} \\ -0.64 \cdot 10^{10} & 0.64 \cdot 10^{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -15.625 \cdot 10^{-4} \text{ m} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \cdot 10^6 \text{ N} \\ -10 \cdot 10^6 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

Iz prvega člena vektorja sledi, da je horizontalna reakcija v podpori usmerjena v desno, vozliščni vrednosti osne sile pa sta:

$$\begin{Bmatrix} N_{x,1} \\ N_{x,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10 \cdot 10^6 \text{ N} \\ -10 \cdot 10^6 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

kar (pričakovano) pokaže, da je ves prvi končni element tlačен z enakomerno osno silo.

Za drugi končni element sledi:

$$\begin{aligned} \{Q_2\} &= [k_2] \cdot \{U_2\} - \{F_2\} = \begin{bmatrix} 0.384 \cdot 10^{10} & -0.384 \cdot 10^{10} \\ -0.384 \cdot 10^{10} & 0.384 \cdot 10^{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -15.625 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ -41.66666666 \cdot 10^{-4} \text{ m} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 10 \cdot 10^6 \text{ N} \\ -10 \cdot 10^6 \text{ N} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,2} \\ N_{x,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10 \cdot 10^6 \text{ N} \\ -10 \cdot 10^6 \text{ N} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

kar (pričakovano) pokaže, da je tudi ves drugi končni element tlačен z enakomerno osno silo.

Ker je osna sila očitno konstantna vzdolž posameznega končnega elementa, iskanje funkcije razporeditve osne sile znotraj posameznega končnega elementa s pomočjo interpolacijskih funkcij ni smiselno.

Poprocesiranje: iskanje funkcij osnega pomika  $z$  interpolacijskimi funkcijami H0

Približno funkcijo osnega pomika vzdolž prvega končnega elementa dobimo s pomočjo interpolacijskih funkcij za osni pomik:

$$u_{1,N}(x) = \{\bar{N}_1, \bar{N}_2\} \cdot \{U_1\} = \left\{1 - \frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right\} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = -7.8125 \cdot 10^{-4} \cdot x \quad 0 \leq x \leq 2 \text{ m}$$

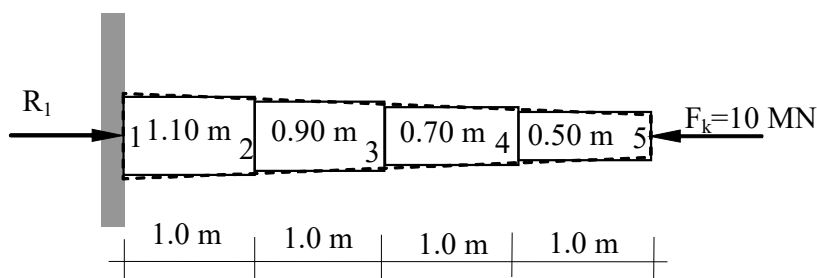
medtem ko za drugi končni element sledi globalna ( $x_A = 2 \text{ m}$ ) funkcija pomika:

$$u_{2,N}(x) = \{\bar{N}_1, \bar{N}_2\} \cdot \{U_2\} = \left\{2 - \frac{x}{2}, \frac{x}{2} - 1\right\} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \\ = 1.0416666666666664 \cdot 10^{-3} - 1.3020833333333333 \cdot 10^{-3} \cdot x \quad 2 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Ker sta funkciji pomika različni (zapisani pa sta v globalnem koordinatnem sistemu, kar omogoča enostavno medsebojno primerjavo) je to (dodatni) indikator, da gre za *približni* rešitvi.

Če za izbrano diskretizacijo izračunamo notranjo deformacijsko energijo  $U$  s pomočjo specifičnih deformacij, izračunanih iz funkcij osnega pomika, sledi vrednost 20833.333333333334 J, kar predstavlja vrednost z napako -2.90781582647068 %, potencialna energija sile pa znaša  $V = 41666.666666666667 \text{ J}$ . Celotna potencialna energija  $\Pi$  je tako -20833.333333333332 J (napaka znaša -2.90781582647068 %). Ker sta napaki energij manjši kot pri prejšnji diskretizaciji, to predstavlja jasen dokaz, da gre za boljšo rešitev. Kadar pa točne vrednosti niso znane, pa boljšo rešitev prepoznamo po manjši vrednosti celotne potencialne energije  $\Pi$ .

– Diskretizacija s štirimi končnimi elementi enakih dolžin



Slika 22: Diskretizacija s štirimi končnimi elementoma

*Element 1*

$$L_e = 1 \text{ m}$$

$$A = 1.1 \text{ m} \cdot 0.4 \text{ m} = 0.44 \text{ m}^2$$

$$[k_1] = \frac{32 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.44 \text{ m}^2}{1.0 \text{ m}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.408 \cdot 10^{10} & -1.408 \cdot 10^{10} \\ -1.408 \cdot 10^{10} & 1.408 \cdot 10^{10} \end{bmatrix} \quad \{F_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

*Element 2*

$$L_e = 1 \text{ m}$$

$$A = 0.9 \text{ m} \cdot 0.4 \text{ m} = 0.36 \text{ m}^2$$

$$[k_2] = \frac{32 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.36 \text{ m}^2}{1.0 \text{ m}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.152 \cdot 10^{10} & -1.152 \cdot 10^{10} \\ -1.152 \cdot 10^{10} & 1.152 \cdot 10^{10} \end{bmatrix} \quad \{F_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

*Element 3*

$$L_e = 1 \text{ m}$$

$$A = 0.7 \text{ m} \cdot 0.4 \text{ m} = 0.28 \text{ m}^2$$

$$[k_3] = \frac{32 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.28 \text{ m}^2}{1.0 \text{ m}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.896 \cdot 10^{10} & -0.896 \cdot 10^{10} \\ -0.896 \cdot 10^{10} & 0.896 \cdot 10^{10} \end{bmatrix} \quad \{F_3\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

*Element 4*

$$L_e = 1 \text{ m}$$

$$A = 0.5 \text{ m} \cdot 0.4 \text{ m} = 0.20 \text{ m}^2$$

$$[k_4] = \frac{32 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.20 \text{ m}^2}{1.0 \text{ m}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.64 \cdot 10^{10} & -0.64 \cdot 10^{10} \\ -0.64 \cdot 10^{10} & 0.64 \cdot 10^{10} \end{bmatrix} \quad \{F_4\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Globalna togostna matrika konstrukcije ima sedaj obliko:

$$[k] = \begin{bmatrix} 1.408 \cdot 10^{10} & -1.408 \cdot 10^{10} & 0 & 0 & 0 \\ -1.408 \cdot 10^{10} & 2.56 \cdot 10^{10} & -1.152 \cdot 10^{10} & 0 & 0 \\ 0 & -1.152 \cdot 10^{10} & 2.048 \cdot 10^{10} & -0.896 \cdot 10^{10} & 0 \\ 0 & 0 & -0.896 \cdot 10^{10} & 1.536 \cdot 10^{10} & -0.64 \cdot 10^{10} \\ 0 & 0 & 0 & -0.64 \cdot 10^{10} & 0.64 \cdot 10^{10} \end{bmatrix}$$

Globalni obtežni vektor pa je:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \cdot 10^6 \end{Bmatrix}$$

Celoten sistem enačb torej formalno zapišemo kot:

$$[k] \cdot \{U\} = \{F\}$$

$$\begin{bmatrix} -1.408 \cdot 10^{10} & -1.408 \cdot 10^{10} & 0 & 0 & 0 \\ -1.408 \cdot 10^{10} & 2.56 \cdot 10^{10} & -1.152 \cdot 10^{10} & 0 & 0 \\ 0 & -1.152 \cdot 10^{10} & 2.048 \cdot 10^{10} & -0.896 \cdot 10^{10} & 0 \\ 0 & 0 & -0.896 \cdot 10^{10} & 1.536 \cdot 10^{10} & -0.64 \cdot 10^{10} \\ 0 & 0 & 0 & -0.64 \cdot 10^{10} & 0.64 \cdot 10^{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \cdot 10^6 \end{Bmatrix}$$

Ker pa je konstrukcija v vozlišču 1 nepremično podprta, velja  $u_1=0$ , kar sistem reducira v sistem štirih bistvenih enačb s štirimi neznankami.

$$\begin{bmatrix} 2.56 & -1.152 & 0 & 0 \\ -1.152 & 2.048 & -0.896 & 0 \\ 0 & -0.896 & 1.536 & -0.64 \\ 0 & 0 & -0.64 & 0.64 \end{bmatrix} \cdot 10^{10} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \cdot 10^6 \end{Bmatrix}$$

*Prikaži reševanja sistema linearnih enačb z Gaussovo eliminacijo*

Za reševanje sistema linearnih enačb je mogoče uporabiti različne matematične pristope, eden izmed najučinkovitejših pa je Gaussova eliminacija. Ideja te metode je pretvorba sistema (globalne togostne matrike) v trikotno obliko, kjer bodo členi togostne matrike nastopali izključno nad (ali pod) glavno diagonalo in seveda na njej. Iz matematične teorije je znano, da množenje posameznih enačb z od nič različnimi števili, kot tudi medsebojno seštevanje ali odštevanje enačb ne vpliva na rezultate. To dejstvo uporablja Gaussova eliminacija za pretvorbo sistema v (zgornjo ali spodnjo) trikotno obliko. V obravnavanem primeru, ko imamo t. i. tridiagonalno obliko, je tak način reševanja s stališča računskega napora bistveno manj računsko zahteven kot formalno invertiranje togostne matrike.

Postopek poteka tako, da v vseh vrsticah, razen prvi, s pomočjo sistematičnega množenja vrstic in nato seštevanjem oz. odštevanjem vrstic sistema (torej tudi členov obtežnega vektorja), najprej eliminiramo člene v prvem stolpcu.

V obravnavanem primeru bomo poiskali trikotno obliko nad glavno diagonalo. Začnemo tako, da npr. vse člene druge vrstice (in tudi člen obtežnega vektorja, ki pripada drugi vrstici) pomnožimo s kvocientom prvih členov prve in druge vrstice, torej z  $2.56/(-1.152) = -2.222222222$ ,

$$\begin{bmatrix} 2.56 & -1.152 & 0 & 0 \\ 2.56 & -4.551111111 & 1.991111111 & 0 \\ 0 & -0.896 & 1.536 & -0.64 \\ 0 & 0 & -0.64 & 0.64 \end{bmatrix} \cdot 10^{10} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \cdot 10^6 \end{Bmatrix}$$

ter nato (pomnoženo) drugo vrstico odštejemo od prve, rezultate pa zapišemo v drugo vrstico:

$$\begin{bmatrix} 2.56 & -1.152 & 0 & 0 \\ 0 & 3.399111111 & -1.991111111 & 0 \\ 0 & -0.896 & 1.536 & -0.64 \\ 0 & 0 & -0.64 & 0.64 \end{bmatrix} \cdot 10^{10} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \cdot 10^6 \end{Bmatrix}$$

Ker sta prva člena v tretji in četrti vrstici že (slučajno) enaka nič, postopek eliminacije nadaljujemo oz. ponovimo na drugem stolpcu. Ker želimo doseči trikotno obliko nad diagonalo, z eliminacijo začnemo pri drugem členu tretje vrstice. Člene tretje vrstice (in tudi člen obtežnega vektorja v tretji vrstici) zato pomnožimo s količnikom drugih členov druge in tretje vrstice, torej  $3.399111111/(-0.896) = -3.793650794$ , ter tako po odštevanju členov tretje vrstice od druge dobimo (rezultate zapisujemo v tretjo vrstico) obliko:

$$\begin{bmatrix} 2.56 & -1.152 & 0 & 0 \\ 0 & 3.3991111 & -1.991111111 & 0 \\ 0 & 0 & 3.835936509 & -2.427936508 \\ 0 & 0 & -0.64 & 0.64 \end{bmatrix} \cdot 10^{10} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \cdot 10^6 \end{Bmatrix}$$

Tudi sedaj je (slučajno) eliminiran ves drugi stolpec pod glavno diagonalo. Za eliminacijo preostalega člena (tretjega člena četrte vrstice), zadnjo enačbo pomnožimo s količnikom tretjih členov tretje in četrte vrstice  $3.835936509/(-0.64) = -5.993650795$  in po odštevanju

členov četrte vrstice od tretje dobimo novo četrto vrstico in pripadajoči člen obtežnega vektorja:

$$\begin{bmatrix} 2.56 & -1.152 & 0 & 0 \\ 0 & 3.39911111 & -1.991111111 & 0 \\ 0 & 0 & 3.835936509 & -2.427936508 \\ 0 & 0 & 0 & 1.408 \end{bmatrix} \cdot 10^{10} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -59.93650795 \cdot 10^6 \end{Bmatrix}$$

Rešitve sistema trikotne oblike sedaj dobimo z izračunom od spodnje vrstice navzgor. Iz spodnje vrstice oz. enačbe, ki vsebuje eno samo neznanko, torej  $u_5$ , tako sledi:

$$1.408 \cdot 10^{10} \cdot u_5 = -59.93650795 \cdot 10^6 \rightarrow u_5 = \frac{-59.93650795 \cdot 10^6}{1.408 \cdot 10^{10}} = -4.256854258 \cdot 10^{-3}$$

Iz predzadnje enačbe, ki po upoštevanju sedaj že znane vrednosti  $u_5$  vsebuje samo še eno neznanko ( $u_4$ ), nato sledi:

$$3.835936509 \cdot u_4 - 2.427936508 \cdot u_5 = 0 \rightarrow u_4 = \frac{2.427936508}{3.835936509} \cdot u_5 = \frac{2.427936508}{3.835936509} \cdot (-4.256854258 \cdot 10^{-3}) = -2.694354257 \cdot 10^{-3}$$

Pomik  $u_3$  dobimo iz druge enačbe:

$$3.39911111 \cdot u_3 - 1.991111111 \cdot u_4 = 0 \rightarrow u_3 = \frac{1.991111111}{3.39911111} \cdot u_4 = \frac{1.991111111}{3.39911111} \cdot (-2.694354257 \cdot 10^{-3}) = -1.578282828 \cdot 10^{-3}$$

Podobno dobimo še zadnji pomik, torej  $u_2$ :

$$2.56 \cdot u_2 - 1.152 \cdot u_3 = 0 \rightarrow u_2 = \frac{1.152}{2.56} \cdot u_3 = \frac{1.152}{2.56} \cdot (-1.578282828 \cdot 10^{-3}) = -0.7102272727 \cdot 10^{-3}$$

Rešitve sistema so tako:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7.102272727 \\ -15.78282828 \\ -26.94354257 \\ -42.56854257 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Primerjava dobljenih vrednosti pomika s točno izračunanimi rešitvami obravnavanega primera pokaže, da je prišlo do praktično neznatnega povečanja pomika na sredini (+1.01 %), in nekoliko večjega na prostem koncu (+2.164 %), kjer napaka glede na točno vrednost znaša samo še -0.8062533984722411 %.

*Poprocesiranje: iskanje funkcij osnega pomika  $z$  interpolacijskimi funkcijami H0*

Pomik vzdolž prvega končnega elementa dobimo s pomočjo interpolacijskih funkcij za osni pomik:

$$\mathbf{u}_{1,N}(\mathbf{x}) = \{\bar{N}_1, \bar{N}_2\} \cdot \{U_1\} = \{1-x, x\} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = -7.102272727272726 \cdot 10^{-4} \cdot x \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ m}$$

medtem ko za drugi končni element sledi globalna ( $x_A = 1 \text{ m}$ ) funkcija pomika:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{2,N}(\mathbf{x}) &= \{\bar{N}_1, \bar{N}_2\} \cdot \{U_2\} = \{2-x, x-1\} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \\ &= 1.5782828282828276 \cdot 10^{-4} - 8.680555555555554 \cdot 10^{-4} \cdot x \quad 1 \leq x \leq 2 \text{ m} \end{aligned}$$

Za tretji končni element sledi:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{3,N}(\mathbf{x}) &= \{\bar{N}_1, \bar{N}_2\} \cdot \{U_3\} = \{3-x, x-2\} \cdot \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \\ &= 6.538600288600298 \cdot 10^{-4} - 1.116071428571429 \cdot 10^{-3} \cdot x \quad 2 \leq x \leq 3 \text{ m} \end{aligned}$$

Za četrti končni element dobimo:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{4,N}(\mathbf{x}) &= \{\bar{N}_1, \bar{N}_2\} \cdot \{U_4\} = \{4-x, x-3\} \cdot \begin{Bmatrix} u_4 \\ u_5 \end{Bmatrix} \\ &= 1.993145743145741 \cdot 10^{-3} - 1.5625 \cdot 10^{-3} \cdot x \quad 3 \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

Vse funkcije so zapisane v globalnem koordinatnem sistemu, kar omogoča njihovo enostavno medsebojno primerjavo (v primeru zahtevnejše konstrukcije je tak zapis funkcij sicer vedno mogoč, a pogosto nepotrebno zahteven). Ker so vse izračunane funkcije pomika za en sam konstrukcijski element, za katerega velja ena sama diferencialna enačba, medsebojno različne, je to jasen indikator, da gre za *približne* rešitve.

Če za izbrano diskretizacijo izračunamo notranjo deformacijsko energijo  $U$  s pomočjo specifičnih deformacij, izračunanih iz funkcij osnega pomika, sledi vrednost 21284.27128427128 J, kar predstavlja vrednost z napako -0.8062533984722633 %, potencialna energija sile  $V$  pa znaša 42568.542568542565 J. Celotna potencialna energija  $\Pi$  je tako -21284.271284271286 J (napaka znaša samo še -0.8062533984722295%). Ker je celotna potencialna energije  $\Pi$  manjša kot pri prejšnji diskretizaciji, je ta rešitev očitno boljša.

*Poprocesiranje: iskanje vektorjev sekundarnih spremenljivk in notranjih statičnih količin*

Za prvi končni element sledi:

$$\{Q_1\} = [k_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\} = \begin{bmatrix} 1.408 \cdot 10^{10} & -1.408 \cdot 10^{10} \\ -1.408 \cdot 10^{10} & 1.408 \cdot 10^{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -7.102272727 \cdot 10^{-4} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \cdot 10^6 \text{ N} \\ -10 \cdot 10^6 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

Tako je horizontalna reakcija v podpori usmerjena v desno, vzdolžni osni sili elementa pa sta:

$$\begin{Bmatrix} N_{x,1} \\ N_{x,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10 \cdot 10^6 \text{ N} \\ -10 \cdot 10^6 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

kar pokaže, da je ves prvi končni element tlačjen z enakomerno osno silo. Enako sledi za vse ostale končne elemente.

Neznano reakcijo lahko poiščemo tudi iz prve enačbe celotnih enačb konstrukcije, ki ni bila uporabljena za izračun primarnih spremenljivk:

$$1.408 \cdot 10^{10} \cdot u_1 - 1.408 \cdot 10^{10} \cdot u_2 = R_1 \\ R_1 = 1.408 \cdot 10^{10} \cdot 0 - 1.408 \cdot 10^{10} \cdot (-7.102272727 \cdot 10^{-4}) = 10 \cdot 10^6$$

Reakcija v podpori je torej usmerjena v desno. Alternativno jo lahko neposredno odčitamo iz prvega člena vektorja sekundarnih spremenljivk, ali pa izračunamo s pomočjo notranjih statičnih količin.

*Poprocesiranje: iskanje enovite funkcije osnega pomika  $z$  (Lagrangeovo) interpolacijo*

Ker je sedaj znanih pet diskretnih vrednosti osnega pomika, lahko izvedemo Lagrangeovo (ali Newtonovo) interpolacijo vseh točk, in tako dobimo enovito funkcijo osnega pomika:

$$u_{i,L}(x) = -6.343193843193849 \cdot 10^{-4} \cdot x - 8.342352092352025 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 + \\ 1.2025012025011718 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 - 4.509379509379469 \cdot 10^{-6} \cdot x^4 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Zanjo sledi notranja deformacijska energija  $U = 21114.205735933203 \text{ J}$ , potencialna energija sile  $V$  pa znaša  $42568.542568542565 \text{ J}$ . Celotna potencialna energija  $\Pi$  je tako  $-21454.33683260937 \text{ J}$  (napaka znaša samo še  $-0.01367569251318473 \%$ ).

– *Diskretizacija s petimi končnimi elementi enakih dolžin*

Pri diskretizaciji s petimi končnimi elementi enakih dolžin sledijo vrednosti pomika vozlišč:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5.580357142857146 \\ -12.090773809523816 \\ -19.903273809523817 \\ -29.66889880952382 \\ -42.68973214285716 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Napaka na prostem koncu glede na točno vrednost se je ponovno zmanjšala in znaša  $-0.5238559472098707 \%$ .

Če za izbrano diskretizacijo izračunamo notranjo deformacijsko energijo  $U$  s pomočjo specifičnih deformacij, izračunanih iz funkcij osnega pomika, sledi vrednost  $21344.866071428605 \text{ J}$ , kar predstavlja vrednost z napako  $-0.523855947209787 \%$ , potencialna energija  $V$  sile pa znaša  $42689.732142857174 \text{ J}$ . Celotna potencialna energija  $\Pi$  je tako  $-21284.271284271286 \text{ J}$  (napaka znaša samo še  $-0.5238559472099567 \%$ ). Ker je celotna potencialna energija  $\Pi$  manjša kot pri prejšnji diskretizaciji, je ta rešitev še boljša.

Spodnja preglednica primerja vrednosti pomika na prostem koncu in pripadajoče napake ter celotne potencialne energije za različne modele.

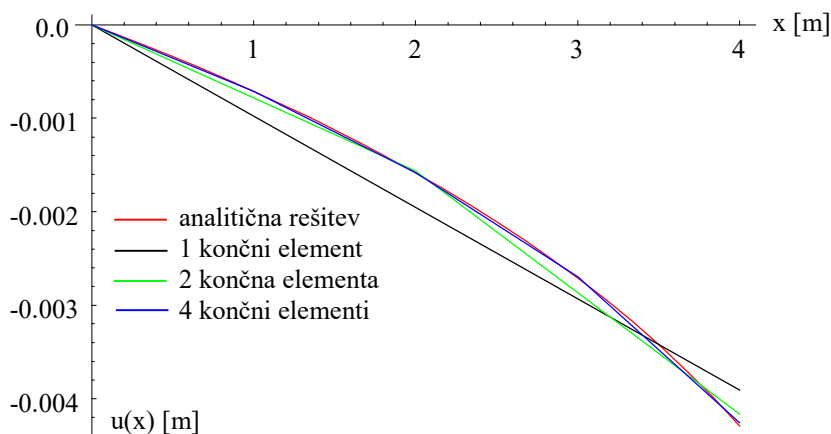
Preglednica 4: Primerjava vrednosti pomika na prostem koncu, napake ter celotne potencialne energije

Število KE	Pomik prostega konca [mm]	Napaka	$\Pi$ [J]
1	-3.90625	-8.976077337316266 %	-19531.25
2	-4.1666666666666675	-2.907815826470687 %	-20833.333333333332
3	-4.2317708333333334	-1.390750448759297 %	-21158.854166666657
4	-4.256854256854257	-0.8062533984722411 %	-21284.271284271286
5	-4.268973214285717	-0.5238559472098707 %	-21344.86607142857
6	-4.275707952178539	-0.36692224836579557 %	-21378.53976089271
10	-4.285711304721153	-0.13382288498494782 %	-21428.556523605752
20	-4.290010291656166	-0.03364735748402439 %	-21450.051458280755

Iz preglednice je razvidno, da se rešitve za pomik prostega konca približujejo točni vrednosti, ki znaša  $-4.291454252609805$  mm. Čeprav točna vrednost običajno ni znana, zgornja preglednica vseeno potrjuje, da lahko z ustrežno diskretizacijo dobimo odlične inženirsko točne vrednosti.

#### Primerjava funkcij osnega pomika za prve tri diskretizacije

Vse izračunane funkcije osnega pomika so prikazane na sliki 23.



Slika 23: Primerjava upogibnic različnih modelov in pristopov

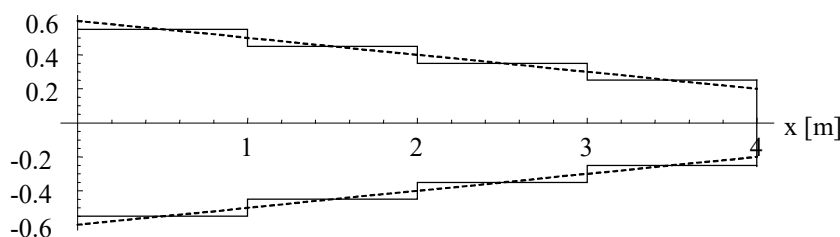
Iz slike je jasno razvidno, da se s povečevanjem števila končnih elementov povečuje ujemanje približnih rešitev s točno rešitvijo.

Ker so funkcije pomika znotraj posameznega končnega elementa linearne funkcije, vodijo njihovi odvodi, ki predstavljajo specifične deformacije, do konstantnih vrednosti (kar pa predstavlja nekvalitetne približke).

## 2. pristop – uporaba stopničastega končnega elementa

### 1. model - uporaba stopničastega končnega elementa s štirimi enako dolgimi odseki

Izračun bomo izvedli z diskretizacijo z enim končnim elementom s štirimi stopničastimi odseki enakih dolžin, za katere imamo že znane vse parametre (dolžine odsekov, povprečne vrednosti višine prereza ter osne togosti) iz predhodne analize.



Slika 24: Diskretizacija z enim stopničastim končnim elementom s štirimi enako dolgimi odseki

Tako sledi koeficient:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \sum_{i=1}^{N_4} \frac{\bar{L}_i}{EA_i} = \sum_{i=1}^{N_4} \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_{i-1}}{EA_i} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_0}{EA_1} + \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{EA_2} + \frac{\bar{x}_3 - \bar{x}_2}{EA_3} + \frac{\bar{x}_4 - \bar{x}_3}{EA_4} \\ &= \frac{1.0 \text{ m}}{32 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.44 \text{ m}^2} + \frac{1.0 \text{ m}}{32 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.36 \text{ m}^2} + \frac{1.0 \text{ m}}{32 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.28 \text{ m}^2} + \frac{1.0 \text{ m}}{32 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.20 \text{ m}^2} \\ &= 4.256854256854257 \cdot 10^{-10}\end{aligned}$$

Togostna matrika edinega stopničastega elementa, ki ima samo dve prostostni stopnji, ima obliko:

$$[k_1] = \frac{1}{\beta_1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

kar vodi do:

$$[k_1] = \frac{1}{4.256854256854257 \cdot 10^{-10}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3491525423728814 & -2.3491525423728814 \\ -2.3491525423728814 & 2.3491525423728814 \end{bmatrix} \cdot 10^9$$

Obtežni vektor pa je:

$$\{F_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -10 \cdot 10^6 \end{Bmatrix}$$

Za pridobitev neznanega pomika prostega konca tako rešimo eno bistveno enačbo z eno neznanko

$$2.3491525423728814 \cdot 10^9 \cdot u_2 = -10 \cdot 10^6$$

kar vodi do vredosti:

$$u_2 = -4.256854256854257 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

kar je identičen rezultat, kot je bil dobljen s štirimi dejanskimi končnimi elementi, a z bistveno več računskega napora. Dobljena vrednost še vedno predstavlja približno vrednost (z -0.8062533984722212 % napake), saj smo dobili točni rezultat nadomestnega približnega modela.

*Poprocesiranje: iskanje vektorja sekundarnih spremenljivk in notranjih statičnih količin*

Za edini končni element sledi:

$$\begin{aligned} \{Q_1\} &= [k_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\} \\ &= \begin{bmatrix} 2.34915254237 \cdot 10^9 & -2.34915254237 \cdot 10^9 \\ -2.34915254237 \cdot 10^9 & 2.34915254237 \cdot 10^9 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -4.256854256854257 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 10 \cdot 10^6 \text{ N} \\ -10 \cdot 10^6 \text{ N} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Tako je horizontalna reakcija v podpori usmerjena v desno, vzdolžni osni sili pa sta:

$$\begin{Bmatrix} N_{x,1} \\ N_{x,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10 \cdot 10^6 \text{ N} \\ -10 \cdot 10^6 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

kar pokaže, da je (edini) končni element tlačjen z enakomerno osno silo.

*Poprocesiranje: iskanje približne enovite funkcije osnega pomika*

Enovito približno funkcijo pomika vzdolž konstrukcije (v tem primeru kar enega samega elementa) dobimo s pomočjo standardnih linearnih interpolacijskih funkcij H0 za osni pomik:

$$u_1(x) = \{\bar{N}_1, \bar{N}_2\} \cdot \{U_1\} = \left\{1 - \frac{x}{4}, \frac{x}{4}\right\} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = -10.642135642135642 \cdot 10^{-4} \cdot x \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

kar predstavlja dokaj slabo porazdelitev osnega pomika.

*Poprocesiranje: iskanje funkcij osnega pomika z zaporednim reševanjem posameznih diferencialnih enačb odsekov*

Boljšo (oz. točno za izbrani model) rešitev za funkcije osnega pomika dobimo, če zaporedoma (po odsekih) rešujemo samostojne diferencialne enačbe:

$$\frac{d}{dx} \left( E \cdot A(x) \cdot \frac{du(x)}{dx} \right) = -q_x(x) \quad x_A \leq x \leq x_B$$

Ker pa je osna togost odsekovno konstantna, zvezne osne obtežbe ni, lahko namesto diferencialne enačbe 2. reda rešujemo diferencialno enačbo 1. reda (pri čemer je osna sila  $N_x$  že znana):

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{N_x}{A \cdot E} \quad x_A \leq x \leq x_B$$

in ima splošno rešitev:

$$u(x) = \frac{N_x}{A \cdot E} \cdot x + C_1 \quad x_A \leq x \leq x_B$$

Za prvi odsek tako velja:

$$u_1(x) = \frac{-10 \cdot 10^6 \text{ N}}{32 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.44 \text{ m}^2} \cdot x + C_1 = -7.102272727272727 \cdot 10^{-4} \cdot x + C_1 \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ m}$$

Integracijsko konstanto določimo iz robnega pogoja pomika v levem, vpetem delu:

$$u_1(0) = -7.102272727272727 \cdot 10^{-4} \cdot 0 + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

in funkcija pomika za prvi odsek je:

$$u_1(x) = -7.102272727272727 \cdot 10^{-4} \cdot x \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ m}$$

Za drugi odsek moramo rešiti pripadajočo diferencialno enačbo:

$$u_2(x) = \frac{-10 \cdot 10^6 \text{ N}}{32 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.36 \text{ m}^2} \cdot x + C_2 = -8.68055555555556 \cdot 10^{-4} \cdot x + C_2 \quad 1 \text{ m} \leq x \leq 2 \text{ m}$$

Integracijsko konstanto določimo iz robnega pogoja pomika (oz. pogoja zveznosti) na začetku drugega odseka, ki je enak pomiku na desnem koncu prvega odseka:

$$u_2(1 \text{ m}) = u_1(1 \text{ m}) = -7.10227272727272 \cdot 10^{-4} \text{ m} \rightarrow C_2 = 1.57828282828298 \cdot 10^{-4}$$

in funkcija pomika za drugi odsek je:

$$u_2(x) = -8.68055555555556 \cdot 10^{-4} \cdot x + 1.57828282828298 \cdot 10^{-4} \quad 1 \text{ m} \leq x \leq 2 \text{ m}$$

Za tretji odsek moramo rešiti novo diferencialno enačbo:

$$u_3(x) = \frac{-10 \cdot 10^6 \text{ N}}{32 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.28 \text{ m}^2} \cdot x + C_3 = -11.160714285714285 \cdot 10^{-4} \cdot x + C_3 \quad 2 \text{ m} \leq x \leq 3 \text{ m}$$

Integracijsko konstanto določimo iz robnega pogoja pomika (oz. pogoja zveznosti) na začetku tretjega odseka, torej enakosti pomika na začetku tretjega odseka, ki je enak pomiku na desnem koncu drugega odseka:

$$u_3(2 \text{ m}) = u_2(2 \text{ m}) = -15.7828282828283 \cdot 10^{-4} \text{ m} \rightarrow C_3 = 6.538600288600288 \cdot 10^{-4}$$

in funkcija pomika za tretji odsek je:

$$u_3(x) = -11.160714285714285 \cdot 10^{-4} \cdot x + 6.538600288600288 \cdot 10^{-4} \quad 2 \text{ m} \leq x \leq 3 \text{ m}$$

Za četrti, zadnji odsek moramo rešiti diferencialno enačbo:

$$u_4(x) = \frac{-10 \cdot 10^6 \text{ N}}{32 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.20 \text{ m}^2} \cdot x + C_4 = -15.625 \cdot 10^{-4} \cdot x + C_4 \quad 3 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Integracijsko konstanto pa lahko sedaj enakovredno določimo iz robnega pogoja pomika na začetku (oz. pogoja zveznosti) ali pa na koncu četrtega odseka. Uporabimo npr. informacijo na začetku odseka, informacijo na koncu pa lahko nato uporabimo za

neobvezno kontrolo:

$$u_4(3 \text{ m}) = u_3(3 \text{ m}) = -26.94354256854257 \cdot 10^{-4} \text{ m} \rightarrow C_4 = 19.931457431457437 \cdot 10^{-4}$$

in funkcija pomika za četrti odsek je:

$$u_4(x) = -15.625 \cdot 10^{-4} \cdot x + 19.931457431457437 \cdot 10^{-4} \quad 3 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Za kontrolo lahko izračunamo še enkrat pomik na prostem koncu:

$$u_4(4) = -15.625 \cdot 10^{-4} \cdot 4 + 19.931457431457437 \cdot 10^{-4} = -42.56854256854257 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

*Poprocesiranje – iskanje funkcij osnega pomika z uporabo izpeljanih analitičnih izrazov*

Funkcije pomika vzdolž odsekov konstrukcije lahko najhitreje izračunamo z uporabo analitičnih izrazov v obliki (v odsotnosti zvezne osne obtežbe):

$$u_i(x) = B_i + C_i \cdot x \quad \bar{x}_{i-1} \leq x \leq \bar{x}_i$$

Koeficienta za prvi odsek sta:

$$C_1 = \frac{N_x(0)}{EA_1} = \frac{-10 \cdot 10^6}{1.408 \cdot 10^{10}} = -7.102272727272729 \cdot 10^{-4}$$

$$B_1 = u_1(0) = 0$$

in tako sledi:

$$u_1(x) = -7.10227272727272 \cdot 10^{-4} \cdot x \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ m}$$

Ostale koeficiente izračunamo kot:

$$C_{i+1} = \frac{EA_i}{EA_{i+1}} \cdot C_i \quad i > 1$$

$$B_{i+1} = B_i + (C_i - C_{i+1}) \cdot \bar{x}_i \quad i > 1$$

in pripadajoče funkcije osnega pomika po odsekih so tako:

i	$C_i$	$B_i$	$u_i(x)$
2	$-8.68055555555556 \cdot 10^{-4}$	$1.57828282828283 \cdot 10^{-4}$	$1.57828283 \cdot 10^{-4} - 8.68055556 \cdot 10^{-4} \cdot x$
3	$-11.1607142857143 \cdot 10^{-4}$	$6.53860028860029 \cdot 10^{-4}$	$6.53860029 \cdot 10^{-4} - 11.16071429 \cdot 10^{-4} \cdot x$
4	$-15.625 \cdot 10^{-4}$	$19.93145743145744 \cdot 10^{-4}$	$19.93145743 \cdot 10^{-4} - 15.625 \cdot 10^{-4} \cdot x$

Vrednosti pomika na koncih posameznih odsekov so:

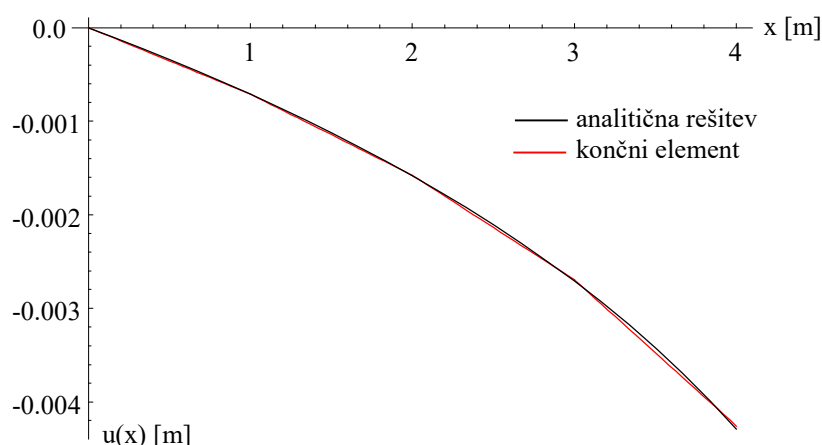
$$u_1(1 \text{ m}) = -7.10227272727272 \cdot 10^{-4} \cdot 1 = -7.10227272727272 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$u_2(2 \text{ m}) = 1.57828283 \cdot 10^{-4} - 8.68055556 \cdot 10^{-4} \cdot 2 = -15.782828282828285 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$u_3(3 \text{ m}) = 6.53860029 \cdot 10^{-4} - 11.16071429 \cdot 10^{-4} \cdot 3 = -26.94354256854257 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$u_4(4 \text{ m}) = 19.93145743 \cdot 10^{-4} - 15.625 \cdot 10^{-4} \cdot 4 = -42.568542568542575 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Grafi dobljenih (odsekovno linearnih) funkcij rešitev izkazujejo dobro ujemanje z analitično (zvezno) rešitvijo.



Slika 25: Primerjava funkcije upogibnice

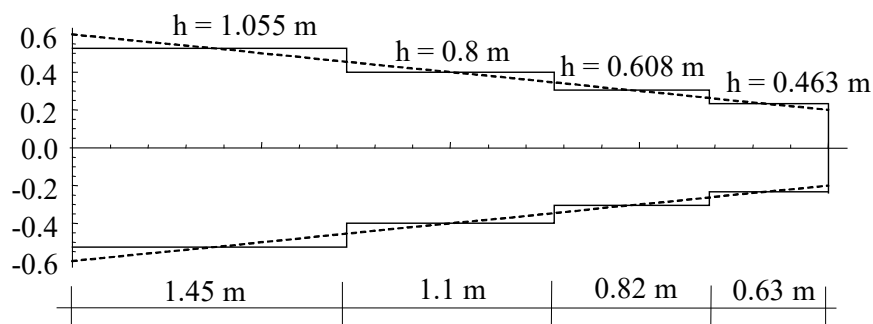
Če za izračunane funkcije pomika izračunamo deformacijsko energijo  $U$  s pomočjo specifičnih deformacij, sledi vrednost  $21284.27128427128 \text{ J}$  (z napako  $-0.8062533984722633 \%$ ), že znana iz diskretizacije s štirimi enako dolgimi končnimi elementi konstatnih prerezov. Enaka vrednost iz tega modela sledi tudi za potencialno energijo  $V$  sile ( $42568.542568542565 \text{ J}$ ).

*1.b model - uporaba stopničastega končnega elementa s štirimi različno dolgimi odseki*

Diskretizacija s končnimi elementi enakih dolžin je najobičajnejša izbira. Kadar pa je na razpolago okvirna informacija o obliki upogibnice, je mogoče kvaliteto rešitev brez posebnega dodatnega računskega napora izboljšati z ustrežnejšo izbiro dolžin končnih elementov. Iz slike zgoraj je razvidno, da ukrivljenost funkcije osnega pomika narašča proti prostemu koncu. Če tako izračun ponovimo z diskretizacijo z enim končnim elementom s štirimi stopničastimi odseki dolžin 2 m, 0.8 m, 0.7 m in 0.5 m, sledi vrednost pomika na prostem koncu  $-0.004258040935672516$  m (z napako  $-0.7786012612616908$  %).

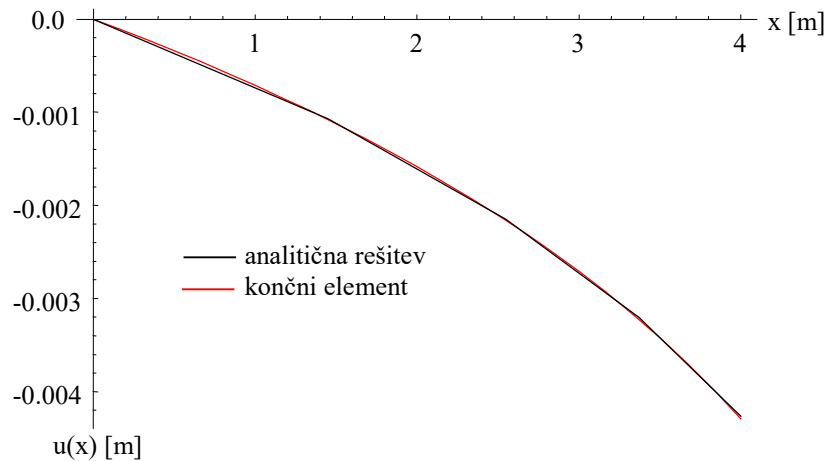
Če za izračunane nove funkcije osnega pomika izračunamo deformacijsko energijo  $U$  s pomočjo specifičnih deformacij, sledi vrednost  $21290.20467836259$  J (z napako  $-0.7786012612616618$  %), ter vrednost  $42580.40935672516$  J za potencialno energijo  $V$  sile ( $42568.542568542565$  J). Celotna potencialna energija je tako  $-21290.204678362574$  J, njena napaka pa znaša  $-0.7786012612617297$  %.

Rezultate lahko še nekoliko izboljšamo z drugačno izbiro dolžine odsekov, kot prikazuje slika 26. Pri ponovnem izračunu z diskretizacijo z enim končnim elementom s štirimi stopničastimi odseki dolžin 1.45 m, 1.1 m, 0.82 m in 0.63 m (vrednosti so bile dobljene s poskušanjem), sledi vrednost pomika na prostem koncu  $-0.004264674170447757$  m (z napako  $-0.6240328006703473$  %).



**Slika 26:** Diskretizacija z enim stopničastim končnim elementom s štirimi različno dolgimi odseki

Pripadajoča celotna potencialna energija  $\Pi$  je  $-21323.370852238782$  J, njena napaka pa znaša  $-0.6240328006703627$  % (pri uporabi modela s petimi enako dolgimi stopnicami napaka znaša  $-0.5238559472099567$  %), ujemanje funkcij pomika s točno rešitvijo pa je zelo dobro, slika 27.

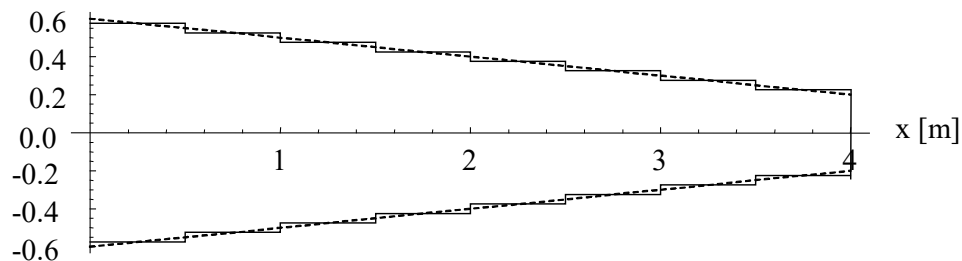


Slika 27: Primerjava upogibnic

Ker pa je bil za vsako analizo, s katerimi se je sicer zmanjšala napaka, porabljen dodaten računski napor, stihjsko iskanje ustreznih dolžin ni smotrno in je zato primernejše (in učinkovitejše) računski napor vložiti v večji računski model.

2. model – uporaba stopničastega končnega elementa z osmimi enako dolgimi odseki

Kvaliteto rezultatov pa običajno izboljšujemo z dodajanjem novih odsekov.



Slika 28: Diskretizacija z enim stopničastim končnim elementom z osmimi enako dolgimi odseki

Izračun bomo zato izvedli še z diskretizacijo z osmimi stopničastimi odseki enakih dolžin in tako sledi ustrezna vrednost koeficienta:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_0}{EA_1} + \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{EA_2} + \frac{\bar{x}_3 - \bar{x}_2}{EA_3} + \frac{\bar{x}_4 - \bar{x}_3}{EA_4} + \frac{\bar{x}_5 - \bar{x}_4}{EA_5} + \frac{\bar{x}_6 - \bar{x}_5}{EA_6} + \frac{\bar{x}_7 - \bar{x}_6}{EA_7} + \frac{\bar{x}_8 - \bar{x}_7}{EA_8} \\ &= \frac{0.5 \text{ m}}{32 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.46 \text{ m}^2} + \frac{0.5 \text{ m}}{32 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.42 \text{ m}^2} + \frac{0.5 \text{ m}}{32 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.38 \text{ m}^2} + \frac{0.5 \text{ m}}{32 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.34 \text{ m}^2} + \\ &\quad \frac{0.5 \text{ m}}{32 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.30 \text{ m}^2} + \frac{0.5 \text{ m}}{32 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.26 \text{ m}^2} + \frac{0.5 \text{ m}}{32 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.22 \text{ m}^2} + \frac{0.5 \text{ m}}{32 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.18 \text{ m}^2} \\ &= 4.282518456700716 \cdot 10^{-10} \end{aligned}$$

Togostna matrika edinega stopničastega elementa je:

$$[k_1] = \frac{1}{4.282518456700716 \cdot 10^{-10}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.335074583123706 & -2.335074583123706 \\ -2.335074583123706 & 2.335074583123706 \end{bmatrix} \cdot 10^9$$

Za pridobitev neznanega pomika prostega konca ponovno rešimo eno bistveno enačbo z eno neznanko.

$$2.335074583123706 \cdot 10^9 \cdot u_2 = -10 \cdot 10^6$$

kar vodi do:

$$u_2 = -4.282518456700715 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

kar predstavlja vrednost z -0.20822302611414925 % napake.

*Poprocesiranje: iskanje vektorja sekundarnih spremenljivk in notranjih statičnih količin*

Za edini končni element sledi:

$$\begin{aligned} \{Q_1\} &= [k_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\} \\ &= \begin{bmatrix} 2.335074583123706 & -2.335074583123706 \\ -2.335074583123706 & 2.335074583123706 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -4.282518456700715 \cdot 10^{-3} \text{ m} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 10 \cdot 10^6 \text{ N} \\ -10 \cdot 10^6 \text{ N} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Tako je horizontalna reakcija v podpori usmerjena v desno, vozliščni vrednosti osne sile pa sta:

$$\begin{Bmatrix} N_{x,1} \\ N_{x,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10 \cdot 10^6 \text{ N} \\ -10 \cdot 10^6 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

kar pokaže, da je (edini) končni element tlačен z enakomerno osno silo.

Poprocesiranje: iskanje funkcij osnega pomika  $z$  uporabo izrazov

Funkcije pomika vzdolž odsekov konstrukcije lahko najhitreje izračunamo z uporabo analitičnih izrazov, kjer sta:

$$C_1 = \frac{N_x(0)}{EA_1} = \frac{-1 \cdot 10^6}{1.472 \cdot 10^{10}} = -6.793478260869566 \cdot 10^{-4}$$

$$B_1 = u_1(0) = 0$$

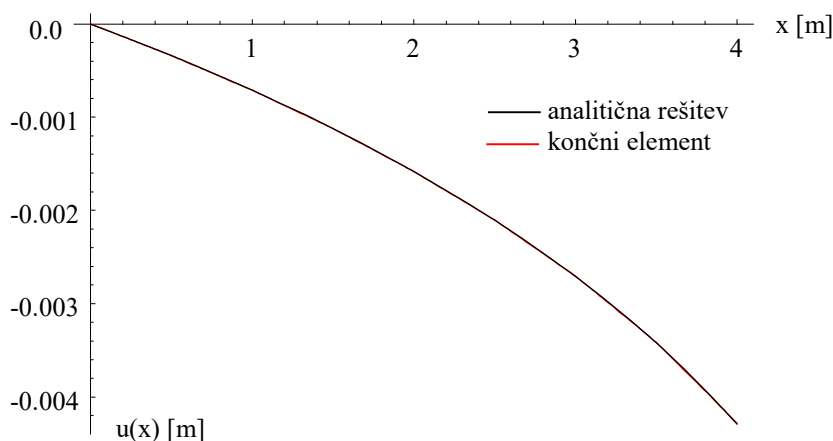
in tako sledi:

$$u_1(x) = B_1 + C_1 \cdot x = 0 - 6.793478260869566 \cdot 10^{-4} \cdot x \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 0.5 \text{ m}$$

Ostali koeficienti in funkcije so:

$i$	$C_i$	$B_i$	$u_i(x)$
2	$-7.440476190476192 \cdot 10^{-4}$	$3.2349896480331306 \cdot 10^{-5}$	$3.23499 \cdot 10^{-5} - 7.44048 \cdot 10^{-4} \cdot x$
3	$-8.223684210526316 \cdot 10^{-4}$	$11.067069848534372 \cdot 10^{-5}$	$11.0670 \cdot 10^{-5} - 8.22368 \cdot 10^{-4} \cdot x$
4	$-9.191176470588238 \cdot 10^{-4}$	$25.5794537494632 \cdot 10^{-5}$	$25.57945 \cdot 10^{-5} - 9.19118 \cdot 10^{-4} \cdot x$
5	$-10.416666666666667 \cdot 10^{-4}$	$50.08925767103177 \cdot 10^{-5}$	$50.08926 \cdot 10^{-5} - 10.41667 \cdot 10^{-4} \cdot x$
6	$-12.019230769230774 \cdot 10^{-4}$	$90.15336023513446 \cdot 10^{-5}$	$90.15336 \cdot 10^{-5} - 12.01923 \cdot 10^{-4} \cdot x$
7	$-1.420454545454546 \cdot 10^{-4}$	$155.712800794575 \cdot 10^{-5}$	$155.71280 \cdot 10^{-5} - 1.42045 \cdot 10^{-4} \cdot x$
8	$-1.7361111111111114 \cdot 10^{-4}$	$266.19259877437296 \cdot 10^{-5}$	$266.19260 \cdot 10^{-5} - 1.73611 \cdot 10^{-4} \cdot x$

Grafi sedaj dobljenih (odsekovno linearnih) približnih funkcij osnega pomika že izkazujejo praktično popolno ujemanje z analitično rešitvijo (zvezno funkcijo).



Slika 29: Primerjava funkcij upogibnice

### 3. pristop – uporaba izboljšanih približnih končnih elementov višjega reda

Osnovni približni končni elementi so kar standardni končni elementi z enakomerno povprečno višino, ki so bili uporabljeni že v 1. pristopu, tukaj pa bomo uporabili približni končni element višjega reda.

#### 1. model - uporaba osnovnega SSu končnega elementa

Togostna matrika edinega osnovnega SSu končnega elementa, ki upošteva spreminjanje ploščine prereza na približen način, je:

$$\begin{aligned}
 [k_1] &= \frac{E \cdot (A_1^2 + 4 \cdot A_1 \cdot A_2 + A_2^2)}{3 \cdot (A_1 + A_2) \cdot L_e} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{32 \cdot 10^9 \cdot (0.48^2 + 4 \cdot 0.48 \cdot 0.16 + 0.16^2)}{3 \cdot (0.48 + 0.16) \cdot 4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1.80224 \cdot 10^{10}}{7.68} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 2.3466666666666675 \cdot 10^9 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Obtežni vektor pa je:

$$\{F_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -10 \cdot 10^6 \end{Bmatrix}$$

Za pridobitev neznanega pomika prostega konca rešimo eno bistveno enačbo z eno neznanko:

$$2.3466666666666675 \cdot 10^9 \cdot u_2 = -F = -10 \cdot 10^6$$

kar vodi do:

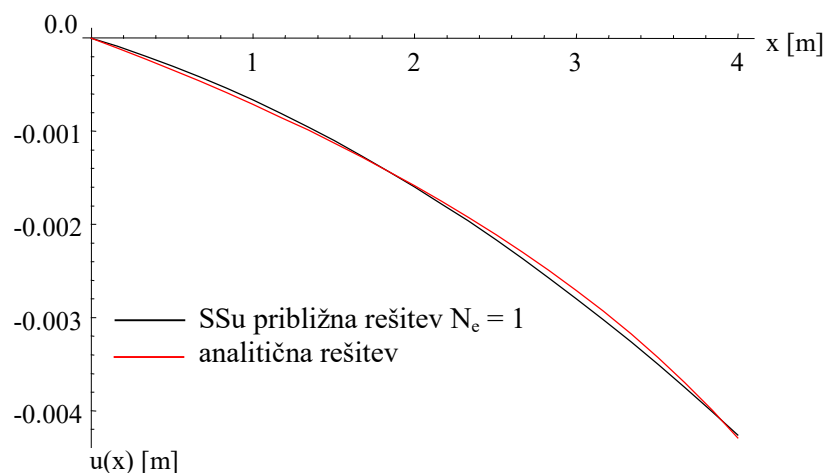
$$u_2 = -4.282518456700715 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

in predstavlja vrednost z -0.7011752770723402 % napake glede na točno rešitev, kar je bistveno manj kot pri uporabi enega končnega elementa z nadomestnim povprečnim konstatnim prerezom. Uporaba izboljšane končnega elementa je torej ob enakem računskem naporu opazno vplivala na kvaliteto rešitve.

- Poprocesiranje: iskanje funkcije osnega pomika  $z$  uporabo interpolacijskih funkcij Ssu končnega elementa

Približna polinomska funkcija osnega pomika je dobljena s pomočjo interpolacijskih funkcij osnovnega Ssu končnega elementa, ki sedaj niso več linearne funkcije:

$$\begin{aligned} u_{N,SS}(x) &= \{\bar{N}_1, \bar{N}_2\} \cdot \{U_1\} = \bar{N}_2 \cdot u_2 = \left( \frac{2 \cdot A_2}{(A_1 + A_2) \cdot L_e} \cdot x + \frac{(A_1 - A_2)}{(A_1 + A_2) \cdot L_e^2} \cdot x^2 \right) \cdot u_2 \\ &= \left( \frac{2 \cdot 0.16}{(0.48 + 0.16) \cdot 4} \cdot x + \frac{(0.48 - 0.16)}{(0.48 + 0.16) \cdot 4^2} \cdot x^2 \right) \cdot (-4.282518456700715 \cdot 10^{-3} \text{ m}) \\ &= (0.125 \cdot x + 0.03125 \cdot x^2) \cdot (-4.282518456700715 \cdot 10^{-3} \text{ m}) \\ &= -5.326704545454544 \cdot 10^{-4} \cdot x - 1.331676136363636 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$



Slika 30: Primerjava upogibnic

Iz slike 30 je razvidno, da je ujemanje pomikov na sredini in na prostem koncu končnega elementa dobro, nekoliko večja odstopanja pa so opazna v ostalih točkah (razen v vpeti podpori).

Notranja deformacijska energija  $U$  v končnem elementu znaša 21306.81818181817 J (z napako -0.7011752770723401 %), potencialna energija  $V$  sile  $F$  pa znaša 42613.63636363635 J (napaka znaša -0.7011752770723401 %). Razmerje obeh energij znaša 2, celotna deformacijska energija  $\Pi$  v končnem elementu pa znaša -21306.818181818184 J, pri čemer napaka znaša -0.7011752770723401 %.

*Poprocesiranje: iskanje vektorja sekundarnih spremenljivk in notranjih statičnih količin*

Za edini končni element sledi vektor sekundarnih spremenljivk:

$$\begin{aligned} \{Q_1\} &= [k_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\} \\ &= \begin{bmatrix} 2.3466666666666675 & -2.3466666666666675 \\ -2.3466666666666675 & 2.3466666666666675 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -4.282518456700715 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 10 \cdot 10^6 \text{ N} \\ -10 \cdot 10^6 \text{ N} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Tako je horizontalna reakcija v podpori usmerjena v desno, vozliščni vrednosti osne sile pa sta:

$$\begin{Bmatrix} N_{x,1} \\ N_{x,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10 \cdot 10^6 \text{ N} \\ -10 \cdot 10^6 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

kar pokaže, da je (edini) končni element tlačjen z enakomerno osno silo. Ker sta vozliščni vrednosti medsebojno enaki, iskanje funkcije osne sile seveda ni smiselno.

– *Poprocesiranje: iskanje funkcije osnega pomika z uporabo H1 interpolacijskih funkcij*

Namesto Ssu interpolacijskih funkcij lahko uporabimo tudi druge interpolacijske funkcije. Tako npr. lahko s pomočjo diskretnih vozliščnih vrednosti osne sile izračunamo vozliščni vrednosti normalne napetosti, ter nato še vozliščni vrednosti normalne specifične deformacije:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x,1} \\ \varepsilon_{x,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-10 \cdot 10^6 \text{ N}}{EA(0)} \\ \frac{-10 \cdot 10^6 \text{ N}}{EA(4)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-10 \cdot 10^6 \text{ N}}{14.72 \cdot 10^9} \\ \frac{-10 \cdot 10^6 \text{ N}}{5.12 \cdot 10^9} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6.510416666666666 \cdot 10^{-4} \\ -19.531249999999996 \cdot 10^{-4} \end{Bmatrix}$$

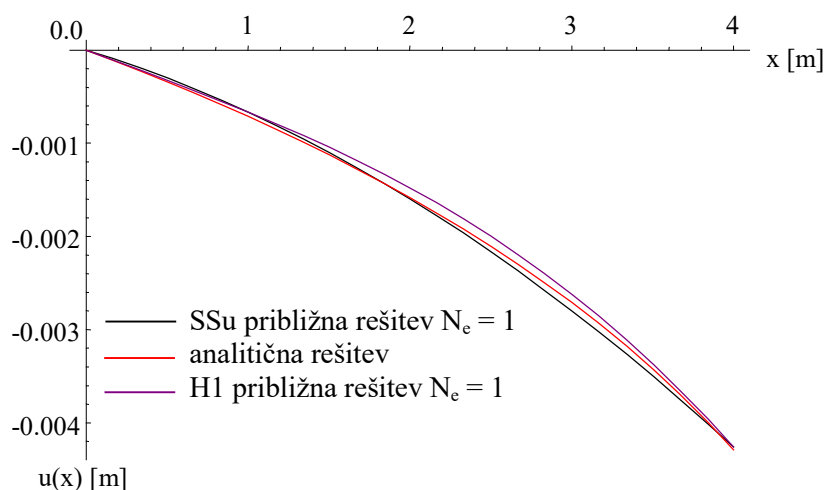
ki sta točni vrednosti, ker sta izračunani iz točnih vrednosti osne sile.

S pomočjo dveh vozliščnih vrednosti osnega pomika (ene točne, ter kvalitetnega približka) ter dveh točnih vrednosti odvodov funkcije osnega pomika (=specifične deformacije) lahko z uporabo standardnih H1 interpolacijskih funkcij izračunamo nov približek funkcije osnega pomika, kar pa vodi do polinoma tretje stopnje:

$$u_{N,H1}(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{16}\right) \cdot 6.510416666666666 \cdot 10^{-4} + \left(\frac{3 \cdot x^2}{16} - \frac{x^3}{32}\right) \cdot (-4.282518456700715 \cdot 10^{-3})$$

$$+ \left(-\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{16}\right) \cdot (-19.531249999999996 \cdot 10^{-4}) = -6.510416666666666 \cdot 10^{-4} \cdot x$$

$$+ 1.4796401515151665 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 - 2.959280303030303 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$



Slika 31: Primerjava upogibnic

Graf nove funkcije osnega pomika pokaže, da dejansko ne predstavlja boljše rešitve navkljub višji stopnji polinoma zaradi vključitve dveh točnih vrednosti odvoda, ki pa pripadata odvodoma iskane funkcije.

Notranja deformacijska energija  $U$  v elementu znaša 21211.164677073746 J (z napako -1.1469612466477999 %), energija  $V$  sile  $F$  pa je ponovno 42613.63636363635 J (napaka znaša -0.7011752770723401 %), njuno razmerje pa znaša 2.009019165727172. Celotna deformacijska energija v končnem elementu pa znaša  $\Pi = -21402.471686562607$  J, kar numerično sicer nakazuje, da je ta funkcija celo nekoliko boljša od prejšnje, dobljene z interpolacijskimi funkcijami SSu končnega elementa, vendar je to v očitnem neskladju s sliko vseh funkcij pomika. Boljša vrednost celotne deformacijske energije  $\Pi$  namreč izvira iz manj kvalitetno izračunane notranje deformacijske energije  $U$ .

– *Poprocesiranje: iskanje funkcije osnega pomika z uporabo H2 interpolacijskih funkcij*

Če pa želimo vključiti še dodatne informacije in uporabiti H2 interpolacijske funkcije, potrebujemo še drugi odvod funkcije osnega pomika. Izračunamo ga kot:

$$\begin{aligned} \frac{dEA(x)}{dx} \cdot \frac{du(x)}{dx} + EA(x) \cdot \frac{d^2u(x)}{dx^2} &= -q_x(x) \rightarrow EA(x) \cdot \frac{d^2u(x)}{dx^2} = -q_x(x) - \frac{dEA(x)}{dx} \cdot \frac{du(x)}{dx} \\ \frac{d^2u(x)}{dx^2} &= \frac{-q_x(x) - \frac{dEA(x)}{dx} \cdot \frac{du(x)}{dx}}{EA(x)} = \frac{-q_x(x)}{EA(x)} - \frac{\frac{dEA(x)}{dx} \cdot \varepsilon_x(x)}{EA(x)} \end{aligned}$$

kar vodi do vrednosti:

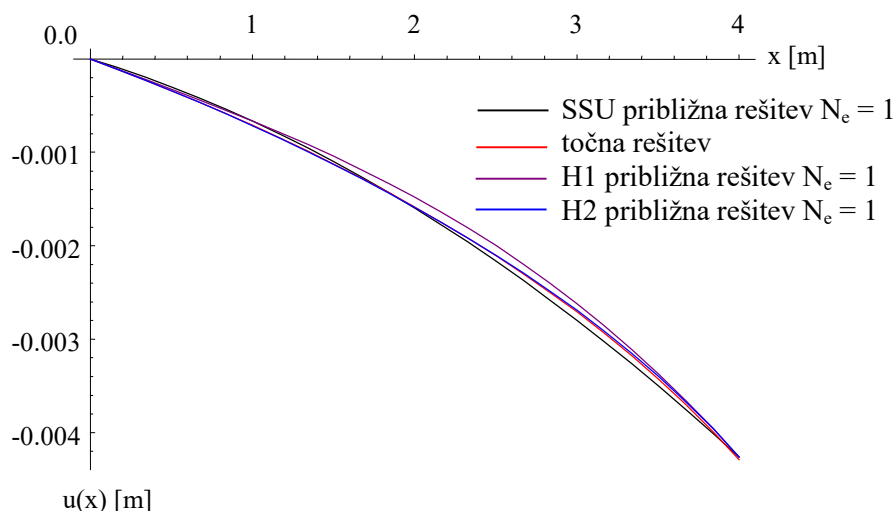
$$\begin{aligned} \frac{d^2u(0)}{dx^2} &= -1.0850694444444444 \cdot 10^{-4} \\ \frac{d^2u(4)}{dx^2} &= -9.765625 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

Ker lahko za izračun potrebna prva odvoda oz. specifični deformaciji  $\varepsilon_x(x)$  izračunamo tudi iz točne vrednosti osne sile  $N_x(x)$ , sta tako tudi vrednosti drugega odvoda točni.

Tako dobimo polinom pete stopnje:

$$\begin{aligned} u_{N,H2}(x) &= \left( x - \frac{3 \cdot x^3}{8} + \frac{x^4}{8} - \frac{3 \cdot x^5}{256} \right) \cdot (-6.5104166666666666 \cdot 10^{-4}) \\ &+ \left( \frac{x^2}{2} - \frac{3 \cdot x^3}{8} + \frac{3 \cdot x^4}{32} - \frac{x^5}{128} \right) \cdot (-1.0850694444444444 \cdot 10^{-4}) \\ &+ \left( \frac{5 \cdot x^3}{32} - \frac{15 \cdot x^4}{256} + \frac{3 \cdot x^5}{512} \right) \cdot (-4.282518456700715 \cdot 10^{-3}) \\ &+ \left( -\frac{x^3}{4} + \frac{7 \cdot x^4}{64} - \frac{3 \cdot x^5}{256} \right) \cdot (-19.531249999999996 \cdot 10^{-4}) + \left( \frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{16} + \frac{x^5}{512} \right) \cdot (-9.765625 \cdot 10^{-4}) \\ &= -6.5104166666666666 \cdot 10^{-4} \cdot x - 5.4253472222222222 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 \\ &- 1.4796401515151394 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 + 5.548650568181786 \cdot 10^{-6} \cdot x^4 \\ &- 1.233033459595954 \cdot 10^{-6} \cdot x^5 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

ki pa izkazuje boljše ujemanje s točno rešitvjo:



Slika 32: Primerjava upogibnic

Iz grafov funkcij pomika vidimo, da je uporaba H2 interpolacijskih funkcij privedla do bistveno boljšega ujemanja s točno rešitvjo (ne pa še idealno dobrega, saj napaka na sredini nosilca znaša -0.2714286471225206 %) kot pa H1 interpolacijske funkcije.

Notranja deformacijska energija  $U$  v končnem elementu sedaj znaša 21159.542150703714 J, pri čemer energija zunanje obtežbe  $V$  znaša 42613.63636363635 J (z napako -0.7011752770723401 %), njuno razmerje pa znaša 2.013920530989331. Celotna deformacijska energija  $\Pi$  znaša -21454.09421293264 J, kar tudi numerično potrди, da je ta funkcija nekoliko boljša od prejšnje, dobljene s H1 interpolacijskimi funkcijami.

## 2. model - uporaba dveh osnovnih SSu končnih elementov enakih dolžin

Togostna matrika prvega osnovnega SSu končnega elementa je:

$$\begin{aligned}
 [k_1] &= \frac{E \cdot (A_1^2 + 4 \cdot A_1 \cdot A_2 + A_2^2)}{3 \cdot (A_1 + A_2) \cdot L_e} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{32 \cdot 10^9 \cdot (0.48^2 + 4 \cdot 0.48 \cdot 0.32 + 0.32^2)}{3 \cdot (0.48 + 0.32) \cdot 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= 6.314666666666667 \cdot 10^9 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Togostna matrika drugega osnovnega SSu elementa je:

$$[k_2] = \frac{E \cdot (A_1^2 + 4 \cdot A_1 \cdot A_2 + A_2^2)}{3 \cdot (A_1 + A_2) \cdot L_e} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{32 \cdot 10^9 \cdot (0.32^2 + 4 \cdot 0.32 \cdot 0.16 + 0.16^2)}{3 \cdot (0.32 + 0.16) \cdot 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 3.697777777777779 \cdot 10^9 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

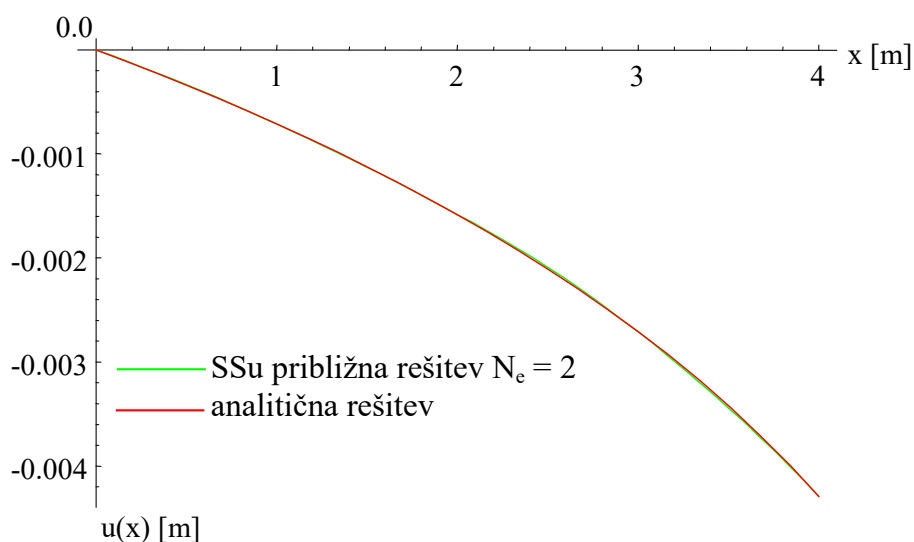
Za pridobitev neznanih vozliščnih pomikov moramo rešiti naslednji sistem bistvenih enačb:

$$\begin{bmatrix} 10.012444444444447 & -3.697777777777779 \\ -3.697777777777779 & 3.697777777777779 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -10 \cdot 10^6 \end{Bmatrix}$$

kar vodi do rešitev:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.5836148648648645 \cdot 10^{-3} \\ -4.2879417879417864 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix}$$

Napaka vrednosti na prostem koncu je pričakovano manjša kot pri modelu z enim končnim SSu elementom in znaša  $-0.08184788794805836\%$ .



Slika 33: Primerjava upogibnic

Notranja deformacijska energija  $U$  obeh elementov znaša 21439.708939708937 J, energija  $V$  zunanje obtežbe oz. sile  $F$  pa znaša 42879.417879417866 J, skupna deformacijska energija pa je  $\Pi = -21439.70893970893$  J, njena napaka pa znaša -0.08184788794812524 %.

### 3. model - uporaba $SSu_{+1}$ končnega elementa

Togostna matrika edinega izboljšanega  $SSu_{+1}$  končnega elementa, ki upošteva spreminjanje ploščine prereza na še kvalitetnejši približen način, je:

$$\begin{aligned} [k_e] &= \frac{3 \cdot E \cdot (A_1^3 + 9 \cdot A_1^2 \cdot A_2 + 9 \cdot A_1 \cdot A_2^2 + A_2^3)}{(11 \cdot A_1^2 \cdot A_2 + 38 \cdot A_1 \cdot A_2 + 11 \cdot A_2^2) \cdot L_e} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{3 \cdot 32 \cdot 10^9 \cdot (0.48^3 + 9 \cdot 0.48^2 \cdot 0.16 + 9 \cdot 0.48 \cdot 0.16^2 + 0.16^3)}{(11 \cdot 0.48^2 \cdot 0.16 + 38 \cdot 0.48 \cdot 0.16 + 11 \cdot 0.16^2) \cdot 4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 2.331428571428572 \cdot 10^9 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Za pridobitev neznanega pomika prostega konca tako rešimo eno bistveno enačbo z eno neznanko:

$$2.331428571428572 \cdot 10^9 \cdot u_2 = -10 \cdot 10^6$$

kar vodi do vrednosti pomika:

$$u_2 = -4.2892156862745084 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

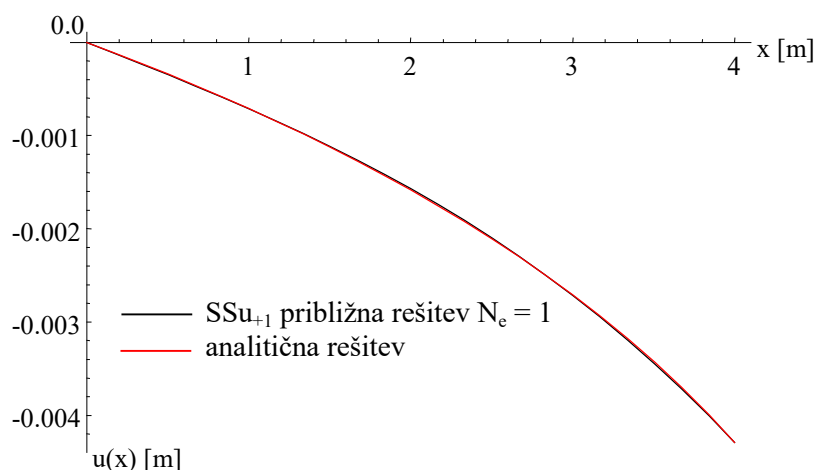
kar predstavlja vrednost z -0.05216335077869929 napake, ki je manjša celo kot pri uporabi dveh osnovnih  $SSu$  končnih elementov.

– *Poprocesiranje: iskanje funkcije osnega pomika z uporabo interpolacijskih funkcij  $SSu_{+1}$  končnega elementa*

Približna polinomska funkcija osnega pomika, dobljena s pomočjo interpolacijskih funkcij  $SSu_{+1}$  končnega elementa, je:

$$\begin{aligned}
 u_{N,SSu_{+1}}(x) &= (0.16071428571428575 \cdot x + 5.580357142857143 \cdot 10^{-3} \cdot x^3) \cdot \\
 &(-4.2892156862745084 \cdot 10^{-3} \text{ m}) \\
 &= -6.893382352941176 \cdot 10^{-4} \cdot x - 2.393535539215686 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}
 \end{aligned}$$

in daje odlične rešitve.



Slika 34: Primerjava upogibnic

Notranja deformacijska energija  $U$  v konzoli znaša 21446.078431372545 J, potencialna energija  $V$  obtežne sile  $F$  pa znaša 42892.15686274508 J (napaka je -0.05216335077870467 %). Njuno razmerje znaša 2. Celotna deformacijska energija pa znaša  $\Pi = -21446.078431372538$  J (napaka znaša -0.05216335077877246 %).

– *Poprocesiranje: iskanje funkcije osnega pomika z uporabo H1 interpolacijskih funkcij*

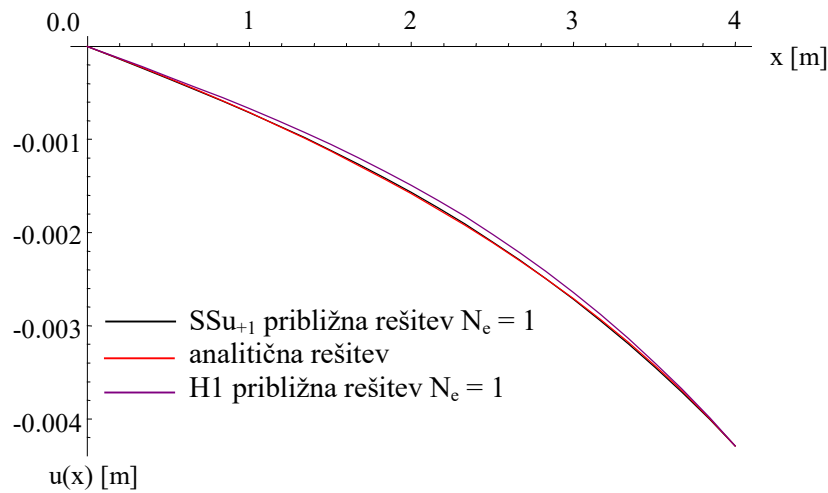
S pomočjo vozliščnih vrednosti osne sile lahko izračunamo normalni napetosti, ter nato še diskretni vozliščni vrednosti normalne specifične deformacije:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x,1} \\ \varepsilon_{x,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6.510416666666666 \cdot 10^{-4} \\ -19.531249999999996 \cdot 10^{-4} \end{Bmatrix}$$

ki sta točni vrednosti, ker sta izračunani iz točnih vrednosti osne sile.

S pomočjo dveh približnih vozliščnih vrednosti osnega pomika ter dveh točnih vrednosti specifične deformacije lahko z uporabo standardnih H1 interpolacijskih funkcij izračunamo nov približek funkcije osnega pomika, kar vodi do polinoma tretje stopnje:

$$u_{N,H1}(x) = -6.510416666666666 \cdot 10^{-4} \cdot x + 9.574142156862874 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 - 2.872242647058824 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$



Slika 35: Primerjava upogibnic

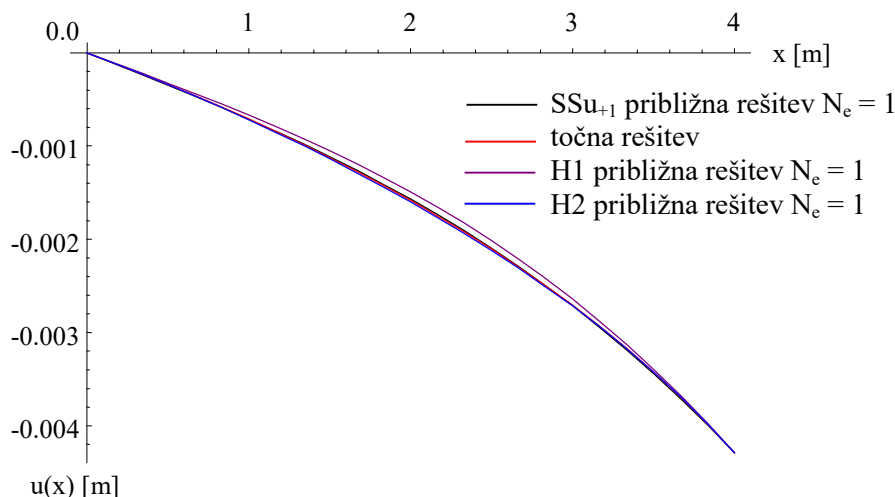
Graf nove funkcije osnega pomika pokaže, da ne predstavlja boljše rešitve, kot je bila dobljena z uporabo  $SSu_{+1}$  interpolacijskih funkcij. Notranja deformacijska energija  $U$  v elementu znaša 21484.12469562987 J, potencialna energija  $V$  sile  $F$  pa je ponovno 42892.15686274508 J (napaka znaša -0.05216335077870467 %), njuno razmerje pa znaša 1.9964581974088924. Celotna deformacijska energija je  $II = -21408.032167115212$  J, pri čemer napaka znaša -0.22947510580534977 %, kar je več kot pri uporabi  $SSu_{+1}$  interpolacijskih funkcij.

– *Poprocesiranje: iskanje funkcije osnega pomika z uporabo H2 interpolacijskih funkcij*

Če v interpolaciji uporabimo še diskretni vrednosti drugega odvoda funkcije osnega pomika (= prvega odvoda specifične deformacije), dobimo polinom pete stopnje:

$$u_{N,H2}(x) = -6.510416666666666 \cdot 10^{-4} \cdot x - 5.425347222222222 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 - 1.9148284313725314 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 + 7.180606617647006 \cdot 10^{-6} \cdot x^4 - 1.3962290645424787 \cdot 10^{-6} \cdot x^5 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

ki pa izkazuje boljše ujemanje s točno rešitvijo kot pri uporabi H1 interpolacijskih funkcij:



Slika 36: Primerjava upogibnic

Iz grafov funkcij vidimo, da je uporaba H2 interpolacijskih funkcij privedla do bistveno boljšega ujemanja s točno rešitvijo (ne pa še idealno dobrega, saj napaka na sredini nosilca znaša 1.1506812183797095 %) kot pa H1 interpolacijske funkcije.

Notranja deformacijska energija  $U$  sedaj znaša 21437.337643844727 J, potencialna energija zunanje obtežbe  $V$  znaša 42892.15686274508 J (z napako -0.05216335077870467 %), njuno razmerje pa znaša 2.0008154732339465. Celotna potencialna energija znaša  $\Pi = -21454.819218900357$  J, pri čemer njena je napaka -0.011427567460085164 %.

#### 4. model - uporaba dveh $SSu_{+1}$ končnih elementov enakih dolžin

Togostna matrika prvega  $SSu_{+1}$  elementa je:

$$[k_1] = 6.313746630727763 \cdot 10^9 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Togostna matrika drugega  $SSu_{+1}$  elementa je:

$$[k_2] = 3.6934351145038176 \cdot 10^9 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Za pridobitev neznanih vozliščnih osnih pomikov moramo rešiti naslednji sistem bistvenih enačb:

$$\begin{bmatrix} 10.00718174523158 & -3.6934351145038176 \\ -3.6934351145038176 & 3.6934351145038176 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -10 \cdot 10^6 \end{Bmatrix}$$

kar vodi do rešitev:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.5838456284153007 \cdot 10^{-3} \\ -4.291352242171914 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix}$$

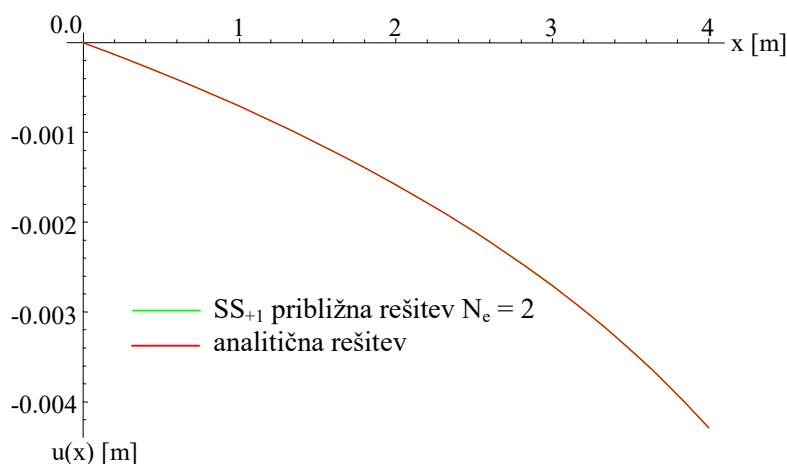
Napaka vrednosti pomika na prostem koncu se je še zmanjšala in znaša samo še  $-2.3770598936026037 \cdot 10^{-3} \%$ .

- *Poprocesiranje: iskanje funkcije osnega pomika z uporabo interpolacijskih funkcij  $SS_{u+1}$  končnega elementa*

Približni polinomski funkciji osnega pomika, dobljeni s pomočjo interpolacijskih funkcij  $SS_{u+1}$  končnega elementa, sta sedaj polinoma 3. stopnje:

$$\begin{aligned} u_{1,N,SS_{u+1}}(x) &= -6.531762295081968 \cdot 10^{-4} \cdot x - 4.8027663934426195 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 \\ &\quad - 1.0672814207650282 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 - 1.6177436340401334 \cdot 10^{-6} \cdot x^4 \quad 0 \leq x \leq 2 \text{ m} \\ u_{2,N,SS_{u+1}}(x) &= 5.036213028016294 \cdot 10^{-4} - 1.3020833333333335 \cdot 10^{-3} \cdot x + \\ &\quad + 2.3251488095238107 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 - 5.166997354497353 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 \quad 2 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

Ker sta funkciji medsebojno različni, to sicer nakazuje njuno približnost, vendar njun izris kljub temu potrди njuno odlično kvaliteto.



Slika 37: Primerjava upogibnic

Notranja deformacijska energija v obeh elementih znaša  $U = 21456.761210859557$  J, potencialna energija sile  $F$  pa znaša  $V = 42913.522421719135$  J. Skupna deformacijska energija znaša  $\Pi = -21456.76121085958$  J, kar predstavlja vrednost s samo  $2.3770598936073487 \cdot 10^{-3}$  % napake.

#### 5. model - uporaba $SSu_{+2}$ končnega elementa

Togostna matrika edinega  $SSu_{+2}$  elementa je:

$$[k_1] = 2.330301369863014 \cdot 10^9 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Za pridobitev neznanega pomika prostega konca tako rešimo eno bistveno enačbo z eno neznanko:

$$2.330301369863014 \cdot 10^9 \cdot u_2 = -10 \cdot 10^6$$

kar vodi do vrednosti pomika:

$$u_2 = -4.291290443942813 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

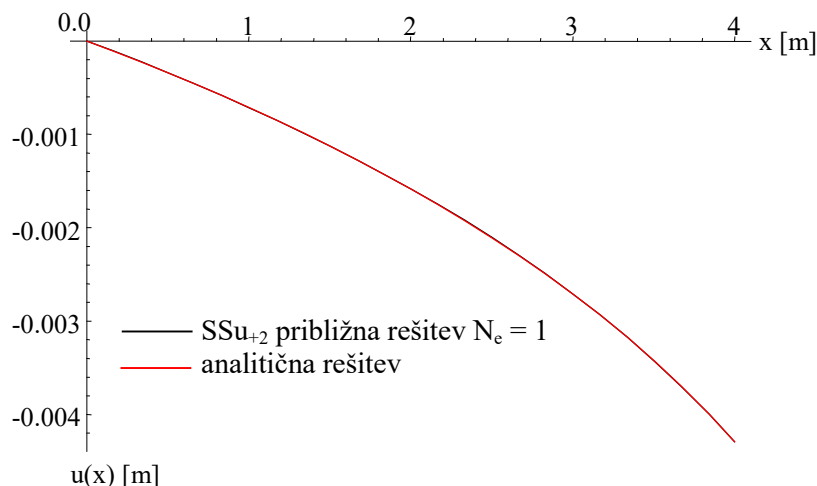
kar predstavlja vrednost z  $-3.8170899035526377 \cdot 10^{-3}$  % napake, ki pa ni manjša kot pri uporabi dveh  $SSu_{+1}$  končnih elementov.

- *Poprocesiranje: iskanje funkcije osnega pomika z uporabo interpolacijskih funkcij  $SSu_{+2}$  končnega elementa*

Približna polinomska funkcija osnega pomika je sedaj polinom 4. stopnje:

$$\begin{aligned} u_{N,SSu_{+2}}(x) &= (0.1489726027397261 \cdot x + 1.926369863013698 \cdot 10^{-2} \cdot x^2 - 2.9965753424657502 \cdot 10^{-3} \cdot x^3 \\ &+ 1.1237157534246575 \cdot 10^{-2} \cdot x^4) \cdot (-4.291290443942813 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} \text{ m}) \\ &= -6.392847065462752 \cdot 10^{-4} \cdot x - 8.266612584650106 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 \\ &+ 1.2859175131677933 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 - 4.82219067437923 \cdot 10^{-6} \cdot x^4 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

ki pa daje (vizualno) praktično točne rešitve, saj razlike med grafoma skoraj niso več opazne, slika 38.



Slika 38: Primerjava upogibnic

Notranja deformacijska energija  $U$  v elementu znaša 21456.45221971406 J, potencialna energija  $V$  sile  $F$  pa znaša 4242912.90443942813 J (napaka znaša  $-3.817089903549782 \cdot 10^{-3}$  %). Njuno razmerje znaša 2. Celotna deformacijska energija pa je  $\Pi = -21456.45221971407$  J, njena napaka pa prav tako znaša samo še  $-3.817089903549782 \cdot 10^{-3}$  %, kar znaša nekoliko več kot pri uporabi dveh  $SSu_{+1}$  končnih elementov.

– *Poprocesiranje: iskanje funkcije osnega pomika z uporabo H1 interpolacijskih funkcij*

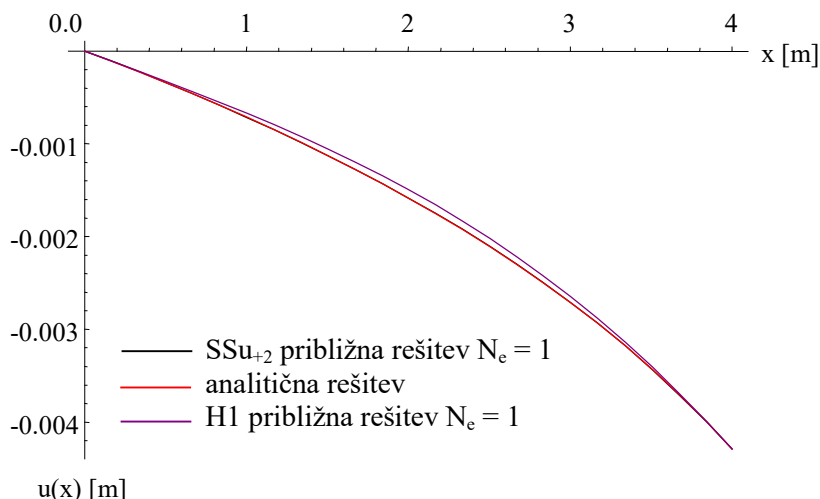
S pomočjo vozliščnih vrednosti osne sile lahko izračunamo normalni napetosti, ter nato še vozliščni vrednosti normalne specifične deformacije:

$$\begin{cases} \varepsilon_{x,1} \\ \varepsilon_{x,2} \end{cases} = \begin{cases} -6.510416666666666 \cdot 10^{-4} \\ -19.531249999999996 \cdot 10^{-4} \end{cases}$$

ki sta točni vrednosti, ker sta izračunani iz točnih vrednosti osne sile.

S pomočjo dveh približnih vozliščnih vrednosti osnega pomika ter dveh točnih vrednosti specifične deformacije lahko z uporabo standardnih H1 interpolacijskih funkcij izračunamo nov približek funkcije osnega pomika, kar vodi do polinoma tretje stopnje:

$$u_{N,H1}(x) = -6.510416666666666 \cdot 10^{-4} \cdot x + 9.185125094055707 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 - 2.8657590293453732 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$



Slika 39: Primerjava upogibnic

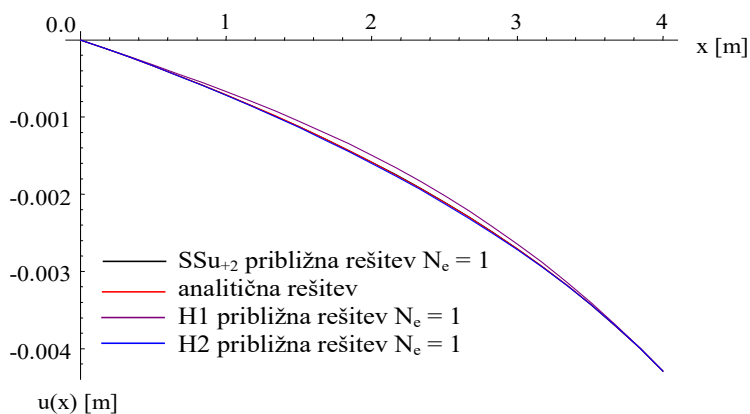
Graf nove funkcije osnega pomika pokaže, da ne predstavlja boljše rešitve kot originalne SSu<sub>+2</sub> interpolacijske funkcije. To posredno potrди tudi celotna potencialna energija  $\Pi$ , ki znaša -21408.351007403093 J in ima napako -0.22798917460761398 %.

– *Poprocesiranje: iskanje funkcije osnega pomika z uporabo H2 interpolacijskih funkcij*

Z uporabo H2 interpolacijskih funkcij sedaj dobimo polinom pete stopnje:

$$u_{N,H2}(x) = -6.510416666666666 \cdot 10^{-4} \cdot x - 5.425347222222222 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 \\ - 1.9472465199398025 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 + 7.302174449774171 \cdot 10^{-6} \cdot x^4 \\ - 1.4083858477551993 \cdot 10^{-6} \cdot x^5 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

ki pa izkazuje boljše ujemanje s točno rešitvjo kot H1 interpolacijske funkcije:



Slika 40: Primerjava upogibnic

Iz grafov funkcij na sliki 40 vidimo, da je uporaba H2 interpolacijskih funkcij privedla do bistveno boljšega ujemanja s točno rešitvijo (ne pa še idealno dobrega, saj napaka na sredini nosilca znaša 1.2161785882477356 %) kot pa H1 interpolacijske funkcije.

Notranja deformacijska energija  $U$  sedaj znaša 21458.14475090868 J, potencialna energija  $V$  zunanje obtežbe znaša 42912.90443942813 J (z izredno majhno napako - 0.003817089903549782 %), njuno razmerje pa znaša 1.9998422481333533 J. Celotna potencialna energija  $\Pi$  sedaj znaša -21454.75968851945 J, kar predstavlja rezultat z napako -0.011705004326013414 %.

#### 6. model - uporaba dveh $SSu_{+2}$ končnih elementov enakih dolžin

Togostna matrika prvega  $SSu_{+2}$  končnega elementa je:

$$[k_1] = 6.313736964980545 \cdot 10^9 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Togostna matrika drugega končnega elementa je:

$$[k_2] = 3.6933033707865176 \cdot 10^9 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Za pridobitev neznanih vozliščnih pomikov moramo rešiti naslednji sistem enačb:

$$\begin{bmatrix} 10.007040335767063 & -3.6933033707865176 \\ -3.6933033707865176 & 3.6933033707865176 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -10 \cdot 10^6 \end{Bmatrix}$$

kar vodi do rešitev:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.583848053136438 \cdot 10^{-3} \\ -4.291451246282854 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix}$$

Napaka vrednosti pomika na prostem koncu je samo še  $-7.00538039890749 \cdot 10^{-5}$  %, ki pokaže, da uporaba  $SSu_{+3}$  končnega elementa verjetno ni smiselna.

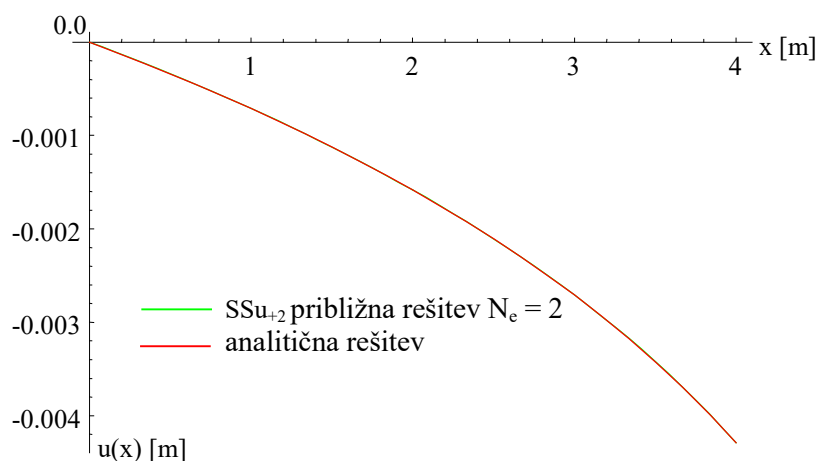
- *Poprocesiranje: iskanje funkcij osnega pomika  $\zeta$  uporabo interpolacijskih funkcij  $SSu_{+2}$  končnega elementa*

Približni polinomski funkciji osnega pomika posameznega končnega elementa sta sedaj polinoma 4. stopnje:

$$u_{1,N,SSu_{+2}}(x) = -6.507951533510036 \cdot 10^{-4} \cdot x - 5.546549602423321 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 - 4.3139830241070675 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 - 1.6177436340401334 \cdot 10^{-6} \cdot x^4 \quad 0 \leq x \leq 2 \text{ m}$$

$$u_{2,N,SSu_{+2}}(x) = -3.973702493981215 \cdot 10^{-4} - 4.5633761682242974 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 1.0647877725856699 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 - 1.3309847157320855 \cdot 10^{-5} \cdot x^4 \quad 2 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Ker sta funkciji medsebojno različni, to sicer nakazuje njuno približnost, vendar je ujemanje s točno rešitvijo praktično popolno.



Slika 41: Primerjava upogibnic

Notranja deformacijska energija  $U$  v obeh elementih znaša 21457.256231414438 J, potencialna energija  $V$  sile  $F$  pa znaša 42914.51246282854 J. Celotna potencialna energija  $\Pi$  v obeh elementih znaša -21457.256231414103 J, ki ima napako samo še -7.005380482693238  $\cdot 10^{-5}$  %.

#### 4. pristop – rešitev s točnim končnim elementom za linearno spreminjanje ploščine

Če uporabimo točni končni element za nosilec z linearnim spreminjanjem ploščine, za modeliranje zadošča en sam končni element, katerega togostna matrika je:

$$[k_1] = \frac{(0.48 \text{ m}^2 - 0.16 \text{ m}^2) \cdot 32 \text{ GPa}}{4 \text{ m} \cdot \ln\left(\frac{0.48 \text{ m}^2}{0.16 \text{ m}^2}\right)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.330212420164704 & -2.330212420164704 \\ -2.330212420164704 & 2.330212420164704 \end{bmatrix} \cdot 10^9$$

Za pridobitev neznanega pomika prostega konca tako rešimo eno bistveno enačbo z eno neznanko.

$$2.330212420164704 \cdot 10^9 \cdot u_2 = -10 \cdot 10^6$$

kar vodi do:

$$u_2 = -4.291454252609804 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

kar predstavlja popolnoma točno vrednost.

*Poprocesiranje: iskanje funkcije osnega pomika s pomočjo standardnih interpolacijskih funkcij H0*

Približno funkcijo osnega pomika vzdolž konstrukcije dobimo s pomočjo standardnih interpolacijskih funkcij H0 za osni pomik:

$$u_1(x) = \{\bar{N}_1, \bar{N}_2\} \cdot \{U_1\} = \left\{1 - \frac{x}{4}, \frac{x}{4}\right\} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = -10.72863563152451 \cdot 10^{-4} \cdot x \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

kar predstavlja linearno (in s tem dokaj slabo) porazdelitev osnega pomika navkljub sedaj točnima vozliščnima vrednostima pomika.

*Poprocesiranje – iskanje funkcije osnega pomika s pomočjo točnih interpolacijskih funkcij*

Točno (ker osna zvezna obtežba  $q_x$  ne nastopa) funkcijo pomika vzdolž konstrukcije dobimo s pomočjo točnih interpolacijskih funkcij za osni pomik:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \{\bar{N}_1, \bar{N}_2\} \cdot \{U_1\} = \left\{ \frac{\ln\left(\frac{A_2 \cdot L}{A_1 \cdot (L-x) + A_2 \cdot x}\right)}{\ln\left(\frac{A_2}{A_1}\right)}, \frac{\ln\left(\frac{A_1 \cdot L}{A_1 \cdot (L-x) + A_2 \cdot x}\right)}{\ln\left(\frac{A_1}{A_2}\right)} \right\}^T \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} \\ &= 0.9102392266268373 \cdot \ln\left(\frac{1.92}{1.92 - 0.32 \cdot x}\right) \cdot u_2 \\ &= -3.90625 \cdot 10^{-3} \cdot \ln\left(\frac{1.92}{1.92 - 0.32 \cdot x}\right) \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

kar predstavlja točno porazdelitev osnega pomika.

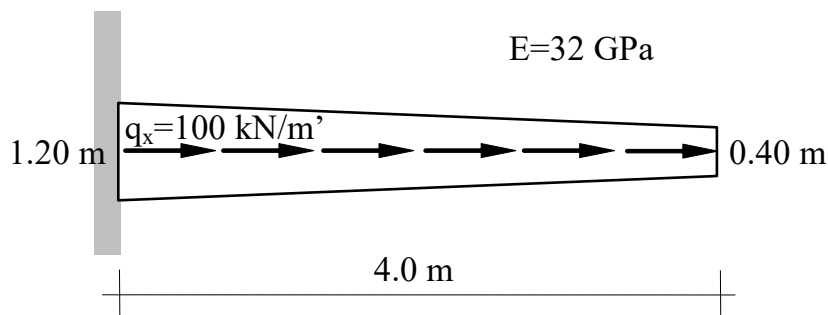
Opozorilo: uporaba teh interpolacijskih funkcij za element s konstatnim prerezom ni mogoča.

Opomba: tudi sedaj je mogoče funkcijo osnega pomika izračunati s H1 in H2 interpolacijskimi funkcijami, vendar ob poznavanju točnih interpolacijskih funkcij to ni smiselno.

### Primer 3.b\* – Konzolni nosilec z linearno spreminjajočo višino prereza in enakomerno zvezno obtežbo

Izračunati je potrebno osne pomike, osne sile in specifične deformacije zaradi enakomerno porazdeljene osne zvezne obtežbe  $q_x$  po celi dolžini konzole z linearno spreminjajočo višino pravokotnega prereza.

Širina nosilca je konstantna vzdolž nosilca ( $b = 0.40$  m), višina prereza pa se spreminja od  $b = 1.20$  m na vpetem delu, do 0.4 m na prostem koncu.



Slika 42: Konzola z linearno spreminjajočo višino

#### 1. pristop – uporaba stopničastega končnega elementa s štirimi odseki

Izračun bomo izvedli z diskretizacijo z enim končnim elementom s štirimi stopničastimi odseki enakih dolžin, za katerega je togostna matrika že znana iz prejšnjega primera. Za izračun pripadajočega obtežnega vektorja pa sledi manjkajoči potrební koeficient:

$$\begin{aligned}\beta_2 &= \sum_{i=1}^{N_s} \frac{\bar{x}_i^2 - \bar{x}_{i-1}^2}{EA_i} = \frac{\bar{x}_1^2 - \bar{x}_0^2}{EA_1} + \frac{\bar{x}_2^2 - \bar{x}_1^2}{EA_2} + \frac{\bar{x}_3^2 - \bar{x}_2^2}{EA_3} + \frac{\bar{x}_4^2 - \bar{x}_3^2}{EA_4} \\ &= \frac{(1.0 \text{ m})^2 - (0.0 \text{ m})^2}{32 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.44 \text{ m}^2} + \frac{(2.0 \text{ m})^2 - (1.0 \text{ m})^2}{32 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.36 \text{ m}^2} + \frac{(3.0 \text{ m})^2 - (2.0 \text{ m})^2}{32 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.28 \text{ m}^2} + \frac{(4.0 \text{ m})^2 - (3.0 \text{ m})^2}{32 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.20 \text{ m}^2} \\ &= 1.9832251082251085 \cdot 10^{-9}\end{aligned}$$

Obtežni vektor je:

$$\{F_1\} = q_x \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\beta_2}{2 \cdot \beta_1} \\ L_c - \frac{\beta_2}{2 \cdot \beta_1} \end{Bmatrix} = 100000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{1.9832251082251085 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 4.256854256854257 \cdot 10^{-10}} \\ 4 - \frac{1.9832251082251085 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 4.256854256854257 \cdot 10^{-10}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 232944.91525423728 \\ 167055.08474576272 \end{Bmatrix}$$

Iz vrednosti obtežnega vektorja vidimo, da bi s preprosto delitvijo celotne obtežbe na dve medsebojno enaki vozliščni sili, kot je to primer pri nosilcu enakomernega prereza, naredili precejšnjo napako.

Za pridobitev neznanega pomika prostega konca rešimo eno enačbo z eno neznanko.

$$2.3491525423728814 \cdot 10^9 \cdot u_2 = 167055.08474576272$$

kar vodi do:

$$u_2 = 7.111291486291488 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

kar je identična vrednost, kot bi jo dobili pri diskretizaciji s štirimi končnimi elementi enakih dolžin (kjer pa bi morali rešiti sistem štirih linearnih enačb). Dobljena vrednost predstavlja približno rešitev (z 0.9826624883017372 % napake in je nekoliko večja kot v primeru iste konzole, obremenjene s koncentrirano silo, kar je dodatna posledica približnega obtežnega vektorja).

*Poprocesiranje: iskanje vektorja sekundarnih spremenljivk in notranjih statičnih količin*

Za edini končni element sledi:

$$\begin{aligned}& [k_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\} \\ &= \begin{bmatrix} 2.34915254237 \cdot 10^9 & -2.34915254237 \cdot 10^9 \\ -2.34915254237 \cdot 10^9 & 2.34915254237 \cdot 10^9 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -4.256854256854257 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix} \\ & - \begin{Bmatrix} 232944.91525423728 \\ 167055.08474576272 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -400000 \text{ N} \\ 0 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

Tako je horizontalna reakcija v podpori usmerjena v levo, vozliščni osni sili pa sta:

$$\begin{Bmatrix} N_{x,1} \\ N_{x,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 400000 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

kar pokaže, da je (edini) končni element tegnjen z linearno spreminjajočo osno silo.

*Poprocesiranje: iskanje funkcij osnega pomika z uporabo izrazov*

Funkcije pomika vzdolž odsekov konstrukcije lahko najhitreje izračunamo z uporabo analitičnih izrazov, kjer sta:

$$C_1 = \frac{N_x(0)}{EA_1} = \frac{400000}{1.408 \cdot 10^{10}} = 2.8409090909090912 \cdot 10^{-5}$$

$$B_1 = u_1(0) = 0$$

in tako sledi:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= 2.8409090909090912 \cdot 10^{-5} \cdot x - \frac{100000 \cdot x^2}{2 \cdot 1.408 \cdot 10^{10}} \\ &= 2.8409090909090912 \cdot 10^{-5} \cdot x - 3.551136363636364 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ m} \end{aligned}$$

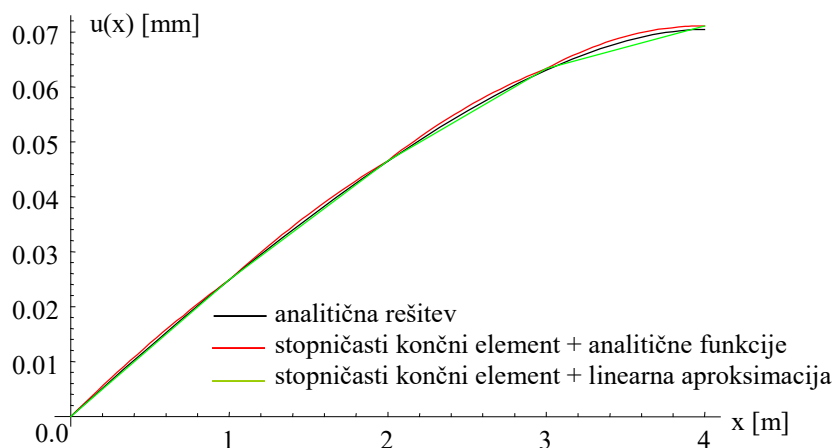
Preostali koeficienti so:

i	$C_i$	$B_i$
2	$3.472222222222222 \cdot 10^{-5}$	$-5.523989898989896 \cdot 10^{-6}$
3	$4.464285714285714 \cdot 10^{-5}$	$-2.0404942279942275 \cdot 10^{-5}$
4	$6.250 \cdot 10^{-5}$	$-5.388708513708517 \cdot 10^{-5}$

Ostale funkcije osnega pomika so tako:

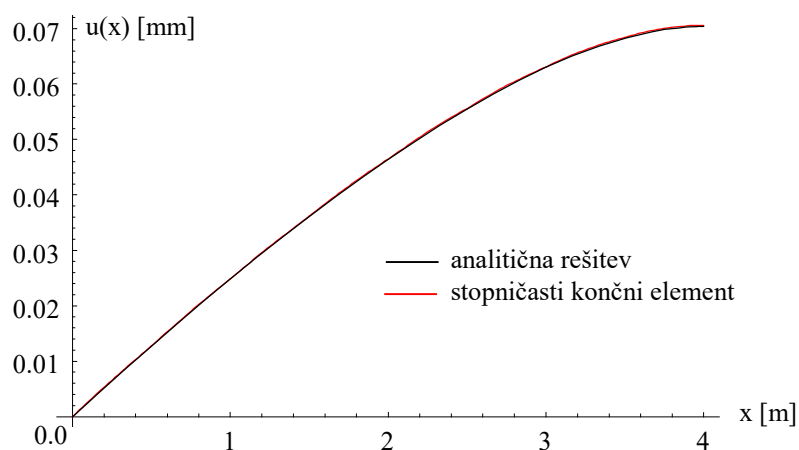
i	$u_i(x)$
2	$-5.523989898989896 \cdot 10^{-6} + 3.472222222222222 \cdot 10^{-5} \cdot x - 4.340277777777778 \cdot 10^{-6} \cdot x^2$
3	$-2.0404942279942275 \cdot 10^{-5} + 4.464285714285714 \cdot 10^{-5} \cdot x - 5.580357142857143 \cdot 10^{-6} \cdot x^2$
4	$-5.388708513708517 \cdot 10^{-5} + 6.250 \cdot 10^{-5} \cdot x - 7.8125 \cdot 10^{-6} \cdot x^2$

Grafi dobljenih funkcij rešitev izkazujejo dobro ujemanje z analitično rešitvijo.



Slika 43: Primerjava upogibnic

S povečevanjem števila odsekov znotraj končnega elementa postaja ujemanje z analitično rešitvijo še boljše (na sliki spodaj so zgolj za primerjavo podane rešitve s končnim elementom z 8 odseki, ki ima na prostem koncu napako 0.2537824427788449 %).



Slika 44: Primerjava upogibnic

## 2. pristop – uporaba približnih končnih elementov višjega reda

### 1. model – uporaba osnovnega SSu končnega elementa

Togostna matrika edinega SSu končnega elementa je (že znana iz prejšnjega primera):

$$[k_1] = 2.34666666666666675 \cdot 10^9 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pripadajoči obtežni vektor je sedaj:

$$\{f_1\} = \frac{q_x \cdot L_e}{3 \cdot (A_1 + A_2)} \cdot \begin{Bmatrix} 2 \cdot A_1 + A_2 \\ A_1 + 2 \cdot A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 233333.33333333334 \text{ N} \\ 166666.66666666666 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

Za pridobitev neznanega pomika prostega konca tako rešimo eno enačbo z eno neznanko:

$$2.3466666666666675 \cdot 10^9 \cdot u_2 = 166666.66666666666 \text{ N}$$

kar vodi do:

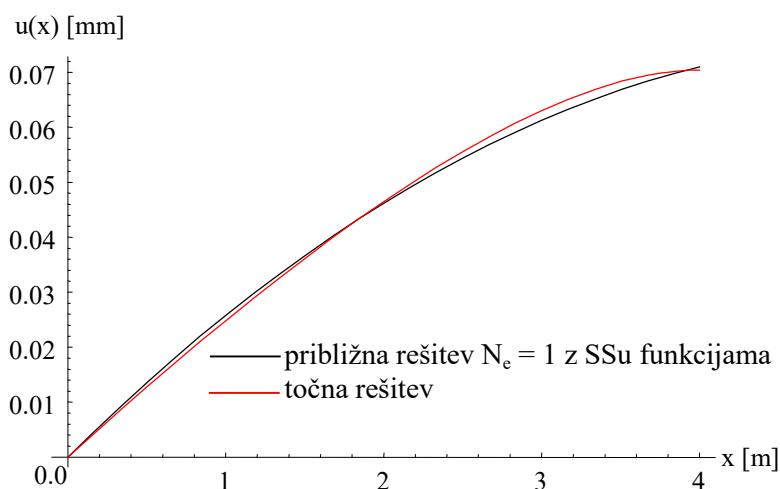
$$u_2 = 7.102272727272724 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

kar predstavlja vrednost z 0.8545931636494128 % napake, ki je nekoliko manjša kot pri uporabi končnega elementa s 4 odseki).

*Poprocesiranje: iskanje funkcije osnega pomika  $z$  uporabo interpolacijskih funkcij Ssu končnega elementa*

Približna funkcija osnega pomika je:

$$\begin{aligned} u_{N,SSu}(x) &= 1.953125 \cdot 10^{-5} \cdot x + 0.125 \cdot 7.102272727272724 \cdot 10^{-5} \cdot x - 4.8828125 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 \\ &+ 0.03125 \cdot 7.102272727272724 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 \\ &= 2.840909090909091 \cdot 10^{-5} \cdot x - 2.6633522727272734 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$



Slika 45: Primerjava upogibnic

Notranja deformacijska energija  $U$  v elementu znaša 8.522727272727273 J, deformacijska energija zunanje obtežbe  $V$  pa znaša 17.045454545454543 J. Celotna deformacijska energija  $\Pi$  znaša -8.52272727272727 J (z napako -0.701175277071674%).

*Poprocesiranje: iskanje sekundarnih spremenljivk in notranjih statičnih količin*

Za edini končni element sledi:

$$\begin{aligned} \{Q_1\} &= [k_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\} \\ &= \begin{bmatrix} 2.3466666666666675 & -2.3466666666666675 \\ -2.3466666666666675 & 2.3466666666666675 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 7.102272727272724 \cdot 10^{-5} \end{Bmatrix} - \\ &= \begin{Bmatrix} 233333.33333333334 \text{ N} \\ 166666.66666666666 \text{ N} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -400000 \text{ N} \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Tako je horizontalna reakcija v podpori usmerjena v levo, vzdolžni vrednosti osne sile pa sta:

$$\begin{Bmatrix} N_{x,1} \\ N_{x,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 400000 \text{ N} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

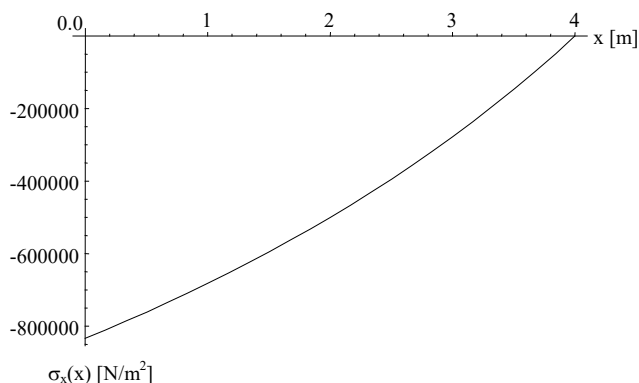
kar pokaže, da je (edini) končni element tegnjen (z linearno spreminjajočo se osno silo, ki jo lahko izračunamo kar z uporabo standardnih H0 interpolacijskih funkcij). Funkcija osne sile je tako:

$$\begin{aligned} N_{x,N}(x) &= N_{x,1} \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right) + N_{x,2} \cdot \frac{x}{4} = -400000 \text{ N} \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right) + 0 \cdot \frac{x}{4} \\ &= -400000 \text{ N} + 400000 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

ki je točna funkcija.

Če funkcijo osne sile delimo s funkcijo ploščine, sledi funkcija normalne napetosti:

$$\sigma_{x,N}(x) = \frac{N_{x,N}(x)}{A(x)} = \frac{-400000 \text{ N} + 400000 \cdot x}{0.48 - 0.04 \cdot x} \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$



Slika 46: Graf funkcije normalnih napetosti

*Poprocesiranje: iskanje funkcije osnega pomika  $\zeta$  uporabo H1 interpolacijskih funkcij*

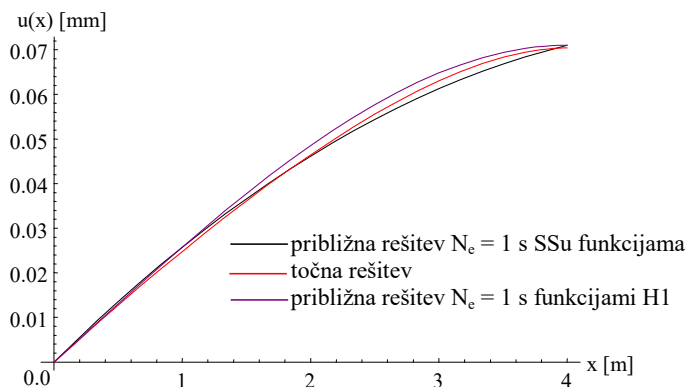
S pomočjo točnih vozliščnih vrednosti osne sile lahko izračunamo točni vozliščni normalni napetosti, ter nato s konstitutivno zvezo še točni vozliščni vrednosti normalne specifične deformacije:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x,1} \\ \varepsilon_{x,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.604166666666667 \cdot 10^{-5} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ki sta točni vrednosti, ker sta izračunani iz točnih vrednosti osne sile.

S pomočjo dveh približnih vozliščnih vrednosti osnega pomika ter dveh točnih vrednosti specifične deformacije, torej prvega odvoda osnega pomika, lahko z uporabo standardnih H1 interpolacijskih funkcij izračunamo nov približek funkcije osnega pomika, kar vodi do polinoma tretje stopnje:

$$u_{N,H1}(x) = 2.604166666666667 \cdot 10^{-5} \cdot x + 2.959280303030271 \cdot 10^{-7} \cdot x^2 - 5.9185606060606 \cdot 10^{-7} \cdot x^3 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$



Slika 47: Primerjava upogibnic

Iz grafov funkcij vidimo, da uporaba H1 interpolacijskih funkcij ni privedla do boljšega ujemanja s točno rešitvijo kot pa originalne SSu interpolacijske funkcije, čeprav celotna potencialna energija  $\Pi$  sedaj znaša  $-8.560988674625039$  J (notranja deformacijska energija  $U$  v elementu znaša  $9.11577900214264$  J, deformacijska energija zunanje obtežbe  $V$  pa znaša  $17.67676767676768$  J).

– *Poprosiranje: iskanje funkcije osnega pomika  $z$  uporabo H2 interpolacijskih funkcij*

Če pa želimo uporabiti H2 interpolacijske funkcije, ki vsebujejo še informacije o drugem odvodu funkcije osnega pomika, ga izračunamo kot:

$$\frac{dEA(x)}{dx} \cdot \frac{du(x)}{dx} + EA(x) \cdot \frac{d^2u(x)}{dx^2} = -q_x(x) \rightarrow EA(x) \cdot \frac{d^2u(x)}{dx^2} = -q_x(x) - \frac{dEA(x)}{dx} \cdot \frac{du(x)}{dx}$$

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = \frac{-q_x(x) - \frac{dEA(x)}{dx} \cdot \frac{du(x)}{dx}}{EA(x)} = \frac{-q_x(x)}{EA(x)} - \frac{\frac{dEA(x)}{dx} \cdot \varepsilon_x(x)}{EA(x)}$$

Ker lahko prve odvode oz. specifične deformacije izračunamo točno iz funkcije osne sile, bodo tako tudi vrednosti drugega odvoda točne.

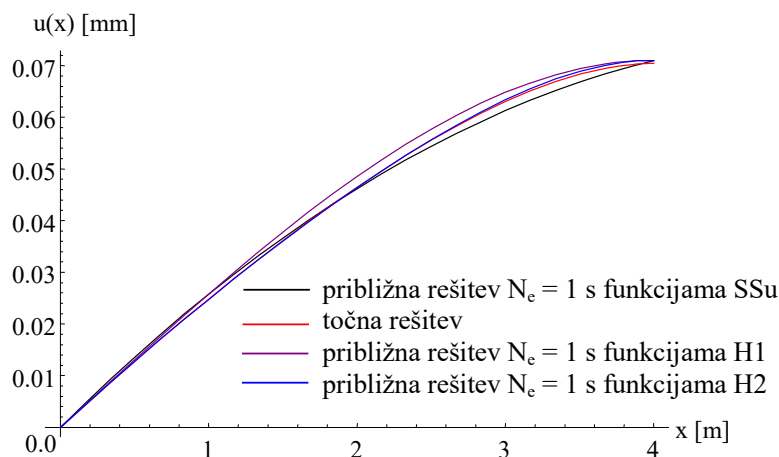
Iskani vozliščni vrednosti znašata  $-2.170138888888893 \cdot 10^{-6}$  ter  $-1.953125 \cdot 10^{-5}$  in tako dobimo polinom pete stopnje:

$$u_{N,H2}(x) = 2.604166666666667 \cdot 10^{-5} \cdot x - 1.0850694444444447 \cdot 10^{-6} \cdot x^2$$

$$- 2.959280303030303 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 + 1.1097301136363665 \cdot 10^{-7} \cdot x^4$$

$$- 2.4660669191919245 \cdot 10^{-8} \cdot x^5 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

ki pa izkazuje odlično ujemanje s točno rešitvijo:



Slika 48: Primerjava upogibnic

Iz grafov funkcij vidimo, da je uporaba H2 interpolacijskih funkcij sedaj privedla do bistveno boljšega ujemanja s točno rešitvijo (ne pa še idealno dobrega, saj napaka na sredini nosilca znaša  $-0.18511082738815363$  %) kot originalne SSu interpolacijske funkcije.

Celotna potencialna energija  $\Pi$  sedaj znaša  $-8.581637685173021$  J (deformacijska energija  $U$  v elementu znaša  $8.63216702863169$  J, deformacijska energija zunanje obtežbe  $V$  pa  $17.213804713804713$  J).

## 2. model - uporaba dveh osnovnih SSu končnih elementov enakih dolžin

Togostna matrika prvega SSu končnega elementa je:

$$[k_1] = 6.314666666666667 \cdot 10^9 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pripadajoči obtežni vektor je:

$$\{f_1\} = \begin{Bmatrix} 106666.66666666666 \text{ N} \\ 93333.33333333334 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

Togostna matrika drugega SSu kočnega elementa pa je:

$$[k_2] = 3.697777777777779 \cdot 10^9 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pripadajoči obtežni vektor je:

$$\{f_2\} = \begin{Bmatrix} 111111.11111111111 \text{ N} \\ 88888.88888888889 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

Za pridobitev neznanih vozliščnih pomikov moramo tako rešiti naslednji sistem enačb:

$$\begin{bmatrix} 10.012444444444447 & -3.697777777777779 \\ -3.697777777777779 & 3.697777777777779 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 111111.11111111111 \text{ N} \\ 88888.88888888889 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

kar vodi do rešitev:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4.6452702702702696 \cdot 10^{-5} \\ 7.049116424116423 \cdot 10^{-5} \end{Bmatrix}$$

Napaka vrednosti pomika na prostem koncu  $9.975629173855642 \cdot 10^{-2} \%$ , na sredini pa  $1.004191740013135 \cdot 10^{-3} \%$ .

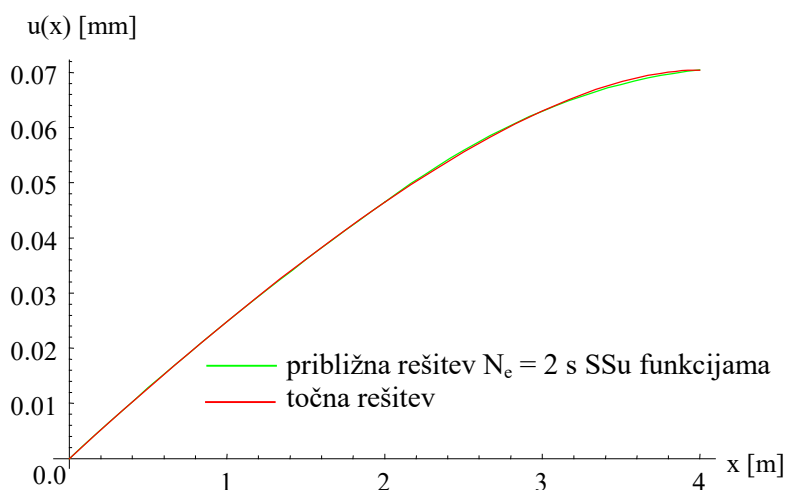
*Poprocesiranje: iskanje funkcije osnega pomika z uporabo interpolacijskih funkcij Ssu končnega elementa*

Približni funkciji osnega pomika v elementih sta:

$$u_{N,1}(x) = 2.6393581081081083 \cdot 10^{-5} \cdot x - 1.5836148648648665 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 \quad 0 \leq x \leq 2 \text{ m}$$

$$u_{N,2}(x) = -1.3643451143451127 \cdot 10^{-5} + 3.90625 \cdot 10^{-5} \cdot x - 4.50721153846154 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 \quad 2 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Različnost obeh funkcij, ki sta zapisani v skupnem koordinatnem sistemu, je posredni pokazatelj, da gre za približni rešitvi, pa čeprav je ujemanje s točno rešitvijo dejansko že zelo dobro.



Slika 49: Primerjava upogibnic

Notranja deformacijska energija  $U$  v elementih znaša  $8.57588357588357 \text{ J}$ , deformacijska energija zunanje obtežbe  $V$  pa znaša  $17.151767151767164 \text{ J}$ . Celotna deformacijska energija  $\Pi$  znaša  $-8.57588357588357 \text{ J}$  (z napako  $-0.08184788794713244 \%$ ).

*Poprocesiranje: iskanje funkcije osnega pomika z Lagrangeovo interpolacijo vrednosti pomika*

Ker so znane tri vrednosti pomika, lahko izračun funkcije osnega pomika izvedemo tudi npr. z Lagrangeovo interpolacijo, ki vodi do enovite funkcije osnega pomika v obliki:

$$u_{N,Lag}(x) = 2.8829911642411637 \cdot 10^{-5} \cdot x - 2.8017801455301447 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

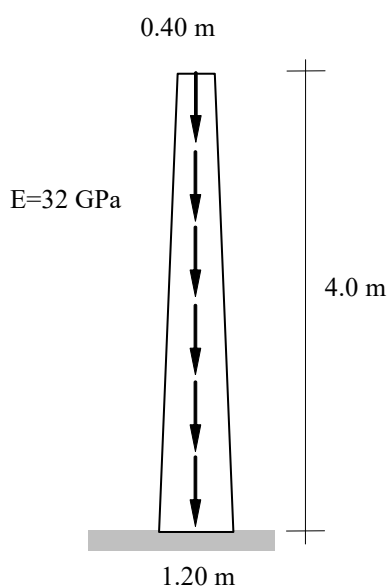
Ta enovita funkcija izkazuje dobro ujemanje s funkcijo osnega pomika, dobljeno z uporabo 1 SSu končnega elementa in pripadajočih interpolacijskih funkcij.

Notranja deformacijska energija  $U$  sedaj znaša 8.566023443882068 J, deformacijska energija zunanje obtežbe  $V$  pa znaša 17.08679833679834 J. Celotna deformacijska energija  $\Pi$  znaša -8.52077489291627 J (z napako -0.7239225754940259 %).

### Primer 3.c\* – Steber z linearno spreminjajočo višino prereza in obremenjen z lastno težo

Izračunati je potrebno vertikalni pomik ter reakcijo AB stebra z linearno spreminjajočo višino prereza, kar predstavlja linearno spreminjajočo se zvezno obtežbo.

Širina stebra je konstantna vzdolž stebra ( $b=0.40$  m), višina prereza pa se spreminja od  $b=1.20$  m na vpetem delu, do 0.4 m na prostem koncu.



Slika 50: Steber z linearno spreminjajočo višino

## Rešitev

Uporaba stopničastega končnega elementa s štirimi odseki

Izračun bomo izvedli z diskretizacijo z enim končnim elementom s štirimi stopničastimi odseki enakih dolžin, za katerega je togostna matrika že znana iz primera 3.b.

Če npr. usmerimo koordinatni sistem od vpetega dela proti prostemu koncu navzgor, lahko zapišemo funkcijo zvezne obtežbe kot:

$$q_x(x) = -A(x) \cdot \rho \cdot g = -b \cdot h(x) \cdot \rho \cdot g \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$q_x(x) = (0.48 - 0.08 \cdot x) \cdot 2500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$q_x(x) = -11772. + 1962 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Za izračun pripadajočega obtežnega vektorja pa sledijo koeficienti:

$$\beta_{q1} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{q_{x,1} \cdot (\bar{x}_1 - \bar{x}_0)^2}{EA_1} + \frac{q_{x,2} \cdot (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2}{EA_2} + \frac{q_{x,3} \cdot (\bar{x}_3 - \bar{x}_2)^2}{EA_3} + \frac{q_{x,4} \cdot (\bar{x}_4 - \bar{x}_3)^2}{EA_4} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{q_x(0.5 \text{ m}) \cdot (1.0 \text{ m})^2}{32 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.44 \text{ m}^2} + \frac{q_x(1.5 \text{ m}) \cdot (1.0 \text{ m})^2}{32 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.36 \text{ m}^2} + \frac{q_x(2.5 \text{ m}) \cdot (1.0 \text{ m})^2}{32 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.28 \text{ m}^2} + \frac{q_x(3.5 \text{ m}) \cdot (1.0 \text{ m})^2}{32 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.20 \text{ m}^2} \right)$$

$$= -3.83203125 \cdot 10^{-7} \cdot 4 = -1.5328125 \cdot 10^{-6}$$

ter

$$\beta_{q2} = q_{x,1} \cdot \frac{(\bar{L}_1 - \bar{L}_0) \cdot (\bar{L}_2 - \bar{L}_1)}{EA_2} + q_{x,1} \cdot \frac{(\bar{L}_1 - \bar{L}_0) \cdot (\bar{L}_3 - \bar{L}_2)}{EA_3} + q_{x,1} \cdot \frac{(\bar{L}_1 - \bar{L}_0) \cdot (\bar{L}_4 - \bar{L}_3)}{EA_4}$$

$$+ q_{x,2} \cdot \frac{(\bar{L}_2 - \bar{L}_1) \cdot (\bar{L}_3 - \bar{L}_2)}{EA_3} + q_{x,2} \cdot \frac{(\bar{L}_2 - \bar{L}_1) \cdot (\bar{L}_4 - \bar{L}_3)}{EA_4} + q_{x,3} \cdot \frac{(\bar{L}_3 - \bar{L}_2) \cdot (\bar{L}_4 - \bar{L}_3)}{EA_4}$$

$$= -9.3671875 \cdot 10^{-7} - 1.204352678571429 \cdot 10^{-6} - 1.68609375 \cdot 10^{-6} - 9.853794642857146 \cdot 10^{-7}$$

$$- 1.37953125 \cdot 10^{-6} - 1.07296875 \cdot 10^{-6} = -7.265044642857143 \cdot 10^{-6}$$

Rezultanta nadomestnih osnih obtežb (uporabimo jo lahko samo za kontrolo modeliranja obtežbe), ki je enaka dejanski obtežbi, je:

$$\beta_q = \sum_{i=1}^{N_s} q_{x,i} \cdot (\bar{x}_i - \bar{x}_{i-1}) = q_x(0.5 \text{ m}) \cdot 1.0 \text{ m} + q_x(1.5 \text{ m}) \cdot 1.0 \text{ m} + q_x(2.5 \text{ m}) \cdot 2.0 \text{ m} + q_x(3.5 \text{ m}) \cdot 3.0 \text{ m}$$

$$= -31392 \text{ N}$$

Obtežni vektor je tako:

$$\begin{aligned} \{F_e\} &= \begin{Bmatrix} \frac{\beta_{q1} + \beta_{q2}}{\beta_1} \\ \beta_q - \frac{\beta_{q1} + \beta_{q2}}{\beta_1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-1.5328125 \cdot 10^{-6} - 7.265044642857143 \cdot 10^{-6}}{4.282518456700716 \cdot 10^{-10}} \\ -31392 \text{ N} - \frac{-1.5328125 \cdot 10^{-6} - 7.265044642857143 \cdot 10^{-6}}{4.282518456700716 \cdot 10^{-10}} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} -20667.50847457627 \text{ N} \\ -10724.491525423731 \text{ N} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Togostna matrika edinega stopničastega elementa je:

$$[k_1] = \begin{bmatrix} 2.3491525423728814 & -2.3491525423728814 \\ -2.3491525423728814 & 2.3491525423728814 \end{bmatrix} \cdot 10^9$$

in za izračun neznanega pomika prostega konca tako rešimo eno enačbo z eno neznaniko:

$$2.3491525423728814 \cdot 10^9 \cdot u_2 = -10724.491525423731$$

kar vodi do:

$$u_2 = -4.565259740259742 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

kar je identičen rezultat, kot bi bil dobljen s štirimi standardnimi samostojnimi končnimi elementi enakih dolžin. Predstavlja približno vrednost (z 2.652774281854127 % napake).

*Poprocesiranje: iskanje vektorja sekundarnih spremenljivk in vozliščnih notranjih statičnih količin*

Za edini končni element sledi:

$$\begin{aligned} \{q_1\} &= [k_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\} \\ &= \begin{bmatrix} 2.34915254237 \cdot 10^9 & -2.34915254237 \cdot 10^9 \\ -2.34915254237 \cdot 10^9 & 2.34915254237 \cdot 10^9 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -4.565259740259742 \cdot 10^{-6} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 31392 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Tako je vertikalna reakcija v podpori usmerjena navzgor, vozliščni vrednosti osne sile pa sta:

$$\begin{Bmatrix} N_{x,1} \\ N_{x,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -31392 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

*Poprocesiranje: iskanje medvoziščnih vrednosti osne sile*

Razporeditev osne sile znotraj elementa je zaradi odsekovno modeliranih obtežb sedaj odsekovno linearna. Vrednost v začetnem vozlišču znaša:

$$N_x(\bar{x}_0) = N_x(0) = -31392 \text{ N}$$

Vrednosti na stikih med odseki pa so:

$$N_x(\bar{x}_1) = N_x(\bar{x}_0) - q_x \cdot (\bar{x}_1 - \bar{x}_0) = -31392 \text{ N} - q_x(0.5 \text{ m}) \cdot 1.0 \text{ m} = -20601 \text{ N}$$

$$N_x(\bar{x}_2) = N_x(\bar{x}_1) - q_x \cdot (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) = -20601 \text{ N} - q_x(1.5 \text{ m}) \cdot 1.0 \text{ m} = -11772 \text{ N}$$

$$N_x(\bar{x}_3) = N_x(\bar{x}_2) - q_x \cdot (\bar{x}_3 - \bar{x}_2) = -11772 \text{ N} - q_x(2.5 \text{ m}) \cdot 1.0 \text{ m} = -4905 \text{ N}$$

$$N_x(\bar{x}_4) = N_x(\bar{x}_3) - q_x \cdot (\bar{x}_4 - \bar{x}_3) = -4905 \text{ N} - q_x(3.5 \text{ m}) \cdot 1.0 \text{ m} = 0 \text{ N}$$

Zadnja vrednost je bila izračunana zgolj zaradi formalnosti oz. kontrole.

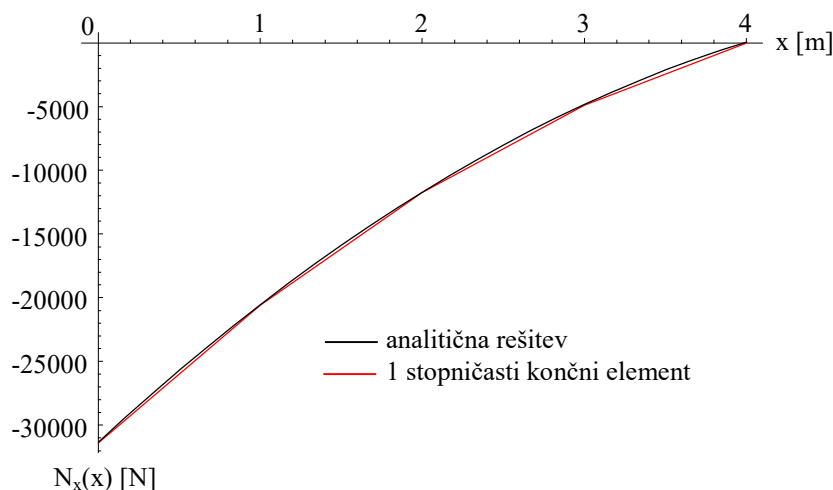
S pomočjo diskretnih vrednostih na koncih posameznih odsekov lahko poiščemo odsekovno linearne (in s tem približne) razporeditve osne sile znotraj posameznih odsekov končnega elementa:

$$N_{x,1N}(x) = -31392 + 10791 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ m}$$

$$N_{x,2N}(x) = -29430 + 8829 \cdot x \quad 1 \text{ m} \leq x \leq 2 \text{ m}$$

$$N_{x,3N}(x) = -25506 + 6867 \cdot x \quad 2 \text{ m} \leq x \leq 3 \text{ m}$$

$$N_{x,3N}(x) = -19620 + 4905 \cdot x \quad 3 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$



Slika 51: Približna razporeditev osne sile

Ker pa je točna funkcija osne sile enovita za celotni steber, lahko vse izračunane diskretne vrednosti naenkrat uporabimo v (npr.) Lagrangeovi interpolaciji, kar vodi do enovite funkcije:

$$N_{x,N}(x) = -31392 + 11772 \cdot x - 981 \cdot x^2 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

ki pa je enaka točni rešitvi.

*Poprocesiranje: iskanje funkcije osnega pomika z uporabo diferencialne zveze*

Čeprav je mogoče kvaliteten približek razporeditve osnega pomika dobiti tudi z zgoščevanjem števila odsekov znotraj istega končnega elementa ter linearnim povezovanjem pomikov znotraj posameznega odseka, poznavanje enovite točne funkcije osne sile omogoči izračun enovite točne funkcije osnega pomika z uporabo diferencialne zveze med osno silo in osnim pomikom:

$$\begin{aligned} \frac{du_o(x)}{dx} &= \frac{N_x(x)}{A(x) \cdot E} \rightarrow u_o(x) = \int \frac{N_x(x)}{A(x) \cdot E} \cdot dx \\ u_o(x) &= \int \frac{-31392 + 11772 \cdot x - 981 \cdot x^2}{(0.48 - 0.08 \cdot x) \cdot 32 \cdot 10^9} \cdot dx = \int \frac{-31392 + 11772 \cdot x - 981 \cdot x^2}{1.536 \cdot 10^{10} - 2.56 \cdot 10^9 \cdot x} \cdot dx \\ &= -2.29921875 \cdot 10^{-6} \cdot x + 1.916015625 \cdot 10^{-7} \cdot x^2 - 1.5328125 \cdot 10^{-6} \cdot \ln(6-x) + C_1 \end{aligned}$$

Za določitev integracijske konstante imamo na razpolago dva kinematična robna pogoja (pri čemer oba ne vodita do enake rešitve).

Na vpetem koncu velja (in je točna informacija):

$$u_o(0) = 0$$

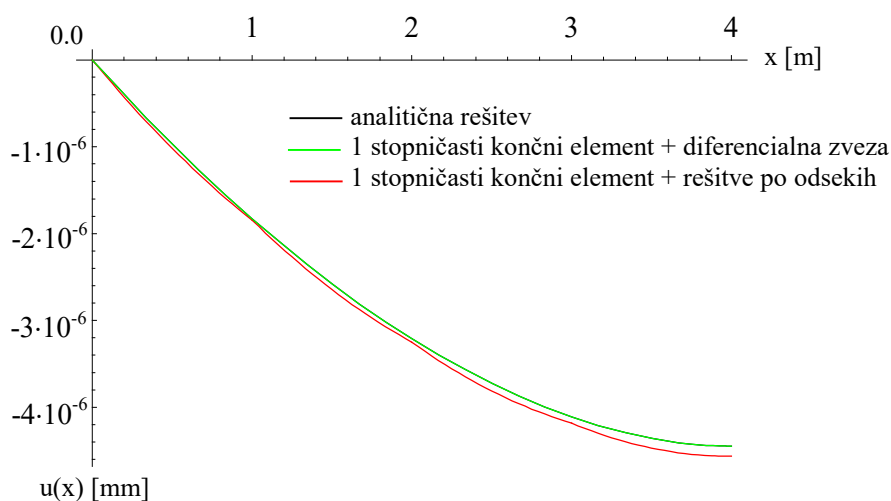
kar vodi do:

$$0 = -2.29921875 \cdot 10^{-6} \cdot 0 + 1.916015625 \cdot 10^{-7} \cdot 0^2 - 1.5328125 \cdot 10^{-6} \cdot \ln(6-0) + C_1$$

$$C_1 = 2.746431311426128 \cdot 10^{-6}$$

in tako sledi točna funkcija osnega pomika:

$$u_o(x) = 2.746431311426128 \cdot 10^{-6} - 2.29921875 \cdot 10^{-6} \cdot x + 1.916015625 \cdot 10^{-7} \cdot x^2 - 1.5328125 \cdot 10^{-6} \cdot \ln(6-x) \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$



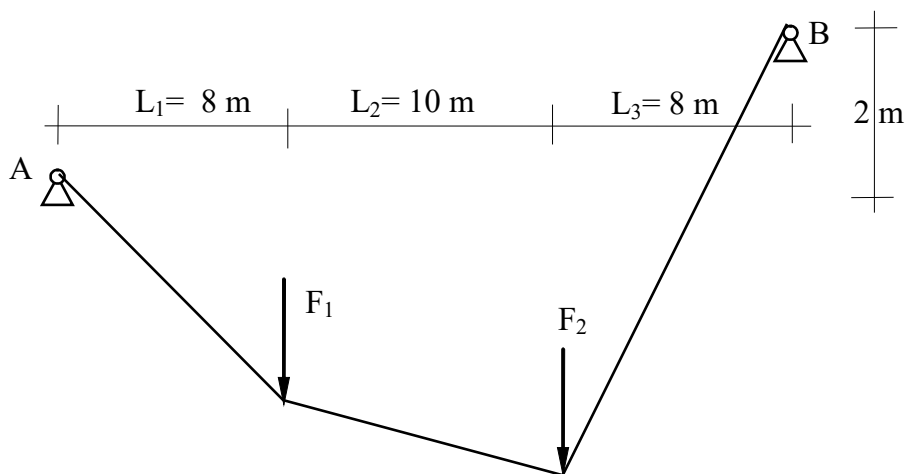
Slika 52: Primerjava analitične in numerične rešitve

V kolikor pa konstanto določimo na osnovi približne vrednosti pomika na prostem koncu, dobimo približno rešitev za funkcijo osnega pomika (ki celo ne izpolnjuje pogoja pomika na vpetem koncu).

#### Primer 4.a – Kabel z znano silo H

Kabel na skici je obremenjen s koncentriranimi vertikalnima silama  $F_1=10$  kN in  $F_2=20$  kN. Razdalja med prvo silo in levo podporo znaša  $L_1=8$  m, med silama znaša razdalja  $L_2=10$  m, razdalja med silo  $F_2$  in desno podporo pa znaša  $L_3= 8$  m; pri čemer se desna

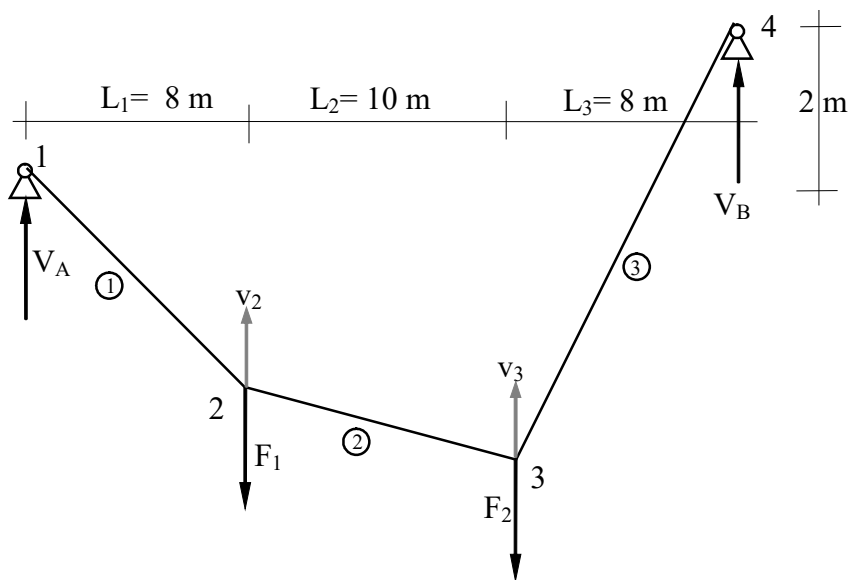
podpora nahaja 2 m višje od leve. Horizontalna komponenta sile v kablu znaša  $H=40$  kN. Izračunaj reakcije v podporah, položaj kabla (veržnico) ter osne in vertikalne sile v kablu.



Slika 53: Obravnavani kabel

## Rešitev

Izbrana je naslednja (najmanjša mogoča) diskretizacija s tremi končnimi elementi, saj razporeditev kabla med silami poteka linearno:



Slika 54: Izbrana diskretizacija

Togostni matriki prvega in tretjega končnega elementa sta:

$$[k_1] = [k_3] = \frac{H}{L_1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$$

za drugi element pa sledi:

$$[k_2] = \frac{H}{L_2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

Celotne enačbe »konstrukcije« so tako:

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_A \\ -10 \\ -10 \\ V_B \end{Bmatrix}$$

Enačbe vsebujejo štiri neznanke: dva položaja (oz. primarni spremenljivki) ter dve reakciji, in če je izhodišče koordinatnega sistema postavljeno npr. v levo podporno, dobijo obliko:

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ 2.0 \text{ m} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_A \\ -F_1 \\ -F_2 \\ V_B \end{Bmatrix}$$

Zapisani sistem je sicer že rešljiv, ker pa se neznanke nahajajo na obeh straneh enačb, je bolj priročno, če najprej poiščemo samo neznan primarni spremenljivki, kar storimo s črtanjem vrstic, ki pripadata znanima vrednostima, ter prvega stolpca:

$$\begin{bmatrix} \overset{|}{\cancel{5}} & \overset{|}{\cancel{-5}} & \overset{|}{\cancel{0}} & \overset{|}{\cancel{0}} \\ -5 & 9 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 9 & -5 \\ \underset{|}{\cancel{0}} & \underset{|}{\cancel{0}} & \underset{|}{\cancel{-5}} & \underset{|}{\cancel{-5}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \overset{|}{\cancel{0}} \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \underset{|}{\cancel{2.0 \text{ m}}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overset{|}{\cancel{V_A}} \\ -F_1 \\ -F_2 \\ \underset{|}{\cancel{V_B}} \end{Bmatrix}$$

Tako sledijo enačbe:

$$\begin{bmatrix} 9 & -4 & 0 \\ -4 & 9 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_1 \\ -F_2 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 9 & -4 & 0 \\ -4 & 9 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ 2.0 \text{ m} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_1 \\ -F_2 \end{Bmatrix}$$

in po preureditvi sledi oblika

$$\begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -5 \end{Bmatrix} \cdot 2.0 \text{ m} = \begin{Bmatrix} -F_1 \\ -F_2 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10 \\ -20 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ -5 \end{Bmatrix} \cdot 2.0 \text{ m} = \begin{Bmatrix} -10 \\ -10 \end{Bmatrix}$$

iz katere sledita položaja kabla pod silama:

$$\begin{Bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.0 \text{ m} \\ -2.0 \text{ m} \end{Bmatrix}$$

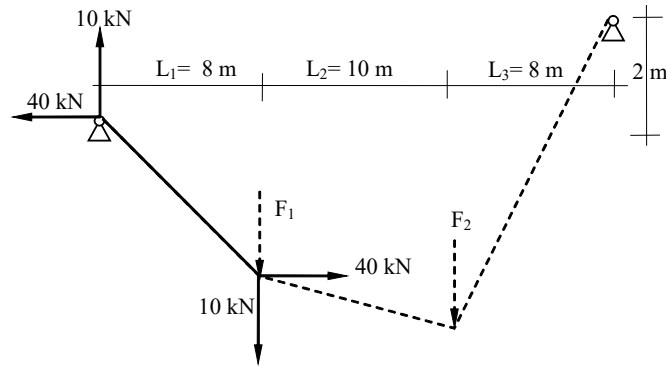
ki sta točni vrednosti.

*Poprocesiranje: iskanje sekundarnih spremenljivk in reakcij*

Za prvi končni element sledi vektor sekundarnih spremenljivk:

$$\{Q_1\} = \frac{H}{L_1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} - \frac{p_{v,e} \cdot L_e}{2} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -2.0 \text{ m} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \text{ kN} \\ -10 \text{ kN} \end{Bmatrix} \rightarrow \{V_1\} = \begin{Bmatrix} -10 \text{ kN} \\ -10 \text{ kN} \end{Bmatrix}$$

ki pokaže, da je vertikalna sila (= reakcija  $V_A$ ) v levi podpori enaka 10 kN in je usmerjena navzgor, vertikalna sila v tem delu kabla v točki tik levo od sile  $F_1$  pa usmerjena navzdol (kabel je tegnjen).



Slika 55: Sekundarne spremenljivke prvega končnega elementa

Za drugi končni element sledi:

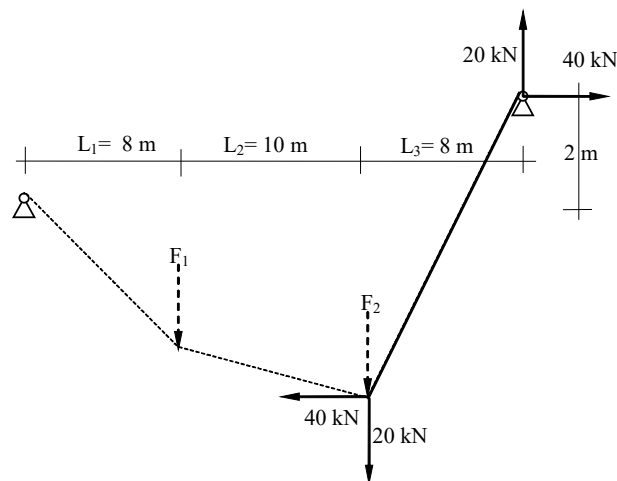
$$\{Q_2\} = \frac{H}{L_2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \end{Bmatrix} - \frac{p_{v,e} \cdot L_e}{2} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -2.0 \text{ m} \\ -2.0 \text{ m} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \text{ kN} \\ 0 \text{ kN} \end{Bmatrix} \rightarrow \{V_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \text{ kN} \\ 0 \text{ kN} \end{Bmatrix}$$

Vertikalni sili v koncih tega dela kabla sta tako slučajni enaki 0 (kar nakazuje, da je kabel v tem delu vodoraven).

Za tretji končni element sledi:

$$\{Q_3\} = \frac{H}{L_3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y_3 \\ Y_4 \end{Bmatrix} - \frac{p_{v,e} \cdot L_e}{2} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -2.0 \text{ m} \\ 2.0 \text{ m} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -20 \text{ kN} \\ 20 \text{ kN} \end{Bmatrix} \rightarrow \{V_3\} = \begin{Bmatrix} 20 \text{ kN} \\ 20 \text{ kN} \end{Bmatrix}$$

ki pokaže, da je vertikalna sila (= reakcija  $V_B$ ) v desni podpori enaka 20 kN in je tudi usmerjena navzgor, medtem ko je vertikalna sila v tem delu kabla v točki tik desno od sile  $F_2$  usmerjena navzgor.



Slika 56: Sekundarne spremenljivke tretjega končnega elementa

Vertikalni reakciji v podporah sta tako 10 kN oz. 20 kN in sta usmerjeni navzgor. Prepričamo se lahko, da je izpolnjeno globalno vertikalno ravnotežje vseh sil.

*Poprocesiranje: iskanje funkcije verižnice po elementih s H0 interpolacijskimi funkcijami*

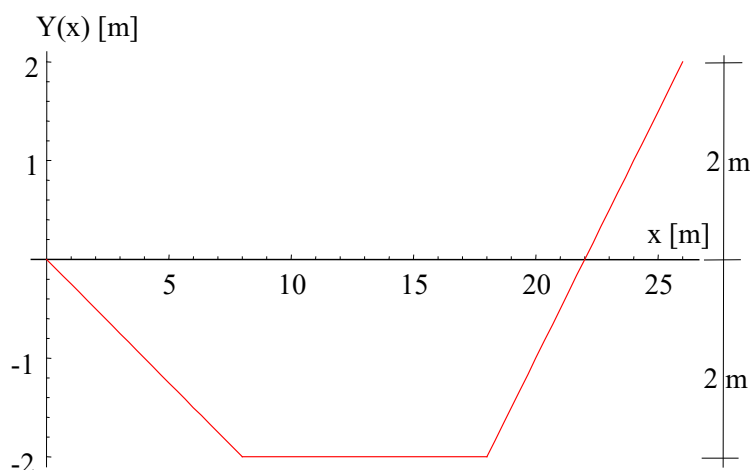
Približne funkcije položaja po elementih so tako (v globalnem koordinatnem sistemu):

$$v_{1,N}(x) = Y_1 \cdot \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + Y_2 \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 0 \cdot \frac{8 - x}{8 - 0} + (-2.0 \text{ m}) \cdot \frac{x - 0}{8 - 0} = -\frac{x}{4} \quad 0 \leq x \leq 8 \text{ m}$$

$$v_{2,N}(x) = Y_2 \cdot \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} + Y_3 \cdot \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} = (-2.0 \text{ m}) \cdot \frac{18 - x}{18 - 8} + (-2.0 \text{ m}) \cdot \frac{x - 8}{18 - 8} = -2.0 \text{ m} \quad 8 \text{ m} \leq x \leq 18 \text{ m}$$

$$v_{3,N}(x) = Y_3 \cdot \frac{x_4 - x}{x_4 - x_3} + Y_4 \cdot \frac{x - x_3}{x_4 - x_3} = (-2.0 \text{ m}) \cdot \frac{26 - x}{26 - 18} + 2.0 \text{ m} \cdot \frac{x - 18}{26 - 18} = -11 + \frac{x}{2} \quad 18 \text{ m} \leq x \leq 26 \text{ m}$$

in predstavljajo točne rešitve.



Slika 57: Izračunane funkcije položaja kabla

Ker kabel ni obremenjen z zvezno obtežbo, je funkcija verižnice odsekovno linearna, in smo tako že z osnovno linearno interpolacijo znotraj posameznega končnega elementa dobili točne rešitve, saj so tudi vozliščne vrednosti točne.

*Poprocesiranje: iskanje funkcije vertikalne sile*

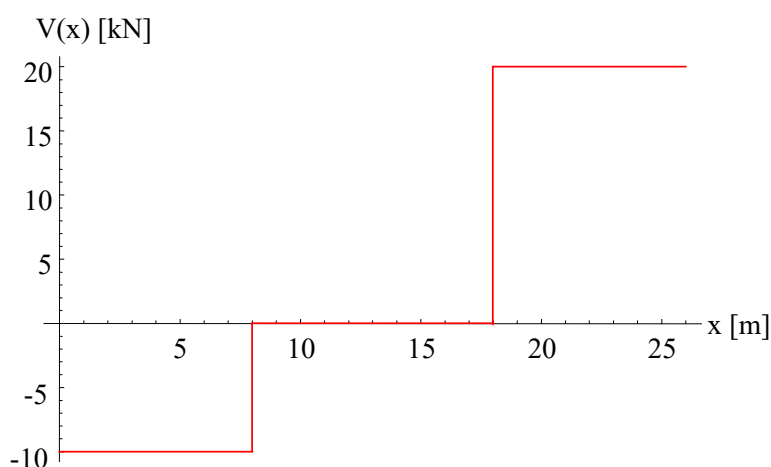
Približne funkcije vertikalne sile po elementih so tako (v globalnem koordinatnem sistemu):

$$V_{1,N}(x) = V_1 \cdot \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + V_2 \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = -10 \cdot \frac{8 - x}{8 - 0} + (-10) \cdot \frac{x - 0}{8 - 0} = -10 \text{ kN} \quad 0 \leq x \leq 8 \text{ m}$$

$$V_{2,N}(x) = V_2 \cdot \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} + V_3 \cdot \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} = 0 \cdot \frac{18 - x}{18 - 8} + 0 \cdot \frac{x - 8}{18 - 8} = 0 \quad 8 \text{ m} \leq x \leq 18 \text{ m}$$

$$V_{3,N}(x) = V_3 \cdot \frac{x_4 - x}{x_4 - x_3} + V_4 \cdot \frac{x - x_3}{x_4 - x_3} = 20 \cdot \frac{26 - x}{26 - 18} + 20 \cdot \frac{x - 18}{26 - 18} = 20 \text{ kN} \quad 18 \text{ m} \leq x \leq 26 \text{ m}$$

in predstavljajo točne rešitve.



Slika 58: Razporeditev vertikalne sile v kablju

*Opomba:* enake točne funkcije za vertikalno silo v tem primeru sledijo tudi z uporabo diferencialne zveze:

$$V_i(x) = H \cdot \frac{dv_i(x)}{dx}$$

ki pa v primerih zvezne obtežbe daje slabše rezultate, saj je funkcija položaja  $v_i(x)$ , izračunana z linearno interpolacijo, zgolj približek.

*Poprocesiranje:* iskanje funkcije osne sile

Funkcije osne sile izračunamo s pomočjo zveze med vodoravno in vertikalno silo:

$$N_x(x)^2 = V(x)^2 + H^2$$

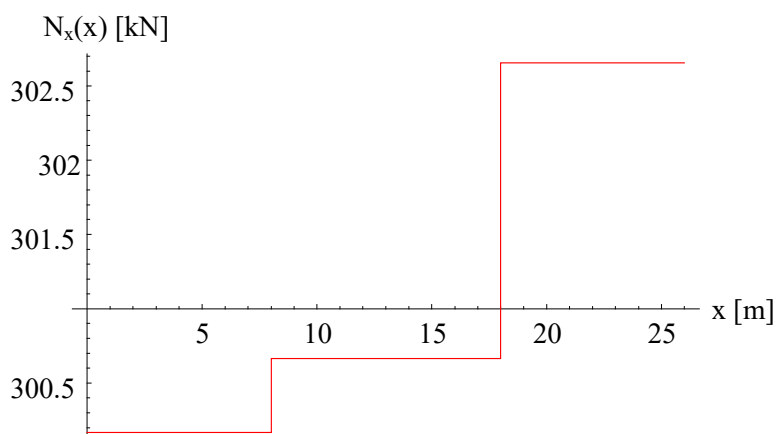
kar vodi do funkcij (v globalnem koordinatnem sistemu):

$$N_{x1,N}(x) = 10 \text{ kN} \cdot \sqrt{17} = 41.23105625617661 \text{ kN} \quad 0 \leq x \leq 8 \text{ m}$$

$$N_{x2,N}(x) = 40 \text{ N} \quad 8 \text{ m} \leq x \leq 18 \text{ m}$$

$$N_{x3,N}(x) = 20 \text{ kN} \cdot \sqrt{5} = 44.721359549995796 \text{ kN} \quad 18 \text{ m} \leq x \leq 26 \text{ m}$$

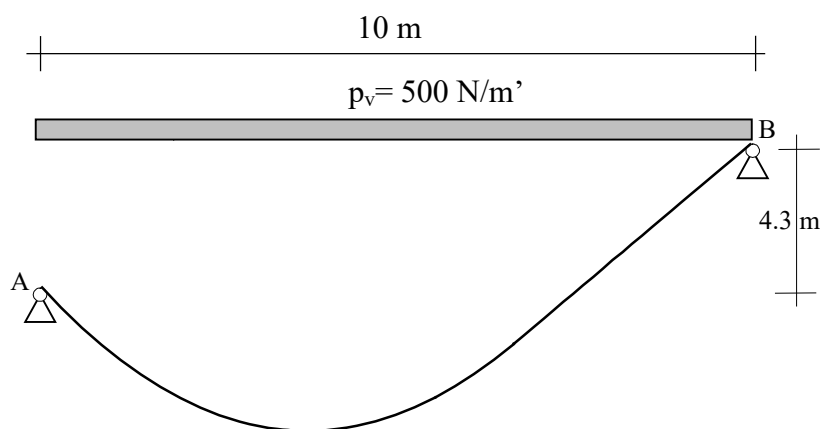
in predstavljajo točne vrednosti.



Slika 59: Razporeditev osne sile v kablu

#### Primer 4.b – Kabel z enakomerno zvezno obtežbo

Kabel na skici (višinska razlika med podporama znaša 4.3 m) je obremenjen z enakomerno zvezno obtežbo  $p_v = 500 \text{ N/m}$  in napet s horizontalno silo  $H = 2100 \text{ N}$ . Izračunaj upogibnico (= položaj kabla), reakcije v podporah, sile v kablu, maksimalni naklon kabla, ter mesto in pozicijo najnižje točke kabla.

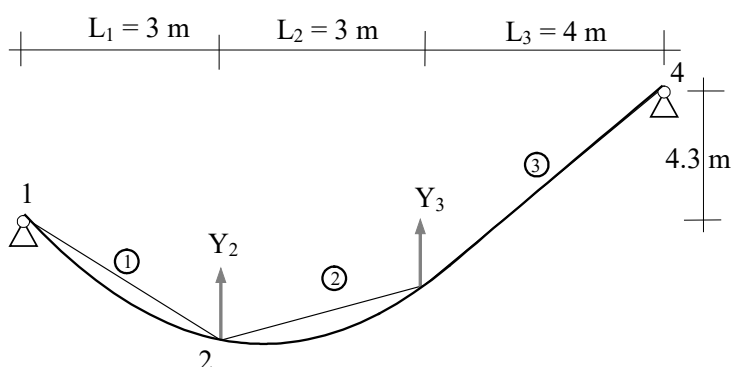


Slika 60: Obravnavani kabel

## Rešitev

### 1. diskretizacija – uporaba treh končnih elementov

Ker je jasno, da funkcija položaja kabla ne bo (odsekovno) linearna, pričakujemo, da bomo z večjim številom končnih elementov dobili kvalitetnejši približek oblike upogibnice. Zato je izbrana diskretizacija z dvema končnima elementoma dolžine 3 m in tretjim dolžine 4 m, pri čemer je bila dolžina prvega elementa izbrana tako, da bi skupno vozlišče z drugim elementom bilo čim bližje (sicer neznani) lokaciji, kjer kabel doseže svoj minimalni položaj:



Slika 61: Izbrana diskretizacija

Togostni matriki prvega in drugega končnega elementa sta:

$$[k_1] = [k_2] = \frac{H}{L_1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 700 & -700 \\ -700 & 700 \end{bmatrix}$$

za tretji element pa sledi:

$$[k_3] = \frac{H}{L_3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 525 & -525 \\ -525 & 525 \end{bmatrix}$$

Obtežna vektorja sta:

$$\{f_1\} = \{f_2\} = \frac{p_v \cdot L_1}{2} = \begin{Bmatrix} -750 \\ -750 \end{Bmatrix}$$

ter

$$\{f_3\} = \frac{p_v \cdot L_3}{2} = \begin{Bmatrix} -1000 \\ -1000 \end{Bmatrix}$$

Tako sledijo enačbe »konstrukcije« (izhodišče koordinatnega sistema je postavljeno npr. v levo podporo):

$$\begin{bmatrix} 700 & -700 & 0 & 0 \\ -700 & 1400 & -700 & 0 \\ 0 & -700 & 1225 & -525 \\ 0 & 0 & -525 & 525 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_A - 750 \\ -750 - 750 \\ -750 - 1000 \\ V_B - 1000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_A - 750 \\ -1500 \\ -1750 \\ V_B - 1000 \end{Bmatrix}$$

Po upoštevanju znanih položajev v podpori sledi sistem:

$$\begin{bmatrix} 1400 & -700 & 0 \\ -700 & 1225 & -525 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1500 \\ -1750 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1400 & -700 & 0 \\ -700 & 1225 & -525 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ 4.3 \text{ m} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1500 \\ -1750 \end{Bmatrix}$$

in po njegovi preureditvi dobimo dve enačbi:

$$\begin{bmatrix} 1400 & -700 \\ -700 & 1225 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -525 \end{Bmatrix} \cdot 4.3 = \begin{Bmatrix} -1500 \\ -1750 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1400 & -700 \\ -700 & 1225 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1500 \\ -1750 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ -525 \end{Bmatrix} \cdot 4.3 = \begin{Bmatrix} -1500 \\ 507.5 \end{Bmatrix}$$

iz katerih sledita položaja kabla v vozliščih:

$$\begin{Bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.21 \text{ m} \\ -0.2771428571428572 \text{ m} \end{Bmatrix}$$

ki sta točna.

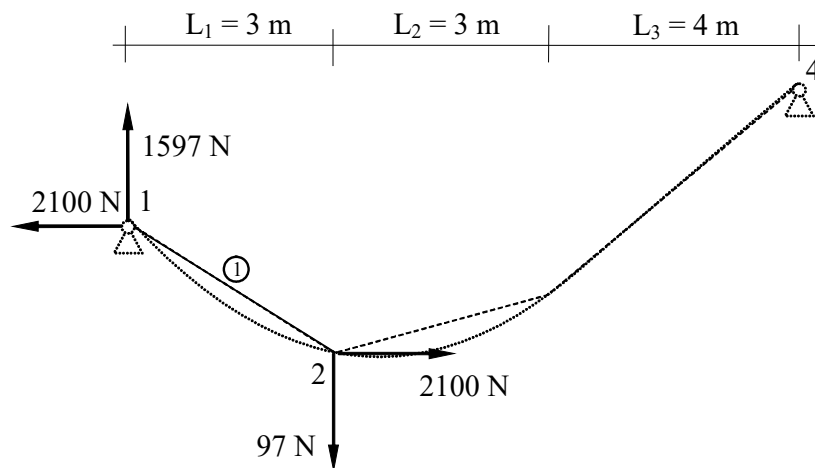
S tem modelom izračunani približek najnižjega položaja kabla nastopi v drugem vozlišču, ki se nahaja 1.21 m nižje od leve podpore.

*Poprocesiranje – iskanje sekundarnih spremenljivk in reakcij*

Za prvi končni element sledi vektor sekundarnih spremenljivk:

$$\{Q_1\} = [k_1] \cdot \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} - \{f_1\} = \begin{bmatrix} 700 & -700 \\ -700 & 700 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -1.21 \text{ m} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -750 \\ -750 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1597 \text{ N} \\ -97 \text{ N} \end{Bmatrix} \rightarrow \{V_1\} = \begin{Bmatrix} -1597 \text{ N} \\ -97 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

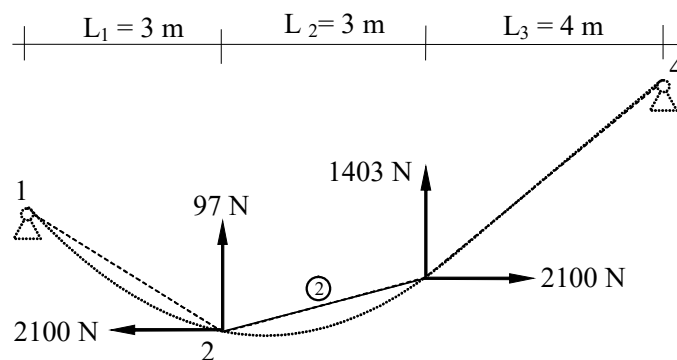
ki pokaže, da je vertikalna sila (= reakcija  $V_A$ ) v levi podpori enaka 1597 N in je usmerjena navzgor, vertikalna sila v desnem koncu prvega elementa kabla pa je usmerjena navzdol.



Slika 62: Sekundarne spremenljivke prvega končnega elementa

Za drugi končni element sledi:

$$\{Q_2\} = [k_2] \cdot \begin{Bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} - \{f_2\} = \begin{bmatrix} 700 & -700 \\ -700 & 700 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -1.21 \text{ m} \\ -0.2771 \text{ m} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -750 \\ -750 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 97 \text{ N} \\ 1403 \text{ N} \end{Bmatrix} \rightarrow \{V_2\} = \begin{Bmatrix} -97 \text{ N} \\ 1403 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

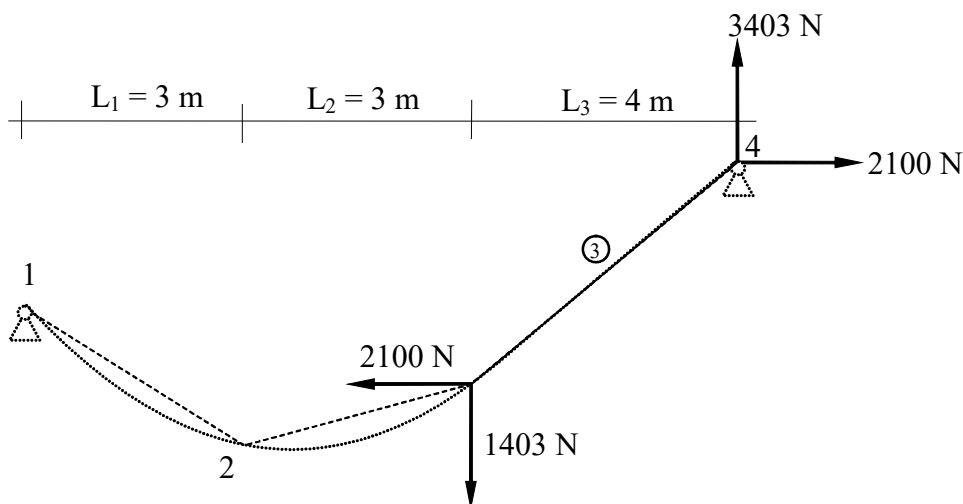


Slika 63: Sekundarne spremenljivke drugega končnega elementa

Za tretji končni element sledi:

$$\{Q_3\} = [k_3] \cdot \begin{Bmatrix} v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} - \{f_3\} = \begin{bmatrix} 525 & -525 \\ -525 & 525 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -0.2771 \text{ m} \\ 4.3 \text{ m} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -1000 \\ -1000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1403 \text{ N} \\ 3403 \text{ N} \end{Bmatrix} \rightarrow \{V_3\} = \begin{Bmatrix} 1403 \text{ N} \\ 3403 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

ki pokaže, da je vertikalna sila (= reakcija  $V_B$ ) v desni podpori enaka 3403 N in je tudi usmerjena navzgor, medtem ko je vertikalna sila v začetnem vozlišču elementa kabla usmerjena navzdol.



Slika 64: Sekundarne spremenljivke tretjega končnega elementa

Vertikalni reakciji v podporah sta tako 1597 N oz. 3403 N in sta usmerjeni navzgor. Njuna vsota znaša 5000 N in prepričamo se lahko, da je izpolnjeno globalno vertikalno ravnotežje vseh sil.

*Poprocesiranje: iskanje funkcije verižnice po elementih s HO interpolacijskimi funkcijami*

Približne funkcije položaja po elementih so tako (v globalnem koordinatnem sistemu):

$$v_{1,N}(x) = Y_1 \cdot \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + Y_2 \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 0 \cdot \frac{3 - x}{3 - 0} + (-1.21 \text{ m}) \cdot \frac{x - 0}{3 - 0}$$

$$= -0.40333333333333 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 3 \text{ m}$$

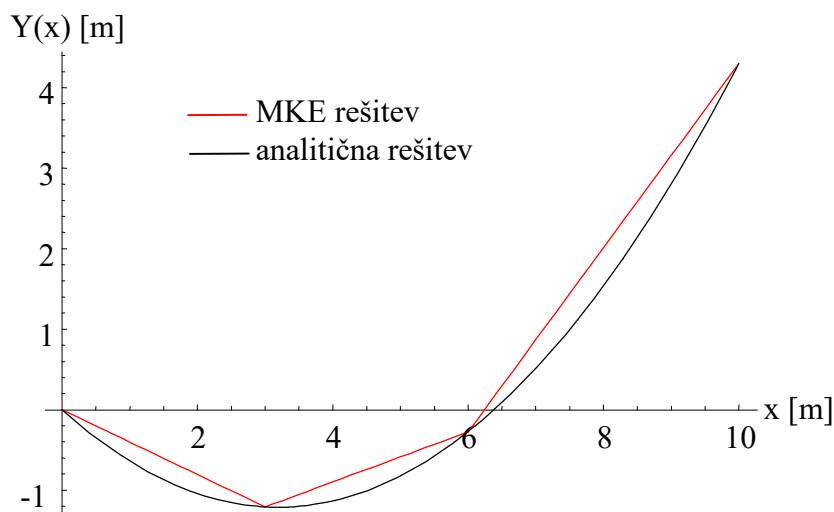
$$v_{2,N}(x) = Y_2 \cdot \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} + Y_3 \cdot \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} = (-1.21 \text{ m}) \cdot \frac{6 - x}{6 - 3} + (-0.2771 \text{ m}) \cdot \frac{x - 3}{6 - 3}$$

$$= -2.142857142857143 + 0.3109523809523809 \cdot x \quad 3 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$$

$$v_{3,N}(x) = Y_3 \cdot \frac{x_4 - x}{x_4 - x_3} + Y_4 \cdot \frac{x - x_3}{x_4 - x_3} = (-0.2771 \text{ m}) \cdot \frac{26 - x}{26 - 18} + 0 \cdot \frac{x - 18}{26 - 18}$$

$$= -7.142857142857142 + 1.1442857142857144 \cdot x \quad 6 \text{ m} \leq x \leq 10 \text{ m}$$

in niso točne, saj so (odsekovno) linearne funkcije, medtem ko je prava funkcija položaja kvadratna funkcija.



Slika 65: Izračunane funkcije položaja kabla znotraj končnih elementov

Ker je kabel obremenjen z zvezno obtežbo, točna funkcija verižnice ni linearna, in smo z interpolacijo znotraj posameznega končnega elementa dobili samo približne (linearne) rešitve, pa čeprav so vozliščne vrednosti točne. Kljub opaznemu razlikovanju med rešitvama pa je jasno, da bi (zaradi točnih vozliščnih vrednosti pomika) s povečevanjem števila končnih elementov dosegli boljše ujemanje rezultatov tudi znotraj elementov (vendar ne tudi idealno točnih).

*Poprocesiranje: iskanje funkcije vertikalne sile*

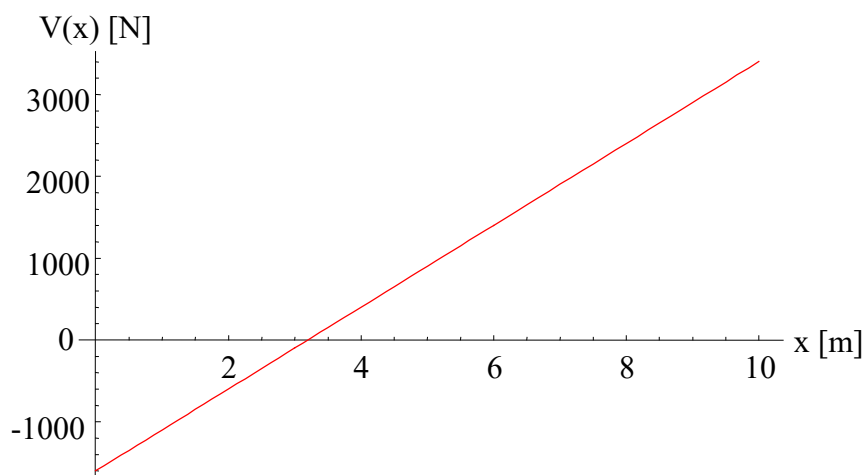
Približne funkcije vertikalne sile po elementih so (v globalnem koordinatnem sistemu):

$$V_{1,N}(x) = V_1 \cdot \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + V_2 \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = (-1597 \text{ N}) \cdot \frac{3 - x}{3 - 0} + (-97 \text{ N}) \cdot \frac{x - 0}{3 - 0} = -1597 \text{ N} + 500 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 3 \text{ m}$$

$$V_{2,N}(x) = V_2 \cdot \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} + V_3 \cdot \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} = (-97 \text{ N}) \cdot \frac{6 - x}{6 - 3} + 1403 \text{ N} \cdot \frac{x - 3}{6 - 3} = -1597 \text{ N} + 500 \cdot x \quad 3 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$$

$$V_{3,N}(x) = V_3 \cdot \frac{x_4 - x}{x_4 - x_3} + V_4 \cdot \frac{x - x_3}{x_4 - x_3} = 1403 \text{ N} \cdot \frac{10 - x}{10 - 6} + 3403 \text{ N} \cdot \frac{x - 6}{10 - 6} = -1597 \text{ N} + 500 \cdot x \quad 6 \text{ m} \leq x \leq 10 \text{ m}$$

Vse tri funkcije so medsebojno enake in predstavljajo točno rešitev.



Slika 66: Razporeditev vertikalne sile v kablju

*Opomba:* s pomočjo diferencialne zveze

$$V_i(x) = H \cdot \frac{dv_i(x)}{dx}$$

sedaj ne sledijo enake funkcije prečne sile (temveč zaradi približkov funkcij položaja slabše), je pa zvezo ob znani točni funkciji vertikalne sile mogoče uporabiti za izračun funkcije položaja kabla, kar je pokazano v nadaljevanju.

*Poprocesiranje:* iskanje funkcij osne sile

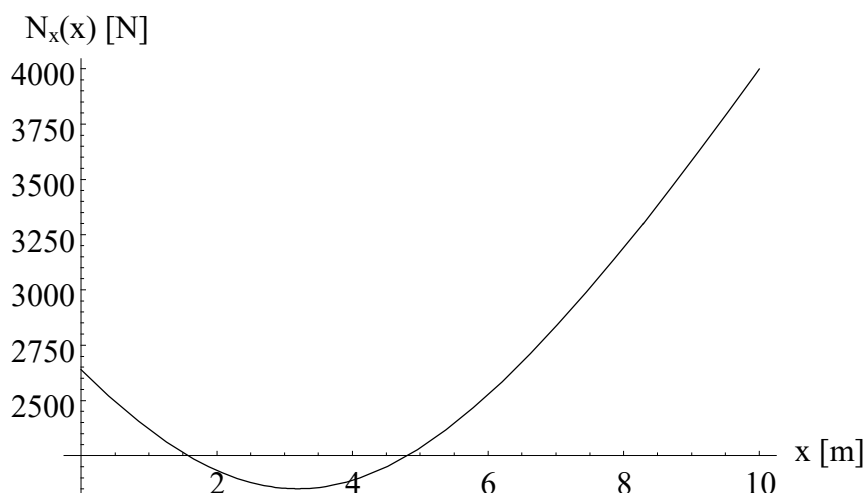
Funkcije osne sile so naslednje (v globalnem koordinatnem sistemu):

$$N_{x1,N}(x) = \sqrt{V_{1,N}(x)^2 + H^2} = \sqrt{6.960409 \cdot 10^6 - 1.597 \cdot 10^6 \cdot x + 250000 \cdot x^2} \quad 0 \leq x \leq 3 \text{ m}$$

$$N_{x2,N}(x) = \sqrt{V_{2,N}(x)^2 + H^2} = \sqrt{6.960409 \cdot 10^6 - 1.597 \cdot 10^6 \cdot x + 250000 \cdot x^2} \quad 3 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$$

$$N_{x3,N}(x) = \sqrt{V_{3,N}(x)^2 + H^2} = \sqrt{6.960409 \cdot 10^6 - 1.597 \cdot 10^6 \cdot x + 250000 \cdot x^2} \quad 6 \text{ m} \leq x \leq 10 \text{ m}$$

in predstavljajo točne funkcije.



Slika 67: Razporeditev osne sile v kablju

Poprocesiranje: iskanje funkcij(e) verižnice po elementih s H1 interpolacijskimi funkcijami

S pomočjo znanih (in točnih) vrednosti vozliščnih vrednosti vertikalne sile lahko izračunamo tudi odvode položaja upogibnice v vozliščih kot:

$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = \frac{V(x)}{H}$$

kar vodi do:

$$\theta(0) = \theta_1 = \frac{dv_1(0)}{dx} = \frac{V(0)}{H} = \frac{V_1}{H} = \frac{-1597 \text{ N}}{2100 \text{ N}} = -0.7604761904761905$$

$$\theta(3) = \theta_2 = \frac{dv_1(3)}{dx} = \frac{dv_2(3)}{dx} = \frac{V(3)}{H} = \frac{V_2}{H} = \frac{-97 \text{ N}}{2100 \text{ N}} = -0.04619047619047619$$

$$\theta(6) = \theta_3 = \frac{dv_2(6)}{dx} = \frac{dv_3(6)}{dx} = \frac{V(6)}{H} = \frac{V_3}{H} = \frac{1403 \text{ N}}{2100 \text{ N}} = 0.6680952380952381$$

$$\theta(10) = \theta_4 = \frac{dv_3(10)}{dx} = \frac{V(10)}{H} = \frac{V_4}{H} = \frac{3403 \text{ N}}{2100 \text{ N}} = 1.6204761904761904$$

pri čemer vrednosti predstavljajo tangense naklonskega kota.

S pomočjo teh vrednosti lahko z uporabo Hermitskih polinomov prvega reda (H1) izvedemo interpolacijo funkcije verižnice, v katero poleg diskretnih vrednosti položaja vozlišč (kot je bilo prej) vključimo še informacije o njihovem prvem odvodu. Te funkcije

so enake kot jih pogosto uporabljamo pri interpoliranju funkcije prečnega pomika v nosilcih. Tako sledijo funkcije (v globalnem koordinatnem sistemu):

$$v_{1,NHI}(x) = \left\{ 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2 \cdot x^3}{27}, x - \frac{2 \cdot x^2}{3} + \frac{x^3}{9}, \frac{2 \cdot x^2}{3} - \frac{2 \cdot x^3}{27}, -\frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{9} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.7604761904761905 \\ -1.21 \text{ m} \\ -0.04619047619047619 \end{Bmatrix}$$

$$= -0.7604761904761905 \cdot x + 0.11904761904761907 \cdot x^2 \quad 0 \leq x \leq 3 \text{ m}$$

in

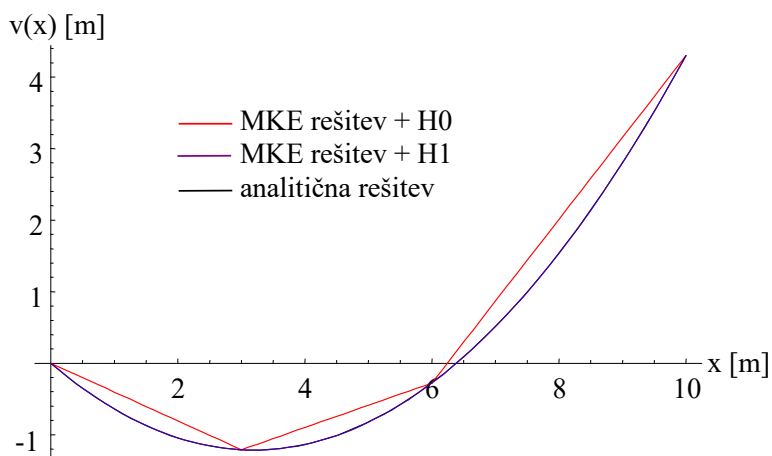
$$v_{2,NHI}(x) = \left\{ -4 + 4 \cdot x - x^2 + \frac{2 \cdot x^3}{27}, -12 + 8 \cdot x - \frac{5 \cdot x^2}{3} + \frac{x^3}{9}, 5 - 4 \cdot x + x^2 - \frac{2 \cdot x^3}{27}, -6 + 5 \cdot x - \frac{4 \cdot x^2}{3} + \frac{x^3}{9} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} -1.21 \text{ m} \\ -0.04619047619047619 \\ -0.2771428571428572 \text{ m} \\ 0.6680952380952381 \end{Bmatrix}$$

$$= -0.7604761904761905 \cdot x + 0.11904761904761907 \cdot x^2 \quad 3 \leq x \leq 6 \text{ m}$$

ter še:

$$v_{3,NHI}(x) = -0.7604761904761905 \cdot x + 0.11904761904761907 \cdot x^2 \quad 6 \leq x \leq 10 \text{ m}$$

Vse tri medsebojno enake funkcije sedaj predstavljajo *točno* rešitev lege verižnice.



Slika 68: Izračunane funkcije položaja kabla

Maksimalni naklon kabla nastopi ob podpori in v obravnavanem primeru se pojavi ob desni podpori, kjer znaša:

$$\text{ArcTan}(\theta_1) = \text{ArcTan}(1.6204761904761904) = 1.0178962393215427 \text{ rad} = 58.32115849536279^\circ$$

Mesto najnižje točke kabla nastopi pri vodoravni oddaljenosti  $x = 3.194$  m od leve podpore, točka pa se nahaja  $1.214480476190476$  m nižje od leve podpore. Vrednosti pokažeta, da smo z izbranim modelom s tremi končnimi elementi (slučajno) že brez interpolacije dokaj dobro izračunali najnižjo točko kabla.

*Poprocesiranje: iskanje funkcije verižnice kabla z Lagrangeovo interpolacijo*

Ker za vse točke kabla velja ista diferencialna enačba (saj je ves kabel obremenjen z isto obtežbo), katere rešitev prav tako velja za vse točke kabla, pri čemer so že znane (točne) diskretne vrednosti iskane rešitve diferencialne enačbe, lahko vrednosti vseh točk naenkrat uporabimo v Lagrangeovi (seveda tudi Newtonovi, kot tudi celoviti Hermitski H1) interpolaciji. Ker so znane diskretne vrednosti položaja kabla v 4 točkah, posledično lahko z Lagrangeovo interpolacijo dobimo rešitev v obliki polinoma 3. stopnje (z uporabo H1 interpolacije pa celo 7. stopnje), kar je, glede na enakomerno zvezno obtežbo, celo previsoka stopnja polinoma. Za izvedbo optimalne analize funkcije pozicije bi tako zadoščala že diskretizacija s samo dvema končnima elementoma.

Ker je vrednost funkcije v prvem vozlišču enaka nič, potrebujemo Lagrangeove bazne polinome za drugo, tretje in četrto vozlišče:

$$l_2 = \frac{(x-0) \cdot (x-6) \cdot (x-10)}{(3-0) \cdot (3-6) \cdot (3-10)} = \frac{20}{21} \cdot x - \frac{16}{63} \cdot x^2 + \frac{1}{63} \cdot x^3 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 10 \text{ m}$$

$$l_3 = \frac{(x-0) \cdot (x-3) \cdot (x-10)}{(6-0) \cdot (6-3) \cdot (6-10)} = -\frac{5}{12} \cdot x + \frac{13}{72} \cdot x^2 - \frac{1}{72} \cdot x^3 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 10 \text{ m}$$

in

$$l_4 = \frac{(x-0) \cdot (x-3) \cdot (x-6)}{(10-0) \cdot (10-3) \cdot (10-6)} = \frac{9}{140} \cdot x - \frac{9}{280} \cdot x^2 + \frac{1}{280} \cdot x^3 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 10 \text{ m}$$

Tako (ponovno) sledi (točna) funkcija položaja:

$$\begin{aligned} v_{N,L}(x) &= v_2 \cdot l_2 + v_3 \cdot l_3 + 4.3 \cdot l_4 = \\ &(-1.21 \text{ m}) \cdot \left( \frac{20}{21} \cdot x - \frac{16}{63} \cdot x^2 + \frac{1}{63} \cdot x^3 \right) + (-0.2771428571428572 \text{ m}) \cdot \left( -\frac{5}{12} \cdot x + \frac{13}{72} \cdot x^2 - \frac{1}{72} \cdot x^3 \right) \\ &+ 4.3 \cdot \left( \frac{9}{140} \cdot x - \frac{9}{280} \cdot x^2 + \frac{1}{280} \cdot x^3 \right) \\ &= -0.7604761904761903 \cdot x + 0.11904761904761904 \cdot x^2 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 10 \text{ m} \end{aligned}$$

ki je polinom 2. stopnje. Morebitni izračunani koeficient, ki se lahko pojavi pri členu  $x^3$ , mora biti zelo majhen, saj je zgolj posledica zaokroževanja.

*Poprocesiranje: iskanje funkcije verižnice z uporabo diferencialne zveze*

Ker je znana točna funkcija vertikalne sile  $V(x)$ , lahko točno funkcijo položaja dobimo tudi s pomočjo diferencialne zveze

$$V_i(x) = H \cdot \frac{dv_i(x)}{dx},$$

kar vodi do:

$$\frac{dv(x)}{dx} = \frac{V(x)}{H} = \frac{-1597 \text{ N} + 500 \cdot x}{2100 \text{ N}} = -0.76047619047619 + 0.238095238095238 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 10 \text{ m}$$

in po integriranju sledi:

$$v(x) = -0.76047619047619 \cdot x + 0.11904761904761904 \cdot x^2 + C_1 \quad 0 \leq x \leq 10 \text{ m}$$

Za določitev integracijske konstante imamo na razpolago dva (kinematična) robna pogoja pomika, ki oba vodita do iste rešitve. Z uporabo pogoja v levi podpori sledi:

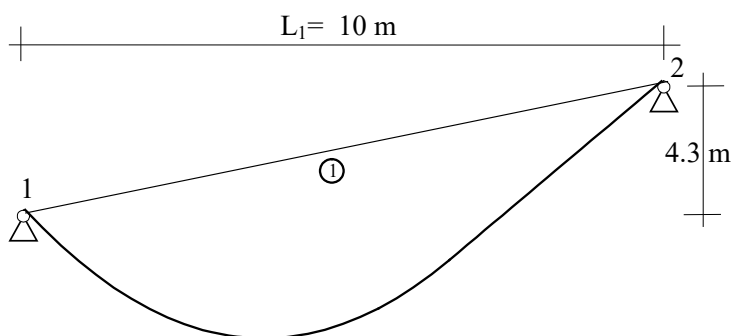
$$v(0) = 0 \rightarrow -0.76047619047619 \cdot 0 + 0.11904761904761904 \cdot 0^2 + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

kar (ponovno) vodi do funkcije položaja kabla:

$$v(x) = -0.76047619047619 \cdot x + 0.11904761904761904 \cdot x^2 \quad 0 \leq x \leq 10 \text{ m}$$

## 2. diskretizacija – uporaba enega končnega elementa

Kot najmanjši mogoči računski model je izbrana diskretizacija z enim končnim elementom dolžine 10 m:



Slika 69: Izbrana diskretizacija

Togostna matrika edinega končnega elementa je:

$$[k_1] = \frac{H}{L_1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 210 & -210 \\ -210 & 210 \end{bmatrix}$$

Obtežni vektor pa je:

$$\{f_1\} = \frac{p_v \cdot L_1}{2} = \begin{Bmatrix} -2500 \\ -2500 \end{Bmatrix}$$

Tako sledijo enačbe »konstrukcije« (izhodišče koordinatnega sistema je postavljeno npr. v levo podporo, za vertikalni reakciji pa predpostavimo, da sta usmerjeni navzgor):

$$\begin{bmatrix} 210 & -210 \\ -210 & 210 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_A - 2500 \\ V_B - 2500 \end{Bmatrix}$$

Po upoštevanju znanih položajev v podpori sledita enačbi:

$$\begin{bmatrix} 210 & -210 \\ -210 & 210 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 4.3 \text{ m} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_A - 2500 \\ V_B - 2500 \end{Bmatrix}$$

v katerih ni več primarnih spremenljivk in zato iz njiju neposredno izračunamo reakciji v podporah:

$$\begin{Bmatrix} -210 \cdot 4.3 \text{ m} \\ 210 \cdot 4.3 \text{ m} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_A - 2500 \\ V_B - 2500 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} V_A = 1597 \text{ N} \\ V_B = 3404 \text{ N} \end{matrix}$$

ki sta točni.

Vektor vertikalnih sil edinega končnega elementa je:

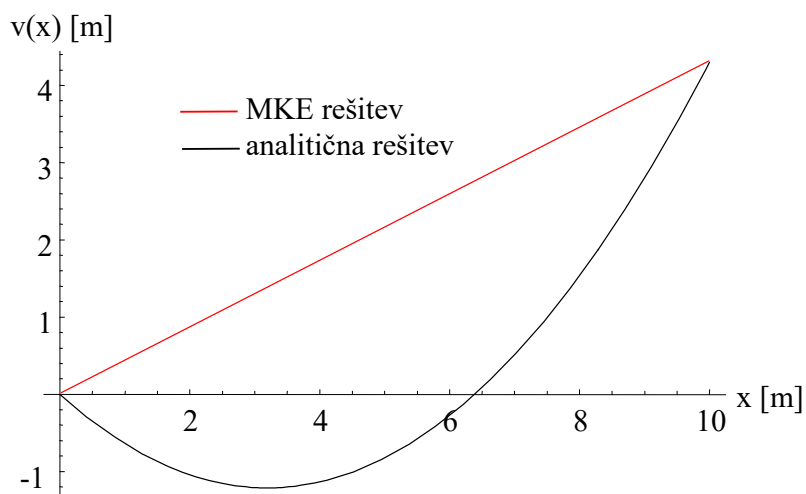
$$\{V_1\} = \begin{Bmatrix} -1597 \text{ N} \\ 3404 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

*Poprocesiranje: iskanje funkcije verižnice z interpolacijskimi funkcijami H0*

Najbolj približna (linearna!) funkcija položaja v elementu je tako (v globalnem koordinatnem sistemu):

$$v_{1,N}(x) = Y_1 \cdot \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + Y_2 \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 0 \cdot \frac{10 - x}{10 - 0} + (4.3 \text{ m}) \cdot \frac{x - 0}{10 - 0} = 0.43 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 10 \text{ m}$$

in seveda ni točna, saj predstavlja slabo in neuporabno rešitev v obliki enostavne veznice med podporama.



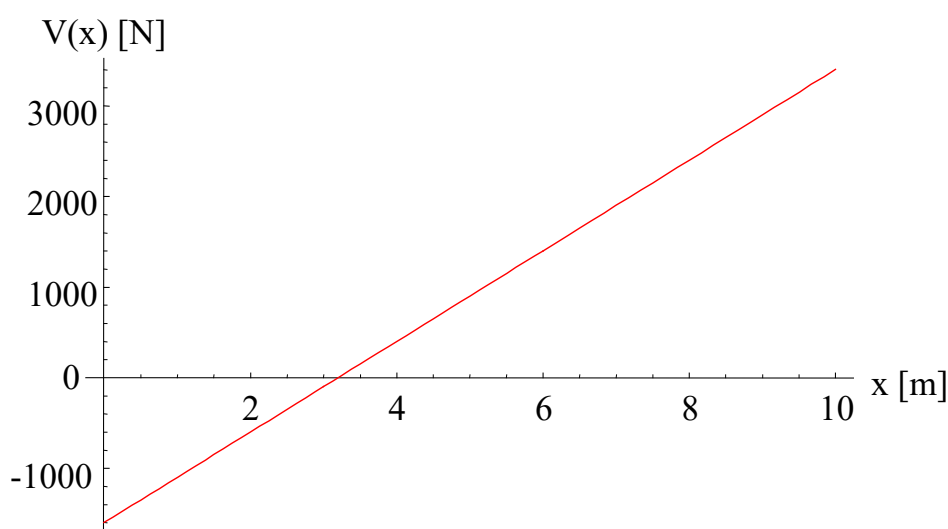
Slika 70: Izračunana funkcija položaja kabla

Poprocesiranje: iskanje funkcije vertikalne sile

Približna funkcija vertikalne sile v elementu je (v globalnem koordinatnem sistemu):

$$\begin{aligned} V_{1,N}(x) &= V_1 \cdot \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + V_2 \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = (-1597 \text{ N}) \cdot \frac{10 - x}{10 - 0} + 3403 \text{ N} \cdot \frac{x - 0}{10 - 0} \\ &= -1597 \text{ N} + 500 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 10 \text{ m} \end{aligned}$$

in predstavlja točno rešitev.



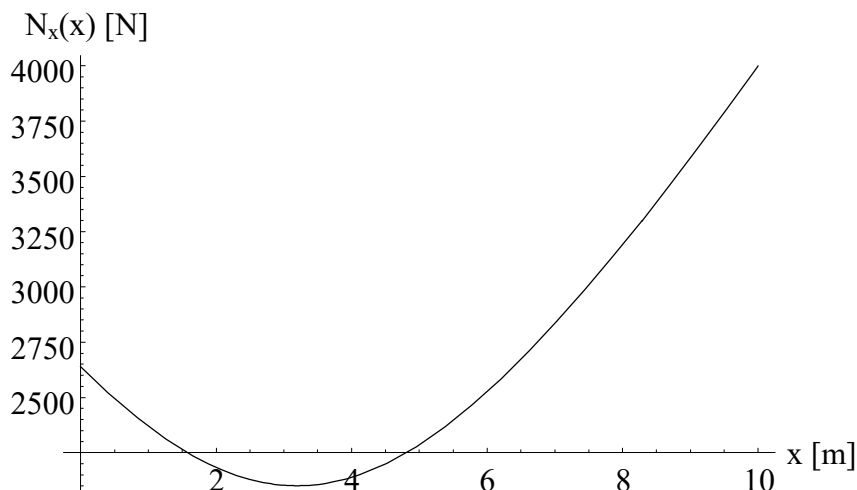
Slika 71: Razporeditev vertikalne sile v kablu

Poprocesiranje: iskanje funkcije osne sile

Funkcija osne sile je naslednja:

$$N_{x1,N}(x) = \sqrt{V_{1,N}(x)^2 + H^2} = \sqrt{6.960409 \cdot 10^6 - 1.597 \cdot 10^6 \cdot x + 250000 \cdot x^2} \quad 0 \leq x \leq 10 \text{ m}$$

in predstavlja točno funkcijo.



Slika 72: Razporeditev osne sile v kablju

*Poprocesiranje: iskanje funkcije verižnice s H1 interpolacijskimi funkcijami*

S pomočjo znanih (in točnih) vrednosti vozliščnih vrednosti vertikalne sile lahko izračunamo tudi odvode položaja upogibnice v vozliščih elementa kot:

$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = \frac{V(x)}{H}$$

kar vodi do vrednosti:

$$\theta(0) = \theta_1 = \frac{dv_1(0)}{dx} = \frac{V(0)}{H} = \frac{V_1}{H} = \frac{-1597 \text{ N}}{2100 \text{ N}} = -0.7604761904761905$$

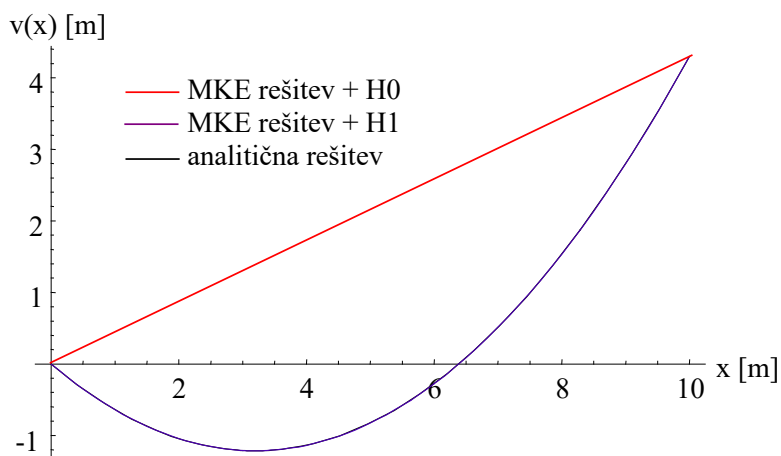
$$\theta(10) = \theta_2 = \frac{dv_1(10)}{dx} = \frac{V(10)}{H} = \frac{V_2}{H} = \frac{3403 \text{ N}}{2100 \text{ N}} = 1.6204761904761904$$

S pomočjo teh vrednosti lahko z uporabo Hermitskih polinomov prvega reda izvedemo interpolacijo funkcije verižnice, v kateri v vozliščih poleg diskretnih vrednosti položaja upoštevamo tudi informacije o prvem odvodu položaja:

$$v_{1,\text{NHI}}(x) = \left\{ 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2 \cdot x^3}{27}, x - \frac{2 \cdot x^2}{3} + \frac{x^3}{9}, \frac{2 \cdot x^2}{3} - \frac{2 \cdot x^3}{27}, -\frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{9} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.7604761904761905 \\ 4.3 \text{ m} \\ 1.6204761904761904 \end{Bmatrix}$$

$$= -0.7604761904761905 \cdot x + 0.11904761904761907 \cdot x^2 \quad 0 \leq x \leq 10 \text{ m}$$

kar predstavlja *točno* rešitev lege verižnice.



Slika 73: Izračunana funkcija položaja kabla

Maksimalni naklon kabla nastopi ob podpori in v obravnavanem primeru se pojavi ob desni podpori, kjer znaša:

$$\text{ArcTan}(\theta_1) = \text{ArcTan}(1.6204761904761904) = 1.0178962393215427 \text{ rad} = 58.32115849536279^\circ$$

*Poprocesiranje: iskanje funkcije verižnice z uporabo diferencialne zveze*

Ker je znana točna funkcija vertikalne sile  $V(x)$ , lahko točno funkcijo položaja dobimo tudi s pomočjo diferencialne zveze

$$V(x) = H \cdot \frac{dv(x)}{dx},$$

kar vodi do:

$$\frac{dv(x)}{dx} = \frac{V(x)}{H} = \frac{-1597 \text{ N} + 500 \cdot x}{2100 \text{ N}} = -0.76047619047619 + 0.238095238095238 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 10 \text{ m}$$

in po integriranju sledi:

$$v(x) = -0.76047619047619 \cdot x + 0.11904761904761904 \cdot x^2 + C_1 \quad 0 \leq x \leq 10 \text{ m}$$

Za določitev integracijske konstante imamo na razpolago dva (kinematična) robna pogoja, ki oba vodita do iste rešitve. Z uporabo pogoja v levi podpori sledi:

$$v(0) = 0 \rightarrow -0.76047619047619 \cdot 0 + 0.11904761904761904 \cdot 0^2 + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

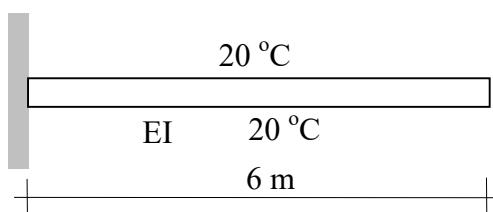
kar (ponovno) vodi do funkcije položaja kabla:

$$v(x) = -0.76047619047619 \cdot x + 0.11904761904761904 \cdot x^2 \quad 0 \leq x \leq 10 \text{ m}$$

Uporabljen diskretizacija je pokazala, da lahko navkljub osnovnemu oz. minimalnem računskemu modelu s kvalitetnim poprosiranjem (in ob točnih vozliščnih vrednostih) dobimo točne rezultate.

### Primer 5 – Osni pomiki konzole zaradi temperaturne obtežbe

Poiskati je potrebno rešitev diferencialne enačbe osnega pomika levo vpete AB konzole dolžine 3 m, obremenjene z enakomerno spremembo temperature  $20^\circ\text{C}$  po celem prerezu. Prerez grede je  $b/h = 0.2 \text{ m}/0.3 \text{ m}$ , modul elastičnosti  $E$  znaša 30 GPa, linearni koeficient toplotnega raztezka  $\alpha_T$  pa znaša  $14.5 \cdot 10^{-6} /^\circ\text{K}$ .



Slika 74: Obravnavana konzola

### Rešitev

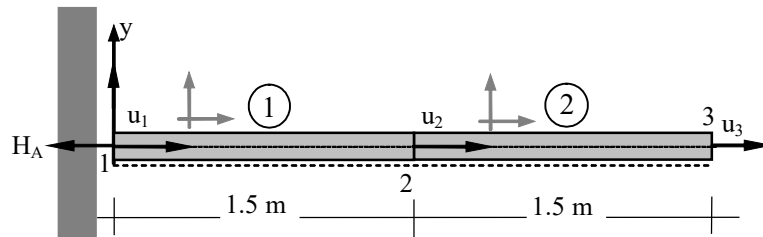
Osna togost prereza znaša:

$$EA = 30 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 0.2 \text{ m} \cdot 0.3 \text{ m} = 1.8 \cdot 10^9 \text{ N}$$

Matrični enačbi, ki veljata za posamezni končni element (ob odsotnosti zvezne osne obtežbe  $q_x(x)$ ), sta:

$$\frac{EA}{L_e} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_A \\ u_B \end{Bmatrix} = \alpha_T \cdot \Delta T \cdot E \cdot A \cdot \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -N_{x,A} \\ N_{x,B} \end{Bmatrix}$$

Če uporabimo (ne sicer nujno potrebno in tudi ne najmanjšo mogočo) diskretizacijo z dvema enako dolgima končnima elementoma, ki si sledita od leve proti desni, nastopajo 3 vozlišča in sicer pri  $x_1=0$ ,  $x_2=1.5$  m in  $x_3=3.0$  m.



Slika 75: Diskretizacija z dvema končnima elementoma

Togostna matrika in obtežni vektor posameznega elementa sta tako:

$$[k_1] = [k_2] = \frac{1.8 \cdot 10^9 \text{ N}}{1.5 \text{ m}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 & -1.2 \\ -1.2 & 1.2 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\{F_1\} = \{F_2\} = \frac{14.5 \cdot 10^{-6}}{^\circ\text{C}} \cdot 20 \text{ }^\circ\text{C} \cdot 30 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.2 \text{ m} \cdot 0.3 \text{ m} \cdot \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -522000 \text{ N} \\ 522000 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

Vektorja sekundarnih spremenljivk sta:

$$\{Q_1\} = \begin{Bmatrix} -N_{x,1} \\ N_{x,2} \end{Bmatrix} \quad \{Q_2\} = \begin{Bmatrix} -N_{x,2} \\ N_{x,3} \end{Bmatrix}$$

Matrični enačbi obeh končnih elementov sta:

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -1.2 \\ -1.2 & 1.2 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -522000 \text{ N} \\ 522000 \text{ N} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -N_{x,1} \\ N_{x,2} \end{Bmatrix}$$

in

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -1.2 \\ -1.2 & 1.2 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -522000 \text{ N} \\ 522000 \text{ N} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -N_{x,2} \\ N_{x,3} \end{Bmatrix}$$

Ker gre za levo vpeto konzolo, veljata  $u_1 = 0$  in  $N_{x,3} = 0$ , in v štirih enačbah nastopajo štiri neznanke: dve primarni spremenljivki (pomika  $u_2$  in  $u_3$ ) ter dve sekundarni spremenljivki (osni sili  $N_{x,1}$  in  $N_{x,2}$ ). Sistem štirih enačb je že rešljiv, vendar njegovo reševanje ne predstavlja optimalnega pristopa.

Združevanje matričnih zapisov enačb elementov v matrično enačbo konstrukcije vodi do:

$$[\mathbf{K}] \cdot \{u\} = \{F\} + \{Q\}$$

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -1.2 & 0 \\ -1.2 & 2.4 & -1.2 \\ 0 & -1.2 & 1.2 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -522000 \text{ N} \\ 522000 \text{ N} - 522000 \text{ N} \\ 522000 \text{ N} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -N_{x1} \\ 0 \\ N_{x3} \end{Bmatrix}$$

Ker gre za konzolo, ki je levo vpeta, in velja  $u_1 = 0$  in  $N_{x,3} = 0$ , lahko enačbe zapišemo kot:

$$[\mathbf{K}] \cdot \{u\} = \{F\} + \{Q\}$$

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -1.2 & 0 \\ -1.2 & 2.4 & -1.2 \\ 0 & -1.2 & 1.2 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -522000 \text{ N} \\ 0 \\ 522000 \text{ N} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -N_{x1} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

kar že predstavlja manjši sistem treh enačb s tremi neznankami: dvema primarnima spremenljivkama (pomikoma  $u_2$  in  $u_3$ ) in eno sekundarno spremenljivko (osno silo  $N_{x,1}$ ). Tudi ta sistem je že rešljiv. Ker pa vrednosti obeh primarnih spremenljivk sledita iz zadnjih dveh vrstic, sledi sistem:

$$\begin{bmatrix} 2.4 & -1.2 \\ -1.2 & 1.2 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 522000 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

Iz enačb tako sledita vozliščni vrednosti obeh primarnih spremenljivk – vozliščnih osnih pomikov:

$$u_2 = 4.35 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$u_3 = 8.7 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

ki sta identični točnima vrednostima.

Poprocesiranje rezultatov – izračun funkcij osnega pomika

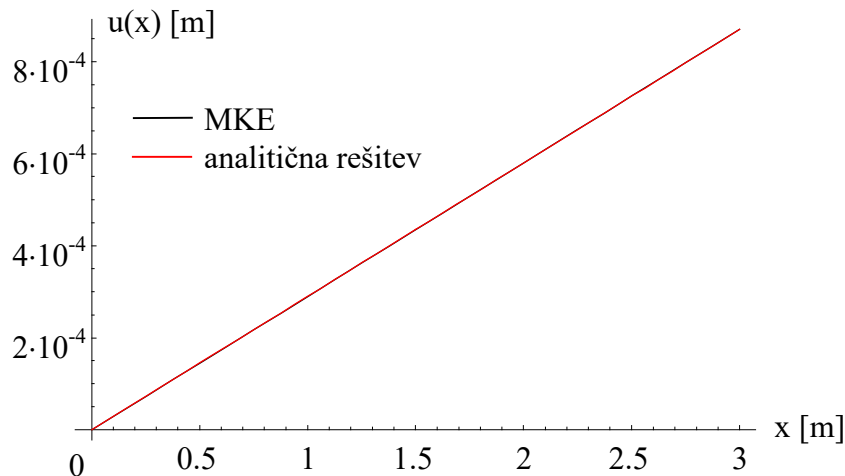
Približni funkciji osnega pomika po elementih sta torej:

$$u_{1,N}(x) = u_1 \cdot \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + u_2 \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 0 \cdot \frac{1.5 - x}{1.5 - 0} + 4.35 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \frac{x - 0}{1.5 - 0} = 2.9 \cdot 10^{-4} \cdot x \quad 0 \leq x \leq 1.5 \text{ m}$$

$$u_{2,N}(x) = u_2 \cdot \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} + u_3 \cdot \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} = 4.35 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \frac{3.0 - x}{3.0 - 1.5} + 8.7 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \frac{x - 1.5}{3.0 - 1.5}$$

$$= 2.9 \cdot 10^{-4} \cdot x \quad 1.5 \text{ m} \leq x \leq 3.0 \text{ m}$$

Druga funkcija, ki je identična prvi, posredno potrди, da uporaba dveh končnih elementov ne prispeva h kvaliteti rešitve. Obe dobljeni funkciji sta tudi enaki točnima rešitvama.



Slika 76: Grafa funkcij osnega pomika

Poprocesiranje rezultatov – izračun osnih sil iz enačb elementov in interpoliranjem med vozliščnimi vrednostmi

Iz enačb za prvi končni element sledita sekundarni spremenljivki (osni sili na koncih prvega elementa):

$$\{Q_1\} = [K_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\}$$

$$\begin{Bmatrix} -N_{x,1} \\ N_{x,2} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L_e} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} - \alpha_T \cdot \Delta T \cdot E \cdot A \cdot \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.2 & -1.2 \\ -1.2 & 1.2 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 4.35 \cdot 10^{-4} \text{ m} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -522000 \text{ N} \\ 522000 \text{ N} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,1} \\ N_{x,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Osni sili na koncih drugega elementa (sekundarni spremenljivki) sledita iz enačb za drugi element:

$$\begin{aligned} \{Q_2\} &= [K_2] \cdot \{U_2\} - \{F_2\} \\ \begin{Bmatrix} -N_{x,2} \\ N_{x,3} \end{Bmatrix} &= \frac{EA}{L_e} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} - \alpha_T \cdot \Delta T \cdot E \cdot A \cdot \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1.2 & -1.2 \\ -1.2 & 1.2 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \begin{Bmatrix} 4.35 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ 8.7 \cdot 10^{-4} \text{ m} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -522000 \text{ N} \\ 522000 \text{ N} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,2} \\ N_{x,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

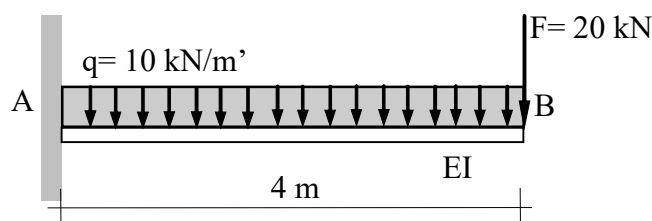
Rešitve pokažejo, da osne sile zaradi temperaturne obtežbe v obravnavanem primeru, ko se konstrukcija zaradi temperaturne spremembe lahko neovirano deformira, ni.

Poglavje III

# Prečni premiki (upogib nosilcev)

## Primer 6.a – Levo vpeta konzola s koncentrirano silo

Za podani betonski konzolni nosilec konstantnega pravokotnega prereza ( $b/h = 0.2 \text{ m}/0.4 \text{ m}$ ) iz betona C20/25 na sliki določi pomik in zasuk desnega konca nosilca (točka B), funkcijo prečnega pomika ter funkciji notranjih statičnih količin vzdolž konzole, in reakcije v podpori.



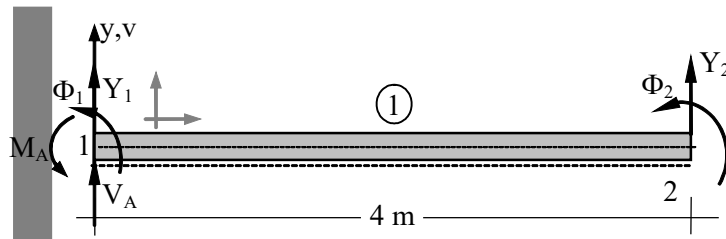
Slika 77: Obravnavani konzolni nosilec

## Rešitev

Minimalno število potrebnih končnih elementov je 1.

## 1. računski model: diskretizacija z enim končnim elementom

Čeprav je metoda končnih elementov namenjena predvsem numeričnim analizam, bomo iz demonstracijskih razlogov z uporabo metode končnih elementov najprej poiskali analitični rešitvi za pomik in zasuk v točki B.



Slika 78: Izbrana diskretizacija

Začetno vozlišče elementa (1) postavimo v točko A, končno vozlišče (2) pa v točko B. Pozitivna os je tako na spodnji strani nosilca, slika zgoraj.

Togostna matrika in obtežni vektor edinega končnega elementa sta:

$$[K_1] = \begin{bmatrix} \frac{12 \cdot EI_z}{L_e^3} & \frac{6 \cdot EI_z}{L_e^2} & -\frac{12 \cdot EI_z}{L_e^3} & \frac{6 \cdot EI_z}{L_e^2} \\ \frac{6 \cdot EI_z}{L_e^2} & 4 \cdot EI_z & -\frac{6 \cdot EI_z}{L_e} & 2 \cdot EI_z \\ -\frac{12 \cdot EI_z}{L_e^3} & \frac{6 \cdot EI_z}{L_e^2} & \frac{12 \cdot EI_z}{L_e^3} & -\frac{6 \cdot EI_z}{L_e^2} \\ \frac{6 \cdot EI_z}{L_e^2} & 2 \cdot EI_z & -\frac{6 \cdot EI_z}{L_e} & 4 \cdot EI_z \end{bmatrix} \quad \{F_1\} = q \cdot \begin{Bmatrix} -\frac{L_e}{2} \\ \frac{L_e^2}{12} \\ \frac{L_e}{2} \\ -\frac{L_e^2}{12} \end{Bmatrix}$$

Pri diskretizaciji z enim končnim elementom sta neznanki vertikalni pomik  $v_2$  (oz. splošnejše  $Y_2$ ) in pripadajoči zasuk  $\Phi_2$  desnega konca. Bistveni enačbi konstrukcije po upoštevanju ničelnega pomika in zasuca v točki A konstrukcije sta:

$$\begin{bmatrix} \frac{12 \cdot EI_z}{L_e^3} & -\frac{6 \cdot EI_z}{L_e^2} \\ \frac{6 \cdot EI_z}{L_e^2} & 4 \cdot EI_z \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = (-q) \cdot \begin{Bmatrix} \frac{L_e}{2} \\ -\frac{L_e^2}{12} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -F \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{q \cdot L_e}{2} - F \\ \frac{q \cdot L_e^2}{12} \end{Bmatrix}$$

Opomba: čeprav je mogoče koncentrirano silo  $F$  upoštevati že v obtežnem vektorju elementa, je priročnejše, če jo direktno upoštevamo v obtežnem vektorju konstrukcije.

Njuni rešitvi pa sta:

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{L_e^4 \cdot q}{8 \cdot EI_z} - \frac{L_e^3 \cdot F}{3 \cdot EI_z} \\ -\frac{L_e^3 \cdot q}{6 \cdot EI_z} - \frac{L_e^2 \cdot F}{2 \cdot EI_z} \end{Bmatrix}$$

Obe izračunani diskretni vrednosti se popolnoma ujemata z analitičnima vrednostima (dobljenima npr. z reševanjem diferencialne enačbe ali virtualnim delom). Tako model že z enim končnim elementom vodi do točnih rešitev za primarni spremenljivki.

Pomik  $v_2$  ima negativni predznak, kar pomeni navzdol; zasuk  $\Phi_2$  pa ima negativni predznak, kar pomeni, da deluje sournjo.

Upogibna togost nosilca znaša (čeprav vrednost modula elastičnosti za beton C20/25 po EC2 znaša 29.962 GPa, upoštevamo zaokroženo vrednosti 30 GPa):

$$EI_z = E \cdot \frac{b \cdot h^3}{12} = 30 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{0.2 \text{ m} \cdot (0.4 \text{ m})^3}{12} = 32 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

in tako sledita vrednosti:

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{(4 \text{ m})^4 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}}{8 \cdot 32 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2} - \frac{(4 \text{ m})^3 \cdot 20 \text{ kN}}{3 \cdot 32 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2} \\ -\frac{(4 \text{ m})^3 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}}{6 \cdot 32 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2} - \frac{(4 \text{ m})^2 \cdot 20 \text{ kN}}{2 \cdot 32 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.02333333333333327 \text{ m} \\ -0.008333333333333331 \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

ki ju formalno izračunamo z rešitvijo sistema

$$\begin{bmatrix} 6 & -12 \\ -2 & 32 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} v_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -20000 \\ 13333.333333333334 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -20000 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -40000 \\ 13333.333333333334 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.3333333333333327 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -8.333333333333331 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

*Poprocesiranje: iskanje funkcije prečnega pomika s H0 interpolacijskima funkcijama*

Najenostavnejšo in tudi najmanj kvalitetno funkcijo upogibnice dobimo, če v interpolaciji upoštevamo samo diskretne vrednosti pomika. Ker sta znani samo dve vrednosti, bo interpolacija vodila do linearne funkcije, interpolacijski funkciji pa sta (za določitev funkcije prečnega pomika dejansko potrebujemo samo zadnjo):

$$N_{1,1}(x) = 1 - \frac{x}{4} \quad N_{1,2}(x) = \frac{x}{4} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Najmanjša kvalitetna približna rešitev za funkcijo prečnega pomika edinega končnega elementa je tako:

$$\begin{aligned} v_{1,N,H0}(x) &= v_1 \cdot N_{1,1}(x) + v_2 \cdot N_{1,2}(x) = Y_1 \cdot N_{1,1}(x) + Y_2 \cdot N_{1,2}(x) \\ &= 0 \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right) - 2.333333333333327 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \frac{x}{4} \\ &= -5.833333333333332 \cdot 10^{-3} \cdot x \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

Notranja deformacijska energija znaša 0 (kar nakazuje neuporabno rešitev), celotna potencialna energija, izračunana s to funkcijo prečnega pomika, pa znaša  $\Pi = -933.3333333333331 \text{ J}$ . Zaradi ničelnosti izračunane notranje deformacijske energije ta rešitev vodi do najmanjše vrednosti celotne potencialne energije, kar indicira navidezno najboljšo rešitev.

*Poprocesiranje: iskanje funkcije prečnega pomika z interpolacijskimi funkcijami H1*

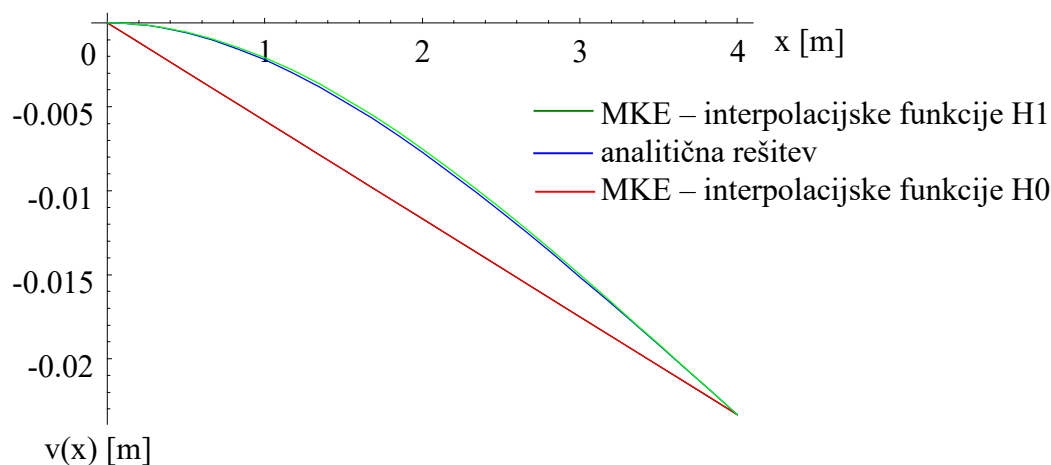
Opazno kvalitetnejšo funkcijo prečnega pomika dobimo, če v izračun vključimo še dve znani vozliščni vrednosti zasuka. Interpolacijske funkcije so (za določitev funkcije prečnega pomika dejansko potrebujemo samo zadnji dve):

$$\begin{aligned} N_{1,1}(x) &= 1 - \frac{3}{16} \cdot x^2 + \frac{x^3}{32} & 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m} \\ N_{1,2}(x) &= x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{x^3}{16} & 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m} \\ N_{1,3}(x) &= \frac{3}{16} \cdot x^2 - \frac{x^3}{32} & 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m} \\ N_{1,4}(x) &= -\frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{x^3}{16} & 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

Približna rešitev za funkcijo prečnega pomika edinega končnega elementa je tako:

$$\begin{aligned}
 v_{1,N,H1}(x) &= Y_1 \cdot N_{1,1}(x) + \Phi_1 \cdot N_{1,2}(x) + Y_2 \cdot N_{1,3}(x) + \Phi_2 \cdot N_{1,4}(x) \\
 &= 0 \cdot N_{1,1}(x) + 0 \cdot N_{1,2}(x) - 2.333333333333327 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \left( \frac{3}{16} \cdot x^2 - \frac{x^3}{32} \right) \\
 &\quad - 8.333333333333331 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot \left( -\frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{x^3}{16} \right) \\
 &= -2.291666666666658 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 2.083333333333333 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Rešitev je približna, ker je predstavljena s polinomom 3. stopnje, prava oz. točna rešitev zaradi enakomerne zvezne obtežbe pa je polinom 4. stopnje (kar je znano iz teorije mehanike).



Slika 79: Primerjava dobljene rešitve za prečni pomik s točno rešitvijo

Slika 79 pokaže, da kljub različnim stopnjama polinomov med analitično rešitvijo (modra linija) in približno rešitvijo (zelena linija), dobljeno s H1 interpolacijo vozliščnih vrednosti primarnih spremenljivk (prečnih pomikov in zasukov), razlika med rešitvama ni velika. Odstopanje je opazno zgolj pri rešitvi, dobljeni z interpolacijo H0 samo dveh vozliščnih pomikov (rdeča linija).

Celotna potencialna energija, izračunana s to funkcijo prečnega pomika, znaša  $\Pi = -411.1111111111104 \text{ J}$ .

*Poprocesiranje: iskanje vozliščnih vrednosti sekundarnih spremenljivk in NSK*

Manjkajoče vozliščne vrednosti prečne sile in upogibnega momenta sledijo iz vektorja sekundarnih spremenljivk, ki ga izjemoma tudi izračunamo v analitični obliki:

$$\begin{aligned} \{Q_1\} &= [K_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{12 \cdot EI_z}{L^3} & \frac{6 \cdot EI_z}{L^2} & -\frac{12 \cdot EI_z}{L^3} & \frac{6 \cdot EI_z}{L^2} \\ \frac{6 \cdot EI_z}{L^2} & \frac{4 \cdot EI_z}{L} & -\frac{6 \cdot EI_z}{L^2} & \frac{2 \cdot EI_z}{L} \\ -\frac{12 \cdot EI_z}{L^3} & -\frac{6 \cdot EI_z}{L^2} & \frac{12 \cdot EI_z}{L^3} & -\frac{6 \cdot EI_z}{L^2} \\ \frac{6 \cdot EI_z}{L^2} & \frac{2 \cdot EI_z}{L} & -\frac{6 \cdot EI_z}{L^2} & \frac{4 \cdot EI_z}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{L^4 \cdot q}{8 \cdot EI_z} - \frac{L^3 \cdot F}{3 \cdot EI_z} \\ -\frac{L^3 \cdot q}{6 \cdot EI_z} - \frac{L^2 \cdot F}{2 \cdot EI_z} \end{Bmatrix} - (-q) \cdot \begin{Bmatrix} \frac{L}{2} \\ \frac{L^2}{12} \\ \frac{L}{2} \\ -\frac{L^2}{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L \cdot q + F \\ \frac{L^2 \cdot q}{2} + L \cdot F \\ -F \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \{Q_1\} &= \begin{Bmatrix} Q_{1,1} \\ Q_{1,2} \\ Q_{1,3} \\ Q_{1,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L \cdot q + F \\ \frac{L^2 \cdot q}{2} + L \cdot F \\ -F \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,1} \\ M_{z,1} \\ V_{y,2} \\ M_{z,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{1,1} \\ -Q_{1,2} \\ -Q_{1,3} \\ Q_{1,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L \cdot q + F \\ -\frac{L^2 \cdot q}{2} - L \cdot F \\ F \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Po spremembi predznakov (zaradi različnih dogovorov o pozitivnih usmeritvah pozitivnih količin, ki so vezane na pozitivno os, ki smo jo definirali z izbiro začetnega in končnega vozlišča) sta vrednosti prečne sile in upogibnega momenta enake pravi vrednostim (ki so, zaradi statične določenosti konstrukcije, zlahka preverljive).

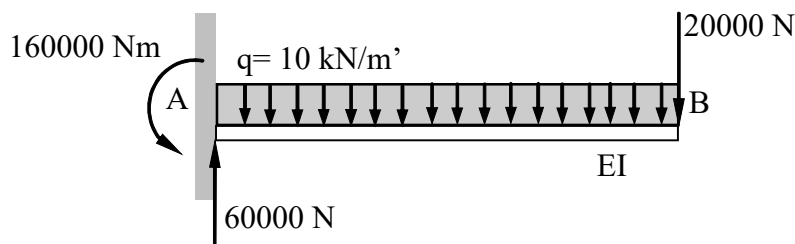
Za podane vrednosti primera:

$$[K_1] = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -6 & 12 \\ 12 & 32 & -12 & 16 \\ -6 & -12 & 6 & -12 \\ 12 & 16 & -12 & 32 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \quad \{F_1\} = \begin{Bmatrix} -20000 \\ -13333.3333 \\ -20000 \\ 13333.3333 \end{Bmatrix} \quad \{U_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.3333 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -8.3333 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

sledi najprej vektor sekundarnih spremenljivk:

$$\begin{Bmatrix} Q_{1,1} \\ Q_{1,2} \\ Q_{1,3} \\ Q_{1,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 60000 \text{ N} \\ 160000 \text{ Nm} \\ -20000 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

ki predstavlja vozliščni sili in momenta (od katerega je eden slučajno nič) na navidezno prostem telesu (elementu).



Slika 80: Vozliščni sili in upogibna momenta (sekundarne spremenljivke)

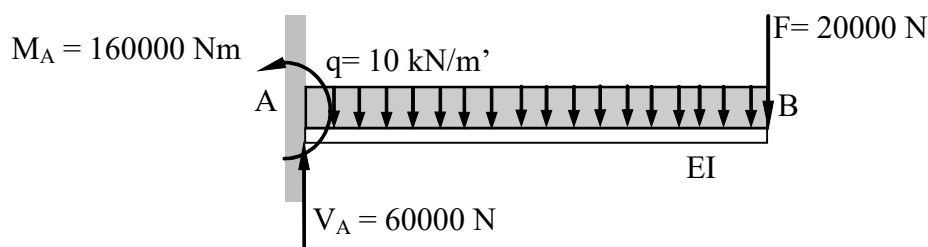
Nato z ustrežno spremembo predznakov izračunamo še vozliščne vrednosti notranjih statičnih količin:

$$\begin{Bmatrix} V_{y,1} \\ M_{z,1} \\ V_{y,2} \\ M_{z,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{1,1} \\ -Q_{1,2} \\ -Q_{1,3} \\ Q_{1,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 60000 \text{ N} \\ -160000 \text{ Nm} \\ 20000 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Za izračun reakcij v podpori lahko neposredno uporabimo (odčitamo) člena  $Q_{1,1}$  in  $Q_{1,2}$  vektorja sekundarnih spremenljivk, ki pokažeta, da sta vertikalna reakcija  $Q_{1,1} = L \cdot q + F$  in reakcijski upogibni moment

$$Q_{1,2} = \frac{L^2 \cdot q}{2} + L \cdot F$$

usmerjena v dogovorjenih pozitivnih smereh metode končnih elementov, torej vertikalno oz. protiurno (alternativno lahko reakciji izračunamo s pomočjo znanih vozliščnih vrednosti notranjih statičnih količin in pogojev ravnotežja sil ter momentov).



Slika 81: Izračunani reakciji in njuna usmeritev

*Poprocesiranje: iskanje približka funkcije upogibnega momenta iz odvoda upogibnice*

Če za izračun funkcije upogibnega momenta uporabimo (sicer korektno) diferencialno zvezo:

$$M_{e,z}(x) = EI \cdot \frac{d^2 v_{e,N}(x)}{dx^2}$$

je jasno, da bomo ob uporabi približne rešitve (polinom 3. stopnje) za funkcijo upogibnice  $v_{1,N}(x)$  dobili približno rešitev tudi za funkcijo upogibnega momenta (in iz nje posledično še približno funkcijo prečne sile):

$$M_{1,z}(x) = EI \cdot \frac{d^2 v_{1,N}(x)}{dx^2} = 40000 \cdot x - 146666.66666666666666 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

ki je linearna funkcija in ne kvadratna. Približna funkcija prečne sile je tako:

$$V_{1,y}(x) = \frac{dM_{1,z}(x)}{dx} = 40000 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

ki je konstanta in ne linearna funkcija.

Obe rešitvi sta torej dokaj slaba približka, ki pa sta posledica odvajanja netočne funkcije prečnega pomika (pri čemer se kvaliteta rešitev z vsakim novim odvajanjem zmanjšuje). Če bi reakciji v podpori izračunali s pomočjo teh dveh (približnih) funkcij, bi sledili vrednosti -146666.66666666666666 Nm za upogibni moment ter 40000 N za vertikalno reakcijo. Primerjava teh vrednosti s točnima reakcijama bi pokazala, da so rešitve res približki.

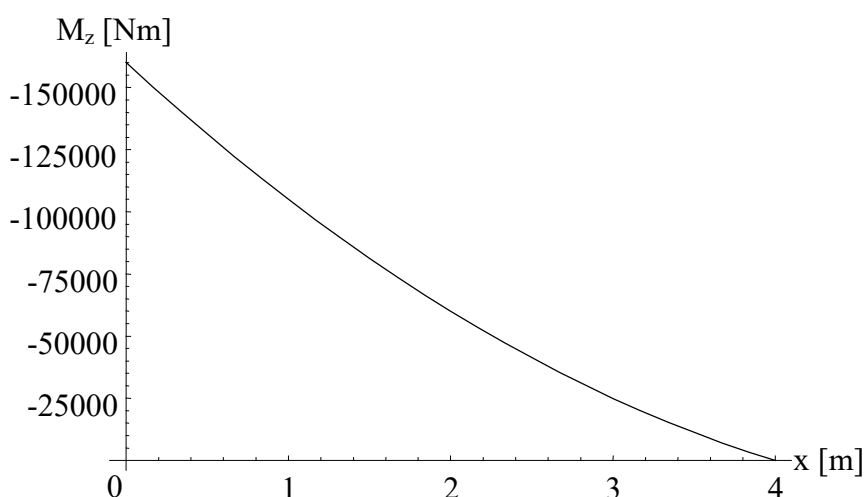
*Poprocesiranje: iskanje funkcije upogibnega momenta in prečne sile z interpolacijo*

Druga izmed možnosti izračuna funkcije upogibnega momenta je uporaba H1 interpolacijskih funkcij. Te so v obravnavanem primeru kar enake kot pri izračunu približne funkcije prečnega pomika:

$$\begin{aligned}
 M_{z,N}(x) &= M_{z,1} \cdot N_{1,1}(x) + V_{y,1} \cdot N_{1,2}(x) + M_{z,2\text{levo}} \cdot N_{1,3}(x) + V_{y,2\text{levo}} \cdot N_{1,4}(x) \\
 &= -160000 \cdot \left(1 - \frac{3}{16} \cdot x^2 + \frac{x^3}{32}\right) + 60000 \cdot \left(x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{x^3}{16}\right) + 0 \cdot N_{1,3} \left(\frac{3}{16} \cdot x^2 - \frac{x^3}{32}\right) \\
 &+ 20000 \cdot \left(-\frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{x^3}{16}\right) = -5000 \cdot x^2 + 60000 \cdot x - 160000 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Uporaba teh funkcij sedaj vodi do pravilne porazdelitve upogibnega momenta. Pri tem je smiselno opozoriti, da je rešitev, ki je polinom 2. stopnje, dobljena s seštevanjem funkcij, ki so polinomi 3. stopnje, kar pogosto povzroči, da se zaradi zaokroževanja pojavi zelo majhen člen  $x^3$ , ki ga v takih primerih enostavno zanemarimo.

Kadar so vozliščne vrednosti momenta in prečne sile pravilne, na tak način dobimo tudi pravilne funkcije razporeditve momenta za primere, ko na elementih ne nastopa zvezna obtežba ali pa se ta spreminja največ linearno.



Slika 82: Razporeditev upogibnega momenta

Odvajanje dobljenega izraza za upogibni moment vodi do izraza za prečno silo:

$$V_{y1,N}(x) = -10000 \cdot x + 60000 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

ki je prav tako enaka pravi rešitvi obravnavanega primera.

Pri iskanju lokacije mesta maksimalnega momenta poiščemo ničlo funkcije prečne sile:

$$V_{y1,N}(x) = -10000 \cdot x + 60000 = 0 \rightarrow x = 6 \text{ m} > 4 \text{ m}$$

kar pokaže, da maksimalni moment ne nastopi znotraj končnega elementa, temveč v njegovih krajiščih, torej vozliščih, kar je razvidno tudi iz grafa upogibnega momenta, slika 82.

Ekstremni vrednosti upogibnega momenta sta tako -160 kNm ter 0.

*Poprocesiranje: izračun funkcije upogibnega momenta s superpozicijo*

Pri pristopu s superpozicijo najprej poiščemo funkcijo linearne razporeditve momenta med vozliščnima vrednostima upogibnega momenta, nato pa tej funkciji prištejemo (superponiramo) funkcijo razporeditve upogibnega momenta zaradi morebitne zvezne obtežbe, ki deluje v polju končnega elementa, pri čemer končni element obravnavamo kot pomožni navidezno samostojni prostoležeči nosilec.

Za prvi končni element lahko zapišemo splošno funkcijo linearne razporeditve momenta med vozliščema:

$$M_o(x) = A + B \cdot x$$

kje sta  $A$  in  $B$  neznani konstanti. Določimo ju tako, da sta izpolnjena statična robna pogoja:

$$M_o(0) = -160000 \text{ Nm}$$

$$M_o(4) = 0 \text{ Nm}$$

Za prvi končni element tako sledi funkcija linearne razporeditve momenta med vozliščema:

$$M_o(x) = -160000 + 40000 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Alternativna matematična možnost, ki vodi do enake rešitve, je uporaba  $H_0$  interpolacijskih funkcij, ki sta:

$$N_{1,1}(x) = 1 - \frac{x}{4} \quad N_{1,2}(x) = \frac{x}{4} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Iskana funkcija upogibnega momenta je tako:

$$\begin{aligned} M_o(x) &= M_o(0) \cdot N_{1,1}(x) + M_o(4) \cdot N_{1,2}(x) = -160000 \text{ Nm} \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right) + 0 \cdot \frac{x}{4} \\ &= -160000 + 40000 \cdot x \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

Pomožnemu prostoležečemu nosilcu dolžine 4 m, obremenjenemu z enakomerno zvezno obtežbo 10000 N/m, pripada vertikalna reakcija v levi podpori:

$$V_A = \frac{10000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 4 \text{ m}}{2} = 20000 \text{ N}$$

in tako sledi funkcija upogibnega momenta:

$$\bar{M}_q(x) = V_A \cdot x - \frac{10000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot x^2}{2} = 20000 \text{ N} \cdot x - \frac{10000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot x^2}{2} = 20000 \cdot x - 5000 \cdot x^2 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Seštevek oz. superpozicija obeh funkcij momenta je ponovno:

$$\begin{aligned} M_{z,1}(x) &= M_o(x) + \bar{M}_q(x) = -160000 + 40000 \cdot x + 20000 \cdot x - 5000 \cdot x^2 \\ &= -5000 \cdot x^2 + 60000 \cdot x - 160000 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

Opomba: pri takem izračunu se navidezni člen  $x^3$  ne more pojaviti (razen v primeru neenakomerne zvezne obtežbe).

*Poprocesiranje rezultatov: izračun prave funkcije prečnega pomika s pomočjo diferencialnih zvez*

Točno funkcijo upogibnice lahko pridobimo tudi tako, da za vsak končni element rešimo samostojno diferencialno enačbo, upoštevajoč kot (kinematične) robne pogoje (zgolj) izračunane vozliščne vrednosti pomika in zasuka. Na tak način dobimo točno funkcijo upogibnice (ob pogoju, da so tudi vozliščne vrednosti pomika in zasuka točne).

Tako sledi diferencialna enačba:

$$EI \cdot \frac{d^4 v_1(x)}{dx^4} = q(x) \quad 0 < x < 4 \text{ m} \quad \rightarrow \quad 3.2 \cdot 10^7 \cdot \frac{d^4 v_1(x)}{dx^4} = -10000 \quad 0 < x < 4 \text{ m}$$

ki jo lahko rešimo (npr. z integriranjem) ob upoštevanju (zgolj) štirih kinematičnih robnih pogojev:

$$\begin{aligned}v_1(0) &= Y_1 = 0 \\ \frac{dv_1(0)}{dx} &= \Phi_1 = 0 \\ v_1(4 \text{ m}) &= Y_2 = -2.3333333333333327 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ \frac{dv_1(4 \text{ m})}{dx} &= \Phi_2 = -8.333333333333331 \cdot 10^{-3} \text{ rad}\end{aligned}$$

Ker pa je znana tudi točna funkcija upogibnega momenta, lahko uporabimo kar diferencialno enačbo 2. reda (ki pri reševanju zahteva manj računskega napora):

$$\begin{aligned}EI \cdot \frac{d^2 v_1(x)}{dx^2} &= M_{z,1}(x) \quad 0 < x < 4 \text{ m} \\ 3.2 \cdot 10^7 \cdot \frac{d^2 v_1(x)}{dx^2} &= -5000 \cdot x^2 + 60000 \cdot x - 160000 \quad 0 < x < 4 \text{ m}\end{aligned}$$

ki jo rešimo (npr. z integriranjem) ob upoštevanju (zgolj) dveh (izmed prej uporabljenih štirih) kinematičnih robnih pogojev (od katerih moramo uporabiti vsaj eno informacijo o pomiku), kar vodi do rešitve:

$$v_1(x) = -1.3020833333333329 \cdot 10^{-5} \cdot x^4 + 3.125 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 - 2.5 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

*Poprocesiranje: iskanje funkcije prečnega pomika s H2 interpolacijskimi funkcijami*

Ker sta znani še točni vrednosti upogibnega momenta, ki sta povezani z drugim odvodom funkcije prečnega pomika, lahko tudi ti dve informaciji (poleg informacij o znanem pomiku in zasuku v vozliščih) vključimo v analizo, s čemer dvignemo red polinoma v interpolacijskih funkcijah (ter posledično formalno v funkciji prečnega pomika) za dve stopnji. Ustrezne interpolacijske funkcije so tako:

$$N_{1,1}(x) = 1 - \frac{5}{32} \cdot x^3 + \frac{15}{256} \cdot x^4 - \frac{3}{512} \cdot x^5 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,2}(x) = x - \frac{3}{8} \cdot x^3 + \frac{1}{8} \cdot x^4 - \frac{3}{256} \cdot x^5 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,3}(x) = 1.5625 \cdot 10^{-8} \cdot x^2 - 1.171875 \cdot 10^{-8} \cdot x^3 + 2.9296875 \cdot 10^{-9} \cdot x^4 - 2.44140625 \cdot 10^{-10} \cdot x^5 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,4}(x) = \frac{5}{32} \cdot x^3 - \frac{15}{256} \cdot x^4 + \frac{3}{512} \cdot x^5 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,5}(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^3 + \frac{7}{64} \cdot x^4 - \frac{3}{256} \cdot x^5 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,6}(x) = 3.90625 \cdot 10^{-8} \cdot x^3 - 1.953125 \cdot 10^{-9} \cdot x^4 + 2.44140625 \cdot 10^{-10} \cdot x^5 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Načeloma približna, vendar sedaj točna rešitev za funkcijo prečnega pomika edinega končnega elementa je tako:

$$\begin{aligned} v_{1,N}(x) &= Y_1 \cdot N_{1,1}(x) + \Phi_1 \cdot N_{1,2}(x) + M_{z1} \cdot N_{1,3}(x) + Y_2 \cdot N_{1,4}(x) + \Phi_2 \cdot N_{1,5}(x) + M_{z2} \cdot N_{1,6}(x) \\ &= -2.5 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 3.125 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 - 1.3020833333333329 \cdot 10^{-5} \cdot x^4 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

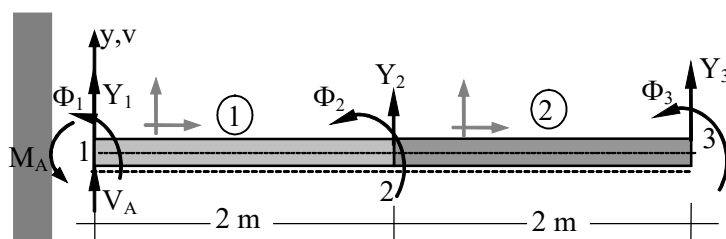
Rešitev v obliki polinoma 4. stopnje je sedaj točna.

Opomba: ker je rešitev sestavljena s pomočjo vsote polinomov 5. stopnje, se lahko zaradi zaokroževanja pojavi zelo majhen člen  $x^5$ , ki pa ga zanemarimo.

Celotna in tudi točna potencialna energija znaša  $\Pi = -413.3333333333332 \text{ J}$ . Ker je manjša od prej dobljene vrednosti, je to znak, da gre za boljšo rešitev.

## 2. računski model: diskretizacija z dvema končnima elementoma (enakih dolžin)

Pri diskretizaciji z dvema končnima elementoma sta neznanki vertikalni pomik sredinske točke nosilca  $Y_2$  in pripadajoči zasuk  $\Phi_2$ , ter vertikalni pomik desnega konca  $Y_3$  in pripadajoči zasuk  $\Phi_3$ .



Slika 83: Izbrana diskretizacija z dvema končnima elementoma

Togostni matriki elementov sta, zaradi enakih dolžin, kar je najpriročnejša (in tudi najbolj pogosta) izbira, medsebojno enaki:

$$[k_1] = \begin{bmatrix} 48 & 48 & -48 & -48 \\ 48 & 64 & -48 & 32 \\ -48 & -48 & 48 & -48 \\ 48 & 32 & -48 & 64 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \quad \text{in} \quad [k_2] = \begin{bmatrix} 48 & 48 & -48 & 48 \\ 48 & 64 & -48 & 32 \\ -48 & -48 & 48 & -48 \\ 48 & 32 & -48 & 64 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

Zaradi enakih dolžin obeh elementov in enake obtežbe sta medsebojno enaka tudi obtežna vektorja:

$$\{F_1\} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ -3333.3333333333335 \\ -10000 \\ 3333.3333333333335 \end{Bmatrix} \quad \{F_2\} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ -3333.3333333333335 \\ -10000 \\ 3333.3333333333335 \end{Bmatrix}$$

Matrične enačbe konstrukcije so:

$$\begin{bmatrix} 96 & 0 & -48 & 48 \\ 0 & 128 & -48 & 32 \\ -48 & -48 & 48 & -48 \\ 48 & 32 & -48 & 64 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -20000 \\ 0 \\ -10000 \\ 3333.3333333333335 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -20000 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -20000 \\ 0 \\ -30000 \\ 3333.3333333333333 \end{Bmatrix}$$

ki imajo rešitve:

$$\begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.7708333333333325 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -6.666666666666666 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -2.3333333333333327 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -8.333333333333331 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

ki so točne. Prepričamo se lahko, da sta vrednosti za pomik in zasuk prostega konca (sedaj  $Y_3$  in  $\Phi_3$ ) enaki kot pri prvi, osnovni diskretizaciji (le z drugačnimi označbami vozlišča).

*Poprocesiranje: iskanje funkcije prečnega pomika konzole s H0 interpolacijskimi funkcijami*

Ker vse znane vrednosti pomika pripadajo isti funkciji upogibnice, lahko najenostavnejšo enovito funkcijo upogibnice dobimo, če v interpolaciji upoštevamo samo diskretne vrednosti pomika. Ker so sedaj znane tri vrednosti, bo interpolacija vodila do funkcije v

obliki kvadratnega polinoma, kar sicer predstavlja boljši približek glede na diskretizacijo z enim končnim elementom, ne predstavlja pa še točne rešitve. Funkcija prečnega pomika, ki jo lahko izračunamo z različnimi matematičnimi pristopi (reševanje sistema enačb, Lagrangova interpolacija, Newtonova interpolacija), je tako:

$$v_{1,N,H0}(x) = -1.875 \cdot 10^{-3} \cdot x - 9.895833333333334 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Celotna potencialna energija, izračunana s to funkcijo prečnega pomika, znaša  $\Pi = -577.0833333333336 \text{ J}$ .

*Poprocesiranje: iskanje funkcij prečnega pomika s pomočjo H1 interpolacijskih funkcij*

Pri izračunu upogibnice pa lahko upoštevamo še tri znane vrednosti odvoda prečnega pomika v vsakem vozlišču. Čeprav vseh 6 znanih vrednosti pripada isti funkciji, analizo običajno naredimo ločeno za posamezni končni element, kjer pa lahko upoštevamo samo štiri informacije, kar posledično vpliva na stopnjo polinoma in tudi kvaliteto rešitve.

Interpolacijske funkcije za prvi končni element so (za izračun funkcije prečnega pomika potrebujemo samo zadnji dve):

$$N_{1,1}(x) = 1 - \frac{3}{4} \cdot x^2 + \frac{x^3}{4} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 2 \text{ m}$$

$$N_{1,2}(x) = x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{3 \cdot x^3}{4} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 2 \text{ m}$$

$$N_{1,3}(x) = \frac{3}{4} \cdot x^2 - \frac{x^3}{4} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 2 \text{ m}$$

$$N_{1,4}(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{x^3}{4} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 2 \text{ m}$$

Približna rešitev za funkcijo prečnega pomika prvega končnega elementa je tako:

$$\begin{aligned} v_{1,N}(x) &= Y_1 \cdot N_{1,1}(x) + \Phi_1 \cdot N_{1,2}(x) + Y_2 \cdot N_{1,3}(x) + \Phi_2 \cdot N_{1,4}(x) \\ &= -2.4479166666666663 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 2.60416666666666618 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 2 \text{ m} \end{aligned}$$

Interpolacijske funkcije za drugi končni element so (zapisane npr. v globalnem koordinatnem sistemu, kar omogoča lažjo primerjavo funkcij pomika):

$$N_{2,1}(x) = -4 + 6 \cdot x - \frac{9}{4} \cdot x^2 + \frac{x^3}{4} \quad 2 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{2,2}(x) = -8 + 8 \cdot x - \frac{5}{2} \cdot x^2 + \frac{x^3}{4} \quad 2 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

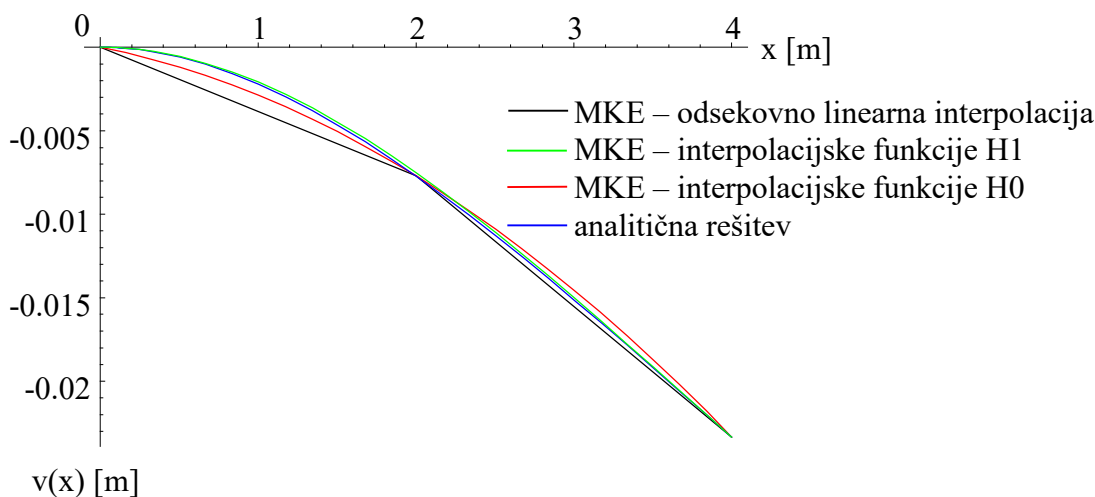
$$N_{2,3}(x) = 5 - 6 \cdot x + \frac{9}{4} \cdot x^2 - \frac{x^3}{4} \quad 2 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{2,4}(x) = -4 + 5 \cdot x - 2 \cdot x^2 + \frac{x^3}{4} \quad 2 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Približna rešitev za funkcijo prečnega pomika drugega končnega elementa je tako:

$$\begin{aligned} v_{2,N}(x) &= Y_2 \cdot N_{2,1}(x) + \Phi_2 \cdot N_{2,2}(x) + Y_3 \cdot N_{2,3}(x) + \Phi_3 \cdot N_{2,4}(x) \\ &= 8.333333333333283 \cdot 10^{-4} - 1.25 \cdot 10^{-3} \cdot x - 1.8229166666666632 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 1.5625 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 \\ & \quad 2 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

Da gre za približni rešitvi lahko posredno ugotovimo tudi z medsebojno primerjavo funkcij obeh elementov (ker sta zapisani v skupnem koordinatnem sistemu), ki bi morali biti enaki, saj pripadata istemu konstrukcijskemu elementu.



Slika 84: Primerjava dobljenih rešitev za prečni pomik s točno rešitvijo

Novi odsekovni funkciji iste rešitve (zelene barve) izkazujeta dobro/odlično ujemanje s točno rešitvijo (modre barve), pa čeprav gre zgolj za približka.

Da gre za boljši približek kot pri diskretizaciji z enim končnim elementom, posredno potrди tudi celotna potencialna energija, ki sedaj znaša še nekoliko manj, torej  $\Pi = -413.194444444447 \text{ J}$  (in ni manjša od točne vrednosti).

Poprocesiranje: iskanje vozliščnih vrednosti sekundarnih spremenljivk in NSK

Manjkajoči vozliščni vrednosti prečne sile in upogibnega momenta prvega končnega elementa sledijo iz vektorja sekundarnih spremenljivk prvega končnega elementa:

$$\begin{aligned} \{Q_1\} &= [K_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\} \\ \begin{Bmatrix} Q_{1,1} \\ Q_{1,2} \\ Q_{1,3} \\ Q_{1,4} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 48 & 48 & -48 & 48 \\ 48 & 64 & -48 & 32 \\ -48 & -48 & 48 & -48 \\ 48 & 32 & -48 & 64 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -7.708333333333 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -6.666666666667 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -10000 \\ -3333.3333333333 \\ -10000 \\ 3333.3333333333 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 60000 \\ 160000 \\ -40000 \\ -60000 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,1} \\ M_{z,1} \\ V_{y,2} \\ M_{z,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{1,1} \\ -Q_{1,2} \\ -Q_{1,3} \\ Q_{1,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 60000 \text{ N} \\ -160000 \text{ Nm} \\ 40000 \text{ N} \\ -60000 \text{ Nm} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Iz prvih dveh členov vektorja sekundarnih spremenljivk lahko neposredno odčitamo velikosti in usmeritvi reakcij v točki A, ki sta enaki kot pri prvi, osnovni diskretizaciji.

Manjkajoči vozliščni vrednosti prečne sile in upogibnega momenta drugega končnega elementa sledijo iz vektorja sekundarnih spremenljivk drugega končnega elementa:

$$\begin{aligned} \{Q_2\} &= [K_2] \cdot \{U_2\} - \{F_2\} \\ \begin{Bmatrix} Q_{2,1} \\ Q_{2,2} \\ Q_{2,3} \\ Q_{2,4} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 48 & 48 & -48 & 48 \\ 48 & 64 & -48 & 32 \\ -48 & -48 & 48 & -48 \\ 48 & 32 & -48 & 64 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} -0.770833333333 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -6.666666666666 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -2.333333333333 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -8.333333333333 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -10000 \\ -3333.3333333333 \\ -10000 \\ 3333.3333333333 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 40000 \\ 60000 \\ -20000 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,2} \\ M_{z,2} \\ V_{y,3} \\ M_{z,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{2,1} \\ -Q_{2,2} \\ -Q_{2,3} \\ Q_{2,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 40000 \text{ N} \\ -60000 \text{ Nm} \\ 20000 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Ker se drugi element ne priključuje v podporo, vrednosti členov vektorja sekundarnih spremenljivk ne predstavljajo reakcij, temveč vozliščni sili in momenta na navidezno prostem telesu (elementu).

S pomočjo diskretnih vozliščnih vrednosti upogibnega momenta in prečne sile bi lahko tudi pri tem modelu za vsak končni element ločeno poiskali najprej funkcijo upogibnega momenta  $M_z(x)$  (in nato še prečne sile  $V_y(x)$ ), ki pa bi bili ne samo medsebojno enaki, temveč enaki tudi že znani točni rešitvi iz prve diskretizacije.

*Poprocesiranje: iskanje približkov reakcij iz funkcij upogibnega momenta iz odvoda upogibnice*

Če za izračun funkcij upogibnega momenta uporabimo (sicer korektno) diferencialno zvezo:

$$M_{e,z}(x) = EI \cdot \frac{d^2 v_{e,N}(x)}{dx^2}$$

je jasno, da bomo ob uporabi približne rešitve za upogibnico  $v_{i,N}(x)$  dobili približni rešitvi tudi za funkciji upogibnega momenta (in iz njiju posledično še funkciji prečne sile). Za prvi končni element tako sledi funkcija:

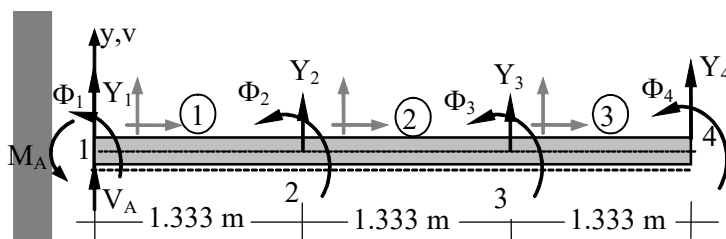
$$M_{1,z}(x) = EI \cdot \frac{d^2 v_{1,N}(x)}{dx^2} = 50000 \cdot x - 156666.666666666683 \quad 0 \leq x \leq 2 \text{ m}$$

Približna funkcija prečne sile je tako:

$$V_{1,y}(x) = \frac{dM_{1,z}(x)}{dx} = 50000 \quad 0 \leq x \leq 2 \text{ m}$$

Obe rešitvi sta boljše približka kot pri uporabi tega pristopa pri diskretizaciji z enim končnim elementom. Tudi vrednosti reakcij v podpori, izračunani s pomočjo teh dveh (približnih) funkcij, sta posledično boljše približka: -156666.666666666683 Nm za upogibni moment ter 50000 N za vertikalno reakcijo.

### 3. računski model: diskretizacija s tremi enako dolgimi končnimi elementi



Slika 85: Izbrana diskretizacija s tremi enako dolgimi končnimi elementi

Pri diskretizaciji s tremi končnimi elementi so neznanke vertikalna pomika nosilca ( $Y_2$  in  $Y_3$ ) in zasuka ( $\Phi_2$  in  $\Phi_3$ ) notranjih točk oz. vozlišč, ter vertikalni pomik desnega konca  $Y_4$  in pripadajoči zasuk  $\Phi_4$ .

Togostne matrike elementov so, zaradi enakih dolžin, kar je najpriročnejša izbira, medsebojno enake:

$$\begin{aligned}
 [k_1] &= \begin{bmatrix} 162 & 108 & -162 & 108 \\ 108 & 96 & -108 & 48 \\ -162 & -108 & 162 & -108 \\ 108 & 48 & -108 & 96 \end{bmatrix} \cdot 10^6, & [k_2] &= \begin{bmatrix} 162 & 108 & -162 & 108 \\ 108 & 96 & -108 & 48 \\ -162 & -108 & 162 & -108 \\ 108 & 48 & -108 & 96 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \\
 [k_3] &= \begin{bmatrix} 162 & 108 & -162 & 108 \\ 108 & 96 & -108 & 48 \\ -162 & -108 & 162 & -108 \\ 108 & 48 & -108 & 96 \end{bmatrix} \cdot 10^6
 \end{aligned}$$

Medsebojno enaki so tudi obtežni vektorji:

$$\{F_1\} = \begin{Bmatrix} -6666.666666666667 \\ -1481.4814814814815 \\ -6666.666666666667 \\ 1481.4814814814815 \end{Bmatrix}, \quad \{F_2\} = \begin{Bmatrix} -6666.666666666667 \\ -1481.4814814814815 \\ -6666.666666666667 \\ 1481.4814814814815 \end{Bmatrix}, \quad \{F_3\} = \begin{Bmatrix} -6666.666666666667 \\ -1481.4814814814815 \\ -6666.666666666667 \\ 1481.4814814814815 \end{Bmatrix}$$

Matrične enačbe konstrukcije so:

$$\begin{bmatrix} 324 & 0 & -162 & 108 & 0 & 0 \\ 0 & 192 & -108 & 48 & 0 & 0 \\ -162 & -108 & 324 & 0 & -162 & 108 \\ 108 & 48 & 0 & 192 & -108 & 48 \\ 0 & 0 & -162 & -108 & 162 & -108 \\ 0 & 0 & 108 & 48 & -108 & 96 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \\ Y_4 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -13333.333333333334 \\ 0 \\ -13333.333333333334 \\ 0 \\ -6666.666666666668 \\ 1481.4814814814815 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -20000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ki imajo rešitve

$$\begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \\ Y_4 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.37448559670781925 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -5.123456790123462 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -1.2510288065843628 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -7.654320987654323 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -2.3333333333333327 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -8.333333333333331 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

ki so točne. Ponovno se lahko prepričamo, da sta vrednosti za pomik in zasuk prostega konca (sedaj  $Y_4$  in  $\Phi_4$ ) enaki kot pri prvi, osnovni diskretizaciji (le z drugačnimi označbami vozlišča).

*Poprocesiranje: iskanje funkcije prečnega pomika konzole s H0 interpolacijskimi funkcijami*

Ker vse znane vrednosti pomika pripadajo isti funkciji upogibnice, lahko najenostavnejšo enovito funkcijo upogibnice ponovno dobimo, če v interpolaciji upoštevamo samo diskretne vrednosti pomika. Ker so sedaj znane štiri vrednosti, bo interpolacija vodila do funkcije v obliki kubnega polinoma, kar ponovno predstavlja boljši približek glede na diskretizacijo z dvema končnima elementoma, ne predstavlja pa še točne rešitve (ki je polinom 4. stopnje). Funkcija prečnega pomika je tako:

$$v_{1,N,H0}(x) = -1.851851851851884 \cdot 10^{-4} \cdot x - 2.2453703703703603 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 \\ + 2.0833333333333275 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Celotna potencialna energija, izračunana s to funkcijo prečnega pomika, znaša  $\Pi = -440.1920438957479 \text{ J}$ .

*Poprocesiranje: iskanje funkcij prečnega pomika elementov s H1 interpolacijskimi funkcijami*

Približne rešitve za funkcijo prečnega pomika po končnih elementih so sedaj:

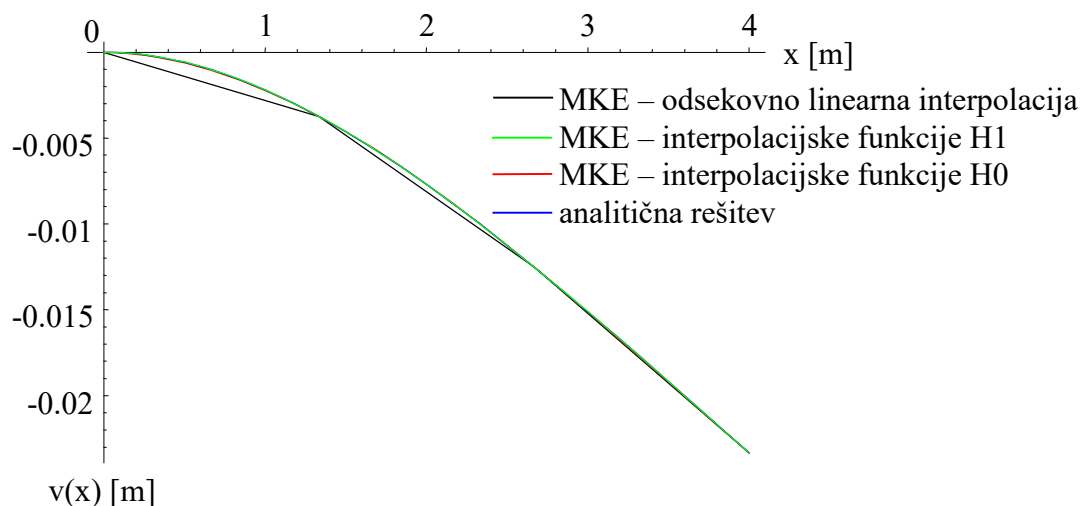
$$v_{1,N}(x) = -2.4768518518518464 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 2.777777777777787 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq \frac{4 \text{ m}}{3}$$

$$v_{2,N}(x) = 1.6460905349794525 \cdot 10^{-4} - 3.70370370370382 \cdot 10^{-4} \cdot x \\ - 2.199074074074065 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 2.083333333333294 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 \quad \frac{4 \text{ m}}{3} \leq x \leq \frac{8 \text{ m}}{3}$$

$$v_{3,N}(x) = 1.4814814814814725 \cdot 10^{-2} - 1.8518518518518823 \cdot 10^{-3} \cdot x \\ - 1.6435185185185025 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 1.3888888888888631 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 \quad \frac{8 \text{ m}}{3} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Da gre za približne rešitve lahko posredno ugotovimo tudi z medsebojno primerjavo vseh funkcij elementov (ker so zapisane v skupnem koordinatnem sistemu), ki bi morale biti enake, saj pripadajo istemu konstrukcijskemu elementu.

Celotna potencialna energija, izračunana s pomočjo funkcije pomika vseh treh elementov, sedaj znaša  $\Pi = -413.30589849108765$  J, kar je še nekoliko manj kot v prejšnji diskretizaciji z dvema končnima elementoma, kar posredno potrди, da gre ponovno za boljši približek. Ker pa je razlika med obema energijama zelo majhna, to hkrati nakazuje, da večjih sprememb ni pričakovati in gostejša diskretizacija pravzaprav ni več nujno potrebna.



Slika 86: Primerjava dobljenih rešitev za prečni pomik s točno rešitvijo

Poprocesiranje: iskanje vozliščnih vrednosti sekundarnih spremenljivk NSK

Manjkajoči vozliščni vrednosti prečne sile in upogibnega momenta prvega končnega elementa sledijo iz vektorja sekundarnih spremenljivk:

$$\{Q_1\} = [K_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{1,1} \\ Q_{1,2} \\ Q_{1,3} \\ Q_{1,4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 162 & 108 & -162 & 108 \\ 108 & 96 & -108 & 48 \\ -162 & -108 & 162 & -108 \\ 108 & 48 & -108 & 96 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.37448559670781925 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -5.123456790123462 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -6666.666666666667 \\ -1481.4814814814815 \\ -6666.666666666667 \\ 1481.4814814814815 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 60000 \\ 160000 \\ -46666.666666666659 \\ -88888.88888888907 \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,1} \\ M_{z,1} \\ V_{y,2} \\ M_{z,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{1,1} \\ -Q_{1,2} \\ -Q_{1,3} \\ Q_{1,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 60000 \text{ N} \\ -160000 \text{ Nm} \\ 46666.666666666659 \text{ N} \\ -88888.88888888907 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Iz prvih dveh členov vektorja sekundarnih spremenljivk lahko neposredno odčitamo velikosti in usmeritvi reakcij v točki A, ki sta enaki kot pri prvi, osnovni diskretizaciji.

Manjkajoči vozliščni vrednosti prečne sile in upogibnega momenta drugega končnega elementa sledijo iz vektorja sekundarnih spremenljivk:

$$\{Q_2\} = [K_2] \cdot \{U_2\} - \{F_2\} = \begin{Bmatrix} Q_{2,1} \\ Q_{2,2} \\ Q_{2,3} \\ Q_{2,4} \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 162 & 108 & -162 & 108 \\ 108 & 96 & -108 & 48 \\ -162 & -108 & 162 & -108 \\ 108 & 48 & -108 & 96 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} -0.37448559670782 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -5.123456790123462 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -7.654320987654323 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -5.123456790123462 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -6666.666666666667 \\ -1481.4814814814815 \\ -6666.666666666667 \\ 1481.4814814814815 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 46666.666666666643 \\ 88888.888888888866 \\ -33333.33333333331 \\ -35555.555555555564 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,2} \\ M_{z,2} \\ V_{y,3} \\ M_{z,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{2,1} \\ -Q_{2,2} \\ -Q_{2,3} \\ Q_{2,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 46666.666666666643 \text{ N} \\ -88888.888888888866 \text{ Nm} \\ 33333.33333333331 \text{ N} \\ -35555.555555555564 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Manjkajoči vozliščni vrednosti prečne sile in upogibnega momenta tretjega končnega elementa sledijo iz vektorja sekundarnih spremenljivk:

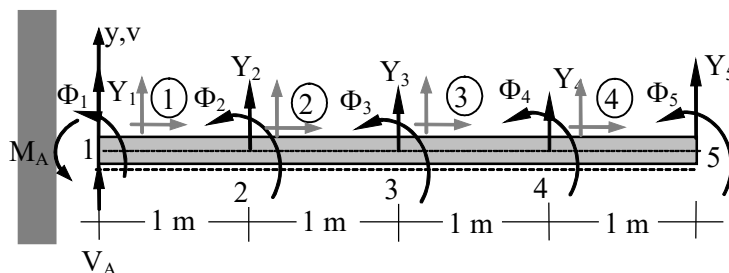
$$\{Q_3\} = [K_3] \cdot \{U_3\} - \{F_3\} = \begin{Bmatrix} Q_{3,1} \\ Q_{3,2} \\ Q_{3,3} \\ Q_{3,4} \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 162 & 108 & -162 & 108 \\ 108 & 96 & -108 & 48 \\ -162 & -108 & 162 & -108 \\ 108 & 48 & -108 & 96 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} -7.654320987654323 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -5.123456790123462 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -2.333333333333327 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -8.333333333333331 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -6666.666666666667 \\ -1481.4814814814815 \\ -6666.666666666667 \\ 1481.4814814814815 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 33333.33333333259 \\ 35555.55555555518 \\ -20000 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,3} \\ M_{z,3} \\ V_{y,4} \\ M_{z,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{3,1} \\ -Q_{3,2} \\ -Q_{3,3} \\ Q_{3,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 33333.33333333259 \text{ N} \\ -35555.55555555518 \text{ Nm} \\ 20000 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Opomba: ker so vozliščne vrednosti upogibnega momenta in prečne sile točne v vseh vozliščih, bi lahko analizo drugega končnega elementa brez izgube informacij tudi izpustili.

4. računski model: diskretizacija s štirimi enako dolgimi končnimi elementi



Slika 87: Izbrana diskretizacija s štirimi enako dolgimi končnimi elementi

Pri diskretizaciji s štirimi končnimi elementi so neznanke vertikalni pomiki nosilca ( $Y_2$ ,  $Y_3$  in  $Y_5$ ) in zasuki ( $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  in  $\Phi_4$ ) notranjih točk oz. vozlišč, ter vertikalni pomik desnega konca  $Y_5$  in pripadajoči zasuk  $\Phi_5$ .

Togostne matrike elementov so, zaradi enakih dolžin, kar je najpriročnejša izbira, medsebojne enake:

$$\begin{aligned}
 [k_1] &= \begin{bmatrix} 384 & 192 & -384 & 192 \\ 192 & 128 & -192 & 64 \\ -384 & -192 & 384 & -192 \\ 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6 & , & [k_2] = \begin{bmatrix} 384 & 192 & -384 & 192 \\ 192 & 128 & -192 & 64 \\ -384 & -192 & 384 & -192 \\ 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \\
 [k_3] &= \begin{bmatrix} 384 & 192 & -384 & 192 \\ 192 & 128 & -192 & 64 \\ -384 & -192 & 384 & -192 \\ 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6 & \text{in} & [k_4] = \begin{bmatrix} 384 & 192 & -384 & 192 \\ 192 & 128 & -192 & 64 \\ -384 & -192 & 384 & -192 \\ 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6
 \end{aligned}$$

Medsebojno enaki so tudi obtežni vektorji elementov:

$$\begin{aligned}
 \{F_1\} &= \begin{Bmatrix} -5000 \\ -833.3333333333334 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix} & \{F_2\} &= \begin{Bmatrix} -5000 \\ -833.3333333333334 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix} & \{F_3\} &= \begin{Bmatrix} -5000 \\ -833.3333333333334 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix} \\
 \{F_4\} &= \begin{Bmatrix} -5000 \\ -833.3333333333334 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Bistvene enačbe konstrukcije (v matrični obliki) so:

$$\begin{bmatrix}
 768 & 0 & -384 & 192 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 256 & -192 & 64 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -384 & -192 & 768 & 0 & -384 & 192 & 0 & 0 \\
 192 & 64 & 0 & 256 & -192 & 64 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -384 & -192 & 768 & 0 & -384 & 192 \\
 0 & 0 & 192 & 64 & 0 & 256 & -192 & 64 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -384 & -192 & 384 & -192 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 192 & 64 & -192 & 128
 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \\ Y_4 \\ \Phi_4 \\ Y_5 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \\ -10000 \\ 0 \\ -10000 \\ 0 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \\ -10000 \\ 0 \\ -10000 \\ 0 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -20000 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \\ -10000 \\ 0 \\ -10000 \\ 0 \\ -25000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

ki imajo rešitve

$$\begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \\ Y_4 \\ \Phi_4 \\ Y_5 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.22005208333333376 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -4.1145833333333426 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -0.7708333333333352 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -6.666666666666668 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -1.51171875 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -7.96875 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -2.333333333333327 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -8.333333333333331 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

ki so točne. Ponovno se lahko prepričamo, da sta vrednosti za pomik in zasuk prostega konca (sedaj  $Y_5$  in  $\Phi_5$ ) enaki kot pri prvi, osnovni diskretizaciji (le z drugačnimi označbami vozlišča). Dodatno se lahko še prepričamo, da sta tudi vrednosti za pomik in zasuk sredinskega vozlišča (sedaj  $Y_3$  in  $\Phi_3$ ) enaki kot pri drugi diskretizaciji (le z drugačnimi označbami vozlišča).

– iskanje funkcije upogibnice konzole z uporabo Lagrangejeve interpolacije pomikov

Ker je sedaj znanih 5 *točnih* vrednosti pomika, lahko točno funkcijo upogibnice izračunamo še z interpolacijo zgolj pomikov konstrukcije, saj le-ta (že) vodi do polinoma 4. stopnje, ki ustreza točni rešitvi funkcije upogibnice. Ta pristop s H0 interpolacijskimi funkcijami smo sicer uporabili že pri prejšnjih diskretizacijah, vendar zaradi premalega števila znanih pomikov tam nismo dobili rešitve v obliki polinoma ustrezne stopnje in so bile posledično vse na ta način dobljene rešitve približne.

Splošna oblika polinoma 4. stopnje je:

$$v_N(x) = A_0 + A_1 \cdot x + A_2 \cdot x^2 + A_3 \cdot x^3 + A_4 \cdot x^4$$

kjer konstante  $A_0, A_1, \dots, A_4$  določimo na osnovi znanih diskretnih vrednosti pomika, kar običajno storimo s pomočjo rešitve sistema linearnih enačb.

Reševanju enačb se lahko izognemo, če uporabimo Lagrangeovo interpolacijo, za katere izvedbo potrebujemo Lagrangeove bazne polinome. Ker imamo znanih 5 vozliščnih vrednosti pomika, bi načeloma potrebovali pet funkcij, ker pa je vrednost pomika v prvem vozlišču enaka nič, potrebujemo Lagrangeove bazne polinome samo za drugo, tretje, četrto in peto vozlišče. Vsak polinom ima v izbranem vozlišču vrednost 1, v vseh ostalih pa je vrednost enaka 0. Tvorimo jih sistematično s pomočjo enostavnega izraza v obliki ulomka produktov:

$$l_2 = \frac{(x-0) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4)}{(1-0) \cdot (1-2) \cdot (1-3) \cdot (1-4)} = 4 \cdot x - \frac{13}{3} \cdot x^2 + \frac{3}{2} \cdot x^3 - \frac{1}{6} \cdot x^4 \quad 0 \text{ m} \leq 4 \text{ m}$$

$$l_3 = \frac{(x-0) \cdot (x-1) \cdot (x-3) \cdot (x-4)}{(2-0) \cdot (2-1) \cdot (2-3) \cdot (2-4)} = -3 \cdot x + \frac{19}{3} \cdot x^2 - 2 \cdot x^3 + \frac{1}{3} \cdot x^4 \quad 0 \text{ m} \leq 4 \text{ m}$$

$$l_4 = \frac{(x-0) \cdot (x-1) \cdot (x-3) \cdot (x-4)}{(3-0) \cdot (3-1) \cdot (3-2) \cdot (3-4)} = \frac{4}{3} \cdot x - \frac{7}{3} \cdot x^2 + \frac{7}{6} \cdot x^3 - \frac{1}{6} \cdot x^4 \quad 0 \text{ m} \leq 4 \text{ m}$$

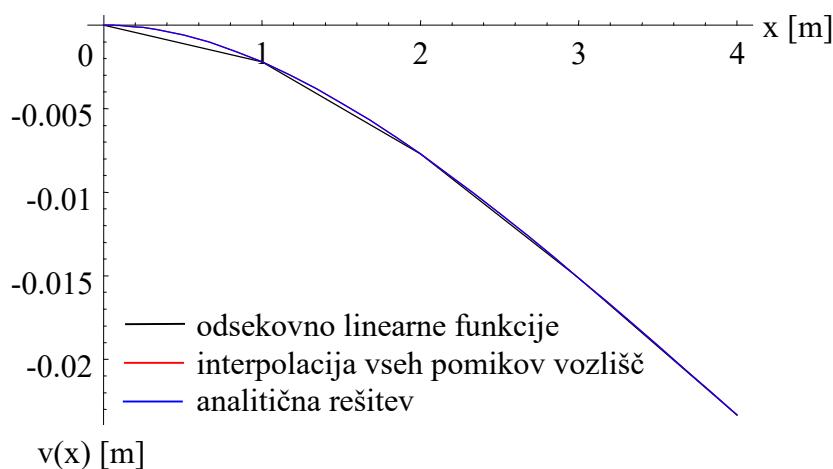
in

$$l_5 = \frac{(x-0) \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)}{(4-0) \cdot (4-1) \cdot (4-2) \cdot (4-3)} = -\frac{1}{4} \cdot x + \frac{11}{24} \cdot x^2 - \frac{1}{4} \cdot x^3 + \frac{1}{24} \cdot x^4 \quad 0 \text{ m} \leq 4 \text{ m}$$

Tako sledi funkcija prečnega pomika:

$$\begin{aligned}
 v_{N,L}(x) &= v_2 \cdot l_2 + v_3 \cdot l_3 + v_4 \cdot l_4 + v_5 \cdot l_4 = \\
 & \left( -0.220052083333333376 \cdot 10^{-2} \text{ m} \right) \cdot \left( 4 \cdot x - \frac{13}{3} \cdot x^2 + \frac{3}{2} \cdot x^3 - \frac{1}{6} \cdot x^4 \right) \\
 & + \left( -0.770833333333333352 \cdot 10^{-2} \text{ m} \right) \cdot \left( -3 \cdot x + \frac{19}{3} \cdot x^2 - 2 \cdot x^3 + \frac{1}{3} \cdot x^4 \right) \\
 & + \left( -1.51171875 \cdot 10^{-2} \text{ m} \right) \cdot \left( \frac{4}{3} \cdot x - \frac{7}{3} \cdot x + \frac{7}{6} \cdot x^3 - \frac{1}{6} \cdot x^4 \right) \\
 & + \left( -2.33333333333333327 \cdot 10^{-2} \text{ m} \right) \cdot \left( -\frac{1}{4} \cdot x + \frac{11}{24} \cdot x^2 - \frac{1}{4} \cdot x^3 + \frac{1}{24} \cdot x^4 \right) \\
 & = -2.5 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 3.125 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 - 1.30208333333333634 \cdot 10^{-5} \cdot x^4 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}
 \end{aligned}$$

ki je polinom 4. stopnje in predstavlja točno rešitev. To posredno potrди tudi celotna potencialna energija, ki sedaj znaša  $\Pi = -413.3333333333331 \text{ J}$ , kar je enako (v splošnem sicer neznani) točni vrednosti.



Slika 88: Primerjava dobljene rešitve za prečni pomik s točno rešitvijo

Iz slike zgoraj je razvidno, da se s povečevanjem števila končnih elementov tudi najenostavnejša funkcija upogibnice, dobljena z enostavno linearno interpolacijo zgolj vozliščnih vrednosti pomika elementa, približuje točni rešitvi.

Celotna potencialna energija sedaj znaša  $\Pi = -413.32465277778465 \text{ J}$ , kar je zgolj nekoliko manj kot v prejšnji diskretizaciji, kar sicer posredno potrди, da gre ponovno za boljši približek, hkrati pa tudi da gostejša diskretizacija ni smiselna.

Poprocesiranje: iskanje vozliščnih vrednosti sekundarnih spremenljivk in NSK

Manjkajoči vozliščni vrednosti prečne sile in upogibnega momenta prvega končnega elementa sledijo iz vektorja sekundarnih spremenljivk:

$$\{Q_1\} = [K_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\} = \begin{Bmatrix} Q_{1,1} \\ Q_{1,2} \\ Q_{1,3} \\ Q_{1,4} \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 384 & 192 & -384 & 192 \\ 192 & 128 & -192 & 64 \\ -384 & -192 & 384 & -192 \\ 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.22005208333333376 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -4.1145833333333426 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -5000 \\ -833.3333333333334 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 60000 \\ 160000 \\ -50000 \\ -105000 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,1} \\ M_{z,1} \\ V_{y,2} \\ M_{z,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{1,1} \\ -Q_{1,2} \\ -Q_{1,3} \\ Q_{1,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 60000 \text{ N} \\ -160000 \text{ Nm} \\ 50000 \text{ N} \\ -105000 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Manjkajoči vozliščni vrednosti prečne sile in upogibnega momenta drugega končnega elementa sledijo iz vektorja sekundarnih spremenljivk:

$$\{Q_2\} = [K_2] \cdot \{U_2\} - \{F_2\} = \begin{Bmatrix} Q_{2,1} \\ Q_{2,2} \\ Q_{2,3} \\ Q_{2,4} \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 384 & 192 & -384 & 192 \\ 192 & 128 & -192 & 64 \\ -384 & -192 & 384 & -192 \\ 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} -0.22005208333333376 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -4.1145833333333426 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -0.7708333333333352 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -6.666666666666668 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -5000 \\ -833.3333333333334 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 50000 \\ 105000 \\ -40000 \\ -60000 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,2} \\ M_{z,2} \\ V_{y,3} \\ M_{z,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{2,1} \\ -Q_{2,2} \\ -Q_{2,3} \\ Q_{2,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 50000 \text{ N} \\ -105000 \text{ Nm} \\ 40000 \text{ N} \\ -60000 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Manjkajoči vozliščni vrednosti prečne sile in upogibnega momenta tretjega končnega elementa sledijo iz vektorja sekundarnih spremenljivk:

$$\{Q_3\} = [K_3] \cdot \{U_3\} - \{F_3\} = \begin{Bmatrix} Q_{3,1} \\ Q_{3,2} \\ Q_{3,3} \\ Q_{3,4} \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 384 & 192 & -384 & 192 \\ 192 & 128 & -192 & 64 \\ -384 & -192 & 384 & -192 \\ 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} -0.7708333333333352 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -6.666666666666668 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -1.51171875 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -7.96875 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -5000 \\ -833.3333333333334 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 40000 \\ 60000 \\ -30000 \\ -25000 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} Q_{3,1} \\ -Q_{3,2} \\ -Q_{3,3} \\ Q_{3,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_{y,3} \\ M_{z,3} \\ V_{y,4} \\ M_{z,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 40000 \text{ N} \\ -60000 \text{ Nm} \\ 30000 \text{ N} \\ -25000 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Manjkajoči vozliščni vrednosti prečne sile in upogibnega momenta četrtega končnega elementa sledijo iz vektorja sekundarnih spremenljivk:

$$\{Q_4\} = [K_4] \cdot \{U_4\} - \{F_4\} = \begin{Bmatrix} Q_{4,1} \\ Q_{4,2} \\ Q_{4,3} \\ Q_{4,4} \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 384 & 192 & -384 & 192 \\ 192 & 128 & -192 & 64 \\ -384 & -192 & 384 & -192 \\ 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} -1.51171875 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -7.96875 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -2.3333333333333327 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -8.333333333333331 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -5000 \\ -833.3333333333334 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

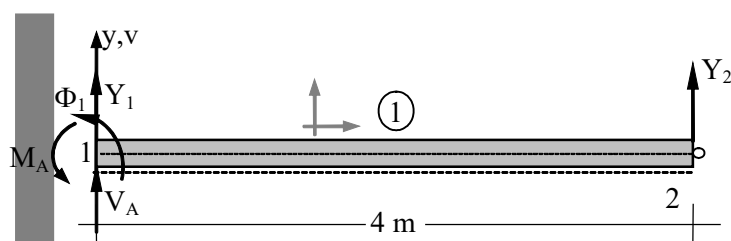
$$= \begin{Bmatrix} 30000 \\ 25000 \\ -20000 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} Q_{4,1} \\ -Q_{4,2} \\ -Q_{4,3} \\ Q_{4,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_{y,4} \\ M_{z,4} \\ V_{y,5} \\ M_{z,5} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 30000 \text{ N} \\ -25000 \text{ Nm} \\ 20000 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Vse izračunane notranje statične količine so točne.

### Informativni dodatek

#### Diskretizacija z enim končnim elementom tipa V-Č

Ker je znano, da je v desnem koncu upogibni moment enak nič, lahko uporabimo tudi diskretizacijo z elementom tipa V-Č. Računski model bo tako imel samo eno prostostno stopnjo – vertikalni pomik  $Y_2$ .



Slika 89: Izbrana diskretizacija z enim KE tipa V-Č

Začetno vozlišče elementa (1) postavimo v točko A, končno vozlišče (2) pa v točko B. Pozitivna os je tako na spodnji strani nosilca, slika zgoraj.

Togostna matrika in obtežni vektor edinega končnega elementa sta:

$$[K_1] = \begin{bmatrix} \frac{3 \cdot EI}{L^3} & \frac{3 \cdot EI}{L^2} & -\frac{3 \cdot EI}{L^3} & 0 \\ -\frac{3 \cdot EI}{L^2} & \frac{3 \cdot EI}{L} & -\frac{3 \cdot EI}{L^2} & 0 \\ \frac{3 \cdot EI}{L^3} & -\frac{3 \cdot EI}{L^2} & \frac{3 \cdot EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \{F_1\} = q \cdot \begin{Bmatrix} \frac{5}{8} \cdot L \\ \frac{L^2}{8} \\ \frac{3}{8} \cdot L \\ 0 \end{Bmatrix}$$

»Matrična« enačba konstrukcije po upoštevanju ničelnega pomika in zasuka v točki A konstrukcije je:

$$\left[ \frac{3 \cdot EI}{L^3} \right] \cdot \{Y_2\} = \left\{ -q \cdot \frac{3 \cdot L}{8} \right\} + \{-F\} = \left\{ -q \cdot \frac{3 \cdot L}{8} - F \right\} \rightarrow \frac{3 \cdot EI}{L^3} \cdot Y_2 = -q \cdot \frac{3 \cdot L}{8} - F$$

$$Y_2 = -\frac{L^4 \cdot q}{8 \cdot EI} - \frac{L^3 \cdot F}{3 \cdot EI}$$

kar je točen rezultat.

*Poprocesiranje: iskanje funkcije prečnega pomika s H1 interpolacijskimi funkcijami*

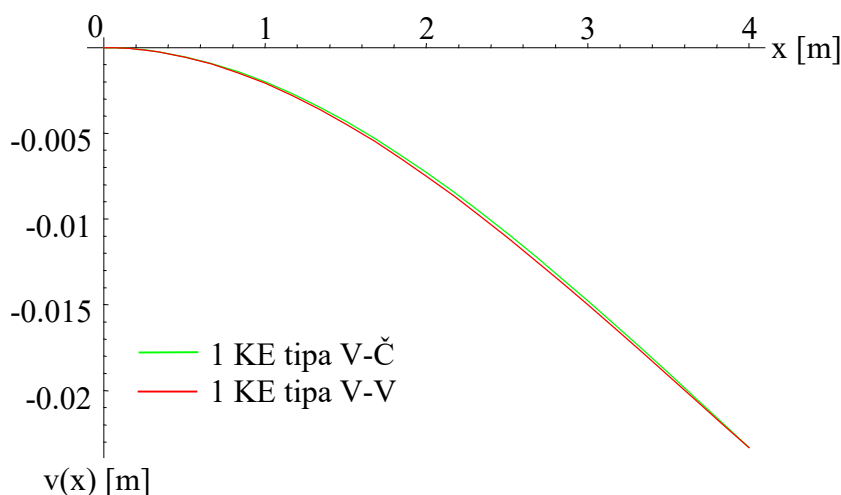
Pripadajoče interpolacijske funkcije so sedaj (za določitev funkcije prečnega pomika dejansko potrebujemo samo predzadnjo):

$$\begin{aligned} N_{1,1}(x) &= 1 - \frac{3}{32} \cdot x^2 + \frac{x^3}{128} & N_{1,2}(x) &= x - \frac{3}{8} \cdot x^2 + \frac{x^3}{32} \\ N_{1,3}(x) &= \frac{3}{32} \cdot x^2 - \frac{x^3}{128} & N_{1,4}(x) &= 0 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

Približna rešitev za funkcijo prečnega pomika edinega končnega elementa je tako:

$$\begin{aligned} v_{1,N,H1}(x) &= Y_1 \cdot N_{1,1}(x) + \Phi_1 \cdot N_{1,2}(x) + Y_2 \cdot N_{1,3}(x) + \Phi_2 \cdot N_{1,4}(x) \\ &= -2.1875 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 1.8229166666666666 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

Rešitev je približna, ker je predstavljena s polinomom 3. stopnje, prava oz. točna rešitev zaradi enakomerne zvezne obtežbe pa je polinom 4. stopnje. Ta rešitev ni enaka rešitvi, dobljeni z enim končnim elementom tipa V-V, vendar sta grafa funkcij podobna, ne pa tudi enaka (razlike pa so majhne):



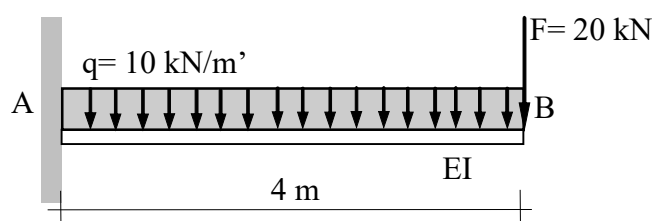
**Slika 90: Primerjava različnih rešitev za diskretizaciji z enim končnim elementom**

Iz grafa funkcij pomika ni mogoče soditi o tem, katera funkcija je boljša, vendar celotna potencialna energija, izračunana s to funkcijo prečnega pomika, znaša  $\Pi = -408.33333333333326 \text{ J}$ , kar pokaže, da je sedaj dobljena rešitev nekoliko slabša od prejšnje,

kar je posledica uporabe (sicer točne informacije) o drugem odvodu (oz. momentu) namesto prvem odvodu (oz. zasuku).

### Primer 6.b – Analiza levo vpete konzole z upoštevanjem strižnih deformacij

Za dani betonski konzolni nosilec konstantnega pravokotnega prereza ( $b/h = 0.2 \text{ m}/0.4 \text{ m}$ ) iz betona C20/25 ob upoštevanju strižnih deformacij določi pomik in zasuk desnega konca nosilca, funkcijo prečnega pomika ter funkcije notranjih statičnih količin vzdolž konstrukcije, in reakcije v podpori.



Slika 91: Obravnavani konzolni nosilec

### Rešitev

1. računski model: diskretizacija z enim Timoshenkovim končnim elementom

Ker število končnih elementov ne vpliva na vrednosti pomika in zasuka pod desnim koncem nosilca, lahko uporabimo osnovno diskretizacijo z enim Timoshenkovim končnim elementom, upoštevali pa bomo za beton tipično vrednost Poissonovega količnika  $\nu = 0.2$ . Tako sledijo vrednost strižnega prereza:

$$A_s = \frac{0.2 \text{ m} \cdot 0.4 \text{ m}}{1.2} = 6.66666666666667 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$$

strižnega modula:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = \frac{30 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{2 \cdot (1 + 0.2)} = 12.5 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

ter koeficienta

$$\Phi = \frac{12 \cdot EI}{G \cdot L_1^2 \cdot A_s} = \frac{12 \cdot 3.2 \cdot 10^7 \text{ Nm}^2}{12.5 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot (4 \text{ m})^2 \cdot 6.66666666666667 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2} = 0.0288$$

Togostna matrika in obtežni vektor edinega Timoshenkovega končnega elementa sta:

$$[K_1] = \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & 4 + \Phi & \frac{6}{L^2} & 2 + \Phi \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & 2 + \Phi & -\frac{6}{L^2} & 4 + \Phi \end{bmatrix} \cdot \frac{EI}{1 + \Phi} =$$

$$\begin{bmatrix} 0.5832037325 & 1.1664074650 & -0.5832037325 & 1.1664074650 \\ 1.1664074650 & 3.1328149300 & -1.1664074650 & 1.5328149300 \\ -0.5832037325 & -1.1664074650 & 0.5832037325 & -1.1664074650 \\ 1.1664074650 & 1.5328149300 & -1.1664074650 & 3.1328149300 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

in

$$\{F_1\} = q \cdot \begin{Bmatrix} \frac{L_e}{2} \\ \frac{L_e^2}{12} \\ \frac{L_e}{2} \\ -\frac{L_e^2}{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -20000 \\ -13333.3333333333 \\ -20000 \\ 13333.3333333333 \end{Bmatrix}$$

pri čemer je obtežni vektor enak kot pri standardnem Bernoulli-Eulerjevem končnem elementu.

Po upoštevanju znanih vrednosti pomika in zasuka v levem vozlišču sledi sistem enačb:

$$\begin{bmatrix} 0.5832037325 & -1.1664074650 & -0.5832037325 & -1.1664074650 \\ -1.1664074650 & 3.1328149300 & -1.1664074650 & -1.5328149300 \\ -0.5832037325 & -1.1664074650 & 0.5832037325 & -1.1664074650 \\ 1.1664074650 & 1.5328149300 & -1.1664074650 & 3.1328149300 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \Phi_1 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -20000 \\ -13333.3333333333 \\ -20000 \\ 13333.3333333333 \end{Bmatrix}$$

oziroma:

$$\begin{bmatrix} 0.5832037325 & -1.1664074650 \\ -1.1664074650 & 3.1328149300 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -20000 \\ 13333.3333333333 \end{Bmatrix}$$

Po upoštevanju koncentrirane sile na prostem koncu sistem dobi obliko:

$$\begin{bmatrix} 0.5832037325 & -1.1664074650 \\ -1.1664074650 & 3.1328149300 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -40000 \\ 13333.3333333333 \end{Bmatrix}$$

ki ima rešitvi:

$$\begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.35253333333333 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -8.33333333333325 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Dobljeni vrednosti sta točni, njuna primerjava z rešitvama, dobljenima z uporabo Bernoulli-Eulerjevega končnega elementa pokaže, da je bila sedaj dobljena nekoliko večja vrednost prečnega pomika ter identična vrednost zasuka.

*Poprocesiranje: iskanje funkcije prečnega pomika s H1 interpolacijskimi funkcijami*

Standardne H1 interpolacijske funkcije (brez upoštevanja strižnih deformacij) so enake kot v prejšnjem primeru (za določitev funkcije prečnega pomika dejansko potrebujemo samo zadnji dve):

$$N_{1,1}(x) = 1 - \frac{3}{16} \cdot x^2 + \frac{x^3}{32} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,2}(x) = x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{x^3}{16} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,3}(x) = \frac{3}{16} \cdot x^2 - \frac{x^3}{32} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,4}(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{x^3}{16} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Približna rešitev za funkcijo prečnega pomika edinega končnega elementa je tako:

$$\begin{aligned} v_{1,N,HI}(x) &= Y_1 \cdot N_{1,1}(x) + \Phi_1 \cdot N_{1,2}(x) + Y_2 \cdot N_{1,3}(x) + \Phi_2 \cdot N_{1,4}(x) \\ &= 0 \cdot N_{1,1}(x) + 0 \cdot N_{1,2}(x) - 2.352533333333331 \cdot 10^{-2} \text{ m m} \cdot \left( \frac{3}{16} \cdot x^2 - \frac{x^3}{32} \right) \\ &\quad - 8.333333333333331 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot \left( -\frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{x^3}{16} \right) \\ &= -2.327666666666665 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 2.143333333333332 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

Rešitev je približna iz dveh razlogov. Prvi je enak kot pri uporabi Bernoulli-Eulerjevega končnega elementa, saj je rešitev predstavljena s polinomom 3. stopnje, prava oz. točna rešitev zaradi enakomerne zvezne obtežbe pa je polinom 4. stopnje (kar je znano iz teorije mehanike). Drugi razlog je, da so bile uporabljene standardne interpolacijske funkcije, ki ne upoštevajo vpliva strižnih deformacij. Te posebne funkcije pa imajo obliko (tudi sedaj potrebujemo samo zadnji dve interpolacijski funkciji za določitev funkcije prečnega pomika):

$$N_{1,1}(x) = 1 - 6.99844479004666 \cdot 10^{-3} \cdot x - 0.182251166407465 \cdot x^2 + 3.03751944012442 \cdot 10^{-2} \cdot x^3$$

$$0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,2}(x) = 0.986003110419907 \cdot x - 0.48950233281493 \cdot x^2 + 6.07503888024883 \cdot 10^{-2} \cdot x^3$$

$$0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,3}(x) = 6.99844479004666 \cdot 10^{-3} \cdot x + 0.182251166407465 \cdot x^2 - 3.03751944012442 \cdot 10^{-2} \cdot x^3$$

$$0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

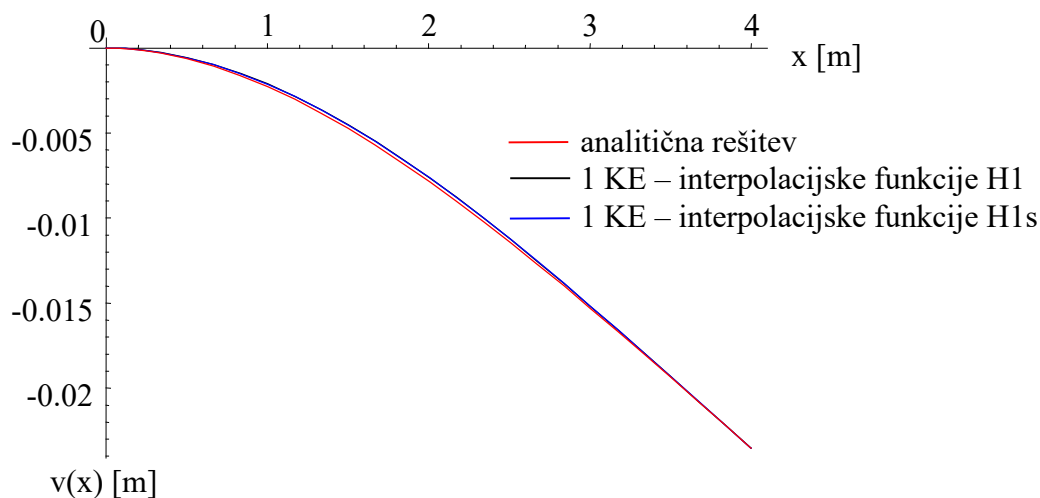
$$N_{1,4}(x) = -1.39968895800933 \cdot 10^{-2} \cdot x - 0.23950233281493 \cdot x^2 + 6.07503888024883 \cdot 10^{-2} \cdot x^3$$

$$0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

in z njimi izračunana nekoliko manj približna rešitev za funkcijo prečnega pomika edinega končnega elementa je tako:

$$v_{I,N,H1,T}(x) = Y_1 \cdot N_{1,1}(x) + \Phi_1 \cdot N_{1,2}(x) + Y_2 \cdot N_{1,3}(x) + \Phi_2 \cdot N_{1,4}(x)$$

$$= -4.01875 \cdot 10^{-5} \cdot x - 2.29752604166665 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 2.09309895833332 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$



Slika 92: Primerjava obeh dobljenih približnih rešitev za prečni pomik s točno rešitvijo

Iz slike vidimo, da je ujemanje obeh približnih rešitev dobro, odstopanje v primerjavi s pravo rešitvijo pa je sicer majhno, a vseeno opazno, predvsem na sredini konzole. Pri tem je smiselno pripomniti, da bi v primeru, ko na konstrukcijo ne bi delovala koncentrirana vertikalna sila, bile razlikev primerjavi s točno rešitvijo še opaznejše.

*Poprocesiranje: iskanje vozliščnih vrednosti sekundarnih spremenljivk in NSK*

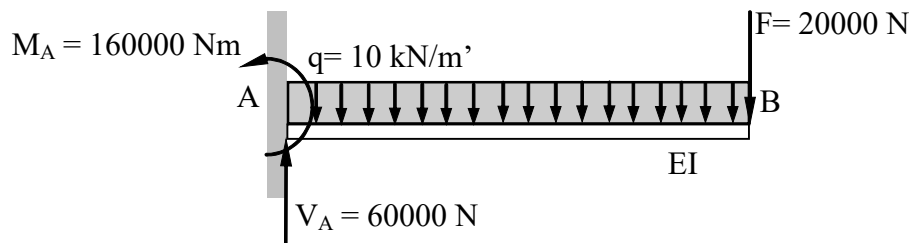
Manjkajoče vozliščne vrednosti prečne sile in upogibnega momenta sledijo iz vektorja sekundarnih spremenljivk, ki ga izračunamo kot:

$$\{Q_1\} = [K_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5832037325 & 1.1664074650 & -0.5832037325 & 1.1664074650 \\ 1.1664074650 & 3.1328149300 & -1.1664074650 & 1.5328149300 \\ -0.5832037325 & -1.1664074650 & 0.5832037325 & -1.1664074650 \\ 1.1664074650 & 1.5328149300 & -1.1664074650 & 3.1328149300 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.352533333333331 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -8.33333333333325 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -20000 \\ -13333.3333333333 \\ -20000 \\ 13333.3333333333 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 60000 \text{ N} \\ 160000 \text{ Nm} \\ -20000 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Ta vektor predstavlja vozliščni sili in momenta (od katerega je eden slučajno nič) na navidezno prostem telesu (elementu), prva dva člena pa predstavljata reakciji v podpori.



Slika 93: Izračunani reakciji in njuna usmeritev

Po ustrezni spremembi predznakov sledijo še vozliščne vrednosti notranjih statičnih količin:

$$\begin{Bmatrix} V_{y,1} \\ M_{z,1} \\ V_{y,2} \\ M_{z,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{1,1} \\ -Q_{1,2} \\ -Q_{1,3} \\ Q_{1,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 60000 \text{ N} \\ -160000 \text{ Nm} \\ 20000 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

ki so točne vrednosti.

*Poprocesiranje: iskanje funkcije upogibnega momenta in prečne sile z interpolacijo*

Funkcijo upogibnega momenta izračunamo z uporabo standardnih H1 interpolacijskih funkcij:

$$\begin{aligned} M_{z1,N}(x) &= M_{z,1} \cdot N_{1,1}(x) + V_{y,1} \cdot N_{1,2}(x) + M_{z,2} \cdot N_{1,3}(x) + V_{y,2} \cdot N_{1,4}(x) \\ &= -160000 \cdot \left(1 - \frac{3}{16} \cdot x^2 + \frac{x^3}{32}\right) + 60000 \cdot \left(x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{x^3}{16}\right) + 0 \cdot N_{1,3} \left(\frac{3}{16} \cdot x^2 - \frac{x^3}{32}\right) \\ &\quad + 20000 \cdot \left(-\frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{x^3}{16}\right) = -5000 \cdot x^2 + 60000 \cdot x - 160000 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

in dobljena funkcija je točna.

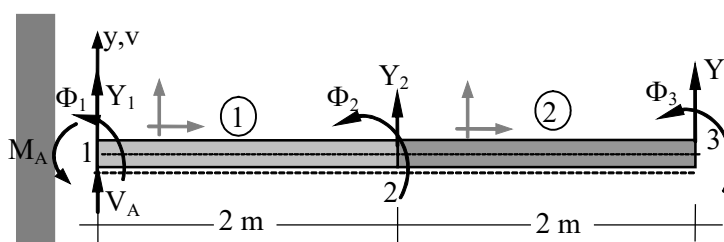
Funkcijo prečne sile najlažje dobimo po definiciji, torej z odvodom funkcije upogibnega momenta:

$$V_{y1,N}(x) = \frac{dM_{z1,N}(x)}{dx} = -10000 \cdot x + 60000 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

in je prav tako točna.

## 2. računski model: diskretizacija z dvema Timoshenkovima končnima elementoma

Pri diskretizaciji z dvema končnima elementoma sta neznanki vertikalni pomik sredinske točke nosilca  $Y_2$  in pripadajoči zasuk  $\Phi_2$ , ter vertikalni pomik desnega konca  $Y_3$  in pripadajoči zasuk  $\Phi_3$ .



Slika 94: Izbrana diskretizacija z dvema končnima elementoma

Togostni matriki elementov sta, zaradi enakih dolžin, kar je najpriročnejša (in tudi najbolj pogosta) izbira, medsebojno enaki:

$$[k_1] = [k_2] = \begin{bmatrix} 4.304160688665712 & 4.304160688665712 & -4.304160688665712 & 4.304160688665712 \\ 4.304160688665712 & 11.808321377331426 & -4.304160688665712 & 2.7041606886657115 \\ -4.304160688665712 & 5.904160688665713 & 4.304160688665712 & -4.304160688665712 \\ 4.304160688665712 & 2.7041606886657115 & -4.304160688665712 & 5.904160688665713 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Zaradi enakih dolžin obeh elementov in enake obtežbe sta medsebojno enaka tudi obtežna vektorja:

$$\{F_1\} = \{F_2\} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ -3333.3333333333335 \\ -10000 \\ 3333.3333333333335 \end{Bmatrix}$$

Matrična enačba konstrukcije je:

$$\begin{bmatrix} 8.608321377331425 & 0 & -4.304160688665712 & 4.304160688665712 \\ 0 & 11.808321377331426 & -4.304160688665712 & 2.7041606886657115 \\ -4.304160688665712 & -4.304160688665712 & 4.304160688665712 & -4.304160688665712 \\ 4.304160688665712 & 2.7041606886657115 & -4.304160688665712 & 5.904160688665713 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -20000 \\ 0 \\ -30000 \\ 3333.333333333333 \end{Bmatrix}$$

ki ima rešitve:

$$\begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.7828333333333338 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -6.666666666666666 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -2.3525333333333343 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -8.333333333333331 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

ki so točne. Prepričamo se lahko, da sta vrednosti pomika in zasuka prostega konca (sedaj  $Y_3$  in  $\Phi_3$ ) enaki kot pri prvi, osnovni diskretizaciji (le z drugačnimi označbami vozlišča). Prav tako se lahko prepričamo, da sta – v primerjavi z rešitvami, dobljenimi z uporabo dveh Bernoulli-Eulerjevih končnih elementov – sedaj dobljeni nekoliko večji vrednosti prečnega pomika ter identični vrednosti zasuka.

*Poprocesiranje: iskanje funkcije prečnega pomika s H1 interpolacijskimi funkcijami*

Če za interpolacijo funkcije prečnega pomika uporabimo standardne H1 interpolacijske funkcije (torej brez upoštevanja strižnih deformacij), so le-te že znane iz prejšnjega primera. Približna rešitev za funkcijo prečnega pomika edinega končnega elementa je tako:

$$v_{1,N,H1}(x) = -2.537916666666668 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 2.904166666666669 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 2 \text{ m}$$

za drugi element pa sledi:

$$v_{2,N,H1}(x) = 3.5333333333333652 \cdot 10^{-4} - 8.18 \cdot 10^{-4} \cdot x - 1.9849166666666557 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 1.7425 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 \quad 2 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

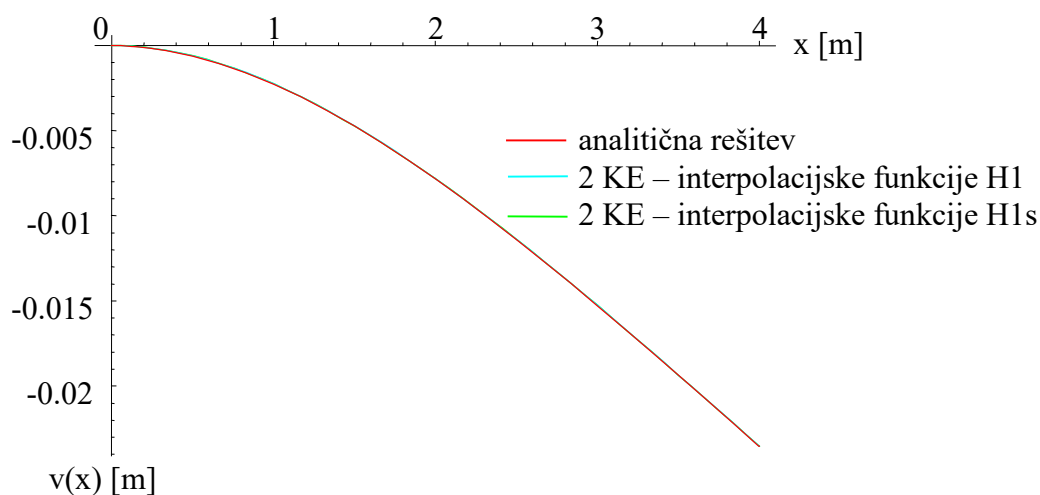
Če pa uporabimo kvalitetnejše interpolacijske funkcije z upoštevanjem strižnih deformacij, pa sledita rešitvi:

$$v_{1,N,H1,T}(x) = -7.828333333333338 \cdot 10^{-3} - 6.702666666666671 \cdot 10^{-3} \cdot x - 8.854166666666646 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 1.5625 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 2 \text{ m}$$

in

$$v_{2,N,H1,T}(x) = 7.853333333333583 \cdot 10^{-4} - 1.286 \cdot 10^{-3} \cdot x - 1.822916666666655 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 1.5625 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 \quad 2 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Kljub temu, da sta obe rešitvi različni, med njima ni opaznih razlik, obe funkciji pa se tudi že odlično grafično ujemata s točno rešitvijo.



Slika 95: Primerjava obeh dobljenih približnih rešitev za prečni pomik s točno rešitvijo

*Poprocesiranje: iskanje vozliščnih vrednosti sekundarnih spremenljivk in NSK*

Manjkajoče vozliščne vrednosti prečne sile in upogibnega momenta posameznega končnega elementa sledijo iz pripadajočega vektorja sekundarnih spremenljivk, ki ga izračunamo kot:

$$\{Q_1\} = [K_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\} = \begin{Bmatrix} 60000 \text{ N} \\ 160000 \text{ Nm} \\ -40000 \text{ N} \\ -60000 \text{ Nm} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,1} \\ M_{z,1} \\ V_{y,2} \\ M_{z,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{1,1} \\ -Q_{1,2} \\ -Q_{1,3} \\ Q_{1,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 60000 \text{ N} \\ -160000 \text{ Nm} \\ 40000 \text{ N} \\ -60000 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

$$\{Q_2\} = [K_2] \cdot \{U_2\} - \{F_2\} = \begin{Bmatrix} 40000 \text{ N} \\ 60000 \text{ Nm} \\ -20000 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,2} \\ M_{z,2} \\ V_{y,3} \\ M_{z,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{2,1} \\ -Q_{2,2} \\ -Q_{2,3} \\ Q_{2,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 40000 \text{ N} \\ -60000 \text{ Nm} \\ -20000 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Vse dobljene vrednosti so točne.

*Poprocesiranje: iskanje funkcij upogibnega momenta in prečne sile z interpolacijo*

Funkcijo upogibnega momenta posameznega končnega elementa izračunamo z uporabo standardnih H1 interpolacijskih funkcij:

$$\begin{aligned} M_{z1,N}(x) &= M_{z,1} \cdot N_{1,1}(x) + V_{y,1} \cdot N_{1,2}(x) + M_{z,2} \cdot N_{1,3}(x) + V_{y,2} \cdot N_{1,4}(x) \\ &= -5000 \cdot x^2 + 60000 \cdot x - 160000 \quad 0 \leq x \leq 2 \text{ m} \end{aligned}$$

ter

$$\begin{aligned} M_{z2,N}(x) &= M_{z,2} \cdot N_{2,1}(x) + V_{y,2} \cdot N_{2,2}(x) + M_{z,3} \cdot N_{2,3}(x) + V_{y,3} \cdot N_{2,4}(x) \\ &= -5000 \cdot x^2 + 60000 \cdot x - 160000 \quad 2 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

Dobljeni funkciji sta medsebojno enaki ter točni.

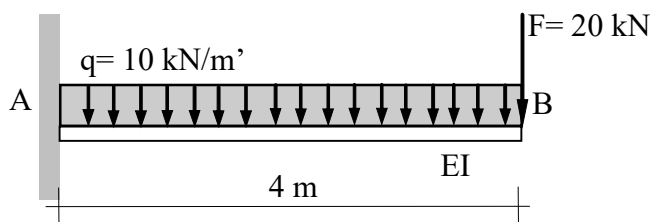
Funkcijo prečne sile najlažje dobimo po definiciji, torej z odvodom funkcije upogibnega momenta:

$$V_{y1,N}(x) = \frac{dM_{z1,N}(x)}{dx} = \frac{dM_{z2,N}(x)}{dx} = -10000 \cdot x + 60000 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

in je prav tako točna.

### Primer 6.c\* – Analiza levo vpete konzole z večvozliščnimi končnimi elementi

Za dani betonski konzolni nosilec konstantnega pravokotnega prereza ( $b/h = 0.2 \text{ m}/0.4 \text{ m}$ ) iz betona C20/25 določi pomik in zasuk desnega konca nosilca, funkcijo prečnega pomika ter funkcije notranjih statičnih količin vzdolž konstrukcije, in reakcije v podpori z uporabo končnih elementov višjega reda.

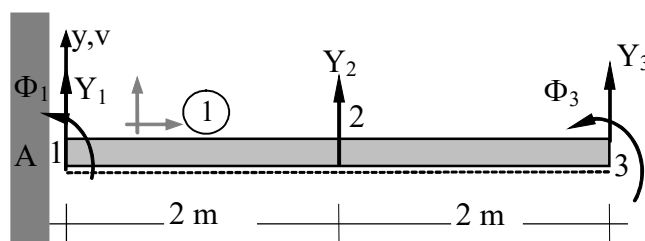


Slika 96: Obravnavani konzolni nosilec

## Rešitev

1. pristop - diskretizacija s končnim elementom s petimi prostostnimi stopnjami – izpeljanim s polinomi 4. stopnje

Najmanjšo smiselno diskretizacijo dobimo z enim končnim elementom. Pri diskretizaciji z enim končnim elementom so neznanke vertikalni pomik notranjega vozlišča  $Y_2$  (oz.  $v_2$ ) ter vertikalni pomik  $Y_3$  (oz.  $v_3$ ) in pripadajoči zasuk  $\Phi_3$  desnega konca konzole.



Slika 97: Izbrana diskretizacija z enim končnim elementom

Togostna matrika edinega končnega elementa je:

$$[k_e] = \frac{EI_z}{5 \cdot L_e} \cdot \begin{bmatrix} \frac{316}{L_e^2} & \frac{94}{L_e} & -\frac{512}{L_e^2} & \frac{196}{L_e^2} & -\frac{34}{L_e} \\ \frac{94}{L_e} & 36 & -\frac{128}{L_e} & \frac{34}{L_e} & -6 \\ -\frac{512}{L_e^2} & -\frac{128}{L_e} & \frac{1024}{L_e^2} & -\frac{512}{L_e^2} & \frac{128}{L_e} \\ \frac{196}{L_e^2} & \frac{34}{L_e} & -\frac{512}{L_e^2} & \frac{316}{L_e^2} & -\frac{94}{L_e} \\ -\frac{34}{L_e} & -6 & \frac{128}{L_e} & -\frac{94}{L_e} & 36 \end{bmatrix}$$

in po vstavitvi vrednosti primera sledi:

$$[k_e] = \begin{bmatrix} 3.16 & 3.76 & -5.12 & -1.96 & -1.36 \\ 3.76 & 5.76 & -5.12 & -1.36 & -0.96 \\ -5.12 & -5.12 & 10.24 & -5.12 & 5.12 \\ 1.96 & 1.36 & -5.12 & 3.16 & -3.76 \\ -1.36 & -0.96 & 5.12 & -3.76 & 5.76 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Obtežni vektor je enak:

$$\{F_e\} = q \cdot \frac{L_e}{60} \cdot \begin{Bmatrix} 14 \\ L_e \\ 32 \\ 14 \\ -L_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -9333.333333333334 \\ -2666.6666666666665 \\ -21333.333333333332 \\ -9333.333333333334 \\ 2666.6666666666665 \end{Bmatrix}$$

Bistvene enačbe modela konstrukcije so:

$$\begin{bmatrix} 10.24 & -5.12 & 5.12 \\ -5.12 & 3.16 & -3.76 \\ 5.12 & -3.76 & 5.76 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -21333.333333333332 \\ -9333.333333333334 \\ 2666.6666666666665 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -20000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -21333.333333333332 \\ -29333.333333333334 \\ 2666.6666666666665 \end{Bmatrix}$$

Iskani neničelni pomiki in zasuki so:

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7.708333333333332 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -23.333333333333332 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -8.333333333333325 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Vse vrednosti se popolnoma ujemajo z analitičnimi vrednostmi (dobljenimi npr. z reševanjem diferencialne enačbe ali virtualnim delom).

*Poprocesiranje: iskanje funkcije prečnega pomika*

Interpolacijske funkcije za prečni pomik so polinomi 4. stopnje:

$$N_{1,1}(x) = 1 - \frac{11}{16} \cdot x^2 + \frac{9 \cdot x^3}{32} - \frac{x^4}{32} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,2}(x) = x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{5 \cdot x^3}{16} - \frac{x^4}{32} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,3}(x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{16} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,4}(x) = -\frac{5}{16} \cdot x^2 + \frac{7 \cdot x^3}{32} - \frac{x^4}{32} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,5}(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^4}{32} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Rešitev za edini končni element je tako:

$$\begin{aligned} v_{1,N}(x) &= Y_1 \cdot N_{1,1}(x) + \Phi_1 \cdot N_{1,2}(x) + Y_2 \cdot N_{1,3}(x) + Y_3 \cdot N_{1,4}(x) + \Phi_3 \cdot N_{1,5}(x) \\ &= -7.708333333333332 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \left( x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{16} \right) \\ &\quad - 23.333333333333332 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \left( -\frac{5}{16} \cdot x^2 + \frac{7 \cdot x^3}{32} - \frac{x^4}{32} \right) \\ &\quad - 8.3333333333333325 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot \left( \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^4}{32} \right) \\ &= -2.5 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 3.125 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 - 1.3020833333333309 \cdot 10^{-5} \cdot x^4 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

ki je enaka analitični oz. točni rešitvi, celotna potencialna energija pa znaša  $\Pi = -413.33333333333286 \text{ J}$ .

*Poprocesiranje: iskanje vozliščnih vrednosti sekundarnih spremenljivk in notranjih statičnih količin*

Manjkajoče vrednosti prečne sile in momenta krajnih vozlišč sledijo iz vektorja sekundarnih spremenljivk (ki predstavlja sili in momenta, ki na element delujeta v zunanjih vozliščih):

$$\{Q_1\} = \begin{Bmatrix} Q_{1,1} \\ Q_{1,2} \\ Q_{1,3} \\ Q_{1,4} \\ Q_{1,5} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.16 & 3.76 & -5.12 & 1.96 & -1.36 \\ 3.76 & 5.76 & -5.12 & 1.36 & -0.96 \\ -5.12 & -5.12 & 10.24 & -5.12 & 5.12 \\ 1.96 & 1.36 & -5.12 & 3.16 & -3.76 \\ -1.36 & -0.96 & 5.12 & -3.76 & 5.76 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -7.70833333333332 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -23.3333333333332 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -8.33333333333325 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{Bmatrix} -9333.333333333334 \\ -2666.6666666666665 \\ -21333.333333333332 \\ -9333.333333333334 \\ 2666.6666666666665 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 60000 \\ 160000 \\ 0 \\ -20000 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,1} \\ M_{z,1} \\ V_{y,3} \\ M_{z,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 60000 \text{ N} \\ -160000 \text{ Nm} \\ 20000 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

kjer pri pretvorbi predznakov za pridobitev vrednosti NSK uporabimo že znana pravila.

*Poprocesiranje: izračun funkcije upogibnega momenta  $\zeta$  odvajanjem funkcije prečnega pomika*

Ker je pridobljena točna funkcija prečnega pomika, lahko točno funkcijo upogibnega momenta najlažje dobimo kar po definiciji z dvakratnim odvajanjem funkcije prečnega pomika:

$$M_{z1,N}(x) = EI \cdot \frac{d^2 v_{1,N}(x)}{dx^2} = 3.2 \cdot 10^7 \cdot (-5 \cdot 10^{-3} + 1.875 \cdot 10^{-3} \cdot x - 1.5624 \cdot 10^{-4} \cdot x^2)$$

$$= -160000 + 60000 \cdot x - 5000 \cdot x^2 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Odvajanje izraza vodi do izraza za prečne sile:

$$V_{y1,N}(x) = 60000 - 10000 \cdot x \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

ki je enak pravi rešitvi obravnavanega primera.

*Poprocesiranje: iskanje funkcije upogibnega momenta in prečne sile  $\zeta$  interpolacijo*

Če želimo uporabiti oblikovne oz. interpolacijske funkcije, ki smo jih že uporabili za izračun funkcije prečnega pomika, potrebujemo vrednost momenta v vmesnem vozlišču, ki pa ni na razpolago. Zato lahko uporabimo standardne H1 interpolacijske funkcije končnega elementa z dvema vozliščema in štiri prostostnimi stopnjami. Funkcija upogibnega momenta je tako:

$$M_{z,N}(x) = -160000 + 60000 \cdot x - 5000 \cdot x^2 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

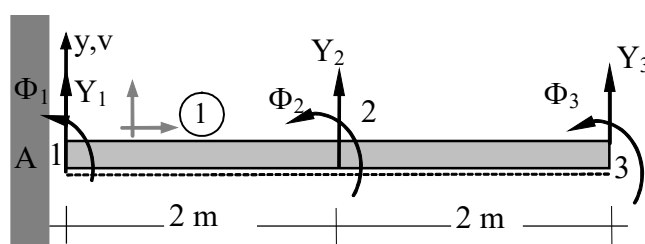
Odvajanje izraza za upogibni moment vodi do izraza za prečno silo:

$$V_{y,N}(x) = 60000 - 10000 \cdot x \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

ki sta enaka pravi rešitvi obravnavanega primera.

## 2. pristop - diskretizacija s končnim elementom s šestimi prostostnimi stopnjami

Najmanjšo smiselno diskretizacijo dobimo z enim končnim elementom. Pri diskretizaciji z enim končnim elementom so neznanke sedaj vertikalni pomik  $Y_2$  (oz.  $v_2$ ) in pripadajoči zasuk  $\Phi_2$  notranjega vozlišča ter vertikalni pomik  $Y_3$  in pripadajoči zasuk  $\Phi_3$  desnega konca.



Slika 98: Izbrana diskretizacija z enim končnim elementom s 6 prostostnimi stopnjami

Togostna matrika edinega elementa je:

$$[k_e] = \frac{EI_z}{35 \cdot L_e} \cdot \begin{bmatrix} \frac{5092}{L_e^2} & \frac{1138}{L_e} & -\frac{3584}{L_e^2} & \frac{1920}{L_e} & -\frac{1508}{L_e^2} & \frac{242}{L_e} \\ \frac{1138}{L_e} & 332 & -\frac{896}{L_e} & 320 & -\frac{242}{L_e} & 38 \\ -\frac{3584}{L_e^2} & -\frac{896}{L_e} & \frac{7168}{L_e^2} & 0 & -\frac{3584}{L_e^2} & \frac{896}{L_e} \\ \frac{1920}{L_e} & 320 & 0 & 1280 & -\frac{1920}{L_e} & 320 \\ \frac{1508}{L_e^2} & \frac{242}{L_e} & -\frac{3584}{L_e^2} & -\frac{1920}{L_e} & \frac{5092}{L_e^2} & -\frac{1138}{L_e} \\ \frac{242}{L_e} & 38 & \frac{896}{L_e} & 320 & -\frac{1138}{L_e} & 332 \end{bmatrix}$$

$$[k_e] = 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 7.2742857143 & -6.5028571429 & -5.12 & -10.971428571 & -2.1542857143 & -1.3828571429 \\ -6.5028571429 & -7.5885714286 & -5.12 & -7.3142857143 & -1.3828571429 & -0.8685714286 \\ -5.12 & -5.12 & 10.24 & 0 & -5.12 & 5.12 \\ 10.971428571 & 7.3142857143 & 0 & 29.257142857 & -10.971428571 & 7.3142857143 \\ -2.1542857143 & -1.3828571429 & -5.12 & -10.971428571 & 7.27428571429 & -6.5028571429 \\ 1.3828571429 & 0.8685714286 & 5.12 & 7.3142857143 & -6.5028571429 & 7.58857142857 \end{bmatrix}$$

Obtežni vektor je:

$$\{F_e\} = q \cdot \frac{L_e}{60} \cdot \begin{Bmatrix} 14 \\ L \\ 32 \\ 0 \\ 14 \\ -L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -9333.333333333334 \\ -2666.6666666666665 \\ -21333.333333333332 \\ 0 \\ -9333.333333333334 \\ 2666.6666666666665 \end{Bmatrix}$$

Bistvene enačbe konstrukcije so:

$$\begin{bmatrix} 10.24 & 0 & -5.12 & 5.12 \\ 0 & 29.257142857 & -10.971428571 & 7.3142857143 \\ -5.12 & -10.971428571 & 7.27428571429 & -6.5028571429 \\ 5.12 & 7.3142857143 & -6.5028571429 & 7.58857142857 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} v_2 \\ \Phi_2 \\ v_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -21333.333333333332 \\ 0 \\ -9333.333333333334 \\ 2666.6666666666665 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -20000 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -21333.333333333332 \\ 0 \\ -29333.333333333334 \\ 2666.6666666666665 \end{Bmatrix}$$

ki imajo rešitve:

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \Phi_2 \\ v_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7.708333333333332 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -6.6666666666666718 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -23.333333333333332 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -8.333333333333325 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Dobljene vrednosti so točne (in enake vrednostim, ki so bile dobljene pri diskretizaciji z dvema končnima elementoma tipa V-V).

*Poprocesiranje: iskanje funkcije prečnega pomika*

Interpolacijske funkcije so:

$$N_{1,1}(x) = 1 - \frac{23}{16} \cdot x^2 + \frac{33}{32} \cdot x^3 - \frac{17}{64} \cdot x^4 + \frac{3}{128} \cdot x^5 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,2}(x) = x - \frac{3}{2} \cdot x^2 + \frac{13}{16} \cdot x^3 - \frac{3}{16} \cdot x^4 + \frac{x^5}{64} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,3}(x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{16} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,4}(x) = -2 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3 - \frac{5}{8} \cdot x^4 + \frac{x^5}{16} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,5}(x) = \frac{7}{16} \cdot x^2 - \frac{17}{32} \cdot x^3 + \frac{13}{64} \cdot x^4 - \frac{3}{128} \cdot x^5 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,6}(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{5}{16} \cdot x^3 - \frac{x^4}{8} + \frac{3}{64} \cdot x^5 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Rešitev za funkcijo pomika je tako:

$$\begin{aligned} v_{1,N}(x) &= Y_1 \cdot N_{1,1}(x) + \Phi_1 \cdot N_{1,2}(x) + Y_2 \cdot N_{1,3}(x) + \Phi_2 \cdot N_{1,4}(x) + Y_3 \cdot N_{1,5}(x) + \Phi_3 \cdot N_{1,6}(x) \\ &= -2.5 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 3.125 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 - 1.30208333333333309 \cdot 10^{-5} \cdot x^4 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

ki je enaka analitični rešitvi (kljub temu, da so bili uporabljeni polimomi višje stopnje, kot nastopajo v analitični rešitvi, je vrednost koeficienta, ki pripada členu  $x^5$ , enaka nič, zaradi zaokroževanja pa se lahko pojavi zelo majhna vrednost). Celotna potencialna energija pa ponovno znaša  $\Pi = -413.33333333333286 \text{ J}$ .

*Poprocesiranje: iskanje vozliščnih vrednosti sekundarnih spremenljivk in notranjih statičnih količin*

Manjkajoče vozliščne vrednosti prečne sile in momenta krajnih vozlišča sledijo iz vektorja sekundarnih spremenljivk:

$$\{Q_1\} = \begin{Bmatrix} Q_{1,1} \\ Q_{1,2} \\ Q_{1,3} \\ Q_{1,4} \\ Q_{1,5} \\ Q_{1,5} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.274 & 6.503 & -5.12 & 10.971 & -2.154 & 1.383 \\ 6.503 & 7.589 & -5.12 & 7.314 & -1.383 & 0.869 \\ -5.12 & -5.12 & 10.24 & 0 & -5.12 & 5.12 \\ 10.971 & 7.314 & 0 & 29.257 & -10.971 & 7.3143 \\ -2.154 & -1.383 & -5.12 & -10.971 & 7.274 & -6.503 \\ 1.383 & 0.869 & 5.12 & 7.3143 & -6.503 & 7.589 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -7.7083 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -6.6667 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -23.3333 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -8.3333 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{Bmatrix} -9333.333333333334 \\ -2666.6666666666665 \\ -21333.333333333332 \\ 0 \\ -9333.333333333334 \\ 2666.6666666666665 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 60000 \\ 160000 \\ 0 \\ 0 \\ -20000 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,1} \\ M_{z,1} \\ V_{y,3} \\ M_{z,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 60000 \text{ N} \\ -160000 \text{ Nm} \\ 20000 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Pri izračunu funkcije upogibnega momenta z interpolacijo smo torej omejeni na uporabo H1 interpolacijskih funkcij končnega elementa z dvema vozliščema in 4 prostostnimi stopnjami, kar pa vseeno vodi do točne funkcije upogibnega momenta.

*Poprocesiranje: izračun funkcije upogibnega momenta  $z$  odvajanjem funkcije prečnega pomika*

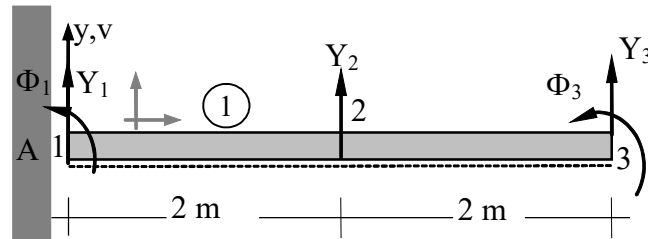
Ker je pridobljena točna funkcija prečnega pomika, lahko točno funkcijo upogibnega momenta dobimo kar po definiciji, torej z dvakratnim odvajanjem funkcije prečnega pomika:

$$M_{z1,N}(x) = EI \cdot \frac{d^2 v_{1,N}(x)}{dx^2} = 3.2 \cdot 10^7 \cdot (-5 \cdot 10^{-3} + 1.875 \cdot 10^{-3} \cdot x - 1.5624 \cdot 10^{-4} \cdot x^2)$$

$$= -160000 + 60000 \cdot x - 5000 \cdot x^2 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

*3. pristop - diskretizacija s približnim končnim elementom s petimi prostostnimi stopnjami – izpeljanim s polinomi 3. stopnje/ s pomočjo podajnostne matrike*

Najmanjšo smiselno diskretizacijo dobimo z enim končnim elementom. Pri tej diskretizaciji so neznanke vertikalni pomik notranjega vozlišča  $Y_2$  (oz.  $v_2$ ) ter vertikalni pomik  $Y_3$  (oz.  $v_3$ ) in pripadajoči zasuk  $\Phi_3$  desnega konca.



Slika 99: Izbrana diskretizacija

Togostna matrika edinega končnega elementa je (za primer, ko se vozlišče v polju nahaja na sredini končnega elementa):

$$[k_e] = \frac{EI_z}{L_e} \cdot \begin{bmatrix} \frac{60}{L_e^2} & \frac{18}{L_e} & -\frac{96}{L_e^2} & \frac{36}{L_e^2} & -\frac{6}{L_e} \\ \frac{18}{L_e} & 7 & -\frac{24}{L_e} & \frac{6}{L_e} & -1 \\ -\frac{96}{L_e^2} & -\frac{24}{L_e} & \frac{192}{L_e^2} & -\frac{96}{L_e^2} & \frac{24}{L_e} \\ \frac{36}{L_e^2} & \frac{6}{L_e} & -\frac{96}{L_e^2} & \frac{60}{L_e^2} & -\frac{18}{L_e} \\ -\frac{6}{L_e} & -1 & \frac{24}{L_e} & -\frac{18}{L_e} & 7 \end{bmatrix}$$

in po upoštevanju vrednosti sledi togostna matrika edinega končnega elementa v obliki:

$$[k_e] = \begin{bmatrix} 3 & 3.6 & -4.8 & 1.8 & -1.2 \\ 3.6 & 5.6 & -4.8 & 1.2 & -0.8 \\ -4.8 & -4.8 & 9.6 & -4.8 & 4.8 \\ 1.8 & 1.2 & -4.8 & 3 & -3.6 \\ -1.2 & -0.8 & 4.8 & -3.6 & 5.6 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Obtežni vektor je:

$$\{F_e\} = \frac{L_e \cdot q}{2} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{L_e}{2} \\ 24 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{2}{L_e} \\ -\frac{24}{24} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ -3333.3333333333335 \\ -20000 \\ -10000 \\ 3333.3333333333335 \end{Bmatrix}$$

Bistvene enačbe konstrukcije so:

$$\begin{bmatrix} 9.6 & -4.8 & 4.8 \\ -4.8 & 3 & -3.6 \\ 4.8 & -3.6 & 5.6 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -20000 \\ -10000 \\ 3333.3333333333335 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -20000 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -20000 \\ -30000 \\ 3333.3333333333335 \end{Bmatrix}$$

Iskani neničelni pomiki so:

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7.708333333333332 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -23.333333333333332 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -8.333333333333325 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Vse vrednosti se spet popolnoma ujemajo z analitičnimi vrednostmi (dobljenimi npr. z reševanjem diferencialne enačbe ali virtualnim delom).

*Poprocesiranje: iskanje funkcije prečnega pomika*

Interpolacijske funkcije za prečni pomik so sedaj polinomi 3. stopnje:

$$N_{1,1}(x) = 1 - \frac{9}{16} \cdot x^2 + \frac{5 \cdot x^3}{32} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,2}(x) = x - \frac{7}{8} \cdot x^2 + \frac{3 \cdot x^3}{16} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,3}(x) = \frac{3}{4} \cdot x^2 - \frac{x^3}{4} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,4}(x) = -\frac{3}{16} \cdot x^2 + \frac{3 \cdot x^3}{32} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

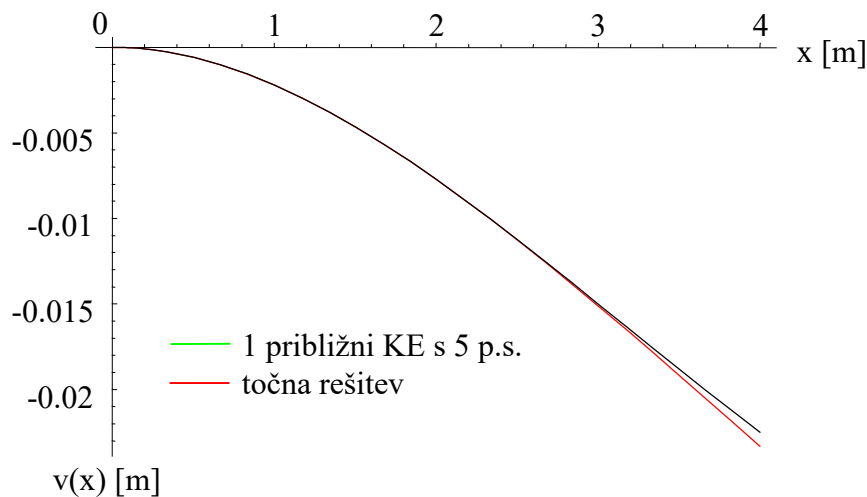
$$N_{1,5}(x) = \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Rešitev za edini končni element je tako:

$$\begin{aligned} v_{1,N}(x) &= Y_1 \cdot N_{1,1}(x) + \Phi_1 \cdot N_{1,2}(x) + Y_2 \cdot N_{1,3}(x) + Y_3 \cdot N_{1,4}(x) + \Phi_3 \cdot N_{1,5}(x) \\ &= -2.4479166666666672 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 2.60416666666666726 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

ki pa sedaj *ni* enaka analitični rešitvi, pri čemer celo velja:

$$v_{1,N}(4) = -0.0225 \text{ m} \neq v_3 = -23.33333333333332 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$



Slika 100: Primerjava upogibnic

Celotna potencialna energija znaša  $\Pi = -396.52777777777754 \text{ J}$ , kar je vrednost z - 4.065860215053881 % napake, kar je opazno slabši rezultat kot je bil dobljen z dvema odsekovnima kubnima funkcija dveh standardnih končnih elementov v prejšnjem primeru.

*Poprosiranje: iskanje vozliščnih vrednosti sekundarnih spremenljivk in notranjih statičnih količin*

Manjkajoče vrednosti prečne sile in momenta krajnih vozlišč sledijo iz vektorja sekundarnih spremenljivk:

$$\{Q_1\} = \begin{Bmatrix} Q_{1,1} \\ Q_{1,2} \\ Q_{1,3} \\ Q_{1,4} \\ Q_{1,5} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3.6 & -4.8 & 1.8 & -1.2 \\ 3.6 & 5.6 & -4.8 & 1.2 & -0.8 \\ -4.8 & -4.8 & 9.6 & -4.8 & 4.8 \\ 1.8 & 1.2 & -4.8 & 3 & -3.6 \\ -1.2 & -0.8 & 4.8 & -3.6 & 5.6 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -7.708333333333332 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -23.33333333333332 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -8.333333333333325 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

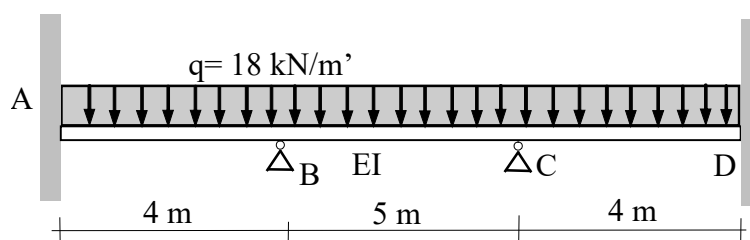
$$-\begin{Bmatrix} -10000 \\ -3333.3333333333335 \\ -20000 \\ -10000 \\ 3333.3333333333335 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 60000 \\ 160000 \\ 0 \\ -20000 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,1} \\ M_{z,1} \\ V_{y,3} \\ M_{z,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 60000 \text{ N} \\ -160000 \text{ Nm} \\ 20000 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

kjer pri pretvorbi predznakov za pridobitev vrednosti NSK uporabimo že znana pravila.

Pri izračunu funkcije upogibnega momenta z interpolacijo smo torej omejeni na uporabo H1 funkcij končnega elementa z dvema vozliščema in 4 prostostnimi stopnjami.

### Primer 7.a – Kontinuirni nosilec, na obeh straneh polno vpet

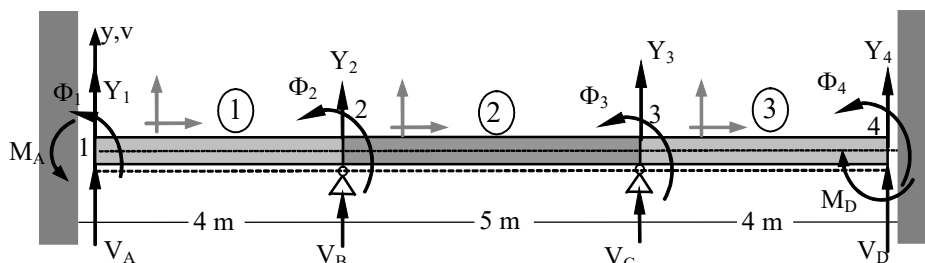
Za dani betonski nosilec ( $E = 30 \text{ GPa}$ ) pravokotnega prereza ( $b/h = 0.3\text{m}/0.4 \text{ m}$ ), obremenjen z enakomerno zvezno obtežbo  $q = 18 \text{ kN/m'}$ , določi funkcijo prečnega pomika vzdolž konstrukcije, funkciji notranjih statičnih količin ter reakcije v podporah.



Slika 101: Obravnavani kontinuirni nosilec

### Rešitev

Čeprav za vsako polje in posledično vsako točko kontinuirnega nosilca velja ista diferencialna enačba, iz katere sledi funkcija prečnega pomika, ima ta diferencialna enačba zaradi notranjih podpor tri različne medsebojno vezane odsekovne rešitve. Najmanjše smiselno in uporabno število končnih elementov za diskretizacijo je zato tri. Uporabljeni bodo trije standardni končni elementi.



Slika 102: Izbrana diskretizacija

Prostostne stopnje so  $Y_1$ ,  $\Phi_1$ ,  $Y_2$ ,  $\Phi_2$ ,  $Y_3$ ,  $\Phi_3$ ,  $Y_4$  in  $\Phi_4$ , ki predstavljajo vozliščne vertikalne pomike in zasuke (primarne spremenljivke), od katerih sta neznanji samo dve vrednosti ( $\Phi_2$  in  $\Phi_3$ ).

Za prvi in tretji končni element, ki sta enake dolžine, sta togostni matriki medsebojno enaki:

$$[K_1] = [K_3] = \begin{bmatrix} 9 & 18 & -9 & 18 \\ 18 & 48 & -18 & 24 \\ -9 & -18 & 9 & -18 \\ 18 & 24 & -18 & 48 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

Elementa imata tudi enaka obtežna vektorja:

$$\{F_1\} = \{F_3\} = \begin{Bmatrix} -36000 \\ -24000 \\ -36000 \\ 24000 \end{Bmatrix}$$

Vektorja sekundarnih spremenljivk pa sta:

$$\{Q_1\} = \begin{Bmatrix} Q_{1,1} \\ Q_{1,2} \\ Q_{1,3} \\ Q_{1,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_{y,1} \\ -M_{z,1} \\ -V_{y,2\text{levo}} \\ M_{z,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_A \\ M_A \\ -V_{y,2\text{levo}} \\ M_{z,2} \end{Bmatrix} \quad \{Q_3\} = \begin{Bmatrix} Q_{3,1} \\ Q_{3,2} \\ Q_{3,3} \\ Q_{3,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_{y,3\text{desno}} \\ -M_{z,3} \\ -V_{y,4} \\ M_{z,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_{y,3\text{desno}} \\ -M_{z,3} \\ V_D \\ -M_D \end{Bmatrix}$$

Za drugi končni element je togostna matrika enaka:

$$[K_2] = \begin{bmatrix} 4.608 & 11.52 & -4.608 & 11.52 \\ 11.52 & 38.4 & -11.52 & 19.2 \\ -4.608 & -11.52 & 4.608 & -11.52 \\ 11.52 & 19.2 & -11.52 & 38.4 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

obtežni vektor in vektor sekundarnih spremenljivk pa sta:

$$\{F_2\} = \begin{Bmatrix} -45000 \\ -37500 \\ -45000 \\ 37500 \end{Bmatrix} \quad \text{ter} \quad \{Q_2\} = \begin{Bmatrix} Q_{2,1} \\ Q_{2,2} \\ Q_{2,3} \\ Q_{2,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_{y,2\text{desno}} \\ -M_{z,2} \\ -V_{y,3\text{levo}} \\ M_{z,3} \end{Bmatrix}$$

Tako lahko zapišemo naslednje tri matrične enačbe:

$$\begin{aligned}
 & [K_1] \cdot \{U_1\} = \{F_1\} + \{Q_1\} \\
 & \begin{bmatrix} 9 & 18 & -9 & 18 \\ 18 & 48 & -18 & 24 \\ -9 & -18 & 9 & -18 \\ 18 & 24 & -18 & 48 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36000 \\ -24000 \\ -36000 \\ 24000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_{1,1} \\ Q_{1,2} \\ Q_{1,3} \\ Q_{1,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36000 \\ -24000 \\ -36000 \\ 24000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{y,1} \\ -M_{z,1} \\ -V_{y,2levo} \\ M_{z,2} \end{bmatrix} \\
 & [K_2] \cdot \{U_2\} = \{F_2\} + \{Q_2\} \\
 & \begin{bmatrix} 4.608 & 11.52 & -4.608 & 11.52 \\ 11.52 & 38.4 & -11.52 & 19.2 \\ -4.608 & -11.52 & 4.608 & -11.52 \\ 11.52 & 19.2 & -11.52 & 38.4 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_2 \\ 0 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -45000 \\ -37500 \\ -45000 \\ 37500 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_{2,1} \\ Q_{2,2} \\ Q_{2,3} \\ Q_{2,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -45000 \\ -37500 \\ -45000 \\ 37500 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{y,2desno} \\ -M_{z,2} \\ -V_{y,3levo} \\ M_{z,3} \end{bmatrix} \\
 & [K_3] \cdot \{U_3\} = \{F_3\} + \{Q_3\} \\
 & \begin{bmatrix} 9 & 18 & -9 & 18 \\ 18 & 48 & -18 & 24 \\ -9 & -18 & 9 & -18 \\ 18 & 24 & -18 & 48 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36000 \\ -24000 \\ -36000 \\ 24000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_{3,1} \\ Q_{3,2} \\ Q_{3,3} \\ Q_{3,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36000 \\ -24000 \\ -36000 \\ 24000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{y,3desno} \\ -M_{z,3} \\ -V_{y,4} \\ M_{z,4} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

V treh matričnih enačbah, ki skupaj predstavljajo 12 enačb, nastopa deset sekundarnih spremenljivk

$$(V_{y,1}, M_{z,1}, V_{y,2levo}, M_{z,2}, V_{y,2desno}, V_{y,3levo}, M_{z,3}, V_{y,3desno}, V_{y,4}, M_{z,4})$$

ter dve neznani primarni spremenljivki (zasuka  $\Phi_2$  in  $\Phi_3$ ). Sistem je sicer korektno rešljiv, vendar je njegovo reševanje neekonomično s stališča računskega napora, in hkrati tudi nepraktično, saj se neznanke nahajajo na obeh straneh enačb.

Formalni pristop reševanja (sestava enačb celotne konstrukcije in naknadna eliminacija odvečnih enačb) vodi do sistema zgolj osmih enačb. Tudi tak pristop, čeprav korekten, s stališča računskega napora ni smiseln, saj sta neznanca zgolj dva zasuka (v vmesnih podporah), kar pomeni, da je potrebno rešiti osem enačb za pridobitev dveh primarnih neznank.

Zato namesto tvorbe celotnega sistema enačb oz. matrične enačbe celotne konstrukcije (togostne matrike celotne konstrukcije in obtežnega vektorja celotne konstrukcije) tvorimo samo bistvene enačbe konstrukcije, pri čemer iz togostnih matrik in obtežnih vektorjev elementov upoštevamo zgolj člene, ki pripadajo neznanima neničelnima

primarnima spremenljivkama. Ker imamo dve neznani primarni spremenljivki (dva zasuka), pripravimo sistem dveh enačb z dvema neznankama:

$$\begin{matrix} \Phi_2 & \Phi_3 \\ \Phi_2 & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} \end{matrix}$$

Iz togostne matrike in obtežnega vektorja prvega elementa odčitamo zgolj člene, ki pripadajo neznani primarni spremenljivki:

$$\begin{matrix} & Y_1 & \Phi_1 & Y_2 & \boxed{\Phi_2} \\ Y_1 & \begin{bmatrix} -9 & -18 & -9 & -18 \\ -18 & 48 & -18 & 24 \\ -9 & -18 & 9 & -18 \\ 18 & 24 & -18 & 48 \end{bmatrix} & & & \\ \Phi_1 & & & & \\ Y_2 & & & & \\ \boxed{\Phi_2} & & & & \end{matrix} \cdot 10^6 \quad \begin{matrix} Y_1 \\ \Phi_1 \\ Y_2 \\ \boxed{\Phi_2} \end{matrix} \begin{Bmatrix} -36000 \\ -24000 \\ -36000 \\ 24000 \end{Bmatrix}$$

in jih vnesemo na ustrezna mesta v sistemu enačb:

$$\begin{matrix} \Phi_2 & \Phi_3 \\ \Phi_2 & \begin{bmatrix} 48 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 24000 \\ \cdot \end{Bmatrix} \end{matrix}$$

Tudi iz togostne matrike in obtežnega vektorja drugega elementa odčitamo zgolj člene, ki pripadajo neznanima primarnima spremenljivkama:

$$\begin{matrix} & Y_2 & \boxed{\Phi_2} & Y_3 & \boxed{\Phi_3} \\ Y_2 & \begin{bmatrix} -4.608 & 11.52 & -4.608 & 11.52 \\ 11.52 & 38.4 & -11.52 & 19.2 \\ -4.608 & -11.52 & 4.608 & -11.52 \\ 11.52 & 19.2 & -11.52 & 38.4 \end{bmatrix} & & & \\ \boxed{\Phi_2} & & & & \\ Y_3 & & & & \\ \boxed{\Phi_3} & & & & \end{matrix} \cdot 10^6 \quad \begin{matrix} Y_2 \\ \boxed{\Phi_2} \\ Y_3 \\ \boxed{\Phi_3} \end{matrix} \begin{Bmatrix} -45000 \\ -37500 \\ -45000 \\ 37500 \end{Bmatrix}$$

in jih vnesemo na ustrezna mesta v sistemu enačb:

$$\begin{matrix} \Phi_2 & \Phi_3 \\ \Phi_2 & \begin{bmatrix} 48+38.4 & 0+19.2 \\ 0+19.2 & 0+38.4 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 24000-37500 \\ 0+37500 \end{Bmatrix} \end{matrix}$$

Na koncu še iz togostne matrike in obtežnega vektorja tretjega elementa odčitamo zgolj člene, ki pripadajo neznanim primarnim spremenljivki:

$$\begin{array}{c}
 Y_3 \quad \boxed{\Phi_3} \quad Y_4 \quad \Phi_4 \\
 \begin{array}{c}
 Y_3 \\
 \boxed{\Phi_3} \\
 Y_4 \\
 \Phi_4
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 9 & 18 & 9 & 18 \\
 18 & \boxed{48} & -18 & 24 \\
 9 & 18 & 9 & 18 \\
 18 & 24 & -18 & 48
 \end{bmatrix} \cdot 10^6
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 Y_3 \\
 \boxed{\Phi_3} \\
 Y_4 \\
 \Phi_5
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 -36000 \\
 -24000 \\
 -36000 \\
 -24000
 \end{bmatrix}$$

Sistem tako dobi dokončno obliko (dejanskih vozliščnih koncentriranih obtežb namreč ni):

$$\begin{array}{c}
 \Phi_2 \quad \Phi_3 \\
 \begin{array}{c}
 \Phi_2 \\
 \Phi_3
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 48 + 38.4 + 0 & 0 + 19.2 + 0 \\
 0 + 19.2 + 0 & 0 + 38.4 + 48
 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 24000 - 37500 + 0 \\ 0 + 37500 - 24000 \end{Bmatrix}
 \end{array}$$

Oziroma

$$\begin{bmatrix}
 86.4 & 19.2 \\
 19.2 & 86.4
 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -13500 \\ 13500 \end{Bmatrix}$$

ki ima rešitvi:

$$\begin{Bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.008928571428571 \cdot 10^{-4} \\ 2.008928571428571 \cdot 10^{-4} \end{Bmatrix}$$

ki sta točni vrednosti.

*Poprocesiranje: iskanje vozliščnih vrednosti sekundarnih spremenljivk in notranjih statičnih količin*

Vozliščne vrednosti sekundarnih spremenljivk prvega elementa sledijo iz matrične enačbe prvega končnega elementa:

$$\begin{bmatrix} 9 & 18 & -9 & 18 \\ 18 & 48 & -18 & 24 \\ -9 & -18 & 9 & -18 \\ 18 & 24 & -18 & 48 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \Phi_1 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -36000 \\ -24000 \\ -36000 \\ 24000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_{1,1} \\ Q_{1,2} \\ Q_{1,3} \\ Q_{1,4} \end{Bmatrix}$$

ki vodijo do

$$\begin{aligned} \{Q_1\} &= [K_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\} \\ \begin{Bmatrix} Q_{1,1} \\ Q_{1,2} \\ Q_{1,3} \\ Q_{1,4} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 9 & 18 & -9 & 18 \\ 18 & 48 & -18 & 24 \\ -9 & -18 & 9 & -18 \\ 18 & 24 & -18 & 48 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \Phi_1 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -36000 \\ -24000 \\ -36000 \\ 24000 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & 18 & -9 & 18 \\ 18 & 48 & -18 & 24 \\ -9 & -18 & 9 & -18 \\ 18 & 24 & -18 & 48 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2.008928571428571 \cdot 10^{-4} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -36000 \\ -24000 \\ -36000 \\ 24000 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} Q_{1,1} \\ Q_{1,2} \\ Q_{1,3} \\ Q_{1,4} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 32383.928571428572 \\ 19178.571428571428 \\ 39616.07142857143 \\ -33642.857142857145 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,1} \\ M_{z,1} \\ V_{y,2\text{levo}} \\ M_{z,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 32383.928571428572 \text{ N} \\ -19178.571428571428 \text{ Nm} \\ -39616.07142857143 \text{ N} \\ -33642.857142857145 \text{ Nm} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Vozliščne vrednosti sekundarnih spremenljivk drugega elementa so:

$$\begin{aligned} \{Q_2\} &= [K_2] \cdot \{U_2\} - \{F_2\} \\ \begin{Bmatrix} Q_{2,1} \\ Q_{2,2} \\ Q_{2,3} \\ Q_{2,4} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4.608 & 11.52 & -4.608 & 11.52 \\ 11.52 & 38.4 & -11.52 & 19.2 \\ -4.608 & -11.52 & 4.608 & -11.52 \\ 11.52 & 19.2 & -11.52 & 38.4 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -45000 \\ -37500 \\ -45000 \\ 37500 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4.608 & 11.52 & -4.608 & 11.52 \\ 11.52 & 38.4 & -11.52 & 19.2 \\ -4.608 & -11.52 & 4.608 & -11.52 \\ 11.52 & 19.2 & -11.52 & 38.4 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -2.008928571428571 \cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 2.008928571428571 \cdot 10^{-4} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -45000 \\ -37500 \\ -45000 \\ 37500 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} Q_{2,1} \\ Q_{2,2} \\ Q_{2,3} \\ Q_{2,4} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 45000 \\ 33642.85714285714 \\ 45000 \\ -33642.857142857145 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,2\text{desno}} \\ M_{z,2} \\ V_{y,3\text{levo}} \\ M_{z,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 45000 \text{ N} \\ -33642.85714285714 \text{ Nm} \\ -45000 \text{ N} \\ -33642.857142857145 \text{ Nm} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Vozliščne vrednosti sekundarnih spremenljivk tretjega elementa so:

$$\begin{aligned}
 \{Q_3\} &= [K_3] \cdot \{U_3\} - \{F_3\} \\
 \begin{Bmatrix} Q_{3,1} \\ Q_{3,2} \\ Q_{3,3} \\ Q_{3,4} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 9 & 18 & -9 & 18 \\ 18 & 48 & -18 & 24 \\ -9 & -18 & 9 & -18 \\ 18 & 24 & -18 & 48 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_3 \\ \Phi_3 \\ Y_4 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -36000 \\ -24000 \\ -36000 \\ 24000 \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 9 & 18 & -9 & 18 \\ 18 & 48 & -18 & 24 \\ -9 & -18 & 9 & -18 \\ 18 & 24 & -18 & 48 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 2.008928571428571 \cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -36000 \\ -24000 \\ -36000 \\ 24000 \end{Bmatrix} \\
 \begin{Bmatrix} Q_{3,1} \\ Q_{3,2} \\ Q_{3,3} \\ Q_{3,4} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 39616.07142857143 \\ 33642.857142857145 \\ 32383.928571428572 \\ -19178.571428571428 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,3\text{desno}} \\ M_{z,3} \\ V_{y,4} \\ M_{z,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 39616.0714285714 \text{ N} \\ -33642.857142857145 \text{ Nm} \\ -32383.928571428572 \text{ N} \\ -19178.571428571428 \text{ Nm} \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Sekundarne spremenljivke predstavljajo vozliščni sili in upogibna momenta na navidezno prostem končnem elementu.

*Poprocesiranje: izračun reakcij iz izračunanih NSK*

Ker so znane vozliščne vrednosti notranjih statičnih količin, lahko te vrednosti uporabimo za izračun vozliščnih reakcij (alternativna možnost je njihov izračun iz matrične enačbe konstrukcije). Tak pristop je še posebej ugoden, kadar je v posamezni podpori priključen en sam končni element.

Tako sledijo iz ravnotežja vertikalnih sil in momentov (v skladu z izbranimi usmeritvami reakcij):

$$V_A - V_{y,1} = 0 \rightarrow V_A = V_{y,1} = 32383.928571428572 \text{ N}$$

$$M_A + M_{z,1} = 0 \rightarrow M_A = -M_{z,1} = -(-19178.571428571428) \text{ Nm} = 19178.571428571428 \text{ Nm}$$

$$\begin{aligned}
 V_{y,2\text{levo}} + V_B - V_{y,2\text{desno}} &= 0 \rightarrow V_B = V_{y,2\text{desno}} - V_{y,2\text{levo}} = 45000 \text{ N} - (-39616.07142857143) \\
 &= 84616.07142857142 \text{ N}
 \end{aligned}$$

$$V_{y,3\text{levo}} + V_C - V_{y,3\text{desno}} = 0 \rightarrow V_C = V_{y,3\text{desno}} - V_{y,3\text{levo}} = 39616.07142857143 \text{ N} - (-45000) \\ = 84616.07142857142 \text{ N}$$

$$V_D + V_{y,4} = 0 \rightarrow V_D = -V_{y,4} = -(-32383.928571428572) = 32383.928571428572 \text{ N}$$

$$M_D - M_{z,4} = 0 \rightarrow M_D = M_{z,4} = -19178.571428571428 \text{ Nm}$$

*Poprocesiranje: izračun reakcij iz vektorjev sekundarnih spremenljivk*

Za določitev vozliščnih reakcij je najugodnejša pot uporaba vektorjev sekundarnih spremenljivk. Za reakciji v levi podpori, kamor je priključen samo prvi končni element, uporabimo vektor sekundarnih spremenljivk prvega končnega elementa, odkoder sledi iz prvih dveh členov:

$$\left\{ \begin{array}{l} 32383.928571428572 \\ 19178.571428571428 \\ 39616.07142857143 \\ -33642.857142857145 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} V_A = 32383.928571428572 \text{ N} \\ M_A = 19178.571428571428 \text{ Nm} \end{array}$$

Pozitivni vrednosti pomenita, da je reakcijska sila usmerjena navzgor, moment pa deluje protiurno.

Za izračun vertikalne reakcije v točki 2 uporabimo tretji člen vektorja sekundarnih spremenljivk prvega končnega elementa in prvi člen vektorja sekundarnih spremenljivk drugega končnega elementa, odkoder sledi:

$$\left\{ \begin{array}{l} 32383.928571428572 \\ 19178.571428571428 \\ 39616.07142857143 \\ -33642.857142857145 \end{array} \right\} \text{ "+" } \left\{ \begin{array}{l} 45000 \\ 33642.85714285714 \\ 45000 \\ -33642.857142857145 \end{array} \right\} \\ V_B = 39616.07142857143 \text{ N} + 45000 \text{ N} = 84616.07142857142 \text{ N}$$

Pozitivna vrednost pomeni, da je reakcijska sila usmerjena navzgor.

Za izračun vertikalne reakcije v točki 3 uporabimo tretji člen vektorja sekundarnih spremenljivk drugega končnega elementa in prvi člen vektorja sekundarnih spremenljivk tretjega končnega elementa:

$$\begin{Bmatrix} 45000 \\ 33642.85714285714 \\ 45000 \\ -33642.857142857145 \end{Bmatrix} "+" \begin{Bmatrix} 39616.07142857143 \\ 33642.857142857145 \\ 32383.928571428572 \\ -19178.571428571428 \end{Bmatrix}$$

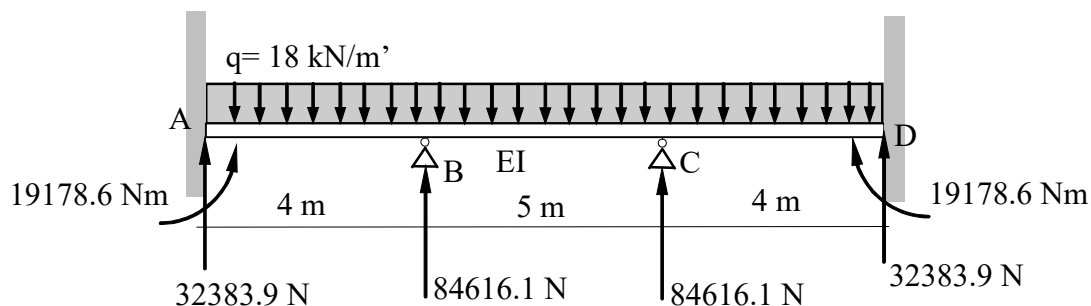
$$V_C = 45000 \text{ N} + 39616.07142857143 \text{ N} = 84616.07142857142 \text{ N}$$

Pozitivna vrednost pomeni, da je reakcijska sila usmerjena navzgor.

Za določitev reakcij v desni podpori, kamor je priključen samo tretji končni element, uporabimo vektor sekundarnih spremenljivk četrtega končnega elementa, odkoder iz zadnjih dveh členov sledi:

$$\begin{Bmatrix} 39616.07142857143 \\ 33642.857142857145 \\ 32383.928571428572 \\ -19178.571428571428 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} V_D = 32383.928571428572 \text{ N} \\ M_D = -19178.571428571428 \text{ Nm} \end{matrix}$$

kjer pozitivna vrednost pri reakcijski sili pomeni, da je usmerjena navzgor, negativna vrednost pri reakcijskem momentu pa pomeni, da deluje sourno.



Slika 103: Izračunane reakcije in njihove usmeritve

*Poprocesiranje: izračun približkov funkcij prečnega pomika s pomočjo H1 interpolacijskih funkcij*

Približke funkcije prečnega pomika (upogibnice) vzdolž vseh elementov lahko izračunamo s pomočjo interpolacijskih funkcij.

Za prvi končni element tako sledi približna rešitev ( $x_A = 0$  in  $L = 4$  m):

$$\begin{aligned}
 v_{1,N}(x) &= \{N_{1,1}(x), N_{1,2}(x), N_{1,3}(x), N_{1,4}(x)\} \cdot \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \Phi_1 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} \\
 &= \left\{ 1 - \frac{3 \cdot x^2}{16} + \frac{x^3}{32}, x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{16}, \frac{3 \cdot x^2}{16} - \frac{x^3}{32}, -\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{16} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2.008928571428571 \cdot 10^{-4} \end{Bmatrix} \\
 &= 5.022321428571428 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 - 1.255580357142857 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Za drugi končni element tako sledi približna rešitev v globalnem koordinatnem sistemu ( $x_A = 4 \text{ m}$  in  $L = 5 \text{ m}$ ):

$$\begin{aligned}
 v_{2,N}(x) &= \{N_{2,1}(x), N_{2,2}(x), N_{2,3}(x), N_{2,4}(x)\} \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{Bmatrix} -\frac{243}{125} + \frac{216 \cdot x}{125} - \frac{39 \cdot x^2}{125} + \frac{2 \cdot x^3}{25} \\ -\frac{324}{25} + \frac{22 \cdot x}{25} - \frac{39 \cdot x^2}{125} + \frac{x^3}{25} \\ \frac{368}{125} - \frac{216 \cdot x}{125} + \frac{39 \cdot x^2}{125} - \frac{2 \cdot x^3}{25} \\ -\frac{144}{25} + \frac{88 \cdot x}{25} - \frac{17 \cdot x^2}{125} + \frac{x^3}{25} \end{Bmatrix}^T \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -2.008928571428571 \cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 2.008928571428571 \cdot 10^{-4} \end{Bmatrix} \\
 &= 1.4464285714285718 \cdot 10^{-3} - 5.223214285714286 \cdot 10^{-4} \cdot x + 4.017857142857143 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 \\
 &\quad - 1.6940658945086007 \cdot 10^{-21} \cdot x^3 \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 9 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Za tretji končni element tako sledi približna rešitev v globalnem koordinatnem sistemu ( $x_A = 9 \text{ m}$  in  $L = 4 \text{ m}$ ):

$$v_{3,N}(x) = \{N_{3,1}(x), N_{3,2}(x), N_{3,3}(x), N_{3,4}(x)\} \cdot \begin{Bmatrix} Y_3 \\ \Phi_3 \\ Y_4 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1183}{32} + \frac{351 \cdot x}{32} - \frac{33}{32} + \frac{x^3}{32} \\ -\frac{1521}{16} + \frac{403 \cdot x}{16} - \frac{35 \cdot x^2}{16} + \frac{x^3}{16} \\ \frac{1215}{32} - \frac{351 \cdot x}{32} + \frac{33}{32} - \frac{x^3}{32} \\ -\frac{1053}{16} + \frac{315 \cdot x}{16} - \frac{31 \cdot x^2}{16} + \frac{x^3}{16} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2.008928571428571 \cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -1.9097377232142852 \cdot 10^{-2} + 5.059988839285713 \cdot 10^{-3} \cdot x - 4.3945312499999985 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 1.2555803571428568 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 \quad 9 \text{ m} \leq x \leq 13 \text{ m}$$

Dobljene funkcije rešitve so približne, ker so predstavljene s polinomi 3. stopnje, prave oz. točne funkcije pa so polinomi 4. stopnje.

*Poprocesiranje: izračun točnih funkcij prečnega pomika s pomočjo rešitev diferencialnih enačb*

Funkcije upogibnice lahko izračunamo tudi tako, da za vsak končni element rešimo (sedaj) samostojno diferencialno enačbo, upoštevajoč izračunane vozliščne vrednosti pomika in zasuka kot (kinematične) robne pogoje. Na tak način dobimo točne funkcije upogibnice, ker so vozliščne vrednosti točne.

Tako za prvi končni element sledi diferencialna enačba:

$$EI \cdot \frac{d^4 v_1(x)}{dx^4} = q(x) \quad 0 < x < 4 \text{ m} \quad \rightarrow \quad 4.8 \cdot 10^7 \cdot \frac{d^4 v_1(x)}{dx^4} = -18000 \quad 0 < x < 4 \text{ m}$$

ki ob upoštevanju (zgolj) kinematičnih robnih pogojev (na voljo so namreč tudi statični robni pogoji):

$$\begin{aligned} v_1(0) &= Y_1 = 0 \\ \frac{dv_1(0)}{dx} &= \Phi_1 = 0 \\ v_1(4 \text{ m}) &= Y_2 = 0 \\ \frac{dv_1(4 \text{ m})}{dx} &= \Phi_2 = -2.008928571428571 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

vodi do rešitve:

$$v_1(x) = -1.997767857142856 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 1.1244419642857138 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 - 1.5625 \cdot 10^{-5} \cdot x^4 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Za drugi končni element sledi diferencialna enačba:

$$EI \cdot \frac{d^4 v_2(x)}{dx^4} = q(x) \quad 4 \text{ m} < x < 9 \text{ m} \rightarrow 4.8 \cdot 10^7 \cdot \frac{d^4 v_2(x)}{dx^4} = -18000 \quad 4 \text{ m} < x < 9 \text{ m}$$

ob kinematičnih robnih pogojih:

$$\begin{aligned} v_2(4 \text{ m}) &= Y_2 = 0 \\ \frac{dv_2(4 \text{ m})}{dx} &= \Phi_2 = -2.008928571428571 \cdot 10^{-4} \\ v_2(9 \text{ m}) &= Y_3 = 0 \\ \frac{dv_2(9 \text{ m})}{dx} &= \Phi_3 = 2.008928571428571 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

Rešitev diferencialne enačbe za drugi element (v globalnem koordinantnem sistemu) znaša:

$$\begin{aligned} v_2(x) &= -0.018803571428571423 + 0.014102678571428566 \cdot x - 3.7254464285714274 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 \\ &+ 4.0625 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 - 1.5625 \cdot 10^{-5} \cdot x^4 \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 9 \text{ m} \end{aligned}$$

Za tretji končni element sledi diferencialna enačba:

$$EI \cdot \frac{d^4 v_3(x)}{dx^4} = q(x) \quad 9 \text{ m} < x < 13 \text{ m} \rightarrow 4.8 \cdot 10^7 \cdot \frac{d^4 v_3(x)}{dx^4} = -18000 \quad 9 \text{ m} < x < 13 \text{ m}$$

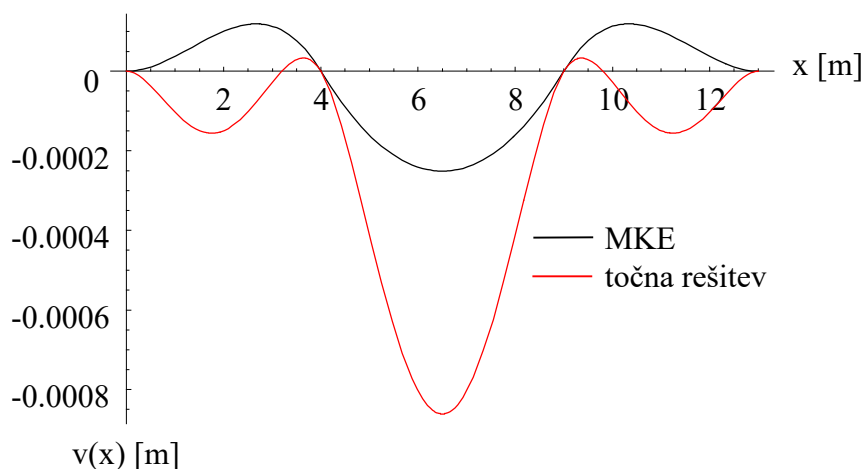
ob kinematičnih robnih pogojih:

$$\begin{aligned} v_3(9 \text{ m}) &= Y_3 = 0 \\ \frac{dv_3(9 \text{ m})}{dx} &= \Phi_3 = 2.008928571428571 \cdot 10^{-4} \\ v_3(13 \text{ m}) &= Y_4 = 0 \\ \frac{dv_3(13 \text{ m})}{dx} &= \Phi_4 = 0 \end{aligned}$$

Rešitev diferencialne enačbe za tretji končni element (v globalnem koordinantnem sistemu) znaša:

$$\begin{aligned} v_3(x) &= -0.23298800223214275 + 0.08549748883928568 \cdot x - 0.011658203125 \cdot x^2 \\ &+ 7.000558035714282 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 - 1.5625 \cdot 10^{-5} \cdot x^4 \quad 9 \text{ m} \leq x \leq 13 \text{ m} \end{aligned}$$

Primerjava funkcij pomika pokaže, da so med točnimi (rdeče linije) in približnimi rešitvami, dobljenimi z interpolacijskimi funkcijami H1 (črne linije), opazne velike razlike:



Slika 104: Primerjava različnih rešitev za funkcijo prečnega pomika

Notranja deformacijska energija za dobljeno rešitev znaša  $U = 2.8312507940798373$  J, celotna potencialna energija  $\Pi$  pa znaša  $-2.592856348776956$  J.

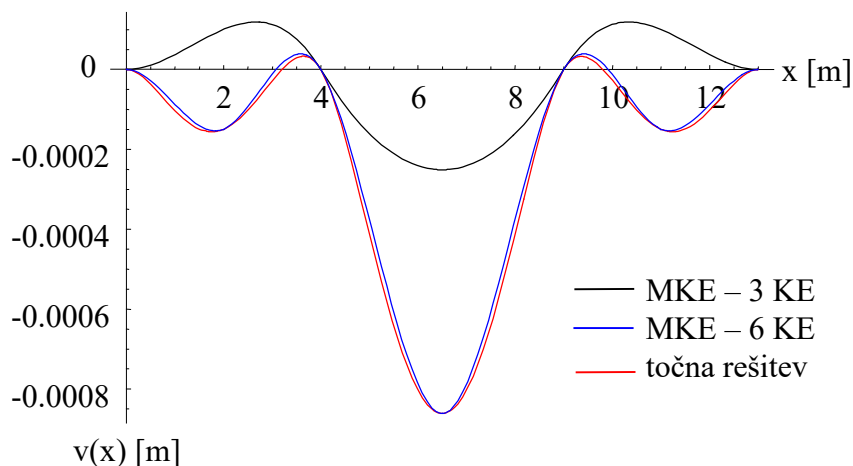
Največja razlika med točnimi in približnimi rešitvami očitno nastopi pri pomiku na sredini. Pomik, izračunan s pomočjo interpolacijskih funkcij H1, znaša:

$$v_{2,N}(6.5) = -2.511160714285717 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

medtem ko točni pomik na tem mestu znaša:

$$v_2(6.5) = -8.614676339285809 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Rezultate, dobljene z uporabo H1 interpolacijskih funkcij lahko izboljšamo z uporabo gostejše diskretizacije, torej povečanjem števila končnih elementov v računskem modelu. Pri uporabi šestih končnih elementov v kombinacijah s H1 interpolacijskimi funkcijami tako sledijo naslednji grafi funkcij pomika (modre linije):



Slika 105: Primerjava različnih rešitev za funkcije prečnega pomika

Iz grafov funkcij upogibnice vidimo, da je ujemanje vseh rešitev v vozliščih končnih elementov popolno, kar pri gostejši diskretizaciji posledično vodi do bistveno boljšega ujemanja s točnimi vrednostmi tudi izven vozlišč, pri čemer se je potrebno zavedati, da so tudi s povečevanjem računskega modela pridobljene približne rešitve, ki se zgolj približujejo točnim.

Notranja deformacijska energija za dobljeno rešitev znaša  $U = 25.444963727678548$  J (kar je bistveno drugačna vrednost kot vrednost iz prve diskretizacije), celotna potencialna energija  $\Pi$  pa znaša  $-25.444963727679642$  J in nakazuje boljšo rešitev.

*Poprocesiranje: izračun točnih funkcij prečnega pomika s pomočjo H2 interpolacijskih funkcij*

Alternativna možnost (ki pa vodi do točnih rešitev) je interpolacija z uporabo Hermitskih polinomov 2. stopnje, ki vodijo do točnih rešitev za prečni pomik že ob uporabi minimalne diskretizacije s tremi končnimi elementi.

Ker sta za vsak element znani še točni vrednosti upogibnega momenta, ki sta povezani z drugim odvodom funkcije prečnega pomika, lahko tudi ti dve informaciji (poleg informacij o znanem pomiku in zasuku v vsakem vozlišču) vključimo v analizo, s čimer dvignemo red polinoma v interpolacijskih funkcijah (ter posledično v funkciji prečnega pomika) za dve stopnji. Ustrezne interpolacijske funkcije za prvi končni element so tako:

$$N_{1,1}(x) = 1 - \frac{5}{32} \cdot x^3 + \frac{15}{256} \cdot x^4 - \frac{3}{512} \cdot x^5 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,2}(x) = x - \frac{3}{8} \cdot x^3 + \frac{1}{8} \cdot x^4 - \frac{3}{256} \cdot x^5 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,3}(x) = 1.04166666667 \cdot 10^{-8} \cdot x^2 - 7.8125 \cdot 10^{-9} \cdot x^3 + 1.95315 \cdot 10^{-9} \cdot x^4 - 1.6276041667 \cdot 10^{-10} \cdot x^5$$

$$N_{1,4}(x) = \frac{5}{32} \cdot x^3 - \frac{15}{256} \cdot x^4 + \frac{3}{512} \cdot x^5 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,5}(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^3 + \frac{7}{64} \cdot x^4 - \frac{3}{256} \cdot x^5 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,6}(x) = 2.6041666667 \cdot 10^{-9} \cdot x^3 - 1.302083333 \cdot 10^{-9} \cdot x^4 + 1.6276041667 \cdot 10^{-10} \cdot x^5 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Načeloma sicer približna, vendar sedaj točna rešitev za funkcijo prečnega pomika prvega končnega elementa je tako:

$$\begin{aligned} v_{1,N}(x) &= Y_1 \cdot N_{1,1}(x) + \Phi_1 \cdot N_{1,2}(x) + M_{z1} \cdot N_{1,3}(x) + Y_2 \cdot N_{1,4}(x) + \Phi_2 \cdot N_{1,5}(x) + M_{z2} \cdot N_{1,6}(x) \\ &= -1.9977678571428566 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 1.124441964285714 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 - 1.5625 \cdot 10^{-5} \cdot x^4 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

Rešitev v obliki polinoma 4. stopnje je točna, torej enaka rešitvi diferencialne enačbe.

Opomba: ker je rešitev sestavljena s pomočjo polinomov 5. stopnje, se lahko zaradi zaokroževanj pojavi zelo majhen člen  $x^5$ , ki pa ga ignoriramo.

Interpolacijske funkcije za drugi končni element (v globalnem koordinatnem sistemu) so tako:

$$N_{2,1}(x) = \frac{44469}{3125} - \frac{7776}{625} \cdot x + \frac{2808}{625} \cdot x^2 - \frac{482}{625} \cdot x^3 + \frac{39}{625} \cdot x^4 - \frac{6}{3125} \cdot x^5 \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 9 \text{ m}$$

$$N_{2,2}(x) = \frac{20412}{625} - \frac{4131}{125} \cdot x + \frac{1512}{125} \cdot x^2 - \frac{254}{125} \cdot x^3 + \frac{4}{25} \cdot x^4 - \frac{3}{256} \cdot x^5 \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 9 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} N_{2,3}(x) &= 9.72 \cdot 10^{-7} - 8.1 \cdot 10^{-7} \cdot x + 2.5875 \cdot 10^{-7} \cdot x^2 - 3.958333333333332 \cdot 10^{-8} \cdot x^3 \\ &\quad + 2.916666666666666 \cdot 10^{-9} \cdot x^4 - 8.333333333333332 \cdot 10^{-11} \cdot x^5 \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 9 \text{ m} \end{aligned}$$

$$N_{2,4}(x) = -\frac{41344}{3125} + \frac{7776}{625} \cdot x - \frac{2808}{625} \cdot x^2 + \frac{482}{625} \cdot x^3 - \frac{39}{625} \cdot x^4 + \frac{6}{3125} \cdot x^5 \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 9 \text{ m}$$

$$N_{2,5}(x) = \frac{18432}{625} - \frac{704}{25} \cdot x + \frac{1296}{125} \cdot x^2 - \frac{228}{125} \cdot x^3 + \frac{19}{125} \cdot x^4 - \frac{3}{256} \cdot x^5 \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 9 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} N_{2,6}(x) &= -4.32 \cdot 10^{-7} + 4.2 \cdot 10^{-7} \cdot x - 1.5833333333333328 \cdot 10^{-7} \cdot x^2 + 2.875 \cdot 10^{-8} \cdot x^3 \\ &\quad - 2.5 \cdot 10^{-9} \cdot x^4 + 8.333333333333332 \cdot 10^{-11} \cdot x^5 \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 9 \text{ m} \end{aligned}$$

Načeloma sicer približna, vendar sedaj točna rešitev za funkcijo prečnega pomika drugega končnega elementa je tako:

$$\begin{aligned} v_{2,N}(x) &= Y_2 \cdot N_{2,1}(x) + \Phi_2 \cdot N_{2,2}(x) + M_{z2} \cdot N_{2,3}(x) + Y_3 \cdot N_{2,4}(x) + \Phi_3 \cdot N_{2,5}(x) + M_{z3} \cdot N_{2,6}(x) \\ &= -1.880357142857142 \cdot 10^{-2} + 1.4102678571428565 \cdot 10^{-2} \cdot x - 3.725446428571427 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 \\ &\quad + 4.0625 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 - 1.5625 \cdot 10^{-5} \cdot x^4 \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 9 \text{ m} \end{aligned}$$

Rešitev v obliki polinoma 4. stopnje je točna.

Interpolacijske funkcije za tretji končni element (v globalnem koordinatnem sistemu) pa so:

$$\begin{aligned} N_{3,1}(x) &= \frac{432809}{512} - \frac{205335}{512} \cdot x + \frac{19305}{256} \cdot x^2 - \frac{1795}{256} \cdot x^3 + \frac{165}{512} \cdot x^4 - \frac{3}{512} \cdot x^5 & 9 \text{ m} \leq x \leq 13 \text{ m} \\ N_{3,2}(x) &= \frac{454779}{256} - \frac{214799}{256} \cdot x + \frac{20007}{128} \cdot x^2 - \frac{1839}{128} \cdot x^3 + \frac{167}{256} \cdot x^4 - \frac{3}{256} \cdot x^5 & 9 \text{ m} \leq x \leq 13 \text{ m} \\ N_{3,3}(x) &= 2.896435546875 \cdot 10^{-5} - 1.312060546875 \cdot 10^{-5} \cdot x + 2.3570963541666666 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 \\ &\quad - 2.099609375 \cdot 10^{-7} \cdot x^3 + 9.27734375 \cdot 10^{-9} \cdot x^4 - 1.6276041666666662 \cdot 10^{-10} \cdot x^5 \\ N_{3,4}(x) &= -\frac{432297}{512} + \frac{205335}{512} \cdot x - \frac{19305}{256} \cdot x^2 + \frac{1795}{256} \cdot x^3 - \frac{165}{512} \cdot x^4 + \frac{3}{512} \cdot x^5 & 9 \text{ m} \leq x \leq 13 \text{ m} \\ N_{3,5}(x) &= \frac{407511}{256} - \frac{195615}{256} \cdot x + \frac{18603}{128} \cdot x^2 - \frac{1751}{128} \cdot x^3 + \frac{163}{256} \cdot x^4 - \frac{3}{256} \cdot x^5 & 9 \text{ m} \leq x \leq 13 \text{ m} \\ N_{3,6}(x) &= -2.0052246093749993 \cdot 10^{-5} + 9.769042968749997 \cdot 10^{-6} \cdot x - 1.8896484375 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 \\ &\quad + 1.8131510416666666 \cdot 10^{-7} \cdot x^3 - 8.626302083333332 \cdot 10^{-9} \cdot x^4 \\ &\quad + 1.6276041666666662 \cdot 10^{-10} \cdot x^5 \quad 9 \text{ m} \leq x \leq 13 \text{ m} \end{aligned}$$

Točna rešitev za funkcijo prečnega pomika tretjega končnega elementa v obliki polinoma 4. stopnje je torej:

$$\begin{aligned} v_{3,N}(x) &= Y_3 \cdot N_{3,1}(x) + \Phi_3 \cdot N_{3,2}(x) + M_{z3} \cdot N_{3,3}(x) + Y_4 \cdot N_{3,4}(x) + \Phi_4 \cdot N_{3,5}(x) + M_{z4} \cdot N_{3,6}(x) \\ &= -0.23298800223214278 + 8.54974888392857 \cdot 10^{-2} \cdot x - 1.1658203125 \cdot 10^{-2} \cdot x^2 \\ &\quad + 7.000558035714288 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 - 1.5625 \cdot 10^{-5} \cdot x^4 \quad 9 \text{ m} \leq x \leq 13 \text{ m} \end{aligned}$$

Notranja deformacijska energija za točne funkcije znaša  $U = 26.960491071427104 \text{ J}$ , celotna potencialna energija  $\Pi$  pa znaša  $-26.960491071358152 \text{ J}$ .

*Poprocesiranje: iskanje funkcij upogibnega momenta in prečne sile*

Z uporabo (že znanih) H1 interpolacijskih funkcij za prečni pomik z uporabo vozliščnih vrednosti notranjih statičnih količin sledi za prvi končni element:

$$\begin{aligned} M_{1,N}(x) &= M_{z,1} \cdot N_1(x) + V_{y,1} \cdot N_{1,2}(x) + M_{z,2\text{levo}} \cdot N_{1,3}(x) + V_{z,2\text{levo}} \cdot N_{1,4}(x) \\ &= -19178.571428571428 \cdot N_{1,1}(x) + 32383.928571428572 \cdot N_{1,2}(x) - 33642.857142857145 \cdot N_{1,3}(x) \\ &\quad - 39616.07142857143 \cdot N_{1,4}(x) \\ &= -19178.571428571428 + 32383.928571428572 \cdot x - 9000 \cdot x^2 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

ki je enaka točni funkciji porazdelitve upogibnega momenta.

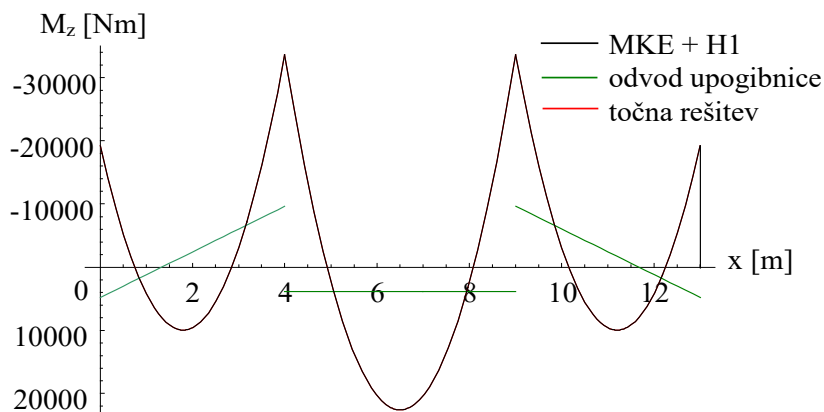
Za drugi končni element velja:

$$\begin{aligned} M_{2,N}(x) &= M_{z,2\text{desno}} \cdot N_{2,1}(x) + V_{y,2\text{desno}} \cdot N_{2,2}(x) + M_{z,3\text{levo}} \cdot N_{2,3}(x) + V_{y,3\text{levo}} \cdot N_{2,4}(x) \\ &= -33642.85714285714 \cdot N_{2,1}(x) + 45000 \cdot N_{2,2}(x) - 33642.857142857145 \cdot N_{2,3}(x) - 45000 \cdot N_{2,4}(x) \\ &= -357642.85714285716 + 117000 \cdot x - 9000 \cdot x^2 \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 9 \text{ m} \end{aligned}$$

Za tretji končni element velja:

$$\begin{aligned} M_{3,N}(x) &= M_{z,3\text{desno}} \cdot N_{3,1}(x) + V_{y,3\text{desno}} \cdot N_{3,2}(x) + M_{z,4\text{levo}} \cdot N_{3,3}(x) + V_{y,4\text{levo}} \cdot N_{3,4}(x) \\ &= -33642.857142857145 \cdot N_{3,1}(x) + 39616.07142857143 \cdot N_{3,2}(x) - 19178.571428571428 \cdot N_{3,3}(x) \\ &\quad - 32383.928571428572 \cdot N_{3,4}(x) \\ &= -1.1191875 \cdot 10^6 + 201616.07142857136 \cdot x - 9000 \cdot x^2 \quad 9 \text{ m} \leq x \leq 13 \text{ m} \end{aligned}$$

Vse funkcije so enake točnim.



Slika 106: Primerjave grafov različnih funkcij upogibnega momenta

Iz slike 106 vidimo, da so točne (rdeče linije) in približne rešitve iz interpolacijskih funkcij H1 (črne linije) identične (črne krivulje popolnoma prekrijejo rdeče, ki tako niso vidne), približne rešitve iz odvodov približkov funkcij prečnega pomika (zelene linije) pa opazno odstopajo.

Funkcije upogibnega momenta bi lahko dobili tudi s superpozicijo. Za prvi končni element zapišemo splošno funkcijo linearne razporeditve upogibnega momenta med vozliščema:

$$M_o(x) = A + B \cdot x$$

kjer sta A in B neznani konstanti. Določimo ju tako, da sta izpolnjena statična robna pogoja (alternativno pa bi lahko funkcijo določili z uporabo H0 interpolacijskih funkcij):

$$M_o(0) = -19178.571428571428 \text{ Nm}$$

$$M_o(4) = -33642.857142857145 \text{ Nm}$$

Za prvi končni element tako sledi funkcija linearne razporeditve momenta med vozliščema:

$$M_o(x) = -19178.571428571428 - 3616.0714285714294 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Pomožnemu prostoležečemu nosilcu dolžine 4 m, obremenjenemu z enakomerno zvezno obtežbo 18000 N/m, pripada vertikalna reakcija v levi podpori:

$$V_A = \frac{18000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 4 \text{ m}}{2} = 36000 \text{ N}$$

in tako sledi funkcija upogibnega momenta:

$$\bar{M}_q(x) = V_A \cdot x - \frac{18000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot x^2}{2} = 36000 \text{ N} \cdot x - \frac{18000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot x^2}{2} = 36000 \cdot x - 9000 \cdot x^2 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Seštevek obeh funkcij momenta je ponovno:

$$M_{z,1}(x) = M_o(x) + \bar{M}_q(x) = -19178.57142857 - 3616.071428571 \cdot x + 36000 \cdot x - 9000 \cdot x^2 \\ = -9000 \cdot x^2 + 32383.928571428572 \cdot x - 19178.571428571428 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Superpozicijo bi lahko uporabili tudi za določitev funkcij upogibnega momenta za preostala končna elementa.

Ker so znane tudi točne funkcije prečnega pomika, bi lahko funkcije upogibnega momenta izračunali tudi s pomočjo njihovih drugih odvodov.

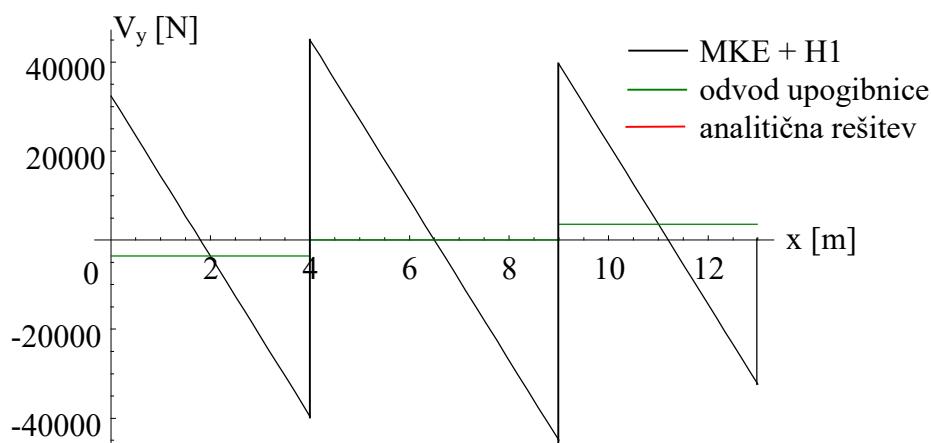
Odvajanje dobljenih izrazov za upogibni moment vodi do izrazov za prečno silo:

$$V_{y,1N}(x) = 32383.928571428565 - 18000 \cdot x^2 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$V_{y,2N}(x) = 117000 - 18000 \cdot x^2 \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 9 \text{ m}$$

$$V_{y,3N}(x) = 201616.0714285714 - 18000 \cdot x^2 \quad 9 \text{ m} \leq x \leq 13 \text{ m}$$

ki so prav tako enaki točnim izrazom obravnavanega primera.



Slika 107: Primerjave grafov prečne sile

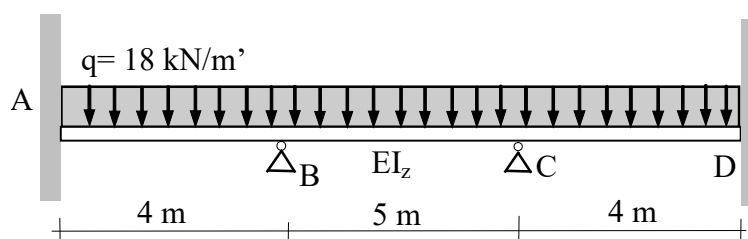
Iz slike vidimo, da so točne (rdeče linije) in približne rešitve iz interpolacijskih funkcij H1 (črne linije) ponovno identične (črne krivulje popolnoma prekrijejo rdeče), približne rešitve iz odvodov približkov funkcij prečnega pomika (zelene linije) pa ponovno opazno odstopajo.

Opomba: znane točne funkcije upogibnega momenta sedaj omogočajo, da pridobimo točne funkcije prečnega pomika tudi z reševanjem diferencialnih enačb 2. reda (namesto 4. reda, kot je bilo prikazano prej). Pri reševanju diferencialnih enačb 2. reda je sicer na razpolago nekoliko manj robnih pogojev, ker statičnih robnih pogojev ne moremo uporabiti, a je informacij vseeno še vedno dovolj.

Primer je pokazal, da lahko neprevidna oz. nekritična uporaba minimalnega računskega modela, ki sicer omogoči izračun točnih vozliščnih vrednosti pomika in zasuka, z uporabo H1 interpolacijskih funkcij vodi do nesprejemljivo velikih odstopanj pri funkcijah pomika. Čeprav je običajna inženirska rešitev tega problema uporaba kvalitetnejšega modela z več prostostnimi stopnjami, dobljenega bodisi z uporabo večjega števila končnih elementov (ki vodijo do odličnega približka), bodisi z uporabo kvalitetnejših končnih elementov s 5 ali 6 prostostnimi stopnjami (ki vodijo do točnih rešitev), to dejansko ni potrebno, saj je bilo s kvalitetno izvedenim poprocesiranjem rezultatov osnovnega modela mogoče dobiti tudi točne funkcije pomika.

### Primer 7.b – Pomik podpore kontinuirnega nosilca, na obeh straneh polno vpetega

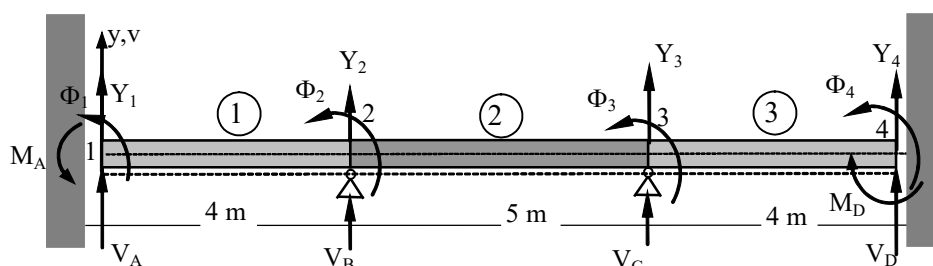
Za dani betonski nosilec ( $E = 30 \text{ GPa}$ ) pravokotnega prereza ( $b/h = 0.3\text{m}/0.4 \text{ m}$ ), obremenjen z enakomerno zvezno obtežbo  $q = 18 \text{ kN/m}^2$  ter vertikalnim pomikom podpore B za 10 cm navzdol, določi funkcijo prečnega pomika vzdolž konstrukcije, funkciji notranjih statičnih količin ter reakcije v podporah.



Slika 108: Obravnavani kontinuirni nosilec

### Rešitev

Najmanjše smiselno število končnih elementov za diskretizacijo je tri. Vsi trije končni elementi so standardni dvovozliščni končni elementi.



Slika 109: Izbrana diskretizacija

Prostostne stopnje so  $Y_1, \Phi_1, Y_2, \Phi_2, Y_3, \Phi_3, Y_4$  in  $\Phi_4$ , ki predstavljajo vozliščne vertikalne pomike in zasuke, od katerih sta samo dve vrednosti ( $\Phi_2$  in  $\Phi_3$ ) neznani.

Za prvi in tretji končni element, ki sta enake dolžine, sta togostni matriki enaki:

$$[K_1] = [K_3] = \begin{bmatrix} 9 & 18 & -9 & 18 \\ 18 & 48 & -18 & 24 \\ -9 & -18 & 9 & -18 \\ 18 & 24 & -18 & 48 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

Elementa imata tudi enaka obtežna vektorja:

$$\{F_1\} = \{F_3\} = \begin{Bmatrix} -36000 \\ -24000 \\ -36000 \\ 24000 \end{Bmatrix}$$

Za drugi končni element je togostna matrika enaka:

$$[K_2] = \begin{bmatrix} 4.608 & 11.52 & -4.608 & 11.52 \\ 11.52 & 38.4 & -11.52 & 19.2 \\ -4.608 & -11.52 & 4.608 & -11.52 \\ 11.52 & 19.2 & -11.52 & 38.4 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

pripadajoči obtežni vektor pa je:

$$\{F_2\} = \begin{Bmatrix} -45000 \\ -37500 \\ -45000 \\ 37500 \end{Bmatrix}$$

V treh matričnih enačbah elementov, ki skupaj predstavljajo 12 enačb, nastopata dve neznani primarni spremenljivki (zasuka  $\Phi_2$  in  $\Phi_3$ ) ter 10 sekundarnih spremenljivk ( $V_{y,1}, M_{z,1}, V_{y,2levo}, M_{z,2}, V_{y,2desno}, V_{y,3levo}, M_{z,3}, V_{y,3desno}, V_{y,4}, M_{z,4}$ ). Sistem je rešljiv, vendar je njegovo reševanje neekonomično s stališča računskega napora.

Namesto tvorbe celotnega sistema enačb (z upoštevanjem togostne matrike konstrukcije in obtežnega vektorja konstrukcije), iz togostnih matrik in obtežnih vektorjev elementov združimo oz. upoštevamo zgolj člene, ki pripadajo neničelnim primarnim spremenljivkam (neznanima zasukoma in znanemu pomiku). Tako sledi sistem dveh enačb z dvema neznankama, katerega matrika ima v začetni obliki toliko vrstic, kot je neznanih primarnih spremenljivk ( $\Phi_2$  in  $\Phi_3$ ), ter toliko stolpcev, kot je število neničelnih primarnih spremenljivk ( $Y_2$ ,  $\Phi_2$  in  $\Phi_3$ ):

$$\begin{matrix} & Y_2 & \Phi_2 & \Phi_3 \\ \Phi_2 & \left[ \begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right] & \cdot & \left\{ \begin{array}{c} Y_2 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right\} \\ \Phi_3 & & & \end{matrix}$$

Iz togostne matrike in obtežnega vektorja prvega končnega elementa nato odčitamo in prenesemo zgolj ustrezne člene, ki pripadajo neničelnim primarnim spremenljivkam:

$$\begin{matrix} & Y_1 & \Phi_1 & \boxed{Y_2} & \boxed{\Phi_2} \\ Y_1 & \left[ \begin{array}{cccc} 9 & 18 & -9 & 18 \\ 18 & 48 & -18 & 24 \\ -9 & 18 & 9 & -18 \\ 18 & 24 & -18 & 48 \end{array} \right] & \cdot 10^6 & Y_1 & \left\{ \begin{array}{c} -36000 \\ -24000 \\ -36000 \\ 24000 \end{array} \right\} \\ \Phi_1 & & & \boxed{\Phi_2} & \left\{ \begin{array}{c} -36000 \\ -24000 \\ -36000 \\ 24000 \end{array} \right\} \\ Y_2 & & & & \\ \boxed{\Phi_2} & & & & \end{matrix}$$

Iz togostne matrike in obtežnega vektorja drugega končnega elementa prav tako odčitamo in prenesemo zgolj člene, ki pripadajo neničelnim primarnim spremenljivkam:

$$\begin{matrix} & \boxed{Y_2} & \boxed{\Phi_2} & Y_3 & \boxed{\Phi_3} \\ Y_2 & \left[ \begin{array}{cccc} -4.608 & 11.52 & -4.608 & 11.52 \\ 11.52 & 38.4 & -11.52 & 19.2 \\ -4.608 & 11.52 & 4.608 & -11.52 \\ 11.52 & 19.2 & -11.52 & 38.4 \end{array} \right] & \cdot 10^6 & Y_2 & \left\{ \begin{array}{c} -45000 \\ -37500 \\ -45000 \\ 37500 \end{array} \right\} \\ \boxed{\Phi_2} & & & \boxed{\Phi_3} & \left\{ \begin{array}{c} -45000 \\ -37500 \\ -45000 \\ 37500 \end{array} \right\} \\ Y_3 & & & & \\ \boxed{\Phi_3} & & & & \end{matrix}$$

Tudi iz togostne matrike in obtežnega vektorja tretjega končnega elementa odčitamo in prenesemo zgolj člene, ki pripadajo neničelnim primarnim spremenljivkam:

$$\begin{array}{c}
 Y_3 \quad \boxed{\Phi_3} \quad Y_4 \quad \Phi_4 \\
 \begin{array}{c}
 Y_3 \\
 \boxed{\Phi_3} \\
 Y_4 \\
 \Phi_4
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 -9 & -18 & -9 & -18 \\
 18 & \boxed{48} & -18 & 24 \\
 -9 & -18 & 9 & -18 \\
 18 & 24 & -18 & 48
 \end{bmatrix} \cdot 10^6
 \begin{array}{c}
 Y_3 \\
 \boxed{\Phi_3} \\
 Y_4 \\
 \Phi_4
 \end{array}
 \begin{Bmatrix}
 -36000 \\
 -24000 \\
 -36000 \\
 -24000
 \end{Bmatrix}
 \end{array}$$

Sistem tako dobi dokončno obliko:

$$\begin{array}{c}
 Y_2 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3 \\
 \begin{array}{c}
 \Phi_2 \\
 \Phi_3
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 -18+11.52+0 & 48+38.4+0 & 0+19.2+0 \\
 0+11.52+0 & 0+19.2+0 & 0+38.4+48
 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix}
 Y_2 \\
 \Phi_2 \\
 \Phi_3
 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}
 24000 - 37500 + 0 \\
 0 + 37500 - 24000
 \end{Bmatrix}
 \end{array}$$

oziroma po združitvi členov:

$$\begin{bmatrix}
 -6.48 & 86.4 & 19.2 \\
 11.52 & 19.2 & 86.4
 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix}
 -0.1 \\
 \Phi_2 \\
 \Phi_3
 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}
 -13500 \\
 13500
 \end{Bmatrix}$$

kar po ureditvi vodi do naslednjega sistema enačb:

$$\begin{Bmatrix}
 -6.48 \\
 11.52
 \end{Bmatrix} \cdot 10^6 \cdot (-0.1) + \begin{bmatrix}
 86.4 & 19.2 \\
 19.2 & 86.4
 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix}
 \Phi_2 \\
 \Phi_3
 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}
 -13500 \\
 13500
 \end{Bmatrix}$$

oziroma zapisanega v nematrični obliki:

$$0.648 \cdot 10^6 + 86.4 \cdot \Phi_2 + 19.2 \cdot \Phi_3 = -13500$$

$$-1.152 \cdot 10^6 + 19.2 \cdot \Phi_2 + 86.4 \cdot \Phi_3 = 13500$$

Po ureditvi sledi sistem v matrični obliki:

$$\begin{bmatrix}
 86.4 & 19.2 \\
 19.2 & 86.4
 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix}
 \Phi_2 \\
 \Phi_3
 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}
 -13500 \\
 13500
 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}
 -6.48 \\
 11.52
 \end{Bmatrix} \cdot 10^6 \cdot (-0.1) = \begin{Bmatrix}
 -13500 \\
 13500
 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}
 -0.648 \\
 1.152
 \end{Bmatrix} \cdot 10^6 = \begin{Bmatrix}
 -661500 \\
 1165500
 \end{Bmatrix}$$

ki ima rešitvi:

$$\begin{Bmatrix}
 \Phi_2 \\
 \Phi_3
 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}
 -0.011207386363636366 \text{ rad} \\
 0.01598011363636364 \text{ rad}
 \end{Bmatrix}$$

Poprocesiranje rezultatov – iskanje sekundarnih spremenljivk in notranjih statičnih količin

Vozliščne vrednosti sekundarnih spremenljivk prvega končnega elementa so:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{K}_1] \cdot \{U_1\} &= \{F_1\} + \{Q_1\} \rightarrow \{Q_1\} = [\mathbf{K}_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\} \\
 \begin{Bmatrix} Q_{1,1} \\ Q_{1,2} \\ Q_{1,3} \\ Q_{1,4} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 9 & 18 & -9 & 18 \\ 18 & 48 & -18 & 24 \\ -9 & -18 & 9 & -18 \\ 18 & 24 & -18 & 48 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \Phi_1 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -36000 \\ -24000 \\ -36000 \\ 24000 \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 9 & 18 & -9 & 18 \\ 18 & 48 & -18 & 24 \\ -9 & -18 & 9 & -18 \\ 18 & 24 & -18 & 48 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.1 \\ -0.011207386363636366 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -36000 \\ -24000 \\ -36000 \\ 24000 \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{Bmatrix} 734267.0454545458 \\ 1.555022727272728 \cdot 10^6 \\ -662267.0454545458, \\ 1.2380454545455 \cdot 10^6 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,1} \\ M_{z,1} \\ V_{y,2\text{levo}} \\ M_{z,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 734267.0454545458 \text{ N} \\ -1.555022727272728 \cdot 10^6 \text{ Nm} \\ 662267.0454545458 \text{ N} \\ 1.2380454545455 \cdot 10^6 \text{ Nm} \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Vozliščne vrednosti sekundarnih spremenljivk drugega končnega elementa so:

$$\begin{aligned}
 \{Q_2\} &= [\mathbf{K}_2] \cdot \{U_2\} - \{F_2\} \\
 \begin{Bmatrix} Q_{2,1} \\ Q_{2,2} \\ Q_{2,3} \\ Q_{2,4} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4.608 & 11.52 & -4.608 & 11.52 \\ 11.52 & 38.4 & -11.52 & 19.2 \\ -4.608 & -11.52 & 4.608 & -11.52 \\ 11.52 & 19.2 & -11.52 & 38.4 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -45000 \\ -37500 \\ -45000 \\ 37500 \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 4.608 & 11.52 & -4.608 & 11.52 \\ 11.52 & 38.4 & -11.52 & 19.2 \\ -4.608 & -11.52 & 4.608 & -11.52 \\ 11.52 & 19.2 & -11.52 & 38.4 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} -0.1 \\ -0.011207386363636366 \\ 0 \\ 0.01598011363636364 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -45000 \\ -37500 \\ -45000 \\ 37500 \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{Bmatrix} -360818.1818181821 \text{ N} \\ -1.2380454545455 \cdot 10^6 \text{ Nm} \\ 450818.1818181821 \text{ N} \\ -791045.454545455 \text{ Nm} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,2\text{desno}} \\ M_{z,2} \\ V_{y,3\text{levo}} \\ M_{z,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -360818.1818181821 \text{ N} \\ 1.2380454545455 \cdot 10^6 \text{ Nm} \\ -450818.1818181821 \text{ N} \\ -791045.454545455 \text{ Nm} \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Vozliščne vrednosti sekundarnih spremenljivk tretjega končnega elementa so:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} Q_{3,1} \\ -Q_{3,2} \\ -Q_{3,3} \\ Q_{3,4} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 9 & 18 & -9 & 18 \\ 18 & 48 & -18 & 24 \\ -9 & -18 & 9 & -18 \\ 18 & 24 & -18 & 48 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_3 \\ \Phi_3 \\ Y_4 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -36000 \\ -24000 \\ -36000 \\ 24000 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & 18 & -9 & 18 \\ 18 & 48 & -18 & 24 \\ -9 & -18 & 9 & -18 \\ 18 & 24 & -18 & 48 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.01598011363636364 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -36000 \\ -24000 \\ -36000 \\ 24000 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 323642.04545454565 \text{ N} \\ 791045.4545454549 \text{ Nm} \\ -251642.04545454565 \text{ N} \\ 359522.72727272747 \text{ Nm} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,3\text{desno}} \\ M_{z,3} \\ V_{y,4} \\ M_{z,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 323642.04545454565 \text{ N} \\ -791045.4545454549 \text{ Nm} \\ 251642.04545454565 \text{ N} \\ 359522.72727272747 \text{ Nm} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

*Poprocesiranje rezultatov – izračun reakcij iz izračunanih NSK*

Ker so znane vozliščne vrednosti notranjih statičnih količin, lahko te vrednosti uporabimo za izračun vozliščnih reakcij (kar je posebej ugodno, kadar v posamezni podpori nastopa zgolj en element).

Tako sledijo iz ravnotežja sil in momentov (v skladu z izbranimi usmeritvami) v podpori A:

$$V_A - V_{y,1} = 0 \rightarrow V_A = V_{y,1} = 734267.0454545458 \text{ N} \quad \text{usmerjena navzgor}$$

$$M_A + M_{z,1} = 0 \rightarrow M_A = -M_{z,1} = -(-1.555022727272728 \cdot 10^6) \text{ Nm} = 1.555022727272728 \cdot 10^6 \text{ Nm}$$

deluje protiurno

Vertikalna reakcije v podpori B sledi iz ravnotežja sil v vertikalni smeri:

$$\begin{aligned} V_{y,2\text{levo}} + V_B - V_{y,2\text{desno}} &= 0 \rightarrow V_B = V_{y,2\text{desno}} - V_{y,2\text{levo}} = -360818.1818181821 - 662267.0454545458 \\ &= -1.0230852272727279 \cdot 10^6 \text{ N} \end{aligned}$$

pri čemer predznak – pomeni usmeritev navzdol.

Vertikalna reakcije v podpori C sledi iz:

$$V_{y,3\text{levo}} + V_C - V_{y,3\text{desno}} = 0$$

$$V_C = V_{y,3\text{desno}} - V_{y,3\text{levo}} = 323642.04545454565 \text{ N} - (-450818.1818181821 \text{ N}) = 774460.2272727278 \text{ N}$$

in je usmerjena navzgor.

Iz ravnotežja sil in momentov (v skladu z izbranimi usmeritvami) v podpori D sledi:

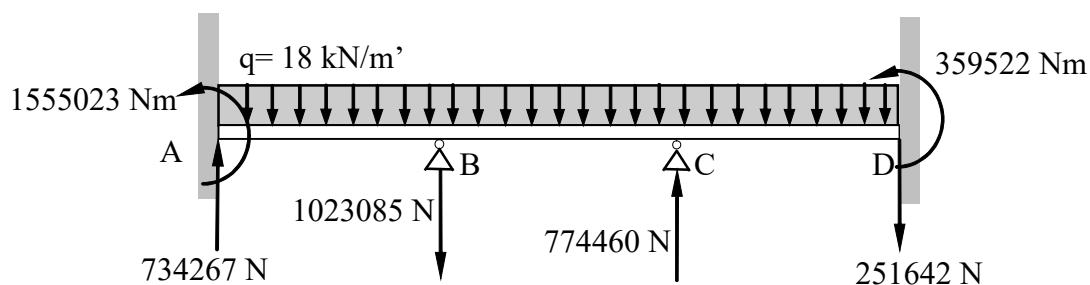
$$V_D + V_{y,4} = 0 \rightarrow V_D = -V_{y,4} = -251642.04545454565 \text{ N}$$

usmerjena navzdol

$$M_D + M_{z,4} = 0 \rightarrow M_D = -M_{z,4} = -359522.72727272747 \text{ Nm}$$

deluje protiurno

Še enostavneje pa lahko velikosti in usmeritve reakcij pridobimo neposredno iz vektorjev sekundarnih spremenljivk, kjer reakcije ali njihove komponente preprosto odčitamo:



Slika 110: Izračunane reakcije in njihove usmeritve

*Poprocesiranje rezultatov – izračun približkov funkcije prečnega pomika s pomočjo interpolacijskih funkcij*

Funkcijo prečnega pomika vzdolž vsakega elementa sedaj izračunamo s pomočjo interpolacijskih funkcij. Za prvi končni element tako sledi približna rešitev za funkcijo prečnega pomika ( $x_A = 0 \text{ m}$  in  $L = 4 \text{ m}$ ):

$$\begin{aligned}
v_{1,N}(x) &= \{N_{1,1}(x), N_{1,2}(x), N_{1,3}(x), N_{1,4}(x)\} \cdot \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \Phi_1 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} \\
&= \left\{ 1 - \frac{x^2}{3} + 2 \cdot \frac{x^3}{27}, x - 2 \cdot \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{9}, \frac{x^2}{3} - 2 \cdot \frac{x^3}{27}, -\frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{9} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.1 \\ -0.011207386363636366 \end{Bmatrix} \\
&= -1.594815340909091 \cdot 10^{-2} \cdot x^2 + 2.4245383522727274 \cdot 10^{-3} \cdot x^3 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}
\end{aligned}$$

Za drugi končni element tako sledi približna rešitev za funkcijo prečnega pomika ( $x_A = 4$  m in  $L = 5$  m):

$$\begin{aligned}
v_{2,N}(x) &= \{N_{2,1}(x), N_{2,2}(x), N_{2,3}(x), N_{2,4}(x)\} \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} \\
&= \left\{ \begin{array}{l} -\frac{243}{125} + \frac{216 \cdot x}{125} - \frac{39 \cdot x^2}{125} + \frac{2 \cdot x^3}{25} \\ -\frac{324}{25} + \frac{22 \cdot x}{25} - \frac{39 \cdot x^2}{125} + \frac{x^3}{25} \\ \frac{368}{125} - \frac{216 \cdot x}{125} + \frac{39 \cdot x^2}{125} - \frac{2 \cdot x^3}{25} \\ -\frac{144}{25} + \frac{88 \cdot x}{25} - \frac{17 \cdot x^2}{125} + \frac{x^3}{25} \end{array} \right\}^T \cdot \begin{Bmatrix} -0.1 \\ -0.011207386363636366 \\ 0 \\ 0.01598011363636364 \end{Bmatrix} \\
&= 0.24760227272727275 - 0.18513920454545457 \cdot x + 3.0196022727272728 \cdot 10^{-2} \cdot x^2 \\
&\quad - 1.4090909090909089 \cdot 10^{-3} \cdot x^3 \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 9 \text{ m}
\end{aligned}$$

zapisana v globalnem koordinatnem sistemu.

Za tretji končni element tako sledi približna rešitev za funkcijo prečnega pomika ( $x_A = 9$  m in  $L_e = 4$  m):

$$v_{3,N}(x) = \{N_{3,1}(x), N_{3,2}(x), N_{3,3}(x), N_{3,4}(x)\} \cdot \begin{Bmatrix} Y_3 \\ \Phi_3 \\ Y_4 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -\frac{1183}{32} + \frac{351 \cdot x}{32} - \frac{33}{32} + \frac{x^3}{32} \\ -\frac{1521}{16} + \frac{403 \cdot x}{16} - \frac{35 \cdot x^2}{16} + \frac{x^3}{16} \\ \frac{1215}{32} - \frac{351 \cdot x}{32} + \frac{33}{32} - \frac{x^3}{32} \\ -\frac{1053}{16} + \frac{315 \cdot x}{16} - \frac{31 \cdot x^2}{16} + \frac{x^3}{16} \end{Bmatrix}^T \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.01598011363636364 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= -1.5191095525568186 + 0.40249911221590917 \cdot x - 3.495649857954546 \cdot 10^{-2} \cdot x^2 + 9.987571022727275 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 \quad 9 \text{ m} \leq x \leq 13 \text{ m}$$

prav tako zapisana v globalnem koordinatnem sistemu.

*Poprocesiranje rezultatov – izračun prave funkcije prečnega pomika s pomočjo diferencialnih enačb*

Rezultate za upogibnico lahko pridobimo tudi tako, da za vsak element rešimo samostojno diferencialno enačbo, upoštevajoč kot robne pogoje (zgolj) izračunane vozliščne pomike in zasuke. Na tak način dobimo točno funkcijo upogiba (kadar so tudi vozliščne vrednosti pomikov in zasukov točne).

Tako za prvi končni element sledi diferencialna enačba:

$$EI \cdot \frac{d^4 v_1(x)}{dx^4} = q(x) \quad 0 < x < 4 \text{ m} \rightarrow 4.8 \cdot 10^7 \cdot \frac{d^4 v_1(x)}{dx^4} = -18000 \quad 0 < x < 4 \text{ m}$$

ki ob (zgolj) kinematičnih robnih pogojih (pri čemer so na voljo še štirje statični vozliščni robni pogoji):

$$v_1(0) = Y_1 = 0$$

$$\frac{dv_1(0)}{dx} = \Phi_1 = 0$$

$$v_1(4 \text{ m}) = Y_2 = -0.1 \text{ m}$$

$$\frac{dv_1(4 \text{ m})}{dx} = \Phi_2 = -0.011207386363636366$$

vodi do rešitve:

$$v_1(x) = -1.619815340909091 \cdot 10^{-2} \cdot x^2 + 2.549538352272727 \cdot 10^{-3} \cdot x^3 - 1.56249 \cdot 10^{-5} \cdot x^4 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Za drugi končni element sledi diferencialna enačba:

$$EI \cdot \frac{d^4 v_2(x)}{dx^4} = q(x) \quad 4 \text{ m} < x < 9 \text{ m} \rightarrow 4.8 \cdot 10^7 \cdot \frac{d^4 v_2(x)}{dx^4} = -18000 \quad 4 \text{ m} < x < 9 \text{ m}$$

ob kinematičnih robnih pogojih:

$$\begin{aligned} v_2(4 \text{ m}) &= Y_2 = -0.1 \text{ m} \\ \frac{dv_2(4 \text{ m})}{dx} &= \Phi_2 = -0.011207386363636366 \\ v_2(9 \text{ m}) &= Y_3 = 0 \\ \frac{dv_2(9 \text{ m})}{dx} &= \Phi_3 = 0.01598011363636364 \end{aligned}$$

Rešitev diferencialne enačbe za drugi končni element znaša:

$$v_2(x) = 0.22735227272727276 - 0.17051420454545455 \cdot x + 2.643039772727273 \cdot 10^{-2} \cdot x^2 - 1.0028409090909092 \cdot 10^{-3} \cdot x^3 - 1.5625 \cdot 10^{-5} \cdot x^4 \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 9 \text{ m}$$

Za tretji končni element sledi diferencialna enačba:

$$\begin{aligned} EI \cdot \frac{d^4 v_3(x)}{dx^4} &= q(x) \quad 9 \text{ m} < x < 13 \text{ m} \\ 4.8 \cdot 10^7 \cdot \frac{d^4 v_3(x)}{dx^4} &= -18000 \quad 9 \text{ m} < x < 13 \text{ m} \end{aligned}$$

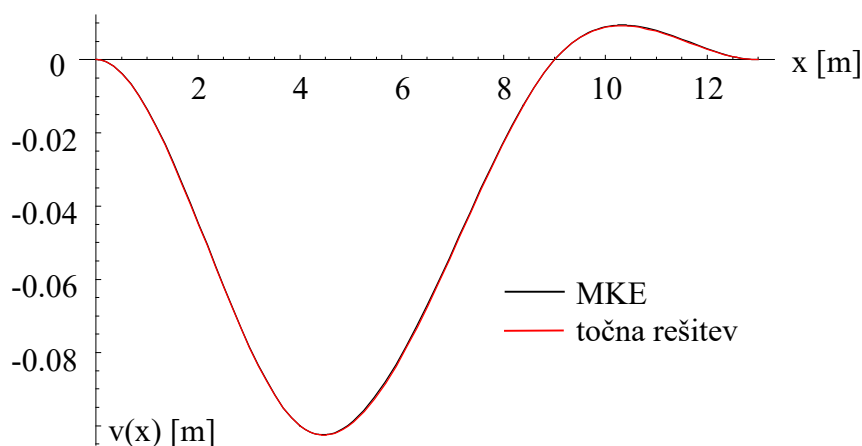
ob kinematičnih robnih pogojih:

$$\begin{aligned} v_3(9 \text{ m}) &= Y_3 = 0 \\ \frac{dv_3(9 \text{ m})}{dx} &= \Phi_3 = 0.01598011363636364 \\ v_3(13 \text{ m}) &= Y_4 = 0 \\ \frac{dv_3(13 \text{ m})}{dx} &= \Phi_4 = 0 \end{aligned}$$

Rešitev diferencialne enačbe za tretji končni element znaša:

$$v_3(x) = -1.733000177556818 + 0.482936612215909 \cdot x - 0.04617524857954545 \cdot x^2 + 1.6862571022727268 \cdot 10^{-3} \cdot x^3 - 1.5625 \cdot 10^{-5} \cdot x^4 \quad 9 \text{ m} \leq x \leq 13 \text{ m}$$

Primerjava grafov funkcij prečnega pomika pokaže, da med točnimi rešitvami (rdeča linija) in približnimi rešitvami (črna linija) razlika skoraj ni opazna (kar pa je predvsem posledica dominantnega vpliva premika podpore):



Slika 111: Primerjava različnih rešitev za funkcijo prečnega pomika

Poprocesiranje rezultatov – iskanje funkcij upogibnega momenta  $\zeta$  interpolacijo vozliščnih vrednosti

Z uporabo že znanih interpolacijskih funkcij za prečni pomik za prvi končni element sledi:

$$\begin{aligned} M_{z,1N}(x) &= M_{z,1} \cdot N_{1,1}(x) + V_{y,1} \cdot N_{1,2}(x) + M_{z,2} \cdot N_{1,3}(x) + V_{y,2\text{levo}} \cdot N_{1,4}(x) \\ &= -1.555022727272728 \cdot 10^6 \cdot N_{1,1}(x) + 734267.0454545458 \cdot N_{1,2}(x) + 1.238045454545455 \cdot 10^6 \cdot N_{1,3}(x) \\ &\quad + 662267.0454545458 \cdot N_{1,4}(x) \\ &= -1.555022727272728 \cdot 10^6 + 734267.0454545458 \cdot x - 9000 \cdot x^2 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

Za drugi končni element velja:

$$\begin{aligned} M_{z,2N}(x) &= M_{z,2} \cdot N_{2,1}(x) + V_{y,2\text{desno}} \cdot N_{2,2}(x) + M_{z,3} \cdot N_{2,3}(x) + V_{y,3\text{levo}} \cdot N_{2,4}(x) \\ &= 1.238045454545455 \cdot 10^6 \cdot N_1^2(x) - 360818.1818181821 \cdot N_2^2(x) - 791045.454545455 \cdot N_3^2(x) \\ &\quad - 450818.1818181821 \cdot N_4^2(x) \\ &= 2.537318181818186 \cdot 10^6 - 288818.1818181835 \cdot x - 9000 \cdot x^2 \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 9 \text{ m} \end{aligned}$$

Za tretji končni element velja:

$$\begin{aligned}
 M_{z,3N}(x) &= M_{z,3} \cdot N_{3,1}(x) + V_{y,3\text{desno}} \cdot N_{3,2}(x) + M_{z,4} \cdot N_{3,3}(x) + V_{y,4} \cdot N_{3,4}(x) \\
 &= -791045.4545454549 \cdot N_{3,1}(x) + 323642.04545454565 \cdot N_{3,2}(x) + 359522.72727272747 \cdot N_{3,3}(x) \\
 &\quad + 251642.04545454565 \cdot N_{3,4}(x) \\
 &= -4.432823863636367 \cdot 10^6 + 485642.0454545487 \cdot x - 9000 \cdot x^2 \qquad 9 \text{ m} \leq x \leq 13 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Ti izrazi, zapisani v globalnem koordinatnem sistemu, so enaki točnim.



Slika 112: Primerjave grafov različnih funkcij upogibnega momenta

Primerjava grafov upogibnega momenta: točne rešitve (rdeča linija), približne rešitve iz interpolacijskih funkcij (črna linija) in približne rešitve, ki jih lahko dobimo iz odvodov približkov funkcij pomika (zelena linija) pokaže dobro ujemanje.

*Poprocesiranje rezultatov – izračun funkcije upogibnega momenta s superpozicijo*

Pri pristopu s superpozicijo najprej poiščemo funkcijo linearne razporeditve med vozliščnima vrednostima upogibnega momenta, nato pa tej funkciji prištejemo funkcijo razporeditev upogibnega momenta zaradi obtežbe, ki deluje v polju končnega elementa, pri čemer končni element obravnavamo kot navidezni samostojni prostoležeči nosilec.

Za prvi končni element sledi funkcija linearne razporeditve momenta med vozliščema:

$$M_0(x) = -1.555022727272728 \cdot 10^6 + 698267.0454545458 \cdot x \qquad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Za prostoležeči nosilec dolžine 4 m, obremenjen z enakomerno zvezno obtežbo 18000 N/m, sledi funkcija upogibnega momenta:

$$36000 \cdot x - 9000 \cdot x^2 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Seštevek obeh funkcij je:

$$\begin{aligned} M_{z,1N}(x) &= -1.555022727272728 \cdot 10^6 + 698267.0454545458 \cdot x + 36000 \cdot x - 9000 \cdot x^2 \\ &= -1.555022727272728 \cdot 10^6 + 734267.0454545458 \cdot x - 9000 \cdot x^2 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

Za drugi končni element sledi funkcija linearne razporeditve momenta med vozliščema:

$$M_o(x) = 2.861318181818183 \cdot 10^6 - 405818.181818182 \cdot x \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 9 \text{ m}$$

Za pomožni prostoležeči nosilec dolžine 5 m, obremenjen z enakomerno zvezno obtežbo 18000 N/m, sledi vertikalna reakcija v levi podpori:

$$V_A = \frac{18000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 5 \text{ m}}{2} = 45000 \text{ N}$$

in funkcija upogibnega momenta je tako:

$$\begin{aligned} V_A \cdot (x - 4 \text{ m}) - \frac{q \cdot (x - 4 \text{ m})^2}{2} &= 45000 \text{ N} \cdot (x - 4 \text{ m}) - \frac{18000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (x - 4 \text{ m})^2}{2} \\ &= -288000 + 108000 \cdot x - 9000 \cdot x^2 \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 9 \text{ m} \end{aligned}$$

Seštevek obeh funkcij je:

$$\begin{aligned} M_{z,2N}(x) &= 2.861318181818183 \cdot 10^6 - 405818.181818182 \cdot x - 288000 + 108000 \cdot x - 9000 \cdot x^2 \\ &= 2.537318181818183 \cdot 10^6 - 288818.181818182 \cdot x - 9000 \cdot x^2 \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 9 \text{ m} \end{aligned}$$

Za tretji končni element sledi funkcija linearne razporeditve momenta:

$$M_o(x) = -3.379823863636365 \cdot 10^6 + 287642.0454545456 \cdot x \quad 9 \text{ m} \leq x \leq 13 \text{ m}$$

Za prostoležeči nosilec dolžine 4 m, obremenjen z enakomerno zvezno obtežbo 18000 N/m, sledi vertikalna reakcija v levi podpori:

$$V_A = \frac{18000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 4 \text{ m}}{2} = 36000 \text{ N}$$

in funkcija upogibnega momenta je tako:

$$\begin{aligned} V_A \cdot (x - 9 \text{ m}) - \frac{q \cdot (x - 9 \text{ m})^2}{2} &= 36000 \text{ N} \cdot (x - 9 \text{ m}) - \frac{18000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (x - 9 \text{ m})^2}{2} \\ &= -1053000 + 198000 \cdot x - 9000 \cdot x^2 \qquad 9 \text{ m} \leq x \leq 13 \text{ m} \end{aligned}$$

Seštevek obeh funkcij je:

$$\begin{aligned} M_{z,3N}(x) &= -3.379823863636365 \cdot 10^6 + 287642.0454545456 \cdot x - 1053000 + 198000 \cdot x - 9000 \cdot x^2 \\ &= -4.432823863636365 \cdot 10^6 + 485642.0454545456 \cdot x - 9000 \cdot x^2 \qquad 9 \text{ m} \leq x \leq 13 \text{ m} \end{aligned}$$

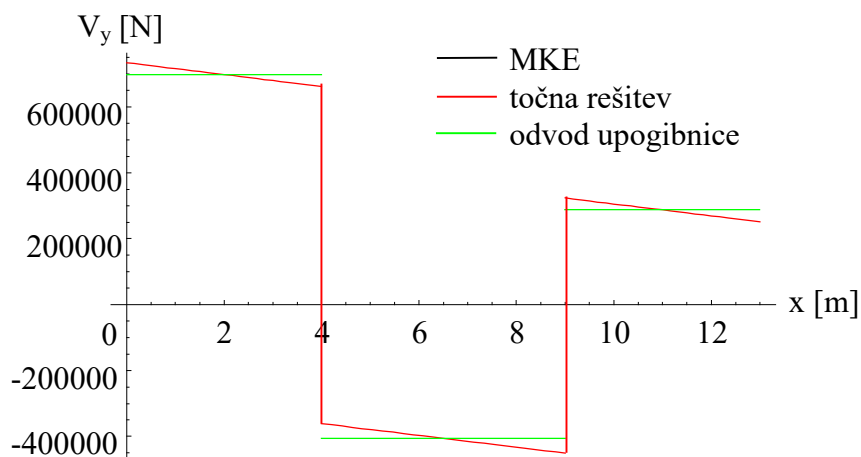
Tako dobljene funkcije so enake točnim funkcijam, dobljenim bodisi z reševanjem (ločenih) diferencialnih enačb, bodisi z uporabo interpolacijskih funkcij.

*Poprocesiranje rezultatov – iskanje funkcije prečne sile  $z$  odvajanjem funkcije upogibnega momenta*

Odvajanje dobljenih funkcij za upogibni moment, kar je najenostavnejši matematični pristop, vodi do izrazov za prečno silo:

$$\begin{aligned} V_{y,1N}(x) &= 734267.0454545456 - 18000 \cdot x & 0 \leq x \leq 4 \text{ m} \\ V_{y,2N}(x) &= -288818.18181818194 - 18000 \cdot x & 4 \text{ m} \leq x \leq 9 \text{ m} \\ V_{y,3N}(x) &= 485642.04545454547 - 18000 \cdot x & 9 \text{ m} \leq x \leq 13 \text{ m} \end{aligned}$$

ki so enaki točnim funkcijam obravnavanega primera.

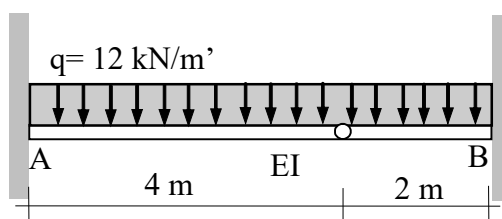


Slika 113: Primerjave grafov različnih funkcij prečne sile

Primerjava grafov funkcij prečne sile: točne rešitve (rdeča linija) ter približne rešitve iz odvoda interpoliranih funkcij momenta (črna linija) pokaže popolno ujemanje. Približne rešitve, dobljene z odvajanjem približkov funkcij upogibnega momenta iz drugih odvodov funkcij približkov prečnega pomika, pa izkazujejo opazno slabše ujemanje.

### Primer 8 – Obojestransko vpeti nosilec s členkom

Za dani betonski (modul elastičnosti znaša  $E = 30 \text{ GPa}$ ) Gerberjev nosilec pravokotnega prereza ( $b/b = 0.25 \text{ m}/0.4 \text{ m}$ ), skupne dolžine  $L = 6 \text{ m}$ , obremenjen z enakomerno zvezno obtežbo  $q = 12 \text{ kN/m}$ , določi funkcije notranjih statičnih količin, reakcije v podporah ter funkcijo prečnega pomika vzdolž nosilca. Poišči tudi vrednost maksimalnega pozitivnega momenta.



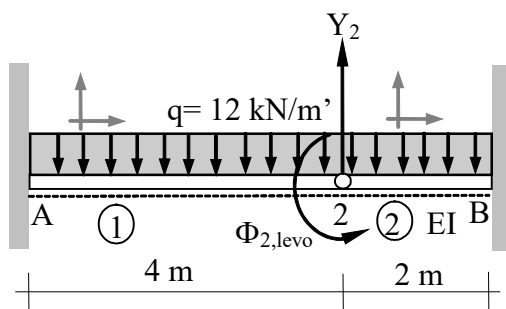
Slika 114: Obravnavani Gerberjev nosilec

### Rešitev

Čeprav za celoten nosilec velja identična diferencialna enačba, sta njeni rešitvi levo in desno od členka, kjer nastopi neenakost oz. nezveznost zasuka, različni. Posledično je potrebno uporabiti diskretizacijo z minimalno dvema končnima elementoma, ki pa omogočata različne možnosti izvedbe.

## 1. diskretizacija: uporaba končnih elementov tipov VV in ČV

Pri diskretizaciji s končnima elementoma tipov VV in ČV imamo dve prostostni stopnji, saj sta neznanki vertikalni pomik  $Y_2$  točke nosilca, kjer nastopi členek, ter pripadajoči zasuk  $\Phi_{2,levo}$  na koncu levega (prvega) končnega elementa.



Slika 115: Prva diskretizacija s končnima elementoma tipov VV in ČV

Togostni matriki elementov za izbrano diskretizacijo sta:

$$[k_1] = \begin{bmatrix} -7.5 & -15 & -7.5 & -15 \\ -15 & 40 & -15 & -20 \\ -7.5 & -15 & 7.5 & -15 \\ 15 & 20 & -15 & 40 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \quad \text{in} \quad [k_2] = \begin{bmatrix} 15 & 0 & -15 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -15 & 0 & 15 & -30 \\ -30 & 0 & -30 & 60 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

Pripadajoča obtežna vektorja sta:

$$\{F_1\} = \begin{Bmatrix} -24000 \\ -16000 \\ -24000 \\ 16000 \end{Bmatrix} \quad \{F_2\} = \begin{Bmatrix} -9000 \\ 0 \\ -15000 \\ -6000 \end{Bmatrix}$$

Bistveni enačbi konstrukcije sta tako:

$$\begin{bmatrix} 22.5 & -15 \\ -15 & 40 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_{2,levo} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -33000 \\ 16000 \end{Bmatrix}$$

in imata rešitvi:

$$\begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_{2,levo} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.6 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -2.0 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Poprocesiranje: iskanje vozliščnih vrednosti notranjih statičnih količin ter reakcij

Vozliščne vrednosti prečne sile in momenta prvega končnega elementa sledijo iz vektorja sekundarnih spremenljivk:

$$\{Q_1\} = [K_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\} =$$

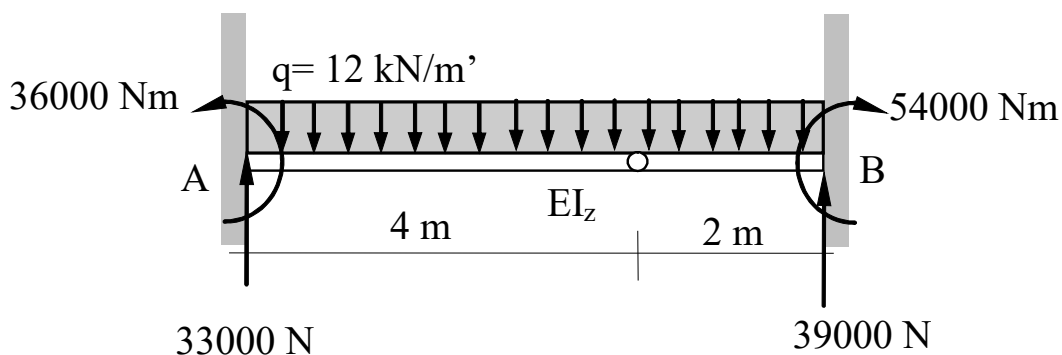
$$\begin{bmatrix} 7.5 & 15 & -7.5 & 15 \\ 15 & 40 & -15 & 20 \\ -7.5 & -15 & 7.5 & -15 \\ 15 & 20 & -15 & 40 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.6 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -2.0 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -24000 \\ -16000 \\ -24000 \\ 16000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 33000 \\ 36000 \\ 15000 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,1} \\ M_{z,1} \\ V_{y,2} \\ M_{z,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 33000 \text{ N} \\ -36000 \text{ Nm} \\ 15000 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Vozliščne vrednosti prečne sile in momenta drugega končnega elementa sledijo iz vektorja sekundarnih spremenljivk (vrednost zasuka  $\Phi_{2,\text{desno}}$ , ki je zaradi členka različna od vrednosti zasuka  $\Phi_{2,\text{levo}}$ , sicer ni znana, vendar to ne ovira izračuna):

$$\{Q_2\} = [K_2] \cdot \{U_2\} - \{F_2\} =$$

$$\begin{bmatrix} 15 & 0 & -15 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -15 & 0 & 15 & -30 \\ 30 & 0 & -30 & 60 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} -1.6 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ \Phi_{2,\text{desno}} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -9000 \\ 0 \\ -15000 \\ 6000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15000 \\ 0 \\ 39000 \\ -54000 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,2} \\ M_{z,2} \\ V_{y,3} \\ M_{z,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15000 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \\ -39000 \text{ N} \\ -54000 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Reakcije, ki jih najlažje pridobimo tako, da jih odčitamo iz vektorjev sekundarnih spremenljivk, so:



Slika 116: Reakcije analiziranega nosilca

*Poprocesiranje: iskanje funkcij prečnega pomika s pomočjo H1 interpolacijskih funkcij*

Interpolacijske funkcije za prvi končni element so:

$$N_{1,1}(x) = 1 - \frac{3}{16} \cdot x^2 + \frac{x^3}{32} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,2}(x) = x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{x^3}{16} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,3}(x) = \frac{3}{16} \cdot x^2 - \frac{x^3}{32} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,4}(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{x^3}{16} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Približna rešitev za funkcijo prečnega pomika prvega končnega elementa je:

$$\begin{aligned} v_{1,N}(x) &= Y_1 \cdot N_{1,1}(x) + \Phi_1 \cdot N_{1,2}(x) + Y_2 \cdot N_{1,3}(x) + \Phi_{2,\text{levo}} \cdot N_{1,4}(x) \\ &= -2.5 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 3.75 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

za katero vemo, da je približna, saj je končni element obremenjen z zvezno obtežbo.

Interpolacijske funkcije za drugi končni element so:

$$N_{2,1}(x) = \frac{9}{4} \cdot x - \frac{3}{4} \cdot x^2 + \frac{x^3}{16} \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$$

$$N_{2,2}(x) = 0 \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$$

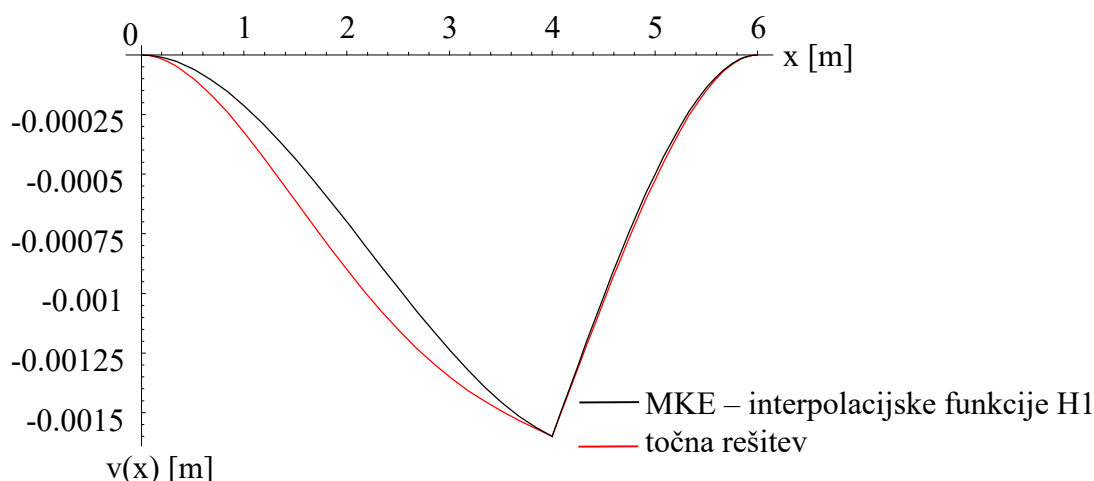
$$N_{2,3}(x) = 1 - \frac{9}{4} \cdot x + \frac{3}{4} \cdot x^2 - \frac{x^3}{16} \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$$

$$N_{2,4}(x) = -6 + \frac{11}{2} \cdot x - \frac{3}{2} \cdot x^2 + \frac{x^3}{8} \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$$

Približna rešitev za funkcijo prečnega pomika drugega končnega elementa (v globalnem koordinatnem sistemu) je:

$$\begin{aligned} v_{2,N}(x) &= Y_2 \cdot N_{2,1}(x) + \Phi_{2,\text{desno}} \cdot N_{2,2}(x) + Y_3 \cdot N_{2,3}(x) + \Phi_3 \cdot N_{2,4}(x) \\ &= -3.6 \cdot 10^{-3} \cdot x + 1.2 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 - 1 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m} \end{aligned}$$

za katero prav tako vemo, da je približna.



Slika 117: Primerjava upogibnic

Poprocesiranje: iskanje funkcij prečnega pomika s pomočjo H2 interpolacijskih funkcij

Kvalitetnejši funkciji pomika dobimo, če v interpolaciji uporabimo dodatne znane informacije. Ker za levi končni element že poznamo vozliščni vrednosti upogibnega momenta, ki sta povezani z drugim odvodom funkcije prečnega pomika, lahko uporabimo H2 interpolacijske funkcije, kar vodi do funkcije:

$$v_{1,N,H2}(x) = \begin{pmatrix} 1 - 0.15625 \cdot x^3 + 0.05859375 \cdot x^4 - 5.859375 \cdot 10^{-3} \cdot x^5 \\ x - 0.375 \cdot x^3 + 0.125 \cdot x^4 - 0.01171875 \cdot x^5 \\ 1.25 \cdot 10^{-8} \cdot x^2 - 9.375 \cdot 10^{-9} \cdot x^3 + 2.34375 \cdot 10^{-9} \cdot x^4 - 1.953125 \cdot 10^{-10} \cdot x^5 \\ 0.15625 \cdot x^3 - 0.05859375 \cdot x^4 + 5.859375 \cdot 10^{-3} \cdot x^5 \\ -0.25 \cdot x^3 + 0.109375 \cdot x^4 - 0.01171875 \cdot x^5 \\ 3.125 \cdot 10^{-9} \cdot x^3 - 1.5625 \cdot 10^{-9} \cdot x^4 + 1.953125 \cdot 10^{-10} \cdot x^5 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -36000 \\ -1.6 \cdot 10^{-3} \\ -2 \cdot 10^{-4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -4.5 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 1.375 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 - 1.25 \cdot 10^{-5} \cdot x^4 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

ki predstavlja točno rešitev. Kljub temu, da so posamezne funkcije polinomi 5. stopnje, je dobljena rešitev v obliki polinoma 4. stopnje (morebitni koeficient člena  $x^5$  se lahko pojavi zgolj zaradi zaokroževanja in ga posledično lahko zanemarimo).

Čeprav je prva funkcija prečnega pomika za drugi končni element opazno kvalitetnejša in je odstopanje od točne rešitve bistveno manjše, lahko izboljšamo tudi to rešitev. Za analizo funkcije prečnega pomika drugega končnega elementa pa lahko dodatno vključimo samo vrednost momenta v desnem vozlišču (torej točki B), kar stopnjo polinomske funkcije prečnega pomika sicer dvigne samo za ena, vendar vključitev te točne informacije vseeno vodi do (prav tako točne) funkcije prečnega pomika za drugi končni element:

$$v_{2,N,H2}(x) = -5.4 \cdot 10^{-3} + 1.35 \cdot 10^{-3} \cdot x - 4.5 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 1.375 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 - 1.25 \cdot 10^{-5} \cdot x^4 \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$$

Iz te funkcije lahko izračunamo tudi točno vrednost zasuka v začetnem vozlišču drugega končnega elementa:

$$\frac{dv_{2,N,H2}(4)}{dx} = 1.15 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

*Poprocesiranje: iskanje funkcij upogibnega momenta in prečne sile*

Interpolacijske funkcije za prvi končni element so enake kot pri izračunu funkcije prečnega pomika in za prvi končni element tako velja:

$$\begin{aligned} M_{z1,N}(x) &= M_{z,1} \cdot N_{1,1}(x) + V_{y,1} \cdot N_{1,2}(x) + M_{z,2} \cdot N_{1,3}(x) + V_{y,2} \cdot N_{1,4}(x) \\ &= -36000 \cdot N_{1,1}(x) + 33000 \cdot N_{1,2}(x) + 0 \cdot N_{1,3}(x) + 15000 \cdot N_{1,4}(x) \\ &= -6000 \cdot x^2 + 33000 \cdot x - 36000 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

ki je enaka točni porazdelitvi upogibnega momenta.

Interpolacijske funkcije za drugi končni element pa so drugačne kot pri izračunu funkcije prečnega pomika (zapisane v globalnem koordinatnem sistemu):

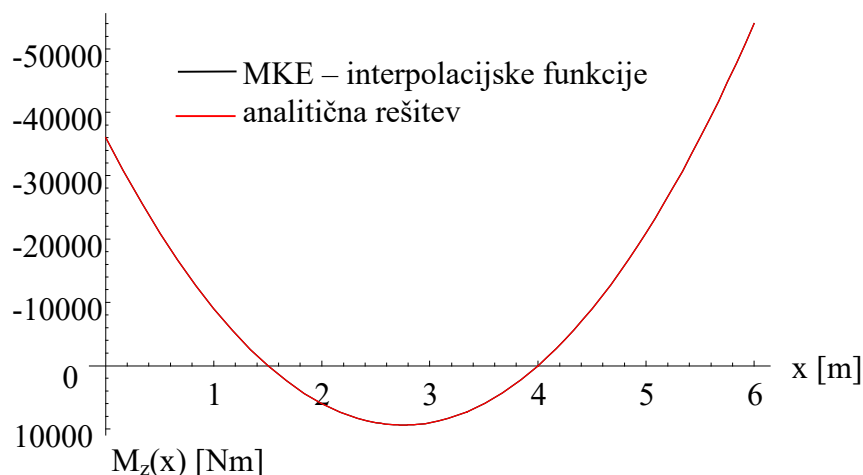
$$\begin{aligned} N_{2,1}(x) &= -27 + 18 \cdot x - \frac{15}{4} \cdot x^2 + \frac{x^3}{4} & 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m} \\ N_{2,2}(x) &= -36 + 21 \cdot x - 4 \cdot x^2 + \frac{x^3}{4} & 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m} \\ N_{2,3}(x) &= 28 - 18 \cdot x + \frac{15}{4} \cdot x^2 - \frac{x^3}{4} & 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m} \\ N_{2,4}(x) &= -24 + 16 \cdot x - \frac{7}{2} \cdot x^2 + \frac{x^3}{4} & 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m} \end{aligned}$$

Za drugi končni element tako velja:

$$\begin{aligned} M_{z2,N}(x) &= M_{z,2\text{desno}} \cdot N_{2,1}(x) + V_{y,2} \cdot N_{2,2}(x) + M_{z,3} \cdot N_{2,3}(x) + V_{y,3} \cdot N_{2,4}(x) \\ &= 0 \cdot N_{2,1}(x) - 15000 \cdot N_{2,2}(x) - 54000 \cdot N_{2,3}(x) - 39000 \cdot N_{2,4}(x) \\ &= -6000 \cdot x^2 + 33000 \cdot x - 36000 \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m} \end{aligned}$$

kar je ne samo točna funkcija upogibnega momenta, temveč je tudi enaka kot funkcija upogibnega momenta za prvi končni element (kar pa, če bi bila funkcija zapisana v lokalnem koordinatnem sistemu, ne bi bilo direktno razvidno).

Enako rešitev dobimo tudi s superpozicijo.



Slika 118: Porazdelitev upogibnega momenta

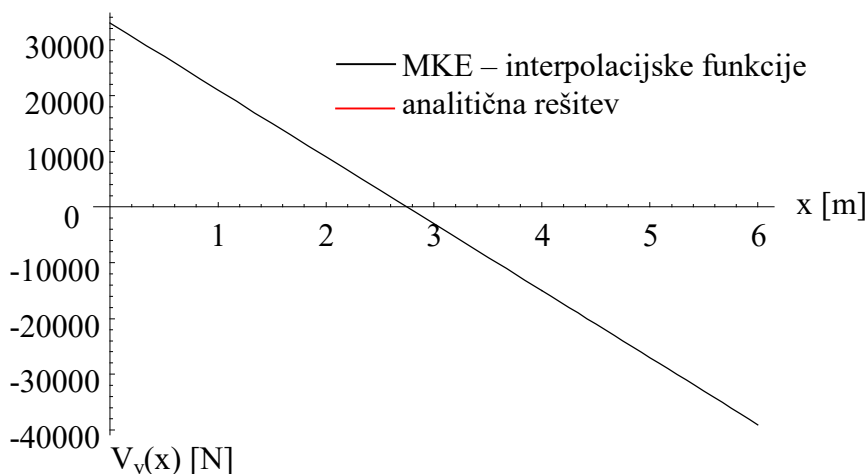
Opomba: če za izračun funkcije upogibnega momenta uporabimo (sicer korektno) diferencialno zvezo:

$$M_{e,z}(x) = EI \cdot \frac{d^2 v_{e,N}(x)}{dx^2}$$

je jasno, da bomo ob uporabi približne rešitve za funkcijo upogibnice  $v_{i,N}(x)$  dobili približno rešitev tudi za funkcijo upogibnega momenta (in iz nje posledično še približno funkcijo prečne sile).

Odvajanje dobljenih funkcij za upogibni moment vodi do funkcij prečne sile, ki sta enaki pravima funkcijama obravnavanega primera (in tudi po elementih medsebojno enaki):

$$V_{y1,N}(x) = V_{y2,N}(x) = \frac{dM_{z1,N}(x)}{dx} = -12000 \cdot x + 33000 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$



Slika 119: Porazdelitev prečne sile

Mesto maksimalnega pozitivnega momenta nastopi pri:

$$0 = -12000 \cdot x + 33000 \rightarrow 12000 \cdot x = 33000 \rightarrow x = \frac{33000}{12000} = 2.75 \text{ m}$$

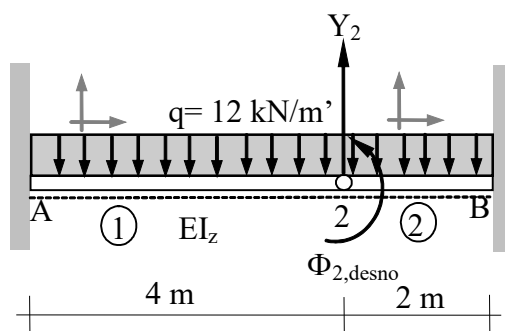
maksimalni pozitivni moment pa znaša:

$$M_{z1,N}(2.75 \text{ m}) = -6000 \cdot 2.75^2 + 33000 \cdot 2.75 - 36000 = 9375 \text{ Nm}$$

Da je vsaj ena izmed funkcij (prečnega pomika ali pa upogibnega momenta) približna, pokaže izračun notranje deformacijske energije  $U$ , saj z uporabo funkcije pomika sledi 24.8 J, alternativni izračun z uporabo funkcije momenta pa 27.4 J, kar je točna vrednost. Celotna potencialna energija, izračunana s funkcijo pomika in njenim drugim odvodom, znaša  $\Pi = -24.8 \text{ J}$ .

## 2. diskretizacija: uporaba končnih elementov tipov VČ in VV

Pri diskretizaciji s končnima elementoma tipov VČ in VV imamo ponovno dve prostostni stopnji, saj sta neznanki vertikalni pomik  $Y_2$  točke nosilca, kjer nastopi členek, ter pripadajoči zasuk  $\Phi_{2,desno}$  na začetku desnega (drugega) končnega elementa.



Slika 120: Druga diskretizacija s končnima elementoma tipov VČ in VV

Togostni matriki elementov za izbrano diskretizacijo sta:

$$[k_1] = \begin{bmatrix} -1.875 & -7.5 & -1.875 & 0 \\ -7.5 & 30 & -7.5 & 0 \\ -1.875 & -7.5 & 1.875 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \quad \text{in} \quad [k_2] = \begin{bmatrix} 60 & 60 & -60 & 60 \\ 60 & 80 & -60 & 0 \\ -60 & -60 & 60 & -60 \\ -60 & 0 & -60 & 80 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

Pripadajoča obtežna vektorja pa sta:

$$\{F_1\} = \begin{Bmatrix} -30000 \\ -24000 \\ -18000 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{F_2\} = \begin{Bmatrix} -12000 \\ -4000 \\ -12000 \\ 4000 \end{Bmatrix}$$

Bistveni enačbi konstrukcije sta:

$$\begin{bmatrix} 61.875 & 60 \\ 60 & 80 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_{2,\text{desno}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -30000 \\ -4000 \end{Bmatrix}$$

ki imata rešitvi:

$$\begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_{2,\text{desno}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.6 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ 11.5 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Če dobljeni vrednosti primerjamo s prešnjima, vidimo, da smo (pričakovano) dobili enako vrednost prečnega pomika, ter (prav tako pričakovano) drugačno vrednost zasuka (zaradi drugačnega modeliranja členka), ki sedaj predstavlja zasuk elementa desno od členka.

Poprocesiranje: iskanje vozliščnih vrednosti notranjih statičnih količin ter reakcij

Vozliščne vrednosti prečne sile in momenta prvega končnega elementa sledijo iz vektorja sekundarnih spremenljivk (vrednost zasuka  $\Phi_{2,levo}$ , ki je zaradi členka različna od vrednosti zasuka  $\Phi_{2,desno}$ , sicer ni znana, vendar to izračuna ne ovira):

$$\{Q_1\} = [K_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\} =$$

$$\begin{bmatrix} 1.875 & 7.5 & -1.875 & 0 \\ 7.5 & 30 & -7.5 & 0 \\ -1.875 & -7.5 & 1.875 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.6 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ \Phi_{2,levo} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -30000 \\ -24000 \\ -18000 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 33000 \\ 36000 \\ 15000 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,1} \\ M_{z,1} \\ V_{y,2} \\ M_{z,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 33000 \text{ N} \\ -36000 \text{ Nm} \\ 15000 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

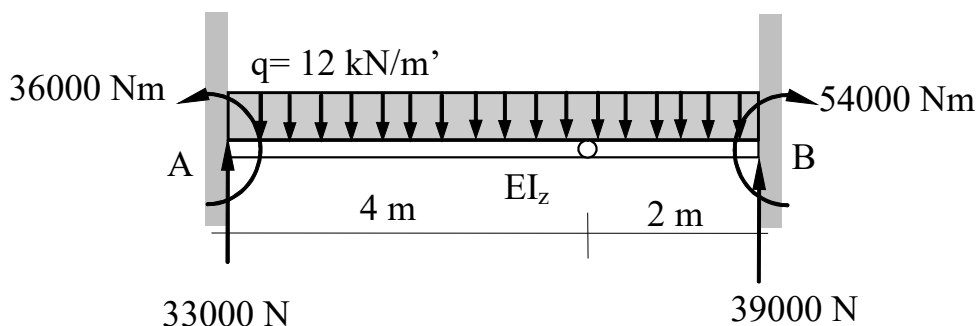
Vozliščne vrednosti prečne sile in momenta drugega končnega elementa sledijo iz vektorja sekundarnih spremenljivk:

$$\{Q_2\} = [K_2] \cdot \{U_2\} - \{F_2\} =$$

$$\begin{bmatrix} 60 & 60 & -60 & 60 \\ 60 & 80 & -60 & 0 \\ -60 & -60 & 60 & -60 \\ 60 & 0 & -60 & 80 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} -1.6 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ 11.5 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -12000 \\ -4000 \\ -12000 \\ 4000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15000 \\ 0 \\ 39000 \\ -54000 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,2} \\ M_{z,2} \\ V_{y,3} \\ M_{z,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15000 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \\ -39000 \text{ N} \\ -54000 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

in so enake kot v prejšnji diskretizaciji.

Tudi reakcije, ki jih odčitamo iz vektorjev sekundarnih spremenljivk, so ponovno:



Slika 121: Velikosti in usmeritve reakcij

Poprocesiranje: iskanje funkcij prečnega pomika s pomočjo H1 interpolacijskih funkcij

Interpolacijske funkcije za prvi končni element so sedaj drugačne kot v prvi diskretizaciji:

$$N_{1,1}(x) = 1 - \frac{3}{32} \cdot x^2 + \frac{x^3}{128} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,2}(x) = x - \frac{3}{8} \cdot x^2 + \frac{x^3}{32} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,3}(x) = \frac{3}{32} \cdot x^2 - \frac{x^3}{128} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,4}(x) = 0 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Približna rešitev za funkcijo prečnega pomika prvega končnega elementa je tako:

$$\begin{aligned} v_{1,N}(x) &= Y_1 \cdot N_{1,1}(x) + \Phi_1 \cdot N_{1,2}(x) + Y_2 \cdot N_{1,3}(x) + \Phi_{2,\text{levo}} \cdot N_{1,4}(x) \\ &= -1.5 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 1.25 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

Tudi interpolacijske funkcije za izračun prečnega pomika za drugi končni element so drugačne kot v prvi diskretizaciji (te funkcije smo v prvi diskretizaciji uporabili za izračun funkcije upogibnega momenta):

$$N_{2,1}(x) = -27 + 18 \cdot x - \frac{15}{4} \cdot x^2 + \frac{x^3}{4} \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$$

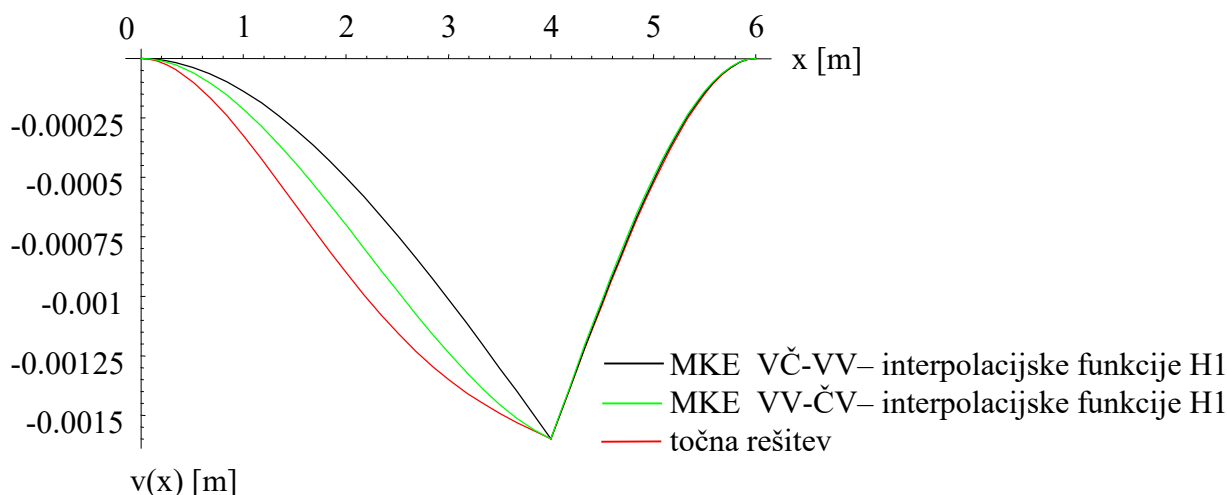
$$N_{2,2}(x) = -36 + 21 \cdot x - 4 \cdot x^2 + \frac{x^3}{4} \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$$

$$N_{2,3}(x) = 28 - 18 \cdot x + \frac{15}{4} \cdot x^2 - \frac{x^3}{4} \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$$

$$N_{2,4}(x) = -24 + 16 \cdot x - \frac{7}{2} \cdot x^2 + \frac{x^3}{4} \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$$

Približna rešitev za funkcijo prečnega pomika drugega končnega elementa (v globalnem koordinatnem sistemu) je tako:

$$\begin{aligned} v_{2,N}(x) &= Y_2 \cdot N_{2,1}(x) + \Phi_{2,\text{desno}} \cdot N_{2,2}(x) + Y_3 \cdot N_{2,3}(x) + \Phi_3 \cdot N_{2,4}(x) \\ &= 1.8 \cdot 10^{-3} - 4.65 \cdot 10^{-3} \cdot x + 1.4 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 - 1.125 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m} \end{aligned}$$



Slika 122: Primerjava upogibnic obeh modelov s točno upogibnico

Graf funkcije pomika pokaže, da je (v primerjavi s prvo diskretizacijo, prikazano z zeleno linijo) sedaj dobljeno (črna linija) opazno slabše ujemanje za levi končni element (kljub temu, da sta obe rešitvi polinoma iste stopnje) ter praktično zanemarljivo boljše ujemanje za desni končni element. Nadomestitev točne informacije o prvem odvodu funkcije pomika (v prejšnji diskretizaciji) s (sicer prav tako točno) informacijo o drugem odvodu funkcije pomika v levem končnem elementu, je torej prineslo poslabšanje rešitve. Vključitev (točne) informacije o prvem odvodu iskane funkcije v približno rešitev za drugi končni element pa vodi do nekoliko boljšega približka kot vključitev (točne) informacije o drugem odvodu iskane funkcije, pa čeprav so v obeh primerih uporabljene (drugačne) interpolacijske funkcije v obliki polinoma 3. stopnje.

Da je sedaj dobljena funkcija prečnega pomika v splošnem slabša kot v prejšnji diskretizaciji, numerično pokaže tudi izračun celotne potencialne energije. Notranja deformacijske energija  $U$ , izračunana z uporabo funkcije pomika, je namreč 21.7 J, celotna potencialna energija, izračunana s funkcijo pomika in njenim drugim odvodom, pa sedaj znaša zgolj  $\Pi = -21.7$  J, kar je evidentno slabša vrednost od prej dobljene.

Tako kot v prvi diskretizaciji pa lahko tudi sedaj v analizo vključimo informacije o diskretnih vrednostih upogibnega momenta in tako z dodatno analizo ponovno dobimo točni funkciji prečnega pomika.

Poprocesiranje: iskanje funkcij upogibnega momenta in prečne sile

Interpolacijske funkcije za prvi končni element so sedaj (in so že znane iz prve diskretizacije)

$$N_{1,1}(x) = 1 - \frac{3}{16} \cdot x^2 + \frac{x^3}{32} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,2}(x) = x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{x^3}{16} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,3}(x) = \frac{3}{16} \cdot x^2 - \frac{x^3}{32} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,4}(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{x^3}{16} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

in tako sledi:

$$\begin{aligned} M_{z1,N}(x) &= M_{z,1} \cdot N_{1,1}(x) + V_{y,1} \cdot N_{1,2}(x) + M_{z,2} \cdot N_{1,3}(x) + V_{y,2} \cdot N_{1,4}(x) \\ &= -36000 \cdot N_{1,1}(x) + 33000 \cdot N_{1,2}(x) + 0 \cdot N_{1,3}(x) + 15000 \cdot N_{1,4}(x) \\ &= -6000 \cdot x^2 + 33000 \cdot x - 36000 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

ki je enaka točni funkciji upogibnega momenta.

Interpolacijske funkcije za drugi končni element pa so enake kot pri izračunu funkcije prečnega pomika pri tej diskretizaciji in tako velja:

$$\begin{aligned} M_{z2,N}(x) &= M_{z,2\text{desno}} \cdot N_{2,1}(x) + V_{y,2} \cdot N_{2,2}(x) + M_{z,3} \cdot N_{2,3}(x) + V_{y,3} \cdot N_{2,4}(x) \\ &= 0 \cdot N_{2,1}(x) - 15000 \cdot N_{2,2}(x) - 54000 \cdot N_{2,3}(x) - 39000 \cdot N_{2,4}(x) \\ &= -6000 \cdot x^2 + 33000 \cdot x - 36000 \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m} \end{aligned}$$

ki je enaka točni porazdelitvi momenta (kot tudi funkciji upogibnega momenta za prvi končni element).

Odvajanje dobljenih funkcij za upogibni moment vodi do funkcij za prečno silo:

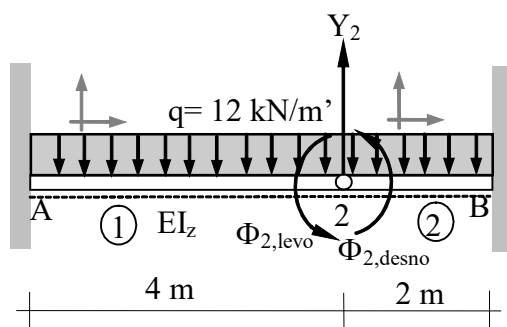
$$V_{y1,N}(x) = -12000 \cdot x + 33000 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$V_{y2,N}(x) = -12000 \cdot x + 33000 \quad 3 \text{ m} \leq x \leq 7 \text{ m}$$

ki sta enaki pravima rešitvama obravnavanega primera.

### 3. diskretizacija: uporaba končnih elementov tipov VV in VV

Pri diskretizaciji s končnima elementoma standardnega tipa VV imamo tri prostostne stopnje, saj so neznanke vertikalni pomik  $Y_2$  točke nosilca, kjer nastopi členek, ter pripadajoča zasuka  $\Phi_{2,levo}$  desnega konca levega (prvega) končnega elementa ter  $\Phi_{2,desno}$  levega konca desnega (drugega) končnega elementa.



Slika 123: Tretja diskretizacija s končnima elementoma tipov VV in VV

Togostni matriki elementov za izbrano diskretizacijo sta:

$$[k_1] = \begin{bmatrix} 7.5 & 15 & 7.5 & 15 \\ 15 & 40 & 15 & 20 \\ 7.5 & 15 & 7.5 & 15 \\ 15 & 20 & 15 & 40 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \quad \text{in} \quad [k_2] = \begin{bmatrix} 60 & 60 & -60 & 60 \\ 60 & 80 & -60 & 0 \\ -60 & -60 & 60 & 60 \\ -60 & 0 & -60 & 80 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

Pripadajoča obtežna vektorja pa sta:

$$\{F_1\} = \begin{Bmatrix} -24000 \\ -16000 \\ -24000 \\ 16000 \end{Bmatrix} \quad \{F_2\} = \begin{Bmatrix} -12000 \\ -4000 \\ -12000 \\ -4000 \end{Bmatrix}$$

Bistvene enačbe konstrukcije so:

$$\begin{bmatrix} 67.5 & -15 & 60 \\ -15 & 40 & 0 \\ 60 & 0 & 80 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_{2,levo} \\ \Phi_{2,desno} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -36000 \\ 16000 \\ -4000 \end{Bmatrix}$$

ki imajo rešitve:

$$\begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_{2,\text{levo}} \\ \Phi_{2,\text{desno}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.6 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -2.0 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ 11.5 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Prepričamo se lahko, da sta dobljeni vrednosti zasukov enaki vrednostima, ki sta bili prej pridobljeni v ločenih analizah in z manjšima računskima modeloma.

*Poprocesiranje: iskanje vozliščnih vrednosti notranjih statičnih količin ter reakcij*

Vozliščne vrednosti prečne sile in momenta prvega končnega elementa sledijo iz vektorja sekundarnih spremenljivk:

$$\{Q_1\} = [K_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\} =$$

$$\begin{bmatrix} 7.5 & 15 & -7.5 & 15 \\ 15 & 40 & -15 & 20 \\ -7.5 & -15 & 7.5 & -15 \\ 15 & 20 & -15 & 40 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.6 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -2.0 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -24000 \\ -16000 \\ -24000 \\ 16000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 33000 \\ 36000 \\ 15000 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,1} \\ M_{z,1} \\ V_{y,2} \\ M_{z,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 33000 \text{ N} \\ -36000 \text{ Nm} \\ 15000 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

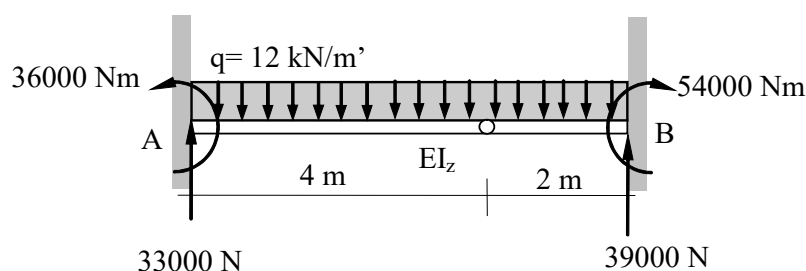
Vozliščne vrednosti prečne sile in momenta drugega končnega elementa sledijo iz vektorja sekundarnih spremenljivk:

$$\{Q_2\} = [K_2] \cdot \{U_2\} - \{F_2\} =$$

$$\begin{bmatrix} 60 & 60 & -60 & 60 \\ 60 & 80 & -60 & 0 \\ -60 & -60 & 60 & -60 \\ 60 & 0 & -60 & 80 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} -1.6 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ 11.5 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -12000 \\ -4000 \\ -12000 \\ 4000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15000 \\ 0 \\ 39000 \\ -54000 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,2} \\ M_{z,2} \\ V_{y,3} \\ M_{z,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15000 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \\ -39000 \text{ N} \\ -54000 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

in so ponovno enake kot v prejšnjih diskretizacijah.

Tudi reakcije so tako:



Slika 124: Reakcije

*Poprocesiranje: iskanje funkcij prečnega pomika s H1 interpolacijskimi funkcijami*

Interpolacijske funkcije za prvi končni element so sedaj:

$$N_{1,1}(x) = 1 - \frac{3}{16} \cdot x^2 + \frac{x^3}{32} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,2}(x) = x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{x^3}{16} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,3}(x) = \frac{3}{16} \cdot x^2 - \frac{x^3}{32} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,4}(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{x^3}{16} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Približna rešitev za prečni pomik prvega končnega elementa je tako:

$$\begin{aligned} v_{1,N}(x) &= Y_1 \cdot N_{1,1}(x) + \Phi_1 \cdot N_{1,2}(x) + Y_2 \cdot N_{1,3}(x) + \Phi_{2,\text{levo}} \cdot N_{1,4}(x) \\ &= -2.5 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 3.75 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

Interpolacijske funkcije za drugi končni element (v globalnem koordinatnem sistemu) so:

$$N_{2,1}(x) = -27 + 18 \cdot x - \frac{15}{4} \cdot x^2 + \frac{x^3}{4} \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$$

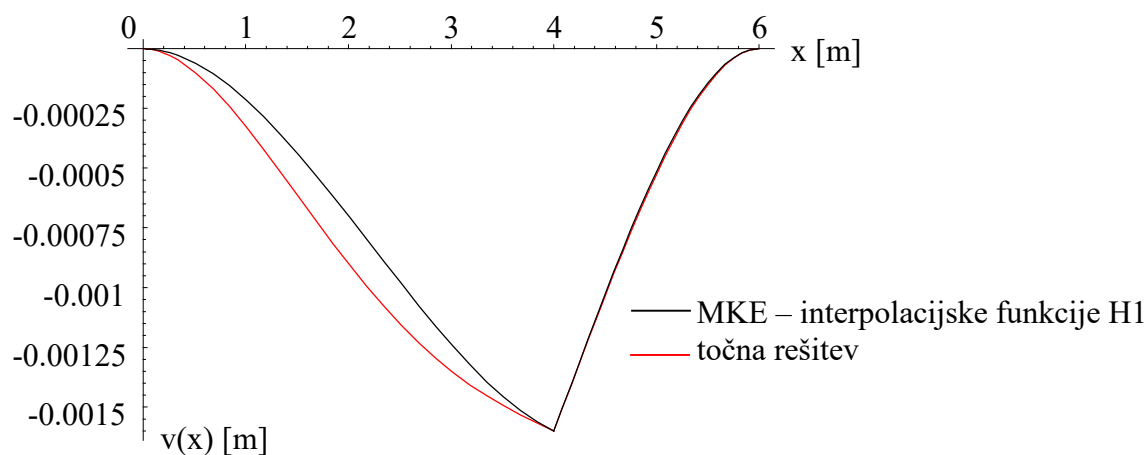
$$N_{2,2}(x) = -36 + 21 \cdot x - 4 \cdot x^2 + \frac{x^3}{4} \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$$

$$N_{2,3}(x) = 28 - 18 \cdot x + \frac{15}{4} \cdot x^2 - \frac{x^3}{4} \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$$

$$N_{2,4}(x) = -24 + 16 \cdot x - \frac{7}{2} \cdot x^2 + \frac{x^3}{4} \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$$

Približna rešitev za drugi končni element je tako:

$$\begin{aligned} v_{2,N}(x) &= Y_2 \cdot N_{2,1}(x) + \Phi_{2,\text{desno}} \cdot N_{2,2}(x) + Y_3 \cdot N_{2,3}(x) + \Phi_3 \cdot N_{2,4}(x) \\ &= 1.8 \cdot 10^{-3} - 4.65 \cdot 10^{-3} \cdot x + 1.4 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 - 1.125 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m} \end{aligned}$$



Slika 125: Primerjava upogibnic

Graf funkcije prečnega pomika pokaže, da je (v primerjavi s prejšnjima diskretizacijama) sedaj dobljeno najboljše hkratno ujemanje za oba končna elementa.

Da je sedaj dobljena funkcija prečnega pomika najboljša do sedaj, numerično pokaže tudi izračun celotne potencialne energije  $\Pi$ . Notranja deformacijske energija  $U$ , izračunana z uporabo funkcije pomika je namreč 24.9 J, celotna potencialna energija, izračunana s funkcijo pomika in njenim drugim odvodom, pa sedaj znaša zgolj  $\Pi = -24.9$  J, kar je sicer nekoliko boljša vrednost, kot je bila dobljena s prvo diskretizacijo, a s samo dvema prostostnima stopnjama.

Tako kot v prvi diskretizaciji, lahko tudi sedaj v analizo vključimo informacije o diskretnih vrednostih upogibnega momenta in tako z dodatno analizo ponovno dobimo točni funkciji prečnega pomika z uporabo H2 interpolacijskih funkcij.

*Poprocesiranje: iskanje funkcij upogibnega momenta in prečne sile*

Interpolacijske funkcije za prvi končni element so enake, kot so bile uporabljene pri izračunu funkcije prečnega pomika in tako sledi:

$$\begin{aligned} M_{z1,N}(x) &= M_{z,1} \cdot N_{1,1}(x) + V_{y,1} \cdot N_{1,2}(x) + M_{z,2} \cdot N_{1,3}(x) + V_{y,2} \cdot N_{1,4}(x) \\ &= -36000 \cdot N_{1,1}(x) + 33000 \cdot N_{1,2}(x) + 0 \cdot N_{1,3}(x) + 15000 \cdot N_{1,4}(x) \\ &= -6000 \cdot x^2 + 33000 \cdot x - 36000 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

ki je enaka točni porazdelitvi momenta.

Tudi za drugi končni element so interpolacijske funkcije enake, kot pri izračunu funkcije prečnega pomika in tako velja (v globalnem koordinatnem sistemu):

$$\begin{aligned} M_{z2,N}(x) &= M_{z,2\text{desno}} \cdot N_{2,1}(x) + V_{y,2} \cdot N_{2,2}(x) + M_{z,3} \cdot N_{2,3}(x) + V_{y,3} \cdot N_{2,4}(x) \\ &= 0 \cdot N_{2,1}(x) - 15000 \cdot N_{2,2}(x) - 54000 \cdot N_{2,3}(x) - 39000 \cdot N_{2,4}(x) \\ &= -6000 \cdot x^2 + 33000 \cdot x - 36000 \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m} \end{aligned}$$

ki je enaka točni funkciji upogibnega momenta (kot tudi razporeditvi upogibnega momenta za prvi končni element).

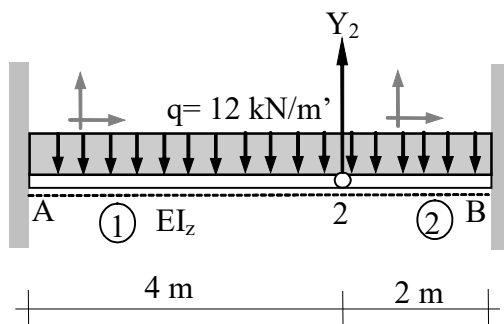
Odvajanje dobljenih funkcij za upogibni moment vodi do funkcij prečne sile:

$$\begin{aligned} V_{y1,N}(x) &= -12000 \cdot x + 33000 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m} \\ V_{y2,N}(x) &= -12000 \cdot x + 33000 \quad 3 \text{ m} \leq x \leq 7 \text{ m} \end{aligned}$$

ki sta ponovno enaki točnima rešitvama obravnavanega primera.

#### 4. diskretizacija: uporaba končnih elementov VČ in ČV

Pri diskretizaciji s končnima elementoma VČ in ČV je edina prostostna stopnja in s tem neznanka zgolj vertikalni pomik  $Y_2$  točke nosilca, kjer nastopi členek.



Slika 126: Četrta diskretizacija s končnima elementoma tipov VČ in ČV

Togostni matriki elementov za izbrano diskretizacijo sta:

$$[k_1] = \begin{bmatrix} -1.875 & -7.5 & -1.875 & 0 \\ -7.5 & 30 & -7.5 & 0 \\ -1.875 & -7.5 & 1.875 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \quad \text{in} \quad [k_2] = \begin{bmatrix} 15 & 0 & -15 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -15 & 0 & 15 & -30 \\ -30 & 0 & -30 & 60 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

Pripadajoča obtežna vektorja pa sta:

$$\{F_1\} = \begin{Bmatrix} -30000 \\ -24000 \\ -18000 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{F_2\} = \begin{Bmatrix} -9000 \\ 0 \\ -15000 \\ -6000 \end{Bmatrix}$$

Bistvena enačba konstrukcija je (zapis v matrični obliki je zgolj formalen):

$$[16.875] \cdot 10^6 \cdot \{Y_2\} = \{-27000\}$$

ki ima rešitev:

$$\{Y_2\} = \{-1.6 \cdot 10^{-3} \text{ m}\}$$

*Poprocesiranje: iskanje vozliščnih vrednosti notranjih statičnih količin ter reakcij*

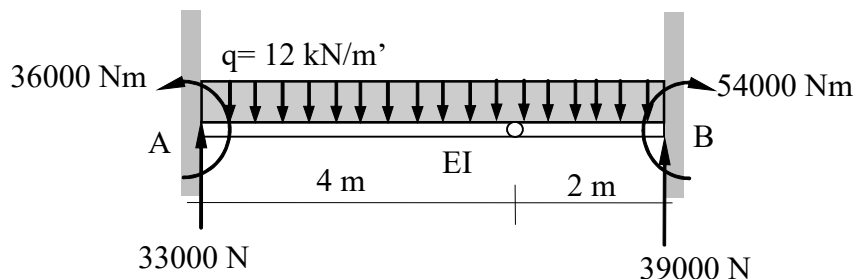
Vozliščne vrednosti prečne sile in momenta prvega končnega elementa sledijo iz vektorja sekundarnih spremenljivk:

$$\{Q_1\} = [K_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\} = \begin{bmatrix} 1.875 & 7.5 & -1.875 & 0 \\ 7.5 & 30 & -7.5 & 0 \\ -1.875 & -7.5 & 1.875 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.6 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ \Phi_{2,\text{levo}} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -30000 \\ -24000 \\ -18000 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 33000 \\ 36000 \\ 15000 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,1} \\ M_{z,1} \\ V_{y,2} \\ M_{z,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 33000 \text{ N} \\ -36000 \text{ Nm} \\ 15000 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Vozliščne vrednosti prečne sile in momenta drugega končnega elementa sledijo iz vektorja sekundarnih spremenljivk:

$$\{Q_2\} = [K_2] \cdot \{U_2\} - \{F_2\} = \begin{bmatrix} 15 & 0 & -15 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -15 & 0 & 15 & -30 \\ 30 & 0 & -30 & 60 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} -1.6 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ \Phi_{2,\text{desno}} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -9000 \\ 0 \\ -15000 \\ 6000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15000 \\ 0 \\ 39000 \\ -54000 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,2} \\ M_{z,2} \\ V_{y,3} \\ M_{z,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15000 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \\ -39000 \text{ N} \\ -54000 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Reakcije so tako:



Slika 127: Reakcije

*Poprocesiranje: iskanje funkcije prečnega pomika s H1 interpolacijskimi funkcijami*

Interpolacijske funkcije za prvi končni element so sedaj (vrednost zasuka  $\Phi_{2,\text{levo}}$  sicer ni znana, vendar to izračuna ne ovira):

$$N_{1,1}(x) = 1 - \frac{3}{32} \cdot x^2 + \frac{x^3}{128} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,2}(x) = x - \frac{3}{8} \cdot x^2 + \frac{x^3}{32} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,3}(x) = \frac{3}{32} \cdot x^2 - \frac{x^3}{128} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,4}(x) = 0 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Približna rešitev za funkcijo prečnega pomika prvega končnega elementa je tako:

$$\begin{aligned} v_{1,N}(x) &= Y_1 \cdot N_{1,1}(x) + \Phi_1 \cdot N_{1,2}(x) + Y_2 \cdot N_{1,3}(x) + \Phi_{2,\text{levo}} \cdot N_{1,4}(x) \\ &= -1.5 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 1.25 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

Interpolacijske funkcije za drugi končni element pa so (v globalnem koordinatnem sistemu):

$$N_{2,1}(x) = \frac{9}{4} \cdot x - \frac{3}{4} \cdot x^2 + \frac{x^3}{16} \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$$

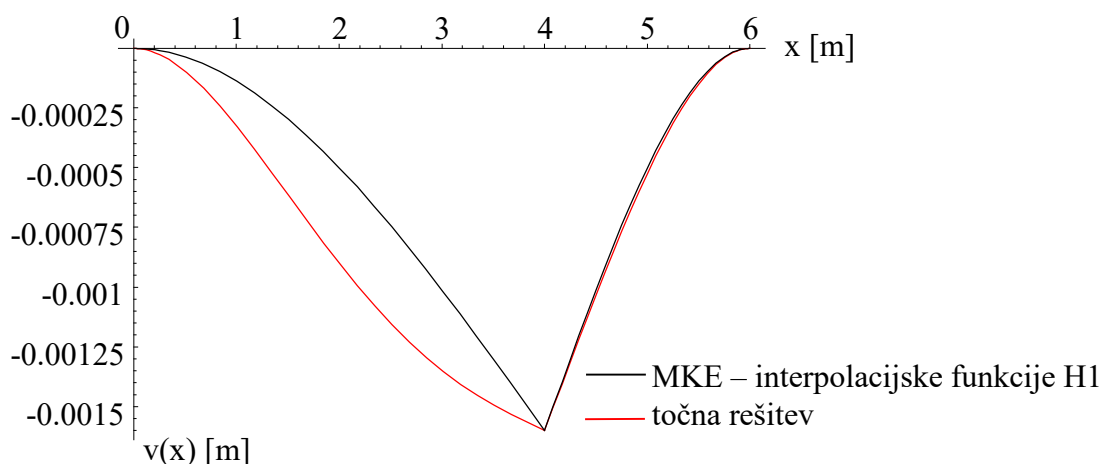
$$N_{2,2}(x) = 0 \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$$

$$N_{2,3}(x) = 1 - \frac{9}{4} \cdot x + \frac{3}{4} \cdot x^2 - \frac{x^3}{16} \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$$

$$N_{2,4}(x) = -6 + \frac{11}{2} \cdot x - \frac{3}{2} \cdot x^2 + \frac{x^3}{8} \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$$

Približna rešitev za funkcijo prečnega pomika drugega končnega elementa je tako (vrednost zasuka  $\Phi_{2,\text{desno}}$  sicer ni znana, vendar to izračuna ne ovira):

$$v_{2,N}(x) = Y_2 \cdot N_{2,1}(x) + \Phi_{2,\text{desno}} \cdot N_{2,2}(x) + Y_3 \cdot N_{2,3}(x) + \Phi_3 \cdot N_{2,4}(x) \\ = -3.6 \cdot 10^{-3} \cdot x + 1.2 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 - 1 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$$



Slika 128: Primerjava upogibnic

Graf funkcije pomika pokaže, da je (v primerjavi s predhodnimi diskretizacijami) sedaj dobljeno najslabše hkratno ujemanje za oba končna elementa.

Da je sedaj dobljena funkcija prečnega pomika najslabša do sedaj, numerično pokaže tudi izračun celotne potencialne energije. Notranja deformacijske energija  $U$ , izračunana z uporabo funkcije pomika, je namreč 21.6 J, celotna potencialna energija, izračunana s funkcijo pomika in njenim drugim odvodom, pa sedaj znaša zgolj  $\Pi = -21.6$  J, kar pa je zgolj nekoliko slabši rezultat, kot je bila vrednost energije, dobljene v drugi diskretizaciji (kjer pa je bila uporabljena ena prostostna stopnja več, kar je zahtevalo več računskega napora).

Tako kot v prvi diskretizaciji, lahko tudi sedaj v analizo vključimo informacije o diskretnih vrednostih upogibnega momenta in tako z dodatno analizo ponovno dobimo točni funkciji prečnega pomika z uporabo H2 interpolacijskih funkcij.

*Poprocesiranje: iskanje funkcij upogibnega momenta in prečne sile*

Interpolacijske funkcije za prvi končni element so sedaj:

$$N_{1,1}(x) = 1 - \frac{3}{16} \cdot x^2 + \frac{x^3}{32} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,2}(x) = x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{x^3}{16} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,3}(x) = \frac{3}{16} \cdot x^2 - \frac{x^3}{32} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

$$N_{1,4}(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{x^3}{16} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

in tako sledi:

$$\begin{aligned} M_{z1,N}(x) &= M_{z,1} \cdot N_{1,1}(x) + V_{y,1} \cdot N_{1,2}(x) + M_{z,2} \cdot N_{1,3}(x) + V_{y,2} \cdot N_{1,4}(x) \\ &= -36000 \cdot N_{1,1}(x) + 33000 \cdot N_{1,2}(x) + 0 \cdot N_{1,3}(x) + 15000 \cdot N_{1,4}(x) \\ &= -6000 \cdot x^2 + 33000 \cdot x - 36000 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

ki je enaka točni porazdelitvi momenta.

Interpolacijske funkcije za drugi končni element pa so (zapisane v globalnem koordinatnem sistemu):

$$N_{2,1}(x) = -27 + 18 \cdot x - \frac{15}{4} \cdot x^2 + \frac{x^3}{4} \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$$

$$N_{2,2}(x) = -36 + 21 \cdot x - 4 \cdot x^2 + \frac{x^3}{4} \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$$

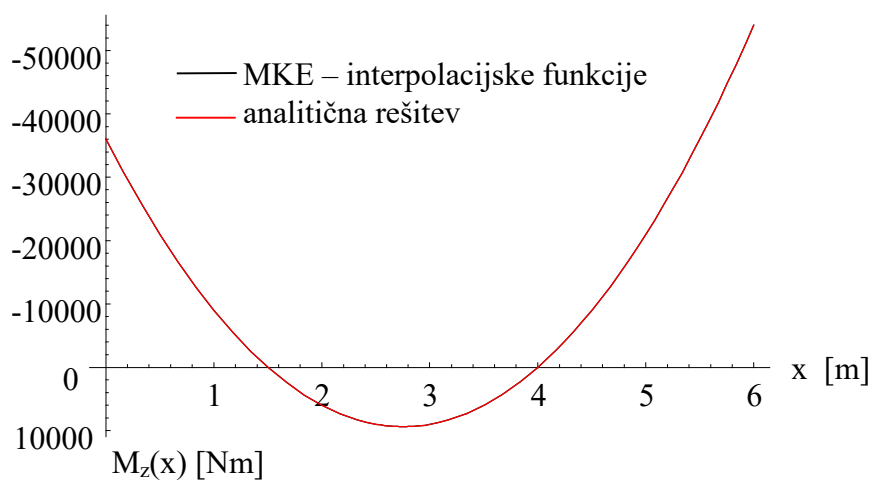
$$N_{2,3}(x) = 28 - 18 \cdot x + \frac{15}{4} \cdot x^2 - \frac{x^3}{4} \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$$

$$N_{2,4}(x) = -24 + 16 \cdot x - \frac{7}{2} \cdot x^2 + \frac{x^3}{4} \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$$

Za drugi končni element tako velja:

$$\begin{aligned} M_{z2,N}(x) &= M_{z,2,desno} \cdot N_{2,1}(x) + V_{y,2} \cdot N_{2,2}(x) + M_{z,3} \cdot N_{2,3}(x) + V_{y,3} \cdot N_{2,4}(x) \\ &= 0 \cdot N_{2,1}(x) - 15000 \cdot N_{2,2}(x) - 54000 \cdot N_{2,3}(x) - 39000 \cdot N_{2,4}(x) \\ &= -6000 \cdot x^2 + 33000 \cdot x - 36000 \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m} \end{aligned}$$

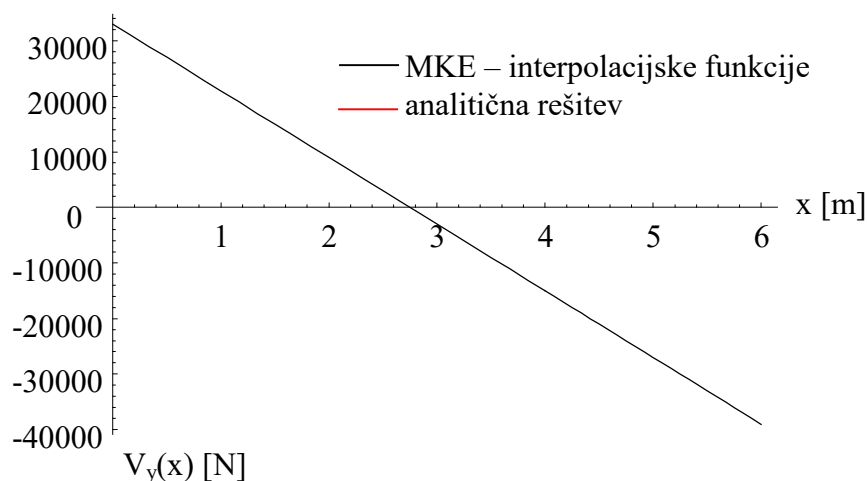
ki je enaka točni porazdelitvi momenta (kot tudi razporeditvi upogibnega momenta za prvi končni element).



Slika 129: Razporeditev upogibnega momenta

Odvajanje dobljenih izrazov za upogibne momente vodi do izrazov za prečne sile, ki sta enaka pravima rešitvama obravnavanega primera:

$$V_{y1,N}(x) = V_{y2,N}(x) = -12000 \cdot x + 33000 \quad 0 \leq x \leq 7 \text{ m}$$



Slika 130: Razporeditev prečne sile

Mesto maksimalnega pozitivnega momenta nastopi pri:

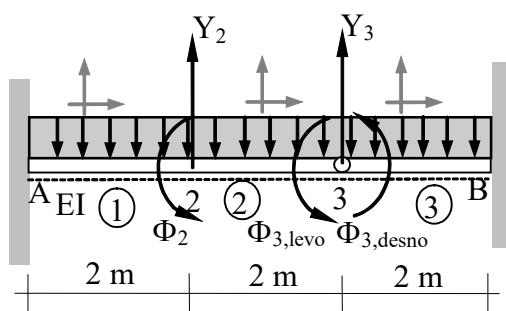
$$0 = -12000 \cdot x + 33000 \rightarrow 12000 \cdot x = 33000 \rightarrow x = \frac{33000}{12000} = 2.75 \text{ m}$$

maksimalni pozitivni moment pa znaša:

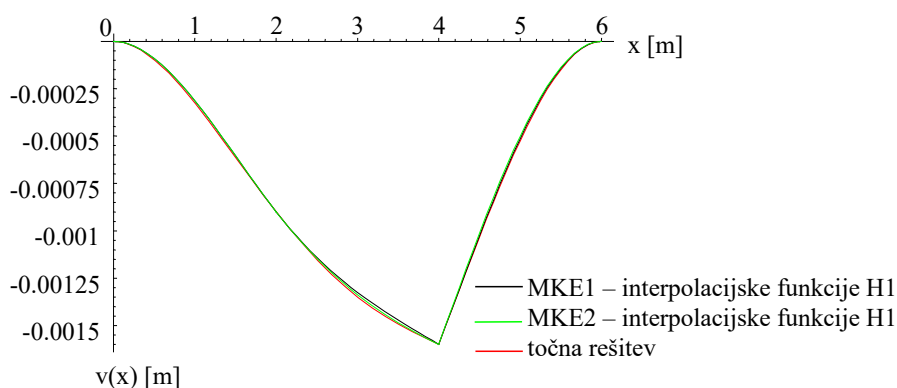
$$M_{z1,N}(2.75 \text{ m}) = -6000 \cdot 2.75^2 + 33000 \cdot 2.75 - 36000 = 9375 \text{ Nm}$$

### 5. diskretizacija: uporaba treh končnih elementov (diskusija)

Pri diskretizaciji s tremi končnimi elementi lahko izbiramo med modeli s tremi, štirimi in petimi prostostnimi stopnjami (pri čemer je z dvema končnima elementoma smiselno modelirati daljši del, torej del nosilca levo od členka). Na osnovi predhodnih analiziranih diskretizacij pa lahko sklepamo, da lahko najboljše rešitve za funkcijo prečnega pomika ob uporabi H1 interpolacijskih funkcij pričakujemo pri diskretizaciji s 5 prostostnimi stopnjami (dvema pomikoma in tremi zasuki). Prav tako pa je jasno, da dodatne prostostne stopnje ne bodo vplivale na kvaliteto funkcij upogibnega momenta in prečne sile.



Slika 131: Potencialne prostostne stopnje



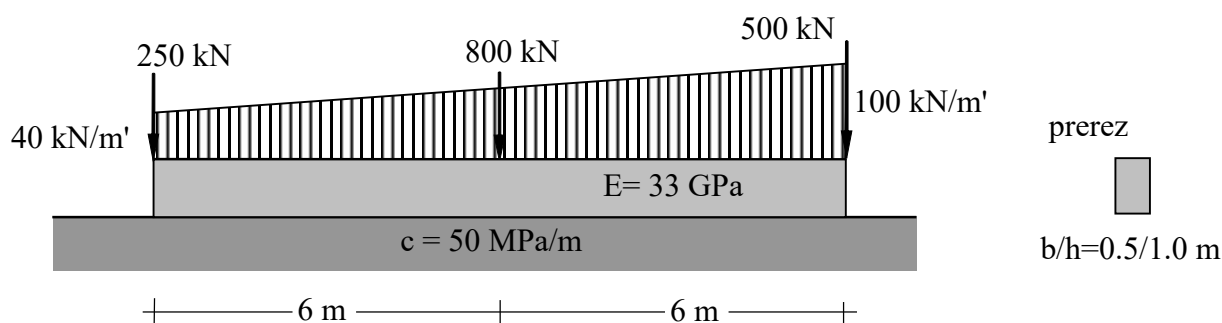
Slika 132: Primerjava upogibnic

Na sliki 132 so prikazani grafi točne rešitve (rdeča linija), ter dveh diskretizacij s 4 prostostnimi stopnjami, pri čemer črna linija predstavlja rešitev modela, kjer je bil členek modeliran na desnem koncu drugega elementa, zelena linija pa rešitev modela, kjer je bil členek modeliran na levem koncu tretjega elementa.

Iz primerjave grafov funkcij pomika je razvidno, da je uporaba dveh končnih elementov za del nosilca levo od členka opazno izboljšala ujemanje funkcije prečnega pomika s točno funkcijo. To posredno potrди tudi celotna potencialna energija, ki sedaj za oba modela znaša  $\Pi = -27.2$  J, ki je najmanjša do sedaj, kar pomeni najkvalitetnejšo, ne pa tudi točno funkcijo pomika (prava vrednost celotne potencialne energija namreč znaša  $-27.54$  J).

### Primer 9.a – Temeljni nosilec na Winklerjevi elastični podlagi

Za dani temeljni nosilec iz betona C30/37 (modul elastičnosti znaša  $E = 33$  GPa) na Winklerjevi zemljini oz. elastični podlagi (modul reakcije tal znaša  $c = 50$  MPa/m) določi funkcije pomika ter notranjih statičnih količin vzdolž konstrukcije.



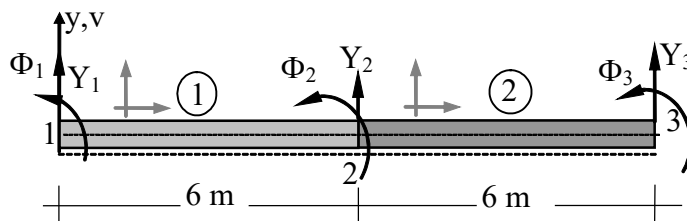
Slika 133: Nosilec na elastični podlagi

### Rešitev

Čeprav moramo za določitev prečnega pomika vsake poljubne točke obravnavanega nosilca reševati enako diferencialno enačbo, ima ta diferencialna enačba zaradi koncentrirane sile na sredini dve odsekovno različni rešitvi. Najmanjše smiselno korektno število končnih elementov za diskretizacijo je zato dva (čeprav je ob uporabi ustreznega obtežnega vektorja mogoče uporabiti tudi manj natančen in manj korekten računski model z enim končnim elementom, kjer dve različni funkciji prečnega pomika nadomestimo z enovito funkcijo).

#### 1. model - diskretizacija z dvema končnima elementoma enakih dolžin

Uporabimo dva končna elementa enakih dolžin, kar je najbolj očitna osnovna izbira.



Slika 134: Izbrana diskretizacija

Togostni matriki končnih elementov, ki sta sestavljeni iz togostne matrike nosilca

$$[k_n] = \begin{bmatrix} 0.763888888888889 & 2.291666666666665 & -0.763888888888889 & 2.291666666666665 \\ 2.291666666666665 & 9.166666666666666 & -2.291666666666665 & 4.583333333333333 \\ -0.763888888888889 & -2.291666666666665 & 0.763888888888889 & -2.291666666666665 \\ 2.291666666666665 & 4.583333333333333 & -2.291666666666665 & 9.166666666666666 \end{bmatrix} \cdot 10^8$$

in togostne matrike Winklerjeve zemljine:

$$[k_{z,w}] = \begin{bmatrix} 0.5571428571428572 & 0.4714285714285714 & 0.19285714285714284 & -0.278571428571429 \\ 0.4714285714285714 & 0.5142857142857143 & 0.2785714285714286 & -0.385714285714286 \\ 0.19285714285714284 & 0.2785714285714286 & 0.5571428571428572 & -0.471428571428571 \\ -0.278571428571429 & -0.385714285714286 & -0.471428571428571 & 0.5142857142857143 \end{bmatrix} \cdot 10^8$$

sta medsebojno enaki in imata obliko:

$$[k_1] = [k_2] = [k_n] + [k_{z,w}] = \begin{bmatrix} 1.3210317460317462 & 2.763095238095238 & -0.57103174603175 & 2.01309523809524 \\ 2.763095238095238 & 9.68095238095238 & -2.0130952380952 & 4.197619047619047 \\ -0.57103174603175 & -2.0130952380952 & 1.321031746031746 & -2.7630952380952 \\ 2.01309523809524 & 4.197619047619047 & -2.7630952380952 & 9.68095238095238 \end{bmatrix} \cdot 10^8$$

Zaradi trapezne zvezne obtežbe moramo člene obtežnega vektorja  $\{F_e\}$  izračunati posebej, pri čemer mora linearna funkcija spreminjanja zvezne obtežbe (izhodišče koordinate  $x$  je v levem koncu oz. začetnem vozlišču nosilca) zadoščati pogojema:

$$q(0) = -40000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad \text{in} \quad q(12) = -100000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

kar vodi do funkcije:

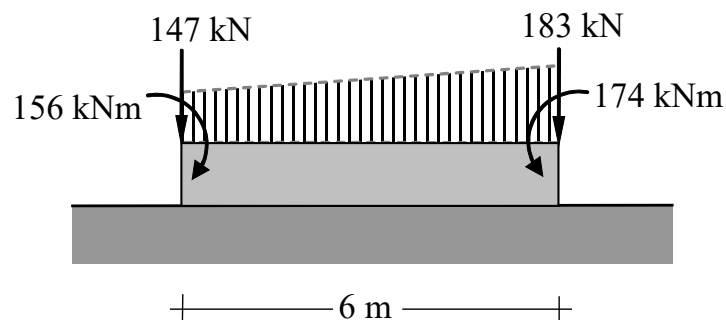
$$q(x) = -40000 - 5000 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 12 \text{ m}$$

Intepolacijske funkcije (polinomi H1) za prvi končni element so ( $x_A = 0$  in  $L_e = 6$  m):

$$\{N_1(x)\} = \begin{Bmatrix} \frac{x^3}{108} - \frac{x^2}{12} + 1 \\ \frac{x^3}{36} - \frac{x^2}{3} + x \\ -\frac{x^3}{108} + \frac{x^2}{12} \\ \frac{x^3}{36} - \frac{x^2}{6} \end{Bmatrix} \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m}$$

Tako izračunamo člene obtežnega vektorja kot:

$$\begin{aligned} \{F_1\} &= \int_{x=0 \text{ m}}^{6 \text{ m}} q(x) \cdot \{N_1(x)\} \cdot dx = \int_{x=0 \text{ m}}^{6 \text{ m}} (-40000 - 5000 \cdot x) \cdot \begin{Bmatrix} \frac{x^3}{108} - \frac{x^2}{12} + 1 \\ \frac{x^3}{36} - \frac{x^2}{3} + x \\ -\frac{x^3}{108} + \frac{x^2}{12} \\ \frac{x^3}{36} - \frac{x^2}{6} \end{Bmatrix} \cdot dx \\ &= \int_{x=0 \text{ m}}^{6 \text{ m}} \begin{Bmatrix} -40000 - 5000 \cdot x + \frac{10000}{3} \cdot x^2 + \frac{1250}{27} \cdot x^3 - \frac{1250}{27} \cdot x^4 \\ -40000 \cdot x + \frac{25000}{3} \cdot x^2 + \frac{5000}{9} \cdot x^3 - \frac{1250}{9} \cdot x^4 \\ -\frac{10000}{3} \cdot x^2 - \frac{1250}{27} \cdot x^3 + \frac{1250}{27} \cdot x^4 \\ \frac{20000}{3} \cdot x - \frac{2500}{9} \cdot x^3 - \frac{1250}{9} \cdot x \end{Bmatrix} \cdot dx = \begin{Bmatrix} -147000 \\ -156000 \\ -183000 \\ 174000 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$



Slika 135: Vozliščni nadomestki trapezne zvezne obtežbe prvega končnega elementa

Neobvezni kontrolni izračun (vsota vertikalnih nadomestnih vozliščnih sil mora biti enaka rezultanti zvezne obtežbe, ki jo najlažje izračunamo s pomočjo povprečne vrednosti):

$$147000 \text{ N} + 183000 \text{ N} = \frac{40000 \frac{\text{N}}{\text{m}} + 70000 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{2} \cdot 6 \text{ m}$$

$$330000 \text{ N} = 330000 \text{ N} \quad \checkmark \text{ pogoj je izpolnjen.}$$

Namesto analitičnega integriranja v metodi končnih elementov pogosto uporabljamo numerično integriranje. Ena najenostavnejših integracijskih metod je Simpsonova formula, kjer v izračunu uporabimo ustrezno utežene vrednosti integranda na krajiščih in sredini intervala.

Tako sledijo vrednosti integrandov:

$$i_1 = q(0) \cdot \{N_1(0)\} = -40000 \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -40000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$i_2 = q(3) \cdot \{N_1(3)\} = -55000 \cdot \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0.75 \\ 0.5 \\ -0.75 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -27500 \\ -41250 \\ -27500 \\ 41250 \end{Bmatrix}$$

$$i_3 = q(6) \cdot \{N_1(6)\} = -70000 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -70000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Z numeričnim integriranjem izračunani obtežni vektor prvega končnega elementa je tako:

$$\{F_1\} \cong \frac{i_1 + 4 \cdot i_2 + i_3}{6} \cdot L_1 = \begin{Bmatrix} -150000 \\ -165000 \\ -180000 \\ 165000 \end{Bmatrix}$$

ki očitno ni popolnoma točen (napaka znaša manj kot 6 %). Kvaliteto rezultatov lahko izboljšamo, če celoten interval (torej področje končnega elementa) razdelimo na več podintervalov.

Rezultat pa lahko tudi bistveno izboljšamo, ne da bi tudi povečali število integracijskih točk, če uporabimo Gaussovo integracijo (imenovana tudi Gauss–Legendrova integracija). Gaussovo integracijo izvedemo tako, da izračunane vrednosti integranda v predpisanih točkah pomnožimo s pripadajočimi utežmi in nato zmnožke seštejemo<sup>1</sup>. Jasno je, da s številom uporabljenih točk natančnost metode narašča (kot tudi pri Simpsonovi formuli), vendar je že osnovna oblika Gaussove integracije s tremi točkami natančnejša kot Simpsonova formula. Ker Gaussova integracija podaja predpisane točke za posplošen interval  $-1 \leq \xi \leq 1$ , je potrebno bodisi prevesti integral v to območje (ustrezno spremeniti meji integriranja) ali pa predpisane točke poiskati v dejanskem integracijskem intervalu (v našem primeru  $0 \leq x \leq L_e = 6 \text{ m}$ ).

Uporabili bomo pristop s tremi Gaussovimi integracijskimi točkami. Splošna zveza med koordinatnima sistemoma  $\xi$  in  $x$  je naslednja:

$$x = x_A + \frac{L_e}{2} \cdot (\xi + 1)$$

Gaussova integracijska točka $\xi$	ekvivalentna koordinata $x$ za prvi končni element ( $x_A = 0, L_e = 6 \text{ m}$ )	Predpisana utež
$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	$x = \frac{6}{2} \cdot \left(-\sqrt{\frac{3}{5}} + 1\right) = 0.6762099922755498 \text{ m}$	$\frac{5}{9}$
0	$x = \frac{6}{2} \cdot (0 + 1) = 3 \text{ m}$	$\frac{8}{9}$
$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$x = \frac{6}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{5}} + 1\right) = 5.32379000772445 \text{ m}$	$\frac{5}{9}$

<sup>1</sup> Kar vsebinsko v bistvu velja tudi za Simpsonovo formulo, kjer računamo vrednosti na začetku, sredini in koncu intervala, pripadajoče uteži pa so  $\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}$ .

Tako sledijo vrednosti integrandov:

$$i_1 = q(0.6762099922755498) \cdot \{N_1(0.6762099922755498)\}$$

$$= -43381.04996137775 \cdot \begin{Bmatrix} 0.96475800154489 \\ 0.5323790007724449 \\ 0.03524199845510997 \\ -0.06762099922755498 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -41852.21506565782 \\ -23095.160030897798 \\ -1528.834895719923 \\ 2933.4699459288486 \end{Bmatrix}$$

$$i_2 = q(3) \cdot \{N_1(3)\} = -55000 \cdot \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0.75 \\ 0.5 \\ -0.75 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -27500 \\ -41250 \\ -27500 \\ 41250 \end{Bmatrix}$$

$$i_3 = q(5.32379000772445) \cdot \{N_1(5.32379000772445)\}$$

$$= -66618.95003862225 \cdot \begin{Bmatrix} 0.03524199845510978 \\ 0.06762099922755471 \\ 0.9647580015448902 \\ -0.5323790007724449 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2347.784934342161 \\ -4504.839969102181 \\ -64271.16510428009 \\ 35466.53005407115 \end{Bmatrix}$$

Numerično integrirani obtežni vektor prvega končnega elementa je tako:

$$\{F_1\} \cong \frac{5 \cdot i_1 + 8 \cdot i_2 + 5 \cdot i_3}{9} \cdot \frac{L_1}{2} = \begin{Bmatrix} -147000 \\ -156000 \\ -183000 \\ 174000 \end{Bmatrix}$$

kar pa je že točen rezultat.

Intepolacijske funkcije (polinomi H1) v globalnem koordinatnem sistemu za drugi končni element so ( $x_A = 6$  m in  $L_e = 6$  m):

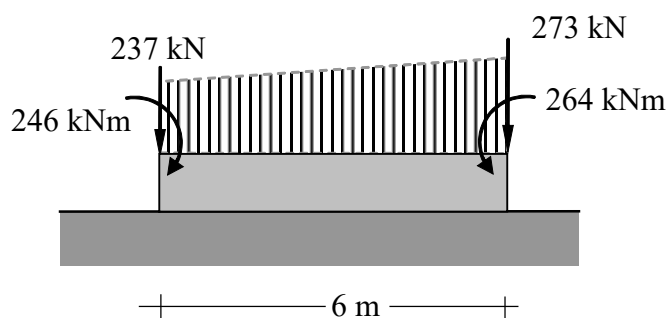
$$\{N_2(x)\} = \begin{Bmatrix} -4 + 2 \cdot x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{108} \\ -24 + 8 \cdot x - \frac{5}{6} \cdot x^2 + \frac{x^3}{36} \\ 5 - 2 \cdot x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{108} \\ -12 + 5 \cdot x - \frac{2 \cdot x^2}{3} + \frac{x^3}{36} \end{Bmatrix}$$

in za drugi končni element sledi obtežni vektor (v globalnem koordinatnem sistemu):

$$\{F_2\} = \int_{x=6\text{ m}}^{12\text{ m}} q(x) \cdot \{N_2(x)\} \cdot dx = \int_{x=6\text{ m}}^{12\text{ m}} (-40000 - 5000 \cdot x) \cdot \begin{Bmatrix} -4 + 2 \cdot x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{108} \\ -24 + 8 \cdot x - \frac{5}{6} \cdot x^2 + \frac{x^3}{36} \\ 5 - 2 \cdot x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{108} \\ -12 + 5 \cdot x - \frac{2 \cdot x^2}{3} + \frac{x^3}{36} \end{Bmatrix} \cdot dx = \begin{Bmatrix} -237000 \\ -246000 \\ -273000 \\ 264000 \end{Bmatrix}$$

Izračun lahko izvedemo tudi v lokalnem koordinatnem sistemu (in uporabimo interpolacijske funkcije za prvi element, saj sta dolžini elementov enaki), pri čemer pa moramo ustrezno zapisati funkcijo obtežbe, ki je sedaj  $q(x) = -70000 - 5000 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 6\text{ m}$

$$\{F_2\} = \int_{x=0\text{ m}}^{6\text{ m}} q(x) \cdot \{N_2(x)\} \cdot dx = \int_{x=0\text{ m}}^{6\text{ m}} (-70000 - 5000 \cdot x) \cdot \begin{Bmatrix} \frac{x^3}{36} - \frac{x^2}{6} + 1 \\ \frac{108}{36} - \frac{12}{3} + x \\ -\frac{x^3}{36} + \frac{x^2}{6} \\ \frac{108}{36} - \frac{12}{6} \end{Bmatrix} \cdot dx = \begin{Bmatrix} -237000 \\ -246000 \\ -273000 \\ 264000 \end{Bmatrix}$$



Slika 136: Vozliščni nadomestki trapezne zvezne obtežbe drugega končnega elementa

Obtežni vektor drugega končnega elementa pa lahko izračunamo tudi brez integriranja, če upoštevamo superpozicijo obtežbe. Pri tem linearno porazdeljeno obtežbo v drugem končnem elementu smatramo kot vsoto (superpozicijo) enakomerne zvezne obtežbe -30000 N/m, za katero že imamo znane analitične izraze za izračun členov obtežnega vektorja, ter linearno spreminjajoče zvezne obtežbe (od -40000 N/m na začetku do -70000

N/m na koncu), za katero so že bile izračunane vrednosti obtežnega vektorja pri prvem končnem elementu. Tako velja:

$$\{F_2\} = \{F_1\} + (-30000) \cdot \begin{Bmatrix} \frac{6}{2} \\ \frac{6^2}{12} \\ \frac{6}{2} \\ \frac{2}{6^2} \\ -\frac{12}{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -147000 \\ -156000 \\ -183000 \\ 174000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -90000 \\ -90000 \\ -90000 \\ 90000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -237000 \\ -246000 \\ -273000 \\ 264000 \end{Bmatrix}$$

Neobvezni kontrolni izračun (vsota vertikalnih sil):

$$237000 \text{ N} + 273000 \text{ N} = \frac{70000 \frac{\text{N}}{\text{m}} + 100000 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{2} \cdot 6 \text{ m}$$

$$510000 \text{ N} = 510000 \text{ N}$$

Pri uporabi numeričnega integriranja z Gaussovo integracijo s tremi točkami sledijo vrednosti integrandov (v globalnem koordinatnem sistemu):

$$i_1 = q(6.6762099922755498) \cdot \{N_2(6.6762099922755498)\} = \begin{Bmatrix} -70794.95511200448 \\ -39066.53005407082 \\ -2586.0948493732735 \\ 4962.099922755674 \end{Bmatrix}$$

$$i_2 = q(9) \cdot \{N_2(9)\} = \begin{Bmatrix} -42500 \\ -63750 \\ -42500 \\ 63750 \end{Bmatrix}$$

$$i_3 = q(11.32379000772445) \cdot \{N_2(11.32379000772445)\} = \begin{Bmatrix} -3405.0448879954542 \\ -6533.469945928394 \\ -93213.9051506268 \\ 51437.900077244405 \end{Bmatrix}$$

Numerično integrirani obtežni vektor drugega končnega elementa je tako:

$$\{F_2\} \cong \frac{5 \cdot i_1 + 8 \cdot i_2 + 5 \cdot i_3}{9} \cdot \frac{L_2}{2} = \begin{Bmatrix} -237000 \\ -246000 \\ -273000 \\ 264000 \end{Bmatrix}$$

kar je ponovno točen rezultat.

Matrični enačbi obeh končnih elementov sta tako:

$$[K_1] \cdot \{U_1\} = \{F_1\} + \{Q_1\}$$

$$\begin{bmatrix} 1.321032 & 2.763095 & -0.571032 & 2.0130958 \\ 2.763095 & 9.680952 & -2.0130958 & 4.1976197 \\ -0.571032 & -2.0130958 & 1.321032 & -2.763095 \\ 2.0130958 & 4.1976197 & -2.763095 & 9.680952 \end{bmatrix} \cdot 10^8 \cdot \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \Phi_1 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -147000 \\ -156000 \\ -183000 \\ 174000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} V_{y,1} \\ -M_{z,1} \\ -V_{y,2\text{levo}} \\ M_{z,2} \end{Bmatrix}$$

$$[K_2] \cdot \{U_2\} = \{F_2\} + \{Q_2\}$$

$$\begin{bmatrix} 1.321032 & 2.763095 & -0.571032 & 2.0130958 \\ 2.763095 & 9.680952 & -2.0130958 & 4.1976197 \\ -0.571032 & -2.0130958 & 1.321032 & -2.763095 \\ 2.0130958 & 4.1976197 & -2.763095 & 9.680952 \end{bmatrix} \cdot 10^8 \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -237000 \\ -246000 \\ -273000 \\ 264000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} V_{y,2\text{desno}} \\ -M_{z,2} \\ -V_{y,3} \\ M_{z,3} \end{Bmatrix}$$

V osmih enačbah nastopa 6 kinematičnih neznank (= primarnih spremenljivk) in 7 statičnih neznank (= sekundarnih spremenljivk), torej skupaj 13 neznank.

Če upoštevamo naslednje statične zveze:

$$\begin{aligned} V_{y,1} &= -250000 \text{ N} \\ M_{z,1} &= 0 \quad V_{y,2\text{levo}} = V_{y,2\text{desno}} + 800000 \text{ N} \\ M_{z,3} &= 0 \quad \text{in} \quad V_{y,3} = -500000 \text{ N} \end{aligned}$$

število neznank zmanjšamo za pet in dobimo rešljiv sistem osmih enačb z osmimi neznankami: šestimi primarnimi spremenljivkami in dvema sekundarnima spremenljivkama. Čeprav je reševanje tega sistema že mogoče, je zaradi prisotnosti sekundarnih spremenljivk s stališča računskega napora neekonomično; hkrati pa se

neznanke pojavljajo na obeh straneh enačb, kar dodatno zaplete izračun. Zato raje sestavimo globalno togostno matriko konstrukcije z bistvenimi prostostnimi stopnjami (neznanimi primarnimi spremenljivkami), v kateri ustrezno upoštevamo vse člene obeh togostnih matrik:

$$[K] = \begin{bmatrix} 1.321032 & 2.763095 & -0.571032 & 2.013095 & 0 & 0 \\ 2.763095 & 9.680952 & -2.013095 & 4.197619 & 0 & 0 \\ -0.571032 & -2.013095 & 2.642063 & 0 & -0.571032 & 2.013095 \\ 2.013095 & 4.197619 & 0 & 19.361905 & -2.013095 & 4.197619 \\ 0 & 0 & -0.571032 & -2.013095 & 1.321032 & -2.763095 \\ 0 & 0 & 2.013095 & 4.197619 & -2.763095 & 9.680952 \end{bmatrix} \cdot 10^8$$

Celotni globalni obtežni vektor konstrukcije je sedaj sestavljen iz členov obeh obtežnih vektorjev in tudi prispevkov koncentriranih sil:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} -147000 + 0 \\ -156000 + 0 \\ -183000 - 237000 \\ 174000 - 246000 \\ 0 - 273000 \\ 0 + 264000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -250000 \\ 0 \\ -800000 \\ 0 \\ -500000 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -147000 \\ -156000 \\ -420000 \\ -72000 \\ -273000 \\ 264000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -250000 \\ 0 \\ -800000 \\ 0 \\ -500000 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -397000 \\ -156000 \\ -1220000 \\ -72000 \\ -773000 \\ 264000 \end{Bmatrix}$$

### Reševanje linearnega sistema bistvenih enačb

Sistem linearnih enačb lahko rešimo z različnimi matematičnimi pristopi. Ena izmed možnosti je Cramerjevo pravilo, kjer moramo izračunati determinante sedmih matrik, izvirne togostne matrike  $[K]$  ter pomožnih matrik  $[K_i]$  ( $i=1,2,\dots,6$ ), ki jih dobimo tako, da  $i$ -ti stolpec nadomestimo z obtežnim vektorjem.

Ta pristop nam omogoči, da posamezno neznanko izračunamo ločeno od ostalih rešitev, kar se lahko v nekaterih primerih izkaže kot priročno. Za določitev pomika  $Y_1$  tako potrebujemo naslednji determinanti:

$$\begin{aligned}
 \llbracket [K_1] \rrbracket &= \begin{bmatrix} -397000 & 2.763 \cdot 10^8 & -0.571 \cdot 10^8 & 2.013 \cdot 10^8 & 0 & 0 \\ -156000 & 9.681 \cdot 10^8 & -2.013 \cdot 10^8 & 4.198 \cdot 10^8 & 0 & 0 \\ -1220000 & -2.013 \cdot 10^8 & 2.642 \cdot 10^8 & 0 & -0.571 \cdot 10^8 & 2.013 \cdot 10^8 \\ -72000 & 4.198 \cdot 10^8 & 0 & 19.362 \cdot 10^8 & -2.013 \cdot 10^8 & 4.198 \cdot 10^8 \\ -773000 & 0 & -0.571 \cdot 10^8 & -2.013 \cdot 10^8 & 1.321 \cdot 10^8 & -2.763 \cdot 10^8 \\ 264000 & 0 & 2.013 \cdot 10^8 & 4.198 \cdot 10^8 & -2.763 \cdot 10^8 & 9.681 \cdot 10^8 \end{bmatrix} \\
 &= -3.692882684737656 \cdot 10^{48}
 \end{aligned}$$

ter

$$\begin{aligned}
 \llbracket [K] \rrbracket &= \begin{bmatrix} 1.321032 & 2.763095 & -0.571032 & 2.013095 & 0 & 0 \\ 2.763095 & 9.680952 & -2.013095 & 4.197619 & 0 & 0 \\ -0.571032 & -2.013095 & 2.642063 & 0 & -0.571032 & 2.013095 \\ 2.013095 & 4.197619 & 0 & 19.361905 & -2.013095 & 4.197619 \\ 0 & 0 & -0.571032 & -2.013095 & 1.321032 & -2.763095 \\ 0 & 0 & 2.013095 & 4.197619 & -2.763095 & 9.680952 \end{bmatrix} \cdot 10^8 \\
 &= 6.341368711073321 \cdot 10^{50}
 \end{aligned}$$

Tako sledi vrednost iskane primarne spremenljivke:

$$Y_1 = \frac{\llbracket [K_1] \rrbracket}{\llbracket [K] \rrbracket} = \frac{-3.692882684737656 \cdot 10^{48}}{6.341368711073321 \cdot 10^{50}} = -5.823478893900511 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Ostale neznane primarne spremenljivke so dobljene s podobnimi izračuni in znašajo:

$$\Phi_1 = \frac{\llbracket [K_2] \rrbracket}{\llbracket [K] \rrbracket} = \frac{1.3628341037596107 \cdot 10^{47}}{6.341368711073321 \cdot 10^{50}} = 2.1491166431938054 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

$$Y_2 = \frac{\llbracket [K_3] \rrbracket}{\llbracket [K] \rrbracket} = \frac{-4.5689743261808706 \cdot 10^{48}}{6.341368711073321 \cdot 10^{50}} = -7.205028652887685 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\Phi_2 = \frac{\llbracket [K_4] \rrbracket}{\llbracket [K] \rrbracket} = \frac{-3.1031892324790554 \cdot 10^{47}}{6.341368711073321 \cdot 10^{50}} = -4.893563793349938 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

$$Y_3 = \frac{\llbracket [K_5] \rrbracket}{\llbracket [K] \rrbracket} = \frac{-8.754330390838377 \cdot 10^{48}}{6.341368711073321 \cdot 10^{50}} = -13.805111782179663 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\Phi_3 = \frac{\llbracket [K_6] \rrbracket}{\llbracket [K] \rrbracket} = \frac{-1.2410500249415014 \cdot 10^{48}}{6.341368711073321 \cdot 10^{50}} = -19.57069650869495 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

Vse rešitve sistema so tako:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \Phi_1 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5.823478893900511 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ 2.1491166431938054 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ -7.205028652887685 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -4.893563793349938 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ -13.805111782179663 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -19.57069650869495 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

in  $ne$  predstavljajo točnih rešitev diferencialnih enačb (kar je posledica izbranega računskega modela in  $ne$  načina reševanja enačb).

*Poprocesiranje: iskanje sekundarnih spremenljivk in notranjih statičnih količin v vozliščih*

Sekundarne spremenljivke v vozliščih *posameznega elementa* dobimo tako, da togostno matriko elementa pomnožimo z vektorjem pomikov elementa ter odštejemo količine (nadomestne vozliščne obtežbe), ki jih tam dejansko ni, ampak so bile tam upoštevane zgolj zaradi prevedbe porazdeljene obtežbe v navidezno vozliščno obtežbo. Dobimo veličine, izražene v koordinatnem sistemu metode končnih elementov.

Za prvi končni element sledi:

$$\{Q_1\} = [K_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\} = [K_1] \cdot \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \Phi_1 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -147000 \\ -156000 \\ -183000 \\ 174000 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1.321031746 & 2.763095238 & -0.571031746 & 2.013095238 \\ 2.763095238 & 9.680952381 & -2.013095238 & 4.197619048 \\ -0.571031746 & -2.013095238 & 1.321031746 & -2.763095238 \\ 2.013095238 & 4.197619048 & -2.763095238 & 9.680952381 \end{bmatrix} \cdot 10^8 \cdot \begin{Bmatrix} -5.8234788939 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ 2.1491166432 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ -7.20502865289 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -4.8935637934 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{Bmatrix} -147000 \\ -156000 \\ -183000 \\ 174000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -250000 \\ 2.6193447411060333 \cdot 10^{-10} \\ -344317.96273503674 \\ 260964.42207196663 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,1} \\ M_{z,1} \\ V_{y,2\text{levo}} \\ M_{z,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -250000 \text{ N} \\ -2.6193447411060333 \cdot 10^{-10} \text{ Nm} \\ 344317.96273503674 \text{ N} \\ 260964.42207196663 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Prvotno izračunane sekundarne spremenljivke so podane v koordinatnem sistemu metode končnih elementov, kar pomeni, da moramo v *začetnem* vozlišču spremeniti predznak *momenta*, v *končnem* vozlišču pa predznak *prečne sile*. Dobljene vrednosti niso točne, ker tudi v analizi uporabljene vozliščne vrednosti pomikov in zasukov niso točne.

Notranje statične količine za drugi končni element pa so:

$$\{Q_2\} = [K_2] \cdot \{U_2\} - \{F_2\} = [K_2] \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -192000 \\ -201000 \\ -228000 \\ 219000 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1.321031746 & 2.763095238 & -0.571031746 & 2.013095238 \\ 2.763095238 & 9.680952381 & -2.013095238 & 4.197619048 \\ -0.571031746 & -2.013095238 & 1.321031746 & -2.763095238 \\ 2.013095238 & 4.197619048 & -2.763095238 & 9.680952381 \end{bmatrix} \cdot 10^8 \cdot \begin{Bmatrix} -7.2050286529 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -4.8935637933 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ -13.8051117822 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -19.5706965087 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -237000 \\ -246000 \\ -273000 \\ 264000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -455682.0372649634 \\ -260964.42207196646 \\ -500000 \\ 4.656612873077393 \cdot 10^{-10} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,2\text{desno}} \\ M_{z,2} \\ V_{y,3} \\ M_{z,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -455682.0372649634 \text{ N} \\ 260964.42207196646 \text{ Nm} \\ 500000 \text{ N} \\ 4.656612873077393 \cdot 10^{-10} \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Poprocesiranje: iskanje funkcij upogibnega momenta in prečne sile s H1 interpolacijskimi funkcijami

Z uporabo H1 interpolacijskih funkcij, že znanih iz izračuna členov obtežnega vektorja, za prvi končni element sledi približni izraz za upogibni moment:

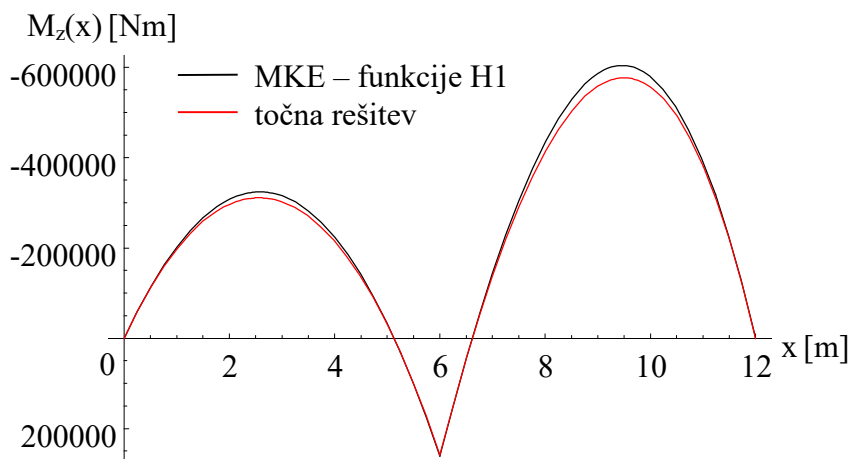
$$\begin{aligned} M_{z1,N}(x) &= M_{z,1} \cdot N_{1,1}(x) + V_{y,1} \cdot N_{1,2}(x) + M_{z,2} \cdot N_{1,3}(x) + V_{y,2\text{levo}} \cdot N_{1,4}(x) \\ &= 0 \cdot N_{1,1}(x) + (-250000) \cdot N_{1,2}(x) + 260964.42207196663 \cdot N_{1,3}(x) + 344317.96273503674 \cdot N_{1,4}(x) \\ &= -250000 \cdot x + 47694.04138349109 \cdot x^2 + 203.60616789947926 \cdot x^3 \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m} \end{aligned}$$

Za drugi končni element velja:

$$\begin{aligned} M_{z2,N}(x) &= M_{z,2} \cdot N_{2,1}(x) + V_{y,2\text{desno}} \cdot N_{2,2}(x) + M_{z,3} \cdot N_{2,3}(x) + V_{y,3} \cdot N_{2,4}(x) \\ &= 260964.42207196646 \cdot N_{2,1}(x) - 455682.0372649634 \cdot N_{2,2}(x) + 0 \cdot N_{2,3}(x) + 500000 \cdot N_{2,4}(x) \\ &= 3.892511206071254 \cdot 10^6 - 623527.4539757734 \cdot x - 18839.407797188906 \cdot x^2 \\ &\quad + 3647.391761824785 \cdot x^3 \quad 6 \text{ m} \leq x \leq 12 \text{ m} \end{aligned}$$

Nobena izmed funkcij upogibnega momenta ni točna. Razloga sta dva: vozliščne vrednosti notranjih statičnih količin niso točne, prav tako niso točne uporabljene polinomske interpolacijske funkcije, saj točne rešitve vsebujejo trigonometrične člene.

Graf funkcij analitičnih in numeričnih rešitev pokaže, da so numerične rešitve resnično zgolj aproksimacija pravih rešitev:



Slika 137: Primerjava funkcij upogibnega momenta

Maksimalni negativni moment v prvem končnem elementu nastopi pri  $x = 2.5783041633605293$  m (točna lokacija  $2.560943749851399$  m) in znaša  $-324032.8916588296$  Nm (točna vrednost znaša  $-310948.85312746733$  Nm).

Maksimalni negativni moment v drugem končnem elementu nastopi pri  $x = 9.464346509757053$  m (točna lokacija  $9.497285257098872$  m) in znaša  $-604181.5089817992$  Nm (točna vrednost znaša  $-576709.9670564503$  Nm). Obe približni vrednosti sta sicer konzervativni, vendar tega ni mogoče sploševati.

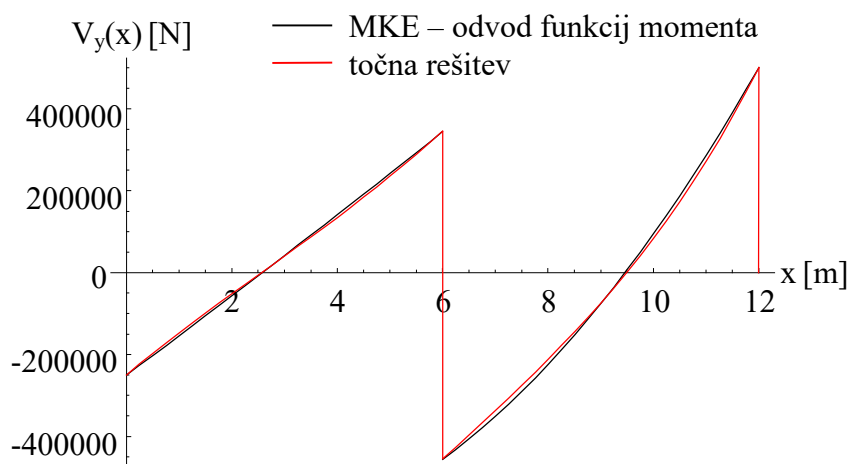
Uporaba pristopa s superpozicijo momenta je sicer možna tudi sedaj, vendar je pri pomožnem »prostoležečem nosilcu« potrebno upoštevati, da leži na elastični podlagi, ki nanj deluje s kontaktnimi tlaki, torej neenakomerno zvezno prečno obtežbo, kar zaplete analizo, saj onemogoča enostavno uporabo Newtonovih zakonov.

Čprav je uporaba (Lagrangeove ali Newtonove polinomske) interpolacije za pridobitev enovite funkcije upogibnega momenta konstrukcije oz. celotnega nosilca sicer matematično mogoča, inženirsko ni smiselna, saj vodi do popolnoma napačne funkcije. Na razpolago so samo tri diskretne vrednosti upogibnega momenta, ki vse ne pripadajo isti rešitvi diferencialne enačbe in njihovo kombiniranje ni korektno.

Odvajanje dobljenih (približnih) izrazov za upogibni moment vodi do približnih izrazov za prečno silo, ki sta kvadratni funkciji:

$$V_{y1,N}(x) = -250000 + 95388.08276698217 \cdot x + 610.8185036984378 \cdot x^2 \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m}$$

$$V_{y2,N}(x) = -623527.4539757734 - 37678.81559437781 \cdot x + 10942.175285474355 \cdot x^2 \quad 6 \text{ m} \leq x \leq 12 \text{ m}$$



Slika 138: Primerjava grafov funkcij prečne sile

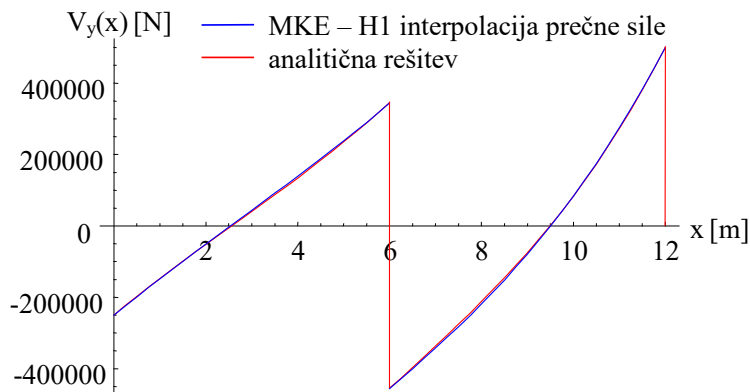
Pri izračunu funkcije prečne sile je alternativna možnost neposredna *samosvojna* interpolacija (česar pri »navadnih« nosilcih običajno ne počnemo, saj je nesmiselno), ki jo izvedemo z že znanimi interpolacijskimi funkcijami, pri čemer (diskretno) vrednost odvoda funkcije prečnih izračunamo kot  $V_y'(x) = q(x) - k \cdot v(x)$ , s čemer dvignemo stopnjo polinoma v funkciji v primerjavi z odvodom funkcije momenta (kar je pozitiven učinek), a hkrati v analizo vpeljemo približno vrednost pomika (kar je negativen učinek). Izmed vseh parametrov je edina točna vrednost velikost obtežbe.

Z uporabo že znanih H1 interpolacijskih funkcij za prečni pomik tako sledi za prvi končni element nov približni izraz za prečno silo, ki pa je sedaj kubični polinom:

$$\begin{aligned} V_{y1,N}(x) &= V_{y,1} \cdot N_{1,1}(x) + (q(0) - k \cdot Y_1) \cdot N_{1,2}(x) + V_{y,2\text{levo}} \cdot N_{1,3}(x) + (q(6) - k \cdot Y_2) \cdot N_{1,4}(x) \\ &= (-250000) \cdot N_{1,1}(x) + 105586.97234751278 \cdot N_{1,2}(x) + 344317.96273503674 \cdot N_{1,3}(x) \\ &\quad + 110125.71632219214 \cdot N_{1,4}(x) \\ &= -250000 + 105586.972347513 \cdot x - 4023.4466082832296 \cdot x^2 + 489.07503031553824 \cdot x^3 \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m} \end{aligned}$$

Z uporabo H1 interpolacijskih funkcij za prečni pomik sledi za drugi končni element približni izraz za prečno silo:

$$\begin{aligned} V_{y2,N}(x) &= V_{y,2\text{desno}} \cdot N_{2,1}(x) + (q(6) - k \cdot Y_2) \cdot N_{2,2}(x) + V_{y,3} \cdot N_{2,3}(x) + (q(12) - k \cdot Y_3) \cdot N_{2,4}(x) \\ &= -455682.0372649634 \cdot N_{2,1}(x) + 110125.71632219214 \cdot N_{2,2}(x) + 500000 \cdot N_{2,3}(x) \\ &\quad + 245127.7945544916 \cdot N_{2,4}(x) \\ &= -1.2618225773266554 \cdot 10^6 + 195280.6288200675 \cdot x - 16269.450655246881 \cdot x^2 \\ &\quad + 1019.2453274545132 \cdot x^3 \quad 6 \text{ m} \leq x \leq 12 \text{ m} \end{aligned}$$



Slika 139: Primerjava grafov funkcij prečne sile

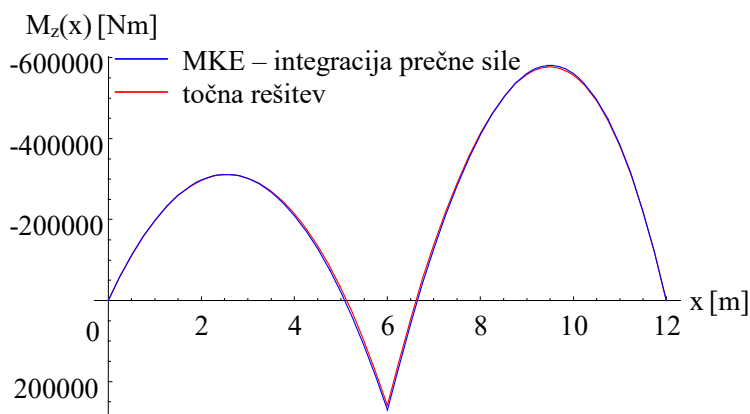
Iz grafa funkcij prečne sile je razvidno, da je ujemanje s točno rešitvijo zaradi dvignjene stopnje polinoma sedaj nekoliko boljše. Z integracijo teh funkcij prečne sile lahko dobimo tudi novi funkciji upogibnega momenta, ki tako postaneta polinoma 4. stopnje (oz. t. i. quartic). Za določitev posamezne integracijske konstante sta za vsak končni element na voljo dve približni vozliščni vrednosti upogibnega momenta (ki pa – zaradi približnosti rešitev – vodita do dveh nekoliko različnih funkcij).

Funkciji upogibnega momenta sta (integracijski konstanti sta bili določeni na osnovi ničelnih momentov na obeh koncih nosilca, torej točnih vrednosti):

$$M_{z1,N}(x) = -250000 \cdot x + 52793.48617375639 \cdot x^2 - 1341.148869427743 \cdot x^3 + 122.26875757888456 \cdot x^4 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$$

$$M_{z2,N}(x) = 5.169101452773015 \cdot 10^6 - 1.2618225773266556 \cdot 10^6 \cdot x + 97640.31441003375 \cdot x^2 - 5423.150218415627 \cdot x^3 + 254.8113318636283 \cdot x^4 \quad 6 \text{ m} \leq x \leq 12 \text{ m}$$

ki izkazujeta boljše splošno ujemanje s točnimi rešitvami kot neposredno interpolirani (kubni) funkciji upogibnega momenta:



Slika 140: Primerjava grafov funkcij upogibnega momenta

pri čemer pa sta vrednosti maksimalnega pozitivnega upogibnega momenta (na sredini) sedaj nekoliko različni:

$$M_{z1,N}(6) = 269337.6562810726 \text{ Nm}$$

$$M_{z2,N}(6) = 272052.34649178275 \text{ Nm}$$

Razlika med vrednostima je okoli 1 %.

Maksimalni negativni moment v prvem končnem elementu sedaj nastopi pri  $x = 2.537381530281436$  m (točna lokacija  $2.560943749851399$  m) in znaša  $-311286.1513887624$  Nm (točna vrednost znaša  $-310948.85312746733$  Nm).

Maksimalni negativni moment v drugem končnem elementu nastopi pri  $x = 9.50677562159981$  m (točna lokacija  $9.497285257098872$  m) in znaša  $-580397.5751802826$  Nm (točna vrednost znaša  $-576709.9670564503$  Nm). Obe novi približni vrednosti sta torej še vedno konzervativni, vendar je ujemanje s točnima vrednostima že opazno boljše.

Kvaliteto vseh rezultatov je mogoče izboljšati tudi z gostejšo diskretizacijo (t. i. 'h – pristop'). Tako sledijo naslednje vrednosti na sredini nosilca za različne diskretizacije.

**Preglednica 5: Primerjava diskretnih vrednosti na sredini nosilca za različne diskretizacije**

Model	Pomik [mm]	Upogibni moment [Nm]	Prečna sila levo [N]	Prečna sila desno [N]
2 končna elementa	-7.2050287	260964.422072	344317.962735	-455682.037265
2 končna elementa*	-7.2050287	260964.422072	365859.204407	-434140.795593
2 4(5) KE	-7.3748844	259037.250038	345581.815300	-454418.184700
4 končni elementi	-7.3638067	258949.548862	345435.872718	-454564.127281
4 4(5) KE	-7.3738512	258763.338178	345445.009656	-454554.990344
6 končnih elementov	-7.3718781	258798.712109	345443.834345	-454556.165655
6 enostavnih KE	-7.5547678	240588.298427	358789.117714	-441210.882286
6 enostavnih+ KE	-7.5401008	242216.792827	357466.855150	-442533.144850
6 4(5) KE	-7.3738337	258759.780391	345443.027473	-454556.972527
analitične rešitve	-7.3738319	258759.436077	345442.836654	-454557.163346

\*uporabljen je nadomestna enakomerna zvezna obtežba po posameznem končnem elementu (kar statično ni popolnoma enakovredno trapezni obtežbi, saj nadomestna obtežba ne povzroča enake razporeditve momenta).

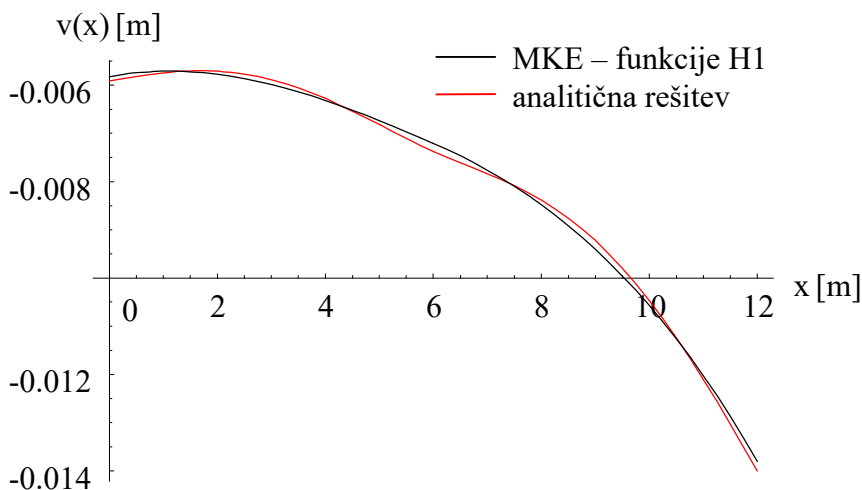
*Poprocesiranje: iskanje približnih funkcij prečnega pomika po elementih s H1 interpolacijskimi funkcijami*

Približni funkciji prečnega pomika po posameznem elementu sta, pri čemer uporabimo že iz izračuna obtežnega vektorja znane H1 interpolacijske funkcije:

$$\begin{aligned}
v_{1,N}(x) &= Y_1 \cdot N_{1,1}(x) + \Phi_1 \cdot N_{1,2}(x) + Y_2 \cdot N_{1,3}(x) + \Phi_2 \cdot N_{1,4}(x) \\
&= -5.823478893900511 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot N_{1,1}(x) + 2.1491166431938054 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \cdot N_{1,2}(x) \\
&\quad + (-7.205028652887685 \cdot 10^{-3} \text{ m}) \cdot N_{1,3}(x) + (-4.893563793349938 \cdot 10^{-4} \text{ rad}) \cdot N_{1,4}(x) \\
&= -5.823478893900511 \cdot 10^{-3} + 2.1491166431938054 \cdot 10^{-4} \cdot x - 1.0520697146622582 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 \\
&\quad + 5.168663092040141 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m}
\end{aligned}$$

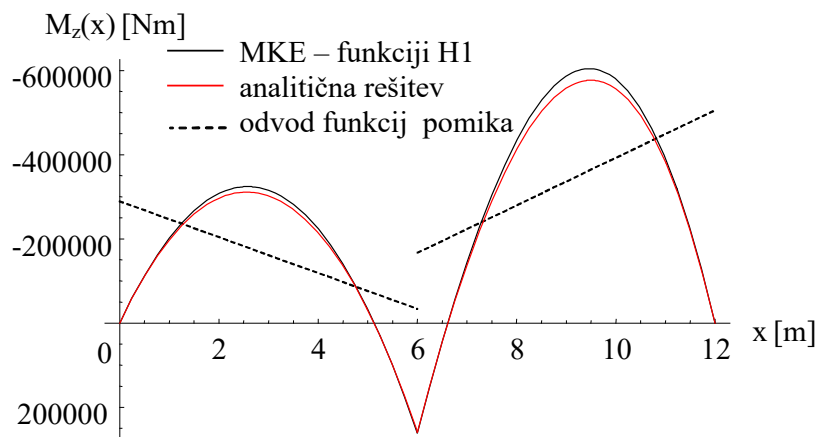
$$\begin{aligned}
v_{2,N}(x) &= Y_2 \cdot N_{2,1}(x) + \Phi_2 \cdot N_{2,2}(x) + Y_3 \cdot N_{2,3}(x) + \Phi_3 \cdot N_{2,4}(x) \\
&= (-7.205028652887685 \cdot 10^{-3} \text{ m}) \cdot N_{2,1}(x) + (-4.893563793349938 \cdot 10^{-4} \text{ rad}) \cdot N_{2,2}(x) + \\
&\quad (-13.805111782179663 \cdot 10^{-3} \text{ m}) \cdot N_{2,3}(x) + (-19.57069650869495 \cdot 10^{-4} \text{ rad}) \cdot N_{2,4}(x) \\
&= -4.976055384873786 \cdot 10^{-3} - 5.000330304434711 \cdot 10^{-4} \cdot x + 6.248930103583059 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 \\
&\quad - 6.844397790013783 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 \quad 6 \text{ m} \leq x \leq 12 \text{ m}
\end{aligned}$$

Primerjava grafov analitične in numerične rešitve pokaže, da ujemanje rešitev ne obstaja niti v vozliščih končnih elementov.



Slika 141: Primerjava funkcij prečnega pomika

Dobljeni približni funkciji prečnega pomika s pomočjo odvodov omogočata tudi izračun približnih funkcij upogibnega momenta po definiciji, ki pa zaradi odvajanja postaneta linearni funkciji (kar predstavlja zelo slab približek):



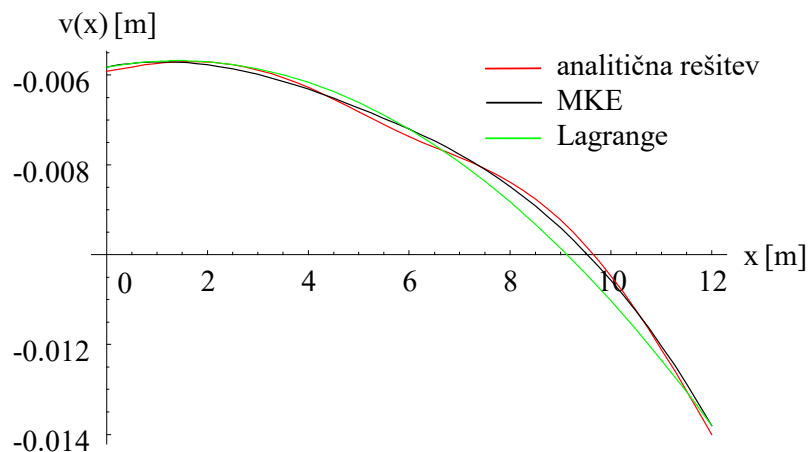
Slika 142: Primerjava grafov funkcij upogibnega momenta

Tako dobljeni funkciji upogibnega momenta lahko dalje uporabimo tudi za izračun funkcij prečne sile, ki pa se reducirata v konstanti (kar je še slabši približek).

Če bi za pridobitev približka funkcije prečnega pomika uporabili vse tri vozliščne vrednosti pomika in Lagrangeovo (ali pa Newtonovo) interpolacijo (kar je matematično sicer mogoče), bi v analizi zajeli samo tri diskretne vrednosti pomika (ki vse ne pripadajo isti rešitvi diferencialne enačbe), kar bi vodilo do polinoma 2. stopnje, hkrati pa tako dobljena funkcija ne bi zajela nezveznosti funkcije prečne sile v tretjem odvodu funkcije pomika na sredini elementa:

$$v_N(x) = -7.247963014312226 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 + 2.0461948769420445 \cdot 10^{-4} \cdot x - 5.823478893900511 \cdot 10^{-3} \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 12 \text{ m}$$

kar vodi do slabše rešitve kot uporaba H1 interpolacijskih funkcij po posameznem elementu.



Slika 143: Primerjava rešitev za prečni pomik

*Poprocesiranje: izračun funkcij prečnega pomika s pomočjo Hermitskih interpolacijskih funkcij H2\**

Ker pa so znane še (delno približne) vozliščne vrednosti upogibnega momenta, ki so povezane z drugim odvodom funkcije prečnega pomika, lahko te informacije vključimo v izračun posamezne funkcije prečnega pomika. Uporaba Hermitskih polinomskih funkcij 2. stopnje za prvi končni element oz.  $0 \leq x \leq 6 \text{ m}$  tako vodi do:

$$\begin{aligned} v_{1,H}(x) = & -5.823478893900511 \cdot 10^{-3} + 2.1491166431938051 \cdot 10^{-4} \cdot x \\ & + 1.3171317571967418 \cdot 10^{-20} \cdot x^2 - 2.9590291092703022 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 \\ & + 2.8190704393955558 \cdot 10^{-6} \cdot x^4 + 8.612119555522991 \cdot 10^{-9} \cdot x^5 \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m} \end{aligned}$$

ki tudi ni enaka pravi funkciji pomika.

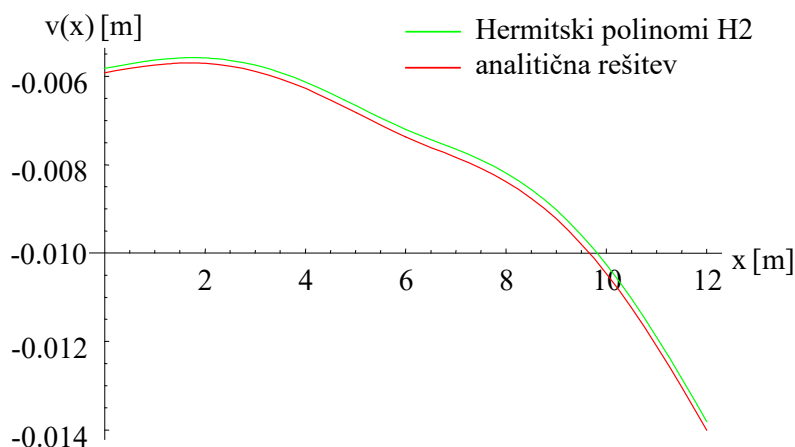
Za drugi končni element pa z uporabo Hermitskih polinomskih funkcij 2. stopnje za

$$6 \text{ m} \leq x \leq 12 \text{ m}$$

sledi:

$$\begin{aligned} v_{2,H}(x) = & 1.3355577468412538 \cdot 10^{-2} - 8.986577295337861 \cdot 10^{-3} \cdot x \\ & + 1.3777922971942302 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 - 7.28242224466262 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 \\ & - 1.18097318087772 \cdot 10^{-6} \cdot x^4 + 1.3103243860894917 \cdot 10^{-7} \cdot x^5 \quad 6 \text{ m} \leq x \leq 12 \text{ m} \end{aligned}$$

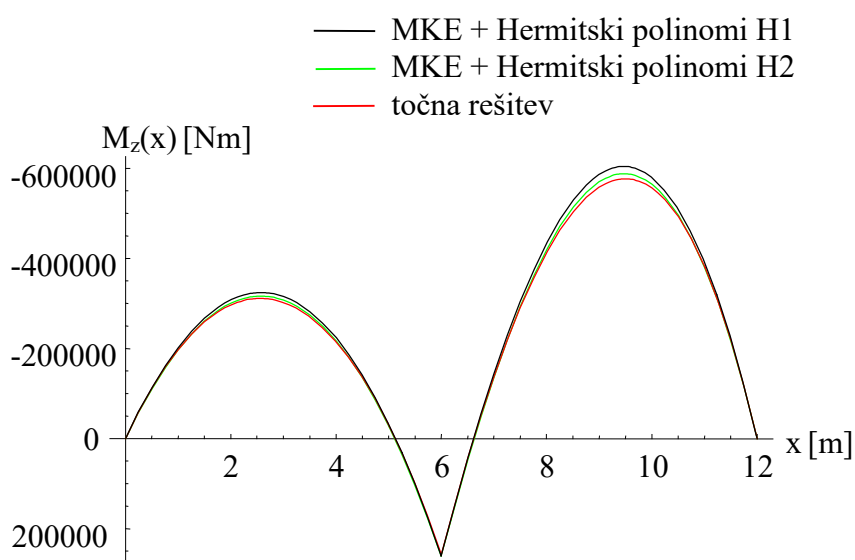
ki prav tako ni enaka pravi funkciji pomika.



Slika 144: Primerjava rešitev za prečni pomik

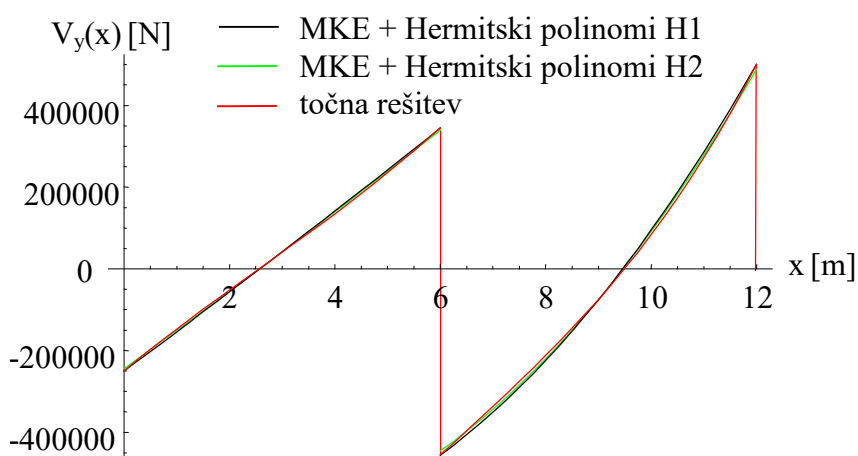
Ujemanje s točnimi rešitvami ni boljše kot pri uporabi »navadnih« H1 interpolacijskih funkcij (= Hermitskih polinomov 1. stopnje), kar je, kot kaže, posledica podcenjenih vozliščnih vrednosti pomika, saj sta grafa obeh funkcij zelo podobna (kar se pozna tudi pri izračunu upogibnega momenta), le zamaknjena.

Če iz teh funkcij pomika izračunamo funkciji upogibnega momenta, pa le-ti izkazujeta nekoliko boljše ujemanje kot funkciji momenta, izračunani z interpolacijskimi funkcijami H1.



Slika 145: Primerjava rešitev za upogibni moment

Pri funkcijah prečne sile je ujemanje zgolj nekoliko boljše.



Slika 146: Primerjava rešitev za prečno silo

*Poprocesiranje: iskanje rezultirajoče sile podlage*

Približni funkciji prečnega pomika elementov lahko uporabimo kot posredno kontrolo izračuna, saj mora biti rezultirajoča sila podlage (= rezultanta kontaktnih tlakov) enaka aplicirani vertikalni obtežbi (ravnotežje sil), saj klasične podpore v obravnavanem primeru ne obstajajo.

Tako sledita sili pod posameznima končnima elementoma (integrala bi lahko izračunali tudi numerično, npr. z Gaussovo integracijo):

$$\int_{x=0\text{ m}}^{6\text{ m}} b(x) \cdot c(x) \cdot v_{1,N}(x) \cdot dx = b \cdot c \cdot \int_{x=0\text{ m}}^{6\text{ m}} v_{1,N}(x) \cdot dx = 0.5\text{ m} \cdot 50 \cdot 10^6 \frac{\text{Pa}}{\text{m}} \cdot$$

$$\int_{x=0\text{ m}}^{6\text{ m}} (-5.823478894 \cdot 10^{-3} + 2.14911664 \cdot 10^{-4} \cdot x - 1.05206971 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 5.16866309 \cdot 10^{-6} \cdot x^3) \cdot dx$$

$$= -924317.9627350369\text{ N}$$

ter

$$\int_{x=6\text{ m}}^{12\text{ m}} b(x) \cdot c(x) \cdot v_{2,N}(x) \cdot dx = b \cdot c \cdot \int_{x=6\text{ m}}^{12\text{ m}} v_{2,N}(x) \cdot dx = 0.5\text{ m} \cdot 50 \cdot 10^6 \frac{\text{Pa}}{\text{m}} \cdot$$

$$\int_{x=6\text{ m}}^{12\text{ m}} (-4.976055385 \cdot 10^{-3} - 5.000330304 \cdot 10^{-4} \cdot x + 6.248930104 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 - 6.844397790 \cdot 10^{-6} \cdot x^3) \cdot dx$$

$$= -1465682.037264963\text{ N}$$

Njuna vsota kljub približnosti funkcij pomika znaša (sili sta usmerjeni navzgor):

$$924317.9627350369\text{ N} + 1465682.037264963\text{ N} = 2.39 \cdot 10^6\text{ N}$$

kar je enako rezultanti apliciranih vertikalnih obtežb in je s tem zagotovljeno ravnotežje sil v vertikalni smeri.

Opomba: seštevanje vertikalnih sil iz vektorjev sekundarnih spremenljivk sedaj ne daje pravih rezultatov, saj se reakcije ne nahajajo več zgolj v vozliščih.

Prav tako se lahko prepričamo, da je izpolnjen pogoj ravnotežja momentov. Če ga zapišemo npr. za levi konec nosilca, sledita momenta sil oz. kontaktnih tlakov pod posameznima končnima elementoma:

$$\int_{x=0 \text{ m}}^{6 \text{ m}} x \cdot b(x) \cdot c(x) \cdot v_{1,N}(x) \cdot dx = b \cdot c \cdot \int_{x=0 \text{ m}}^{6 \text{ m}} x \cdot v_{1,N}(x) \cdot dx = 0.5 \text{ m} \cdot 50 \cdot 10^6 \frac{\text{Pa}}{\text{m}} \cdot \int_{x=0 \text{ m}}^{6 \text{ m}} x \cdot (-5.823478894 \cdot 10^{-3} + 2.14911664 \cdot 10^{-4} \cdot x - 1.05206971 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 5.16866309 \cdot 10^{-6} \cdot x^3) \cdot dx$$

$$= 0.5 \text{ m} \cdot 50 \cdot 10^6 \frac{\text{Pa}}{\text{m}} \cdot \int_{x=0 \text{ m}}^{6 \text{ m}} (-5.823478894 \cdot 10^{-3} \cdot x + 2.14911664 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 - 1.05206971 \cdot 10^{-4} \cdot x^3 + 5.16866309 \cdot 10^{-6} \cdot x^4) \cdot dx$$

$$= -2.884943354338253 \cdot 10^6 \text{ Nm}$$

ter

$$\int_{x=6 \text{ m}}^{12 \text{ m}} x \cdot b(x) \cdot c(x) \cdot v_{2,N}(x) \cdot dx = b \cdot c \cdot \int_{x=6 \text{ m}}^{12 \text{ m}} x \cdot v_{2,N}(x) \cdot dx = 0.5 \text{ m} \cdot 50 \cdot 10^6 \frac{\text{Pa}}{\text{m}} \cdot \int_{x=6 \text{ m}}^{12 \text{ m}} x \cdot (-4.976055385 \cdot 10^{-3} - 5.000330304 \cdot 10^{-4} \cdot x + 6.248930104 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 - 6.844397790 \cdot 10^{-6} \cdot x^3) \cdot dx$$

$$= -13.67505664566174 \cdot 10^6 \text{ Nm}$$

Njuna rezultanta znaša (momenta delujeta protiurno):

$$2.884943354338253 \cdot 10^6 \text{ Nm} + 13.67505664566174 \cdot 10^6 \text{ Nm} = 16.56 \cdot 10^6 \text{ Nm}$$

kar je enako rezultanti momentov apliciranih vertikalnih obtežb (momenti delujejo sournjo):

$$\int_{x=0 \text{ m}}^{12 \text{ m}} x \cdot q(x) \cdot dx - 800000 \text{ N} \cdot 6 \text{ m} - 500000 \text{ N} \cdot 12 \text{ m} = -16560000 \text{ Nm}$$

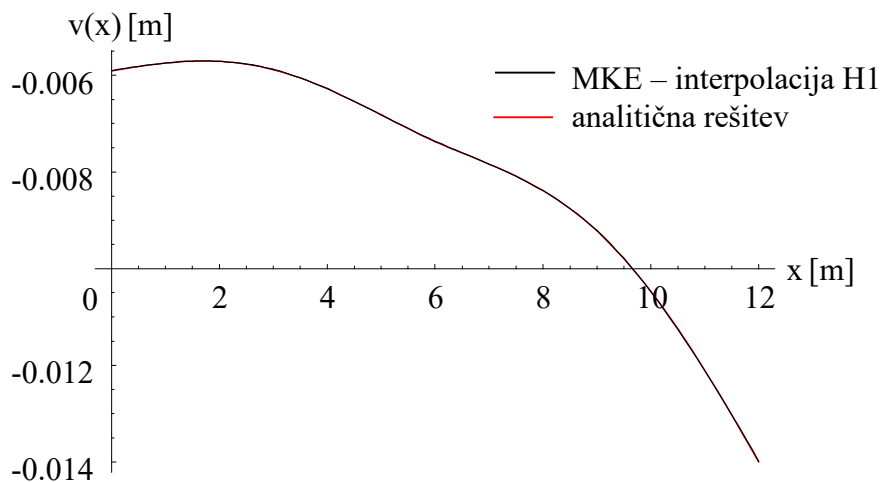
in je s tem zagotovljeno tudi ravnotežje momentov.

Primer je pokazal, da z uporabo standardnega končnega elementa, kjer togostni matriki nosilca  $[K_n]$  dodamo še togostno matriko Winkerjeve zemljine  $[K_{z,W}]$ , ne dobimo pravih vozliščnih vrednosti pomikov, upogibnih momentov in prečnih sil. Posledično so tudi funkcije pomika, upogibnega momenta in prečne sile zgolj približki pravih rešitev. Čeprav obstaja natančni oz. točni končni element nosilca na Winklerjevi elastični podlagi (z enotno togostno matriko, v kateri so zajeti tako parametri temeljnega nosilca, kot tudi zemljine), običajno kljub temu uporabljamo tukaj uporabljeni standardni končni element,

kvalitetnejše rezultate pa dobimo z zgoščevanjem mreže končnih elementov (nekatero mreže so na kratko predstavljene v nadaljevanju).

## 2. model - diskretizacija s štirimi končnimi elementi enakih dolžin

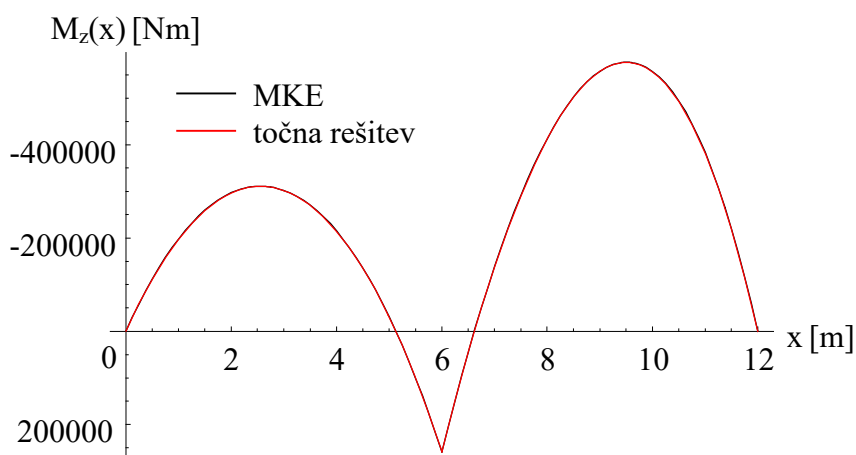
Z uporabo štirih enako dolgih končnih elementov sledi funkcija prečnega pomika:



Slika 147: Primerjava funkcij prečnega pomika

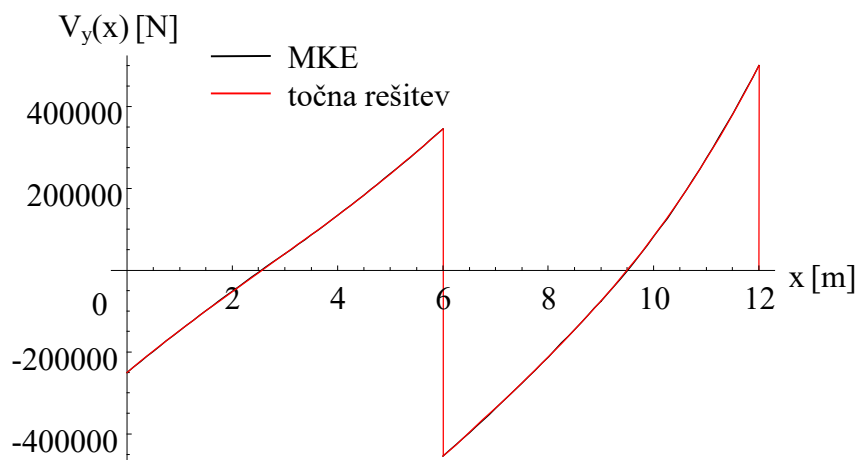
kjer je razlika med rešitvama že praktično neopazna.

Podobno velja za diagrama upogibnega momenta:



Slika 148: Primerjava grafov funkcij upogibnega momenta

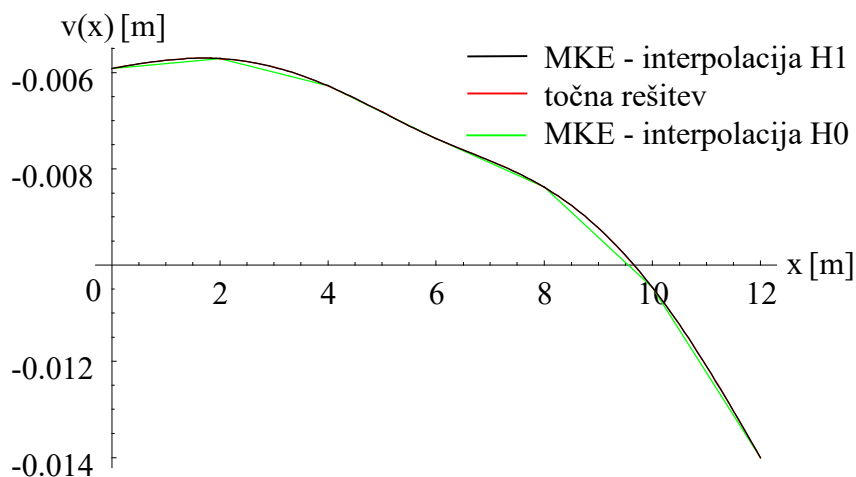
kot tudi za graf prečne sile:



Slika 149: Primerjava grafov funkcij prečne sile

### 3. model - diskretizacija s šestimi končnimi elementi enakih dolžin

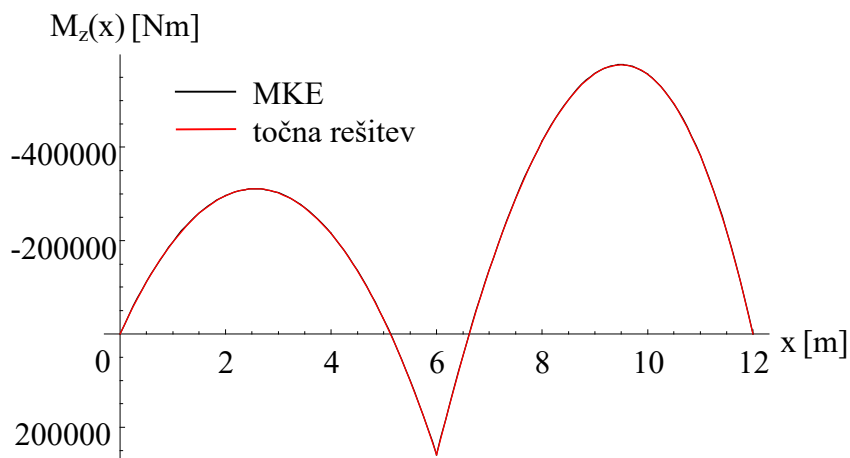
Če uporabimo šest enako dolgih končnih elementov, lahko torej pričakujemo praktično popolno vizualno ujemanje rezultatov z uporabo H1 interpolacijskih funkcij. Tako sledijo naslednji grafi funkcij prečnega pomika:



Slika 150: Primerjava grafov funkcij prečnega pomika

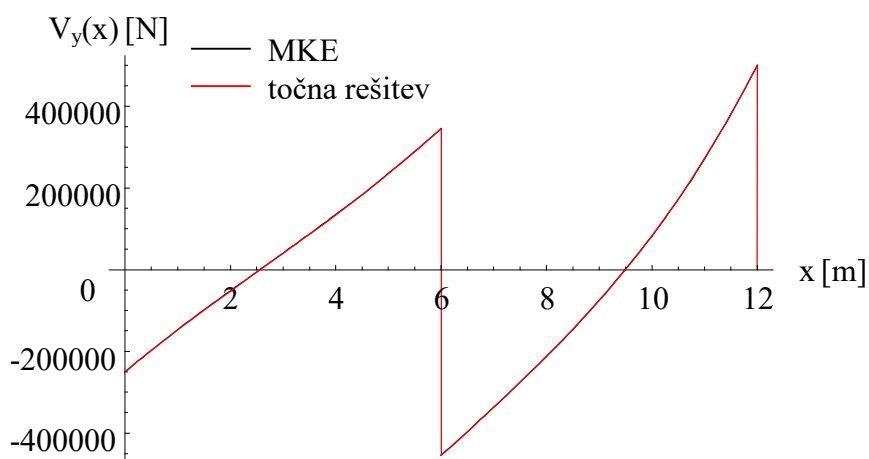
kjer že celo odsekovno linearna (H0) predstavitev pomika (zelena linija) v polju elementa (zaradi gostejše diskretizacije) predstavlja dokaj dober približek.

Pri diagramu upogibnega momenta:



Slika 151: Primerjava grafov funkcij upogibnega momenta

kot tudi prečne sile

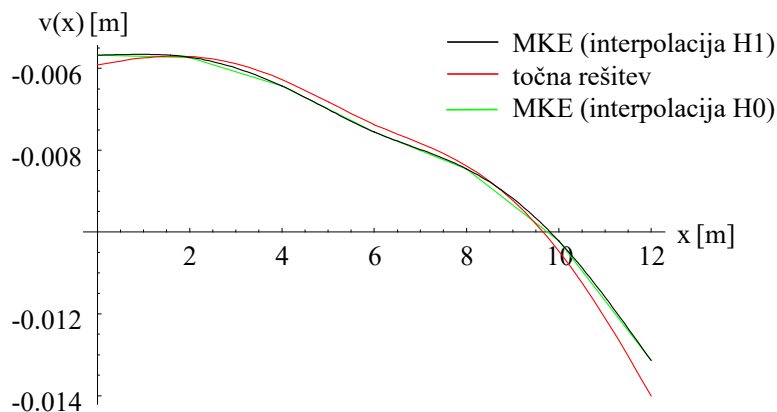


Slika 152: Primerjava grafov funkcij prečne sile

pa razlike med analitično in numerično rešitvijo praktično že popolnoma izginejo.

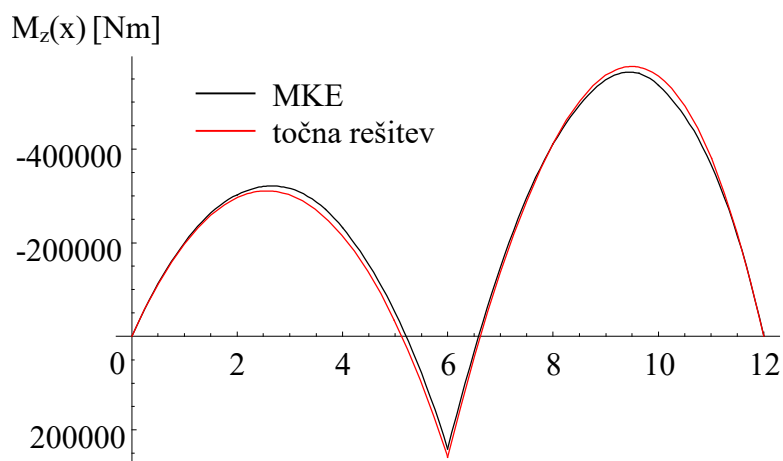
### 3.b model\* - diskretizacija s šestimi enostavnimi končnimi elementi enakih dolžin

Če pa uporabimo diskretizacijo s šestimi enostavnimi končnimi elementi, kjer vpliv zemljine upoštevamo zgolj v translacijskih prostostnih stopnjah v vozliščih končnega elementa, pa so razlike glede na točne rešitve opaznejše:



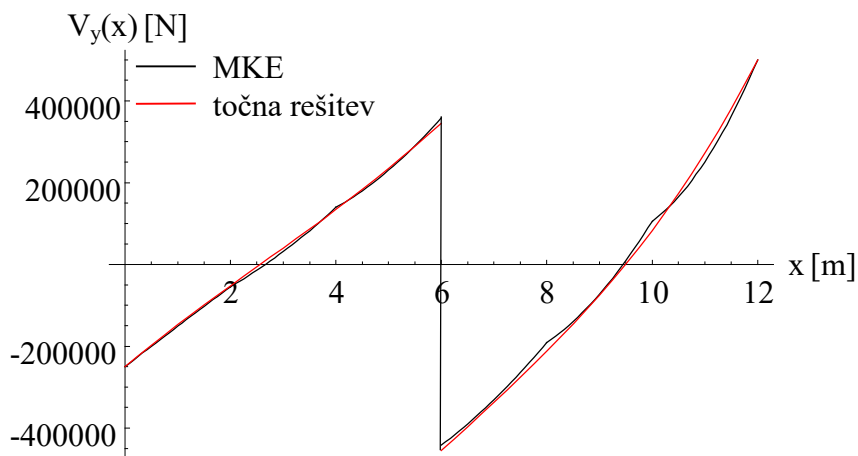
Slika 153: Primerjava grafov funkcij prečnega pomika

Pričakovano večja odstopanja so opazna tudi pri diagramu upogibnega momenta:



Slika 154: Primerjava grafov funkcij upogibnega momenta

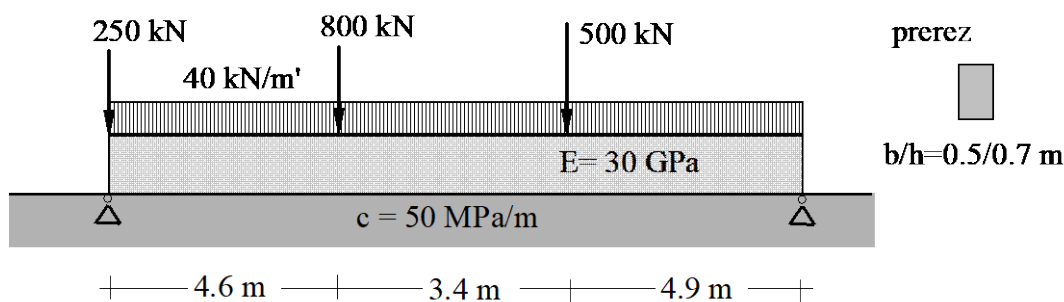
kot tudi prečne sile:



Slika 155: Primerjava grafov funkcij prečne sile

### Primer 9.b – Členkasto podprti nosilec na Winklerjevi elastični podlagi

Ravninsko linijsko konstrukcijo - temelj na sliki predstavlja horizontalni AB nosilec na elastični podlagi, ki je na koncih členkasto podprt. Horizontalni nosilec, ki ima pravokotni prerez z dimenzijama  $b/h = 0.5\text{ m}/0.70\text{ m}$ , je iz betona C20/25 z modulom elastičnosti  $E=30\text{ GPa}$ ; modul reakcije tal pa znaša  $c = 50\text{ MPa/m}$ .



Slika 156: Nosilec na elastični podlagi

Za konstrukcijo na sliki poišči lokalne in globalne zapise togostnih matrik in obtežnih vektorjev posameznih elementov ter enačbe, iz katerih sledijo vrednosti vozliščnih pomikov in zasukov, izračunaj vozliščne pomike in zasuke, reakcije v podporah in notranje statične količine ter poišči mesto in velikost maksimalnega pozitivnega in negativnega upogibnega momenta.

S pomočjo interpolacije vozliščnih vrednosti poišči približno vrednost prečnega pomika ter upogibnega momenta na sredini sredinskega polja.

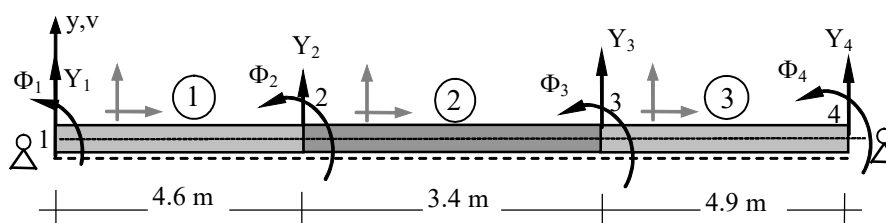
#### Rešitev

Čeprav moramo za določitev prečnega pomika poljubne točke kontinurnega nosilca reševati enako diferencialno enačbo, ima ta diferencialna enačba zaradi dveh notranjih koncentriranih sil tri odsekovno različne rešitve. Najmanjše smiselno število končnih elementov za diskretizacijo je zato tri, čeprav je mogoča tudi ne najbolj kvalitetna diskretizacija z enim samim končnim elementom.

Uporabili bomo različne diskretizacije s tremi končnimi elementi.

1. pristop - diskretizacija s tremi standardnimi končnimi elementi

V tem modelu bomo uporabili tri standardne končne elemente (tipa V-V), kjer bomo členkasta zaključka nosilca modelirali kot toga priključka na členkasti vozlišči, s čemer bo računski model imel formalno 8 prostostnih stopenj (brez upoštevanja osnih pomikov).



Slika 157: Izbrana diskretizacija

Prostostne stopnje so  $Y_1, \Phi_1, Y_2, \Phi_2, Y_3, \Phi_3, Y_4$  in  $\Phi_4$ , ki predstavljajo vozliščne vertikalne pomike in zasuke. Ker pa sta vertikalna pomika vozlišč 1 in 3 preprečena, ima model šest neničelnih prostostnih stopenj.

Togostne matrike končnih elementov so sestavljene iz prispevkov nosilcev in zemljine z Winklerjevim modelom. Za prvi končni element sledi togostna matrika:

$$\begin{aligned}
 [k_1] &= [k_{n,1}] + [k_{z,w,1}] = \\
 &\begin{bmatrix} 5.28581408729 & 12.15737240076 & -5.28581408729 & 12.15737240076 \\ 12.15737240076 & 37.2826086957 & -12.1573724008 & 18.64130434783 \\ -5.28581408729 & -12.1573724008 & 5.285814087285 & -12.1573724008 \\ 12.15737240076 & 18.64130434783 & -12.1573724008 & 37.28260869565 \end{bmatrix} \cdot 10^7 + \\
 &\begin{bmatrix} 4.271428571428571 & 2.77095238095238 & 1.4785714285714284 & -1.63738095238095 \\ 2.77095238095238 & 2.31752380952381 & 1.637380952380952 & -1.73814285714286 \\ 1.4785714285714284 & 1.637380952380952 & 4.271428571428571 & -2.77095238095238 \\ -1.63738095238095 & -1.73814285714286 & -2.77095238095238 & 2.31752380952381 \end{bmatrix} \cdot 10^7 = \\
 &\begin{bmatrix} 9.55724265871385 & 14.92832478170852 & -3.80724265871385 & -10.5199914483752 \\ 14.92832478170852 & 39.60013250517598 & -10.5199914483752 & 16.90316149068323 \\ -3.80724265871385 & -10.5199914483752 & 9.55724265871385 & -14.92832478170852 \\ 10.5199914483752 & 16.90316149068323 & -14.92832478170852 & 39.60013250517598 \end{bmatrix} \cdot 10^7
 \end{aligned}$$

Za drugi končni element sledi:

$$\begin{aligned}
 [k_2] &= [k_{n,2}] + [k_{z,w,2}] = \\
 &\begin{bmatrix} 13.090270710360265 & 22.25346020761245 & -13.09027071036027 & 22.25346020761245 \\ 22.25346020761245 & 50.44117647058823 & -22.25346020761245 & 25.22058823529411 \\ -13.09027071036027 & -22.25346020761245 & 13.090270710360265 & -22.2534602076125 \\ 22.25346020761245 & 25.220588235294112 & -22.2534602076125 & 50.44117647058823 \end{bmatrix} \cdot 10^7 + \\
 &\begin{bmatrix} 3.157142857142857 & 1.5138095238095235 & 1.092857142857143 & -0.89452380952381 \\ 1.5138095238095235 & 0.935809523809524 & 0.8945238095238093 & -0.70185714285714 \\ 1.092857142857143 & 0.8945238095238093 & 3.157142857142857 & -1.513809523809524 \\ -0.89452380952381 & -0.70185714285714 & -1.513809523809524 & 0.935809523809524 \end{bmatrix} \cdot 10^7 = \\
 &\begin{bmatrix} 16.24741356750312 & 23.767269731421973 & -11.99741356750312 & 21.35893639808864 \\ 23.767269731421973 & 51.37698599439775 & -21.3589363980886 & 24.51873109243697 \\ -11.99741356750312 & -21.3589363980886 & 16.24741356750312 & -23.767269731422 \\ 21.35893639808864 & 24.51873109243697 & -23.767269731422 & 51.37698599439775 \end{bmatrix} \cdot 10^7
 \end{aligned}$$

Za tretji končni element sledi:

$$\begin{aligned}
 [k_3] &= [k_{n,3}] + [k_{z,w,3}] = \\
 &\begin{bmatrix} 4.373177842565594 & 10.7142857142857 & -4.373177842565594 & 10.714285714286 \\ 10.7142857142857 & 35 & -10.7142857142857 & 17.5 \\ -4.373177842565594 & -10.7142857142857 & 4.373177842565594 & -10.714285714286 \\ 10.714285714286 & 15.399124999999994 & -10.714285714286 & 35 \end{bmatrix} \cdot 10^7 + \\
 &\begin{bmatrix} 4.55 & 3.144166666666667 & 1.575 & -1.857916666666667 \\ 3.144166666666667 & 2.8011666666666675 & 1.857916666666667 & -2.100875 \\ 1.575 & 1.857916666666667 & 4.55 & -3.144166666666667 \\ -1.857916666666667 & -2.100875 & -3.144166666666667 & 2.8011666666666675 \end{bmatrix} \cdot 10^7 = \\
 &\begin{bmatrix} 8.923177842565595 & 13.858452380952377 & -2.798177842565595 & 8.85636904761904 \\ 13.858452380952377 & 37.801166666666666 & -8.85636904761904 & 15.399125 \\ -2.798177842565595 & -8.85636904761904 & 8.923177842565595 & -13.8584523809524 \\ 8.85636904761904 & 15.399125 & -13.8584523809524 & 37.801166666666666 \end{bmatrix} \cdot 10^7
 \end{aligned}$$

Togostna matrika konstrukcije je tako:

$$[k] = \begin{bmatrix} 39.600133 & -10.519991 & 16.903161 & 0 & 0 & 0 \\ -10.519991 & 25.804656 & 8.838945 & -11.997414 & 21.358936 & 0 \\ 16.903161 & 8.838945 & 90.977118 & -21.3589364 & 24.518731 & 0 \\ 0 & -11.997414 & -21.3589364 & 25.170591 & -9.908817 & 8.856369 \\ 0 & 21.358936 & 24.518731 & -9.908817 & 89.178153 & 15.399125 \\ 0 & 0 & 0 & 8.856369 & 15.399125 & 37.801167 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Obtežni vektorji zaradi porazdeljene obtežbe so:

$$\{F_1\} = \begin{Bmatrix} -92000 \\ -70533.3333333333 \\ -92000 \\ 70533.3333333333 \end{Bmatrix} \quad \{F_2\} = \begin{Bmatrix} -68000 \\ -38533.3333333333 \\ -68000 \\ 38533.3333333333 \end{Bmatrix} \quad \{F_3\} = \begin{Bmatrix} -98000 \\ -80033.3333333336 \\ -98000 \\ 80033.3333333336 \end{Bmatrix}$$

Celotni globalni obtežni vektor konstrukcije pa dobimo, ko poleg prispevkov iz porazdeljene obtežbe upoštevamo še koncentrirane sile:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} -70533.3333333333 \\ -160000 \\ 32000 \\ -166000 \\ -41500 \\ 80033.3333333336 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -800000 \\ 0 \\ -500000 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -70533.3333333333 \\ -960000 \\ 32000 \\ -666000 \\ -41500 \\ 80033.3333333336 \end{Bmatrix}$$

Rešitve sistema bistvenih enačb konstrukcije so:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.1885708690936763 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -8.863741637759402 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -8.06483636662019 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ -7.618284692843066 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ 1.190640342368241 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -1.51156325741641 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

in predstavljajo zgolj približke točnih rešitev (napaki obeh vozliščnih pomikov znašata - 1.283 % oz. -1.442 %).

*Poprocesiranje: iskanje vozliščnih vrednosti sekundarnih spremenljivk in notranjih statičnih količin*

Notranje statične količine v vozliščih *posameznega elementa* dobimo tako, da togostno matriko elementa pomnožimo z vektorjem pomikov elementa, ter odštejemo nadomestne vozliščne obtežbe, ki so bile tam upoštevane zgolj zaradi prevedbe porazdeljene obtežbe v navidezno vozliščno obtežbo. Za prvi končni element sledi:

$$\{Q_1\} = [k_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\} = [k_1] \cdot \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \Phi_1 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -92000 \\ -70533.3333333333 \\ -92000 \\ 70533.3333333333 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 9.5572426587 & 14.928324782 & -3.807242659 & 10.519991448 \\ 14.928324782 & 39.600132505 & -10.51999145 & -16.90316149 \\ -3.807242659 & -10.51999145 & 9.5572426587 & -14.92832478 \\ 10.519991448 & -16.90316149 & -14.92832478 & 39.600132505 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \text{ m} \\ -2.188571 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -8.863742 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -8.064836 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{Bmatrix} -92000 \\ -70533.33333 \\ -92000 \\ 70533.33333 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 17905.17576540321 \\ 1.0186340659857 \cdot 10^{-10} \\ -404497.33209959767 \\ 563368.5490712451 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,1} \\ M_{z,1} \\ V_{y,2\text{levo}} \\ M_{z,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 17905.17576540321 \text{ N} \\ 1.0186340659857 \cdot 10^{-10} \text{ Nm} \\ 404497.33209959767 \text{ N} \\ 563368.5490712451 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Za drugi končni element sledi:

$$\{Q_2\} = [k_2] \cdot \{U_2\} - \{F_2\} = [k_2] \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -68000 \\ -38533.3333333333 \\ -68000 \\ 38533.3333333333 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 16.2474135675 & 23.767269731423 & -11.9974135675 & 21.3589363981 \\ 23.76726973142 & 51.3769859944 & -21.358936398 & 24.5187310924 \\ -11.9974135675 & -21.358936398 & 16.2474135675 & -23.76726973 \\ 21.3589363981 & 24.5187310924 & -23.76726973 & 51.3769859944 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} -8.863742 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -8.064836 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ -7.618287 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ 1.190640 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{Bmatrix} -68000 \\ -38533.3333 \\ -68000 \\ 38533.3333 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -395502.66790040274 \\ -563368.5490712455 \\ -217080.85364518076 \\ 292899.5673868929 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,2\text{desno}} \\ M_{z,2} \\ V_{y,3\text{levo}} \\ M_{z,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -395502.66790040274 \text{ N} \\ 563368.5490712455 \text{ Nm} \\ 217080.85364518076 \text{ N} \\ 292899.5673868929 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Za tretji končni element sledi:

$$\{Q_3\} = [k_3] \cdot \{U_3\} - \{F_3\} = [k_3] \cdot \begin{Bmatrix} Y_3 \\ \Phi_3 \\ Y_4 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -98000 \\ -80033.3333333336 \\ -98000 \\ 80033.3333333336 \end{Bmatrix} =$$

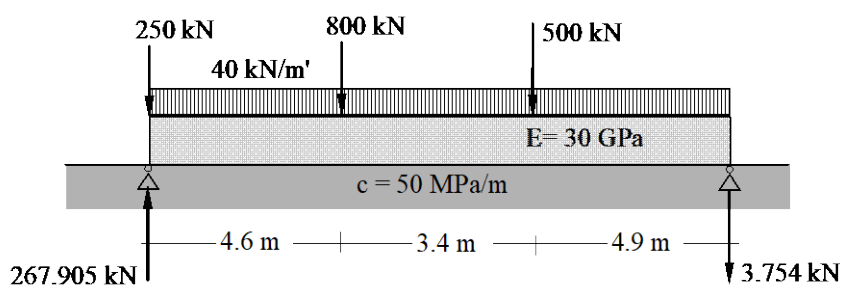
$$\begin{bmatrix} 8.9231778426 & 13.858452381 & -2.7981778426 & 8.856369048 \\ 13.858452381 & 37.801166667 & -8.856369048 & 15.399125 \\ -2.7981778426 & -8.856369048 & 8.9231778426 & -13.85845238 \\ 8.856369048 & 15.399125 & -13.85845238 & 37.801166667 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} -7.618287 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ 1.190640 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ 0 \\ -1.511563 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{Bmatrix} -98000 \\ -80033.3333 \\ -98000 \\ 80033.3333 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -282919.1463548188 \\ -292899.5673868929 \\ -3753.6227282909676 \\ 7.275957614183426 \cdot 10^{-11} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,3\text{desno}} \\ M_{z,3} \\ V_{y,4} \\ M_{z,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -282919.1463548188 \text{ N} \\ 292899.5673868929 \text{ Nm} \\ 3753.6227282909676 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Vrednosti sekundarnih spremenljivk, ki predstavljajo vozlične sile in momente na navidezno prosto telo (element), so podane v koordinatnem sistemu metode končnih elementov, kar pomeni, da moramo v *začetnem* vozlišču spremeniti predznak *momenta*, v *končnem* vozlišču pa predznak *prečne sile*. Ker so za njihov izračun uporabljene približne vrednosti pomikov in zasukov, tudi vrednosti notranjih statičnih količin niso točne.

*Poprocesiranje: izračun reakcij*

Izračunani vektorji sekundarnih spremenljivk pokažejo, da vertikalna reakcija v levi podpori znaša 267905.17576540321 N in je usmerjena navzgor. Vrednost 17905.17576540321 N odčitamo neposredno iz prvega člena vektorja  $\{Q_1\}$ , dodati pa moramo še 250000 N zaradi sile, ki deluje neposredno v podpori, in je v analizi nismo upoštevali, ker ne vpliva na pomike v polju, saj gre za nepomično podporo. Vertikalna reakcija v desni podpori znaša 3753.6227282909676 N in je usmerjena *navzdol*. Vsota obeh reakcij sedaj ni enaka aplicirani obtežbi, saj (večji) del obtežbe prevzame tudi zemljina.



Slika 158: Prikaz reakcij

*Poprocesiranje rezultatov – iskanje približnih funkcij prečnega pomika s polinomi H1*

Približne funkcije pomika po posameznem elementu, ki jih izračunamo s pomočjo standardnih interpolacijskih funkcij H1, so:

$$\begin{aligned}
 v_{1,N}(x) &= Y_1 \cdot N_{1,1}(x) + \Phi_1 \cdot N_{1,2}(x) + Y_2 \cdot N_{1,3}(x) + \Phi_2 \cdot N_{1,4}(x) \\
 &= 0 \text{ m} \cdot N_{1,1}(x) + (-2.1885708690936763 \cdot 10^{-3} \text{ rad}) \cdot N_{1,2}(x) + (-8.863741637759402 \cdot 10^{-3} \text{ m}) \cdot N_{1,3}(x) \\
 &+ (-8.06483636662019 \cdot 10^{-4} \text{ rad}) \cdot N_{1,4}(x) = -2.1885708690936763 \cdot 10^{-3} \cdot x \\
 &- 1.297990637509971 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 4.058346910744851 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 \quad 0 \leq x \leq 4.6 \text{ m} \\
 v_{2,N}(x) &= Y_2 \cdot N_{2,1}(x) + \Phi_2 \cdot N_{2,2}(x) + Y_3 \cdot N_{2,3}(x) + \Phi_3 \cdot N_{2,4}(x) \\
 &= (-8.863741637759402 \cdot 10^{-3} \text{ m}) \cdot N_{2,1}(x) + (-8.06483636662019 \cdot 10^{-4} \text{ rad}) \cdot N_{2,2}(x) + \\
 &+ (-7.618284692843066 \cdot 10^{-3} \text{ m}) \cdot N_{2,3}(x) + 1.190640342368241 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot N_{2,4}(x) \\
 &= 7.247786154282745 \cdot 10^{-3} - 6.836376194481901 \cdot 10^{-3} \cdot x + 8.634169348654235 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 \\
 &- 3.0144033442690743 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 \quad 4.6 \text{ m} \leq x \leq 8 \text{ m}
 \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} v_{3,N}(x) &= Y_3 \cdot N_{3,1}(x) + \Phi_3 \cdot N_{3,2}(x) + Y_4 \cdot N_{3,3}(x) + \Phi_4 \cdot N_{3,4}(x) \\ &= (-7.618284692843066 \cdot 10^{-3} \text{ m}) \cdot N_{2,1}(x) + 1.190640342368241 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot N_{2,2}(x) + 0 \cdot N_{2,3}(x) \\ &\quad + 1.51156325741641 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot N_{2,4}(x) = 1.6176331047944303 \cdot 10^{-3} - 4.585301708253282 \cdot 10^{-3} \cdot x \\ &\quad + 5.645617375030334 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 - 1.6963779944932308 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 \quad 8 \text{ m} \leq x \leq 12.9 \text{ m} \end{aligned}$$

Ker pa so znane štiri diskretne vozliščne vrednosti pomika, lahko z njihovo pomočjo poiščemo nadomestno približno enovito funkcijo prečnega pomika za cel temelj (kar pa zaradi dveh koncentriranih sil v polju ni najbolj korektno). Zaradi štirih informacij izhajamo iz splošnega polinoma tretjega reda v obliki:

$$v_N(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 12.9 \text{ m}$$

Za določitev neznanih konstant so na voljo štiri diskretne vozliščne vrednosti pomika:

$$\begin{aligned} v_N(0) &= 0 \text{ m} \\ v_N(4.6 \text{ m}) &= -8.863741637759402 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ v_N(8 \text{ m}) &= -7.618284692843066 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ v_N(12.9 \text{ m}) &= 0 \text{ m} \end{aligned}$$

Rešitve za iskane konstante, ki jih določimo z rešitvijo sistema 4 linearnih enačb, so:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= -3.6547633777863895 \cdot 10^{-3} \\ a_2 &= 4.267807171572977 \cdot 10^{-4} \\ a_3 &= -1.1121374157458995 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

in tako sledi približna enovita funkcija prečnega pomika:

$$v_N(x) = -3.6547633777863895 \cdot 10^{-3} \cdot x + 4.267807171572977 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 - 1.1121374157458995 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 \\ 0 \text{ m} \leq x \leq 12.9 \text{ m}$$

Opomba: v analizo bi lahko vključili tudi znane vse štiri vrednosti zasuka, s čimer bi dvignili stopnjo polinoma.

Do enake funkcije prečnega pomika pridemo tudi z Lagrangeovo (ali pa Newtonovo) interpolacijo. Ker sta vrednosti funkcije v prvem in zadnjem vozlišču enaki nič, potrebujemo samo Lagrangeova bazna polinoma za drugo in tretje vozlišče:

$$l_2(x) = \frac{(x-0) \cdot (x-8) \cdot (x-12.9)}{(4.6-0) \cdot (4.6-8) \cdot (4.6-12.9)} = 0.7949958401380457 \cdot x - 0.16100206452408095 \cdot x^2 + 7.703448063353156 \cdot 10^{-3} \cdot x^3 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 12.9 \text{ m}$$

in

$$l_3(x) = \frac{(x-0) \cdot (x-4.6) \cdot (x-12.9)}{(8-0) \cdot (8-4.6) \cdot (8-12.9)} = -0.4452280912364945 \cdot x + 0.13130252100840334 \cdot x^2 - 7.50300120048019 \cdot 10^{-3} \cdot x^3 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 12.9 \text{ m}$$

Tako (ponovno) sledi:

$$\begin{aligned} v_{N,L}(x) &= v_N(4.6 \text{ m}) \cdot l_2(x) + v_N(8 \text{ m}) \cdot l_3(x) = Y_2 \cdot l_2(x) + Y_3 \cdot l_3(x) = \\ &= (-8.863741637759402 \cdot 10^{-3} \text{ m}) \cdot (0.7949958 \cdot x - 0.1610021 \cdot x^2 + 7.7034481 \cdot 10^{-3} \cdot x^3) + \\ &= (-7.618284692843066 \cdot 10^{-3} \text{ m}) \cdot (-0.4452281 \cdot x + 0.13130254 \cdot x^2 - 7.5030012 \cdot 10^{-3} \cdot x^3) \\ &= -3.654763377786391 \cdot 10^{-3} \cdot x + 4.267807171572978 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 - 1.112137415745902 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 \\ &\quad 0 \text{ m} \leq x \leq 12.9 \text{ m} \end{aligned}$$

Izpeljava funkcije prečnega pomika s pomočjo Lagrangeove interpolacije torej predstavlja alternativni pristop za določitev (enakih) koeficientov splošne polinomske funkcije, vendar brez reševanja sistema linearnih enačb, kar je prednost pristopa. Slabost tega pristopa pa je, da v analizo ne moremo vključiti tudi znanih vrednosti zasuka.

Kadar pa je iskano zgolj manjše število diskretnih interpoliranih vrednosti, pa je uporaba Lagrangeove interpolacije, ki ne zahteva zapisa splošne funkcije, morda učinkovitejše. Za vrednost pomika na sredini srednjega polja ( $x = 6.3 \text{ m}$ ) tako sledita vrednosti:

$$l_2(6.3) = \frac{(6.3-0) \cdot (6.3-8) \cdot (6.3-12.9)}{(4.6-0) \cdot (4.6-8) \cdot (4.6-12.9)} = 0.544525929806182$$

in

$$l_3(6.3) = \frac{(6.3-0) \cdot (6.3-4.6) \cdot (6.3-12.9)}{(8-0) \cdot (8-4.6) \cdot (8-12.9)} = 0.5303571428571432$$

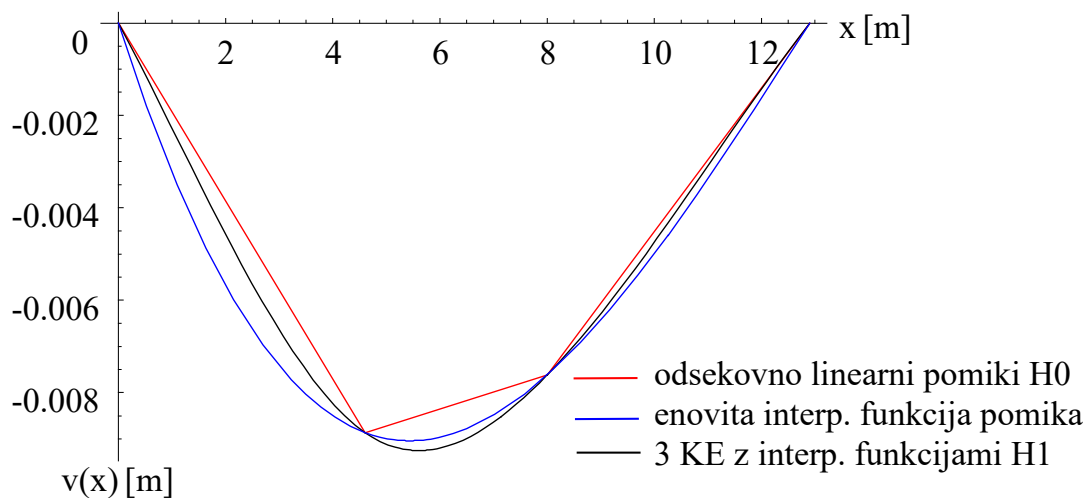
Tako sledi:

$$\begin{aligned} v_{N,L}(6.3 \text{ m}) &= v_N(4.6 \text{ m}) \cdot l_2(6.3) + v_N(8 \text{ m}) \cdot l_3(6.3) = Y_2 \cdot l_2(6.3) + Y_3 \cdot l_3(6.3) \\ &= (-8.863741637759402 \cdot 10^{-3} \text{ m}) \cdot 0.544525929806182 \\ &\quad + (-7.618284692843066 \cdot 10^{-3} \text{ m}) \cdot 0.5303571428571432 = -8.866948860031264 \cdot 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

Iz približne funkcije prečnega pomika, dobljene z interpolacijo H1 izključno za drugi končni element, pa sledi vrednost:

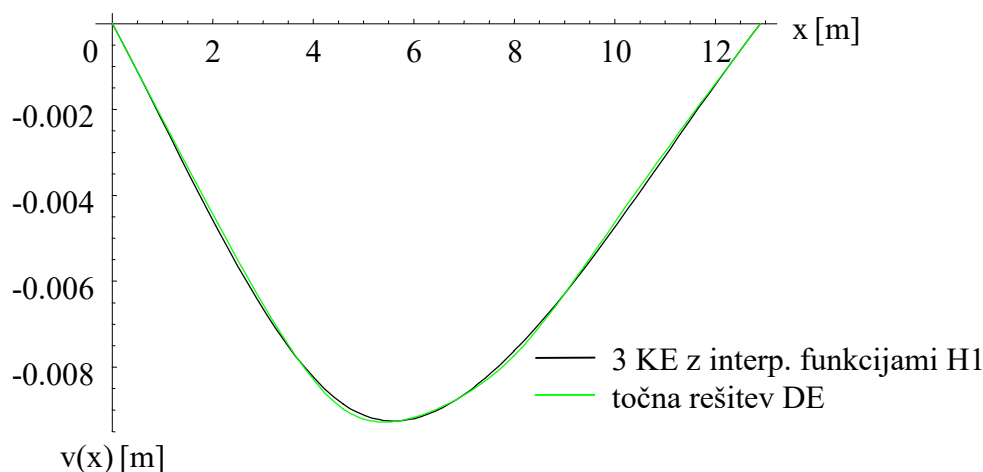
$$\begin{aligned} v_{2,N}(6.3 \text{ m}) &= 7.247786154282745 \cdot 10^{-3} - 6.836376194481901 \cdot 10^{-3} \cdot 6.3 \\ &\quad + 8.634169348654235 \cdot 10^{-4} \cdot 6.3^2 - 3.0144033442690743 \cdot 10^{-5} \cdot 6.3^3 \\ &= -9.089790856389066 \cdot 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

Opomba: točna vrednost pomika, ki sledi npr. iz rešitev vezanih diferencialnih enačb, znaša -9.055527233101985 mm.



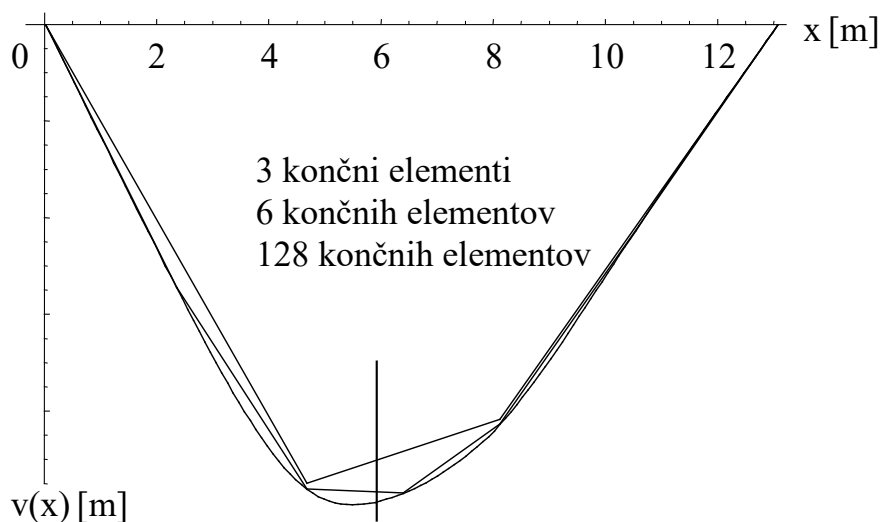
Slika 159: Primerjava grafov različnih numeričnih rešitev za prečni pomik

Iz slike vidimo, da je med enovito interpolirano funkcijo prečnega pomika, dobljeno z Lagrangeovo interpolacijo (modra linija), in po elementih izračunanimi polinomskimi odsekovnimi funkcijami prečnega pomika (črna linija), opazno odstopanje.



Slika 160: Primerjava grafa numerične rešitve za prečni pomik z analitično rešitvijo

Iz zadnje slike pa vidimo, da je med odsekovno izračunano funkcijo prečnega pomika, ki je bila pridobljena s pomočjo polinomskih interpolacijskih funkcij H1 (črna linija), in točno rešitvijo (zeleno linijo), ki nima oblike polinoma, temveč vsebuje trigonometrične člene, ujemanje dobro, ne pa tudi popolno. Boljše ujemanje je mogoče dobiti s povečanim številom končnih elementov. Slika numeričnih rešitev za različne diskretizacije - mreže s 3, 6 in 128 končnimi elementi pa pokaže, da je v primeru dovolj velikega števila končnih elementov inženirsko odlične rešitve mogoče dobiti kar z enostavno odsekovno linearno oz. H0 interpolacijo med vozlišči:



Slika 161: Prikaz konvergence rešitev za funkcijo prečnega pomika različnih diskretizacij

*Poprocesiranje: iskanje funkcij upogibnega momenta in prečne sile*

Z uporabo interpolacijskih funkcij (že znanih iz analize funkcije prečnega pomika) sledi za prvi končni element približni izraz za upogibni moment (za vse elemente uporabimo H1 interpolacijske funkcije za vpete robne pogoje):

$$\begin{aligned} M_{z1,N}(x) &= M_{z,1} \cdot N_{1,1}(x) + V_{y,1} \cdot N_{1,2}(x) + M_{z,2} \cdot N_{1,3}(x) + V_{y,2\text{levo}} \cdot N_{1,4}(x) \\ &= 0 \cdot N_{1,1}(x) + 17905.175765403 \cdot N_{1,2}(x) + 563368.54907125 \cdot N_{1,3}(x) + 404497.332099598 \cdot N_{1,4}(x) \\ &= 17905.17576540321 \cdot x - 15846.394021083324 \cdot x^2 + 8386.562402775064 \cdot x^3 \quad 0 \leq x \leq 4.6 \text{ m} \end{aligned}$$

Za drugi končni element velja:

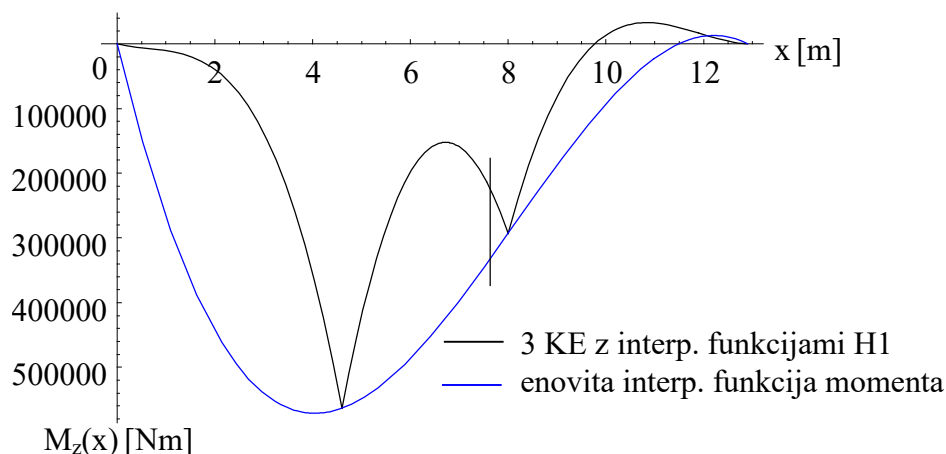
$$\begin{aligned} M_{z2,N}(x) &= M_{z,2} \cdot N_{2,1}(x) + V_{y,2\text{desno}} \cdot N_{2,2}(x) + M_{z,3} \cdot N_{2,3}(x) + V_{y,3\text{levo}} \cdot N_{2,4}(x) \\ &= 563368.54907 \cdot N_{2,1}(x) - 395502.6679 \cdot N_{2,2}(x) + 292899.56739 \cdot N_{2,3}(x) + 217080.853645 \cdot N_{2,4}(x) \\ &= 4.631973070927612 \cdot 10^6 - 1.4088245278801247 \cdot 10^6 \cdot x + 121676.95478591265 \cdot x^2 \\ &\quad - 1671.4890367150874 \cdot x^3 \quad 4.6 \text{ m} \leq x \leq 8 \text{ m} \end{aligned}$$

Za tretji končni element pa sledi:

$$\begin{aligned} M_{z3,N}(x) &= M_{z,3} \cdot N_{3,1}(x) + V_{y,3\text{desno}} \cdot N_{2,2}(x) + M_{z,3} \cdot N_{2,3}(x) + V_{y,3} \cdot N_{2,4}(x) \\ &= 292899.5673868929 \cdot N_{3,1}(x) - 282919.1463548188 \cdot N_{3,2}(x) + 0 \cdot N_{3,3}(x) \\ &\quad + 3753.6227282909676 \cdot N_{3,4}(x) = 1.0959241144013867 \cdot 10^7 - 2.809128118142996 \cdot 10^6 \cdot x \\ &\quad + 237662.1614257122 \cdot x^2 - 6647.841724079257 \cdot x^3 \quad 8 \text{ m} \leq x \leq 12.9 \text{ m} \end{aligned}$$

Če za izračun približne enovite funkcije upogibnega momenta (ki zaradi dveh koncentriranih sil v polju ni najbolj korektna) uporabimo npr. Lagrangeovo interpolacijo, sledi enovita približna rešitev v obliki:

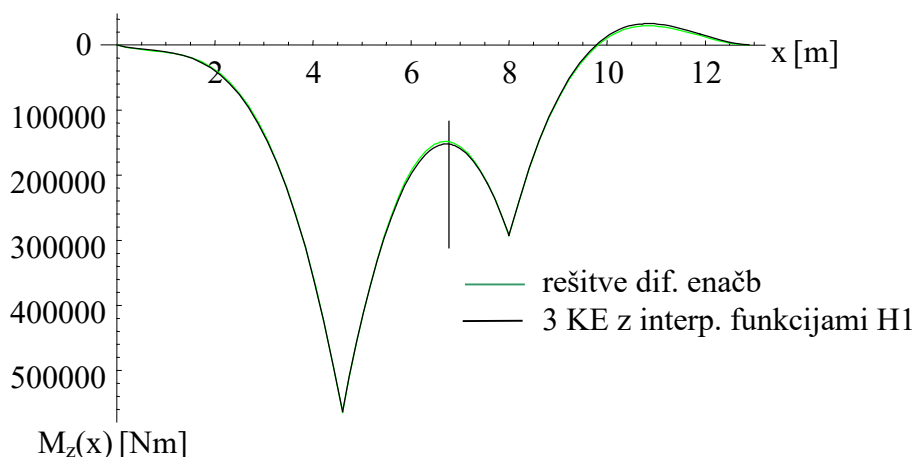
$$\begin{aligned} M_{z,N,L}(x) &= M_{z,2} \cdot l_2 + M_{z,3} \cdot l_3 = \\ &= 563368.54907 \cdot (0.7949958 \cdot x - 0.1610021 \cdot x^2 + 7.7034481 \cdot 10^{-3} \cdot x^3) + \\ &= 292899.5673868929 \cdot (-0.4452281 \cdot x + 0.13130254 \cdot x^2 - 7.5030012 \cdot 10^{-3} \cdot x^3) \\ &= 317468.5376645853 \cdot x - 52245.04788823677 \cdot x^2 + 2142.254552572977 \cdot x^3 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 12.9 \text{ m} \end{aligned}$$



Slika 162: Grafa različnih numeričnih rešitev za upogibni moment

Iz grafa je razvidno, da enovita interpolirana funkcija momenta (modra linija), dobljena z Lagrangeovo interpolacijo, daje popolnoma napačno predstavitev porazdelitve upogibnega momenta v primerjavi s (sicer prav tako približnimi, a vseeno kvalitetnejšimi) funkcijami upogibnega momenta (črna linija), dobljenimi s pomočjo H1 interpolacijskih funkcij. Vzrok temu je, da ima funkcija prečne sile, ki je povezana z odvodom funkcije upogibnega momenta, diskretne skoke na mestih obeh koncentriranih sil.

Grafična primerjava točnih (iz diferencialnih enačb, zelena linija) in približnih numeričnih rešitev po elementih (s pomočjo interpolacijskih funkcij H1, črna linija) za upogibni moment pokaže, da so dobljeni približki upogibnega momenta zelo dobri:

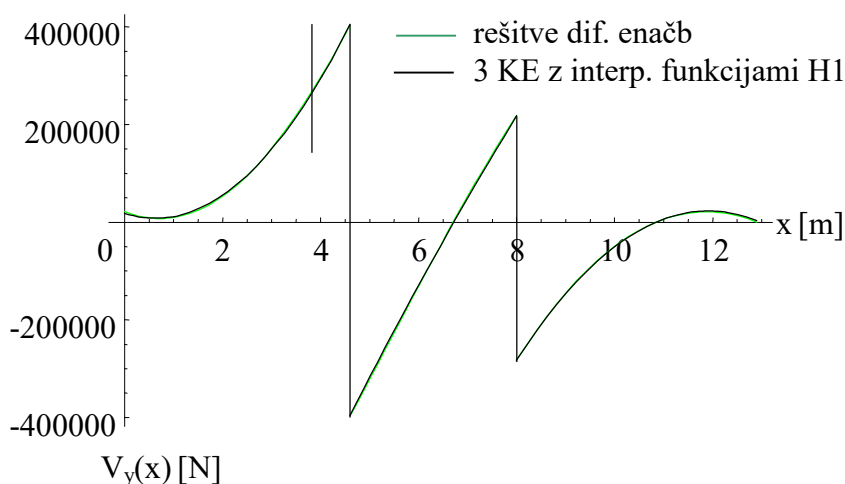


Slika 163: Grafa različnih numeričnih rešitev za upogibni moment

Približne funkcije prečne sile po elementih sledijo z odvajanjem izrazov za upogibni moment:

$$\begin{aligned}
 V_{y1,N}(x) &= 17905.1757654032 - 31692.7880421667 \cdot x + 25159.6872083252 \cdot x^2 & 0 \leq x \leq 4.6 \text{ m} \\
 V_{y2,N}(x) &= -1.4088245278801 \cdot 10^6 + 243353.90957183 \cdot x - 5014.4671101453 \cdot x^2 & 4.6 \text{ m} \leq x \leq 8 \text{ m} \\
 V_{y3,N}(x) &= -2.809128118143 \cdot 10^6 \cdot x + 475324.3228514 \cdot x - 19943.525172238 \cdot x^2 & 8 \text{ m} \leq x \leq 12.9 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Grafična primerjava pravih (zelena linija) in numeričnih rešitev (črna linija) za prečno silo pokaže, da so tudi dobljeni približki prečne sile zelo dobri:



Slika 164: Grafa različnih numeričnih rešitev za prečno silo

Primerjalna preglednica rezultatov različnih diskretizacij/računskih modelov jasno pokaže, da z zgoščevanjem mreže končnih elementov numerične rešitve konvergirajo k analitičnim vrednostim.

Preglednica 1

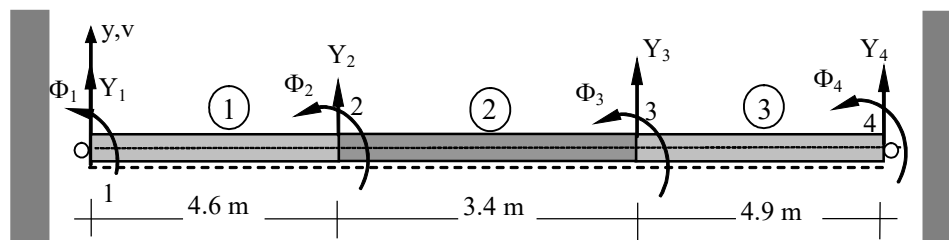
model	reakcija $V_A^*$ [N]	reakcija $V_B$ [N]	$v_{\max}$ [mm]	$M_{z,\max}$ [Nm]
3 KE	17905.175765	-3753.622728	-8.8637416**	563368.5491
6 KE	21720.626593	-683.879276	-9.0467301**	564450.8796
129 KE	21823.088786	-644.597690	-9.2757475**	564647.5851
1290 KE	21823.104653	-644.592884	-9.2758825**	564647.5559
analitično	21823.088839	-644.597969	-9.2758830	564647.5867

\* brez upoštevanja koncentrirane obtežne sile v prvem vozlišču

\*\* vrednosti v vozliščih mreže končnih elementov

## 2. pristop – alternativna diskretizacija s tremi končnimi elementi drugačnih tipov

V tem modelu bomo ponovno uporabili tri končne elemente, vendar bomo členkasta zaključka nosilca modelirali kot členkasta priključka končnih elementov v togih vozliščih, torej s končnimi elementi tipov Č-V in V-Č, kar bo vodilo do manjšega računskega modela.



Slika 165: Druga izbrana diskretizacija

Prostostne stopnje so  $Y_1$ ,  $\Phi_1$ ,  $Y_2$ ,  $\Phi_2$ ,  $Y_3$ ,  $\Phi_3$ ,  $Y_4$  in  $\Phi_4$ , ki predstavljajo vozliščne vertikalne pomike in zasuke. Ker pa sta vertikalna pomika in zasuka vozlišč 1 in 3 preprečena, ima model sedaj samo štiri prostostne stopnje ( $Y_2$ ,  $\Phi_2$ ,  $Y_3$  in  $\Phi_3$ ).

Togostne matrike končnih elementov so ponovno sestavljene iz prispevkov nosilcev in zemljine in za prvi končni element sledita drugačni matriki (ter njuna vsota) kot v prvi diskretizaciji:

$$\begin{aligned}
 [k_1] &= [k_{n,1}] + [k_{z,1}] = \begin{bmatrix} 1.3214535218213197 & 0 & -1.3214535218213197 & 6.078686200378071 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.3214535218213197 & 0 & 1.3214535218213197 & -6.078686200378071 \\ 6.078686200378071 & 0 & -6.078686200378071 & 27.961956521739125 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \\
 &+ \begin{bmatrix} 2.7107142857142854 & 0 & 1.6017857142857141 & -2.0782142857142856 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.6017857142857141 & 0 & 5.585714285714285 & -4.534285714285714 \\ -2.0782142857142856 & 0 & -4.534285714285714 & 4.635047619047618 \end{bmatrix} \cdot 10^7 = \\
 &\begin{bmatrix} 4.032167807535605 & 0 & -0.2803321924643945 & -4.000471914663786 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2803321924643945 & 0 & 6.907167807535605 & -10.612971914663783 \\ 4.000471914663786 & 0 & -10.612971914663783 & 32.597004140786744 \end{bmatrix} \cdot 10^7
 \end{aligned}$$

Za drugi končni element sta togostni matriki nosilca in zemljine enaki kot v prejšnji diskretizaciji, za tretji končni element pa ponovno sledita drugačni matriki (ter njuna vsota) kot v prvi diskretizaciji:

$$\begin{aligned}
[k_3] &= [k_{n,3}] + [k_{z,3}] = \\
&\begin{bmatrix} 1.0932944606413986 & 5.357142857142854 & -1.0932944606413986 & 0 \\ 5.357142857142854 & 26.25 & -5.357142857142854 & 0 \\ -1.0932944606413986 & -5.357142857142854 & 1.0932944606413986 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7 + \\
&\begin{bmatrix} 5.95 & 5.145 & 1.70625 & 0 \\ 5.145 & 5.602333333333335 & 2.358125 & 0 \\ 1.70625 & 2.358125 & 2.8875 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7 = \\
&\begin{bmatrix} 7.043294460641399 & 10.502142857142854 & 0.6129555393586017 & 0 \\ 10.502142857142854 & 31.852333333333327 & -2.9990178571428534 & 0 \\ 0.6129555393586017 & -2.9990178571428534 & -3.980794460641399 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7
\end{aligned}$$

Togostna matrika konstrukcije je tako (primerjava togostnih matrik konstrukcije iz obeh diskretizacij pokaže, da togostne matrike tega modela ne moremo dobiti enostavno s črtanjem vrstic in stolpcev, ki pripadajo zasukoma  $\Phi_1$  in  $\Phi_4$  v togostni matriki tega modela):

$$[k] = \begin{bmatrix} 2.315458137503872 & 1.315429781675819 & -1.19974135675031 & 2.135893639808864 \\ 1.315429781675819 & 8.397399013518449 & -2.13589363980886 & 2.451873109243697 \\ -1.19974135675031 & -2.13589363980886 & 2.329070802814452 & -1.32651268742791 \\ 2.135893639808864 & 2.451873109243697 & -1.32651268742791 & 8.322931932773107 \end{bmatrix} \cdot 10^8$$

Obtežni vektorji zaradi porazdeljene obtežbe so (glede na prvo diskretizacijo se spremenita samo prvi in tretji):

$$\{F_1\} = \begin{Bmatrix} -69000 \\ 0 \\ -115000 \\ 105800 \end{Bmatrix} \quad \{F_2\} = \begin{Bmatrix} -68000 \\ -38533.33333333333 \\ -68000 \\ 38533.33333333333 \end{Bmatrix} \quad \{F_3\} = \begin{Bmatrix} -122500 \\ -120050 \\ -73500 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Celotni globalni obtežni vektor konstrukcije je:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} -183000 \\ 67266.66666666666 \\ -190500 \\ -81516.66666666667 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -800000 \\ 0 \\ -500000 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -983000 \\ 67266.66666666666 \\ -690500 \\ -81516.66666666667 \end{Bmatrix}$$

Rešitve sistema so sedaj samo 4:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -8.806675375149313 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -8.141321301986719 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ -7.5666122619274 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ 1.1959603714758093 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Rešitve so podobne prejšnjim, niso pa enake, ker z uporabljenim modelom (s seštevanjem togostnih matrik nosilca in zemljine) dobimo zgolj približke rešitev. Zaradi manjšega števila uporabljenih prostostnih stopenj so te vrednosti sedaj manj kvalitetne od prejšnjih (napaki obeh vozliščnih pomikov sta sedaj zato nekoliko višji in znašata -1.918 % ter -2.110 %).

*Poprocesiranje: iskanje notranjih statičnih količin in sekundarnih spremenljivk v vozliščih*

Za prvi končni element sledi:

$$\{Q_1\} = [k_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\} = [k_1] \cdot \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \Phi_1 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -69000 \\ 0 \\ -115000 \\ 105800 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4.03216780754 & 0 & 0.280332192464 & 4.00047191466 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.280332192464 & 0 & 6.90716780754 & -10.6129719147 \\ 4.00047191466 & 0 & -10.6129719147 & 32.59700414079 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \text{ m} \\ \Phi_1 \\ -8.8066754 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -8.1413213 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{Bmatrix} -69000 \\ 0 \\ -115000 \\ 105800 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11742.926620770115 \\ 0 \\ -406888.2321002398 \\ 563467.2999878715 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,1} \\ M_{z,1} \\ V_{y,2\text{levo}} \\ M_{z,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11742.926620770115 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \\ 406888.2321002398 \text{ N} \\ 563467.2999878715 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Čeprav vrednost zasuka  $\Phi_1$  ni znana, to ni ovira za izračun vektorja sekundarnih spremenljivk.

Za drugi končni element sledi:

$$\{Q_2\} = [k_2] \cdot \{U_2\} - \{F_2\} = [k_2] \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -68000 \\ -38533.3333333333 \\ -68000 \\ 38533.3333333333 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 16.2474135675 & 23.76726973142 & -11.997413568 & 21.3589363981 \\ 23.76726973142 & 51.3769859944 & -21.358936398 & 24.5187310924 \\ -11.997413568 & -21.358936398 & 16.2474135675 & -23.76726973 \\ 21.3589363981 & 24.5187310924 & -23.76726973 & 51.3769859944 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} -8.806675 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -8.141321 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ -7.566612 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ 1.1959604 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{Bmatrix} -68000 \\ -38533.3333 \\ -68000 \\ 38533.3333 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -393111.7678997603 \\ -563467.2999878715 \\ -215162.68442466052 \\ 293665.1451366578 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,2\text{desno}} \\ M_{z,2} \\ V_{y,3\text{levo}} \\ M_{z,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -393111.7678997603 \text{ N} \\ 563467.2999878715 \text{ Nm} \\ 215162.68442466052 \text{ N} \\ 293665.1451366578 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Kljub temu, da je sta togostna matrika in obtežni vektor elementa enaka kot v prvi diskretizaciji, so vozliščne vrednosti notranjih statičnih količin sedaj nekoliko drugačne, kar je posledica drugačnih vozliščnih vrednosti pomika in zasuka.

Za tretji končni element sledi:

$$\{Q_3\} = [k_3] \cdot \{U_3\} - \{F_3\} = [k_3] \cdot \begin{Bmatrix} Y_3 \\ \Phi_3 \\ Y_4 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -122500 \\ -120050 \\ -73500 \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

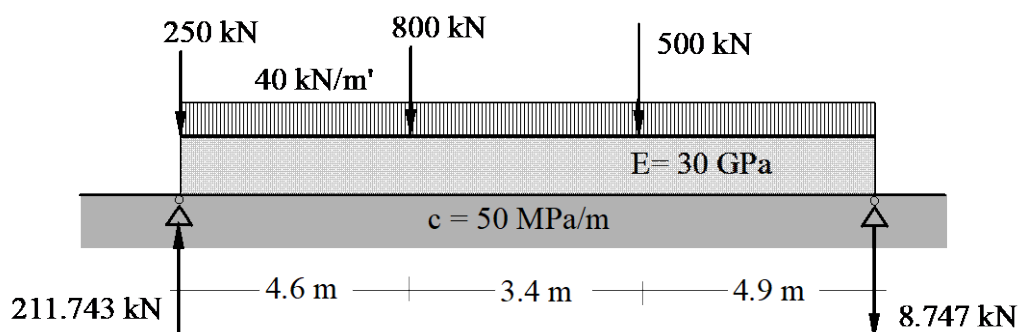
$$\begin{bmatrix} 7.04329446064139 & 10.50214285714285 & 0.612955539358602 & 0 \\ 10.50214285714285 & 31.852333333333327 & -2.99901785714285 & 0 \\ 0.612955539358602 & -2.99901785714285 & 3.980794460641399 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} -7.566612 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ 1.1959604 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ 0 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{Bmatrix} -122500 \\ -120050 \\ -73500 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -284837.31557533966 \\ -293665.1451366575 \\ -8747.03410618272 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,3\text{desno}} \\ M_{z,3} \\ V_{y,4} \\ M_{z,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -284837.31557533966 \text{ N} \\ 293665.1451366575 \text{ Nm} \\ 8747.03410618272 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

*Poprocesiranje rezultatov – izračun reakcij*

Izračunani vektorji sekundarnih spremenljivk pokažejo, da vertikalna reakcija v levi podpori znaša 11742.926620770115 N (oziroma 211742.926620770115 N z upoštevanjem koncentrirane obtežne sile, ki deluje direktno v tej podpori) in je usmerjena navzgor, medtem ko vertikalna reakcija v desni podpori znaša 8747.03410618272 N in je usmerjena navzdol. Vrednosti se nekoliko razlikujeta od vrednosti, dobljenih s prvim računskim

modelom. Njuna vsota ni enaka aplicirani obtežbi, saj večji del obtežbe prevzame tudi zemljina.



Slika 166: Prikaz reakcij drugega računskega modela

Poprocesiranje: iskanje približnih funkcij prečnega pomika s polinomi H1

Približne funkcije prečnega pomika po posameznem elementu so:

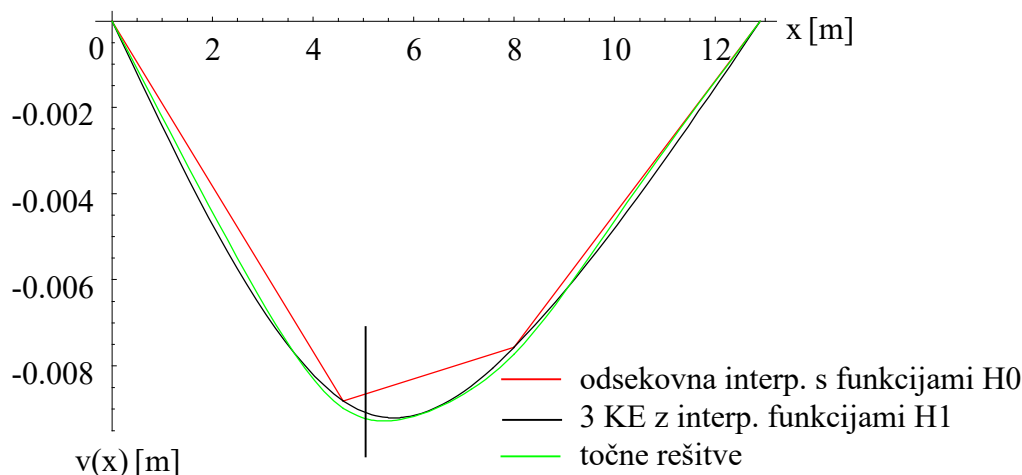
$$\begin{aligned} v_{1,N}(x) &= Y_1 \cdot N_{1,1}(x) + \Phi_1 \cdot N_{1,2}(x) + Y_2 \cdot N_{1,3}(x) + \Phi_2 \cdot N_{1,4}(x) \\ &= 0 \text{ m} \cdot N_{1,1}(x) + \Phi_1 \cdot N_{1,2}(x) + (-8.806675375149313 \cdot 10^{-3} \text{ m}) \cdot N_{1,3}(x) \\ &\quad + (-8.141321301986719 \cdot 10^{-4} \text{ rad}) \cdot N_{1,4}(x) = 2.464675905058049 \cdot 10^{-3} \cdot x \\ &\quad + 2.6001004644917728 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 \quad 0 \leq x \leq 4.6 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{2,N}(x) &= Y_2 \cdot N_{2,1}(x) + \Phi_2 \cdot N_{2,2}(x) + Y_3 \cdot N_{2,3}(x) + \Phi_3 \cdot N_{2,4}(x) \\ &= (-8.806675375149313 \cdot 10^{-3} \text{ m}) \cdot N_{2,1}(x) + (-8.141321301986719 \cdot 10^{-4} \text{ rad}) \cdot N_{2,2}(x) + \\ &\quad (-7.5666122619274 \cdot 10^{-3} \text{ m}) \cdot N_{2,3}(x) + 1.1959603714758093 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot N_{2,4}(x) \\ &= 7.365398244585708 \cdot 10^{-3} - 6.853506382759583 \cdot 10^{-3} \cdot x + 8.639435567626176 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 \\ &\quad - 3.007099038524212 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 \quad 4.6 \text{ m} \leq x \leq 8 \text{ m} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} v_{3,N}(x) &= Y_3 \cdot N_{3,1}(x) + \Phi_3 \cdot N_{3,2}(x) + Y_4 \cdot N_{3,3}(x) + \Phi_4 \cdot N_{3,4}(x) \\ &= (-7.5666122619274 \cdot 10^{-3} \text{ m}) \cdot N_{2,1}(x) + 1.1959603714758093 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot N_{2,2}(x) + 0 \cdot N_{2,3}(x) \\ &\quad \Phi_4 \cdot N_{2,4}(x) = 6.598433141851011 \cdot 10^{-3} - 1.902140045410448 \cdot 10^{-3} \cdot x \\ &\quad + 2.8065656866455566 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 - 7.252107717430378 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 \quad 8 \text{ m} \leq x \leq 12.9 \text{ m} \end{aligned}$$

Primerjava grafov različnih numeričnih rešitev za prečni pomik pokaže, da so rešitve sedaj resnično nekoliko manj kvalitetne kot v prvi diskretizaciji:



Slika 167: Primerjava grafov različnih numeričnih rešitev za prečni pomik

*Poprocesiranje rezultatov – iskanje funkcij upogibnega momenta in prečne sile*

Z uporabo interpolacijskih funkcij H1 sledi za prvi končni element približni izraz za upogibni moment (za vse elemente uporabimo interpolacijske funkcije H1 za vpete robne pogoje, že znane iz prve diskretizacije. To pomeni, da pri izračunu funkcij pri prvem in tretjem elementu uporabimo drugačne funkcije, kot smo jih maloprej pri izračunu funkcije prečnega pomika):

$$\begin{aligned} M_{z1,N}(x) &= M_{z,1} \cdot N_{1,1}(x) + V_{y,1} \cdot N_{1,2}(x) + M_{z,2} \cdot N_{1,3}(x) + V_{y,2\text{levo}} \cdot N_{1,4}(x) \\ &= 0 \cdot N_{1,1}(x) + 11742.926620770115 \cdot N_{1,2}(x) + 563467.2999878715 \cdot N_{1,3}(x) + 406888.2321002398 \cdot N_{1,4}(x) \\ &= 11742.926620770115 \cdot x - 13672.915529705744 \cdot x^2 + 8206.30321916765 \cdot x^3 \quad 0 \leq x \leq 4.6 \text{ m} \end{aligned}$$

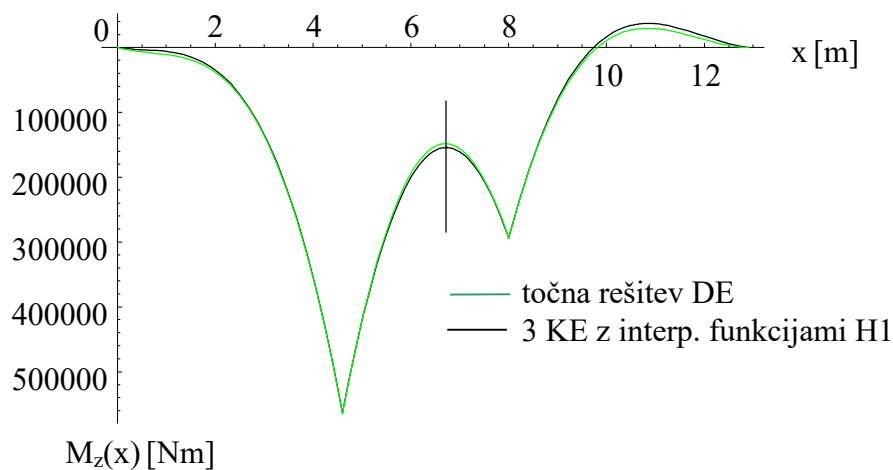
Za drugi končni element velja:

$$\begin{aligned} M_{z2,N}(x) &= M_{z,2} \cdot N_{2,1}(x) + V_{y,2\text{desno}} \cdot N_{2,2}(x) + M_{z,3} \cdot N_{2,3}(x) + V_{y,3\text{levo}} \cdot N_{2,4}(x) \\ &= 563467.2999878715 \cdot N_{2,1}(x) - 393111.7678997603 \cdot N_{2,2}(x) + 293665.1451366578 \cdot N_{2,3}(x) \\ &\quad + 215162.68442466052 \cdot N_{2,4}(x) = 4.606235925978083 \cdot 10^6 - 1.3998351156218462 \cdot 10^6 \cdot x \\ &\quad + 120911.68800043722 \cdot x^2 - 1664.527124794211 \cdot x^3 \quad 4.6 \text{ m} \leq x \leq 8 \text{ m} \end{aligned}$$

Za tretji končni element pa sledi:

$$\begin{aligned} M_{z3,N}(x) &= M_{z,3} \cdot N_{3,1}(x) + V_{y,3\text{desno}} \cdot N_{2,2}(x) + M_{z,3} \cdot N_{2,3}(x) + V_{y,3} \cdot N_{2,4}(x) \\ &= 293665.1451366575 \cdot N_{3,1}(x) - 284837.31557533966 \cdot N_{3,2}(x) + 0 \cdot N_{3,3}(x) \\ &\quad + 8747.03410618272 \cdot N_{3,4}(x) = 1.0881875894303728 \cdot 10^7 - 2.7786470769687914 \cdot 10^6 \cdot x \\ &\quad + 233944.0548219091 \cdot x^2 - 6506.745394568197 \cdot x^3 \quad 8 \text{ m} \leq x \leq 12.9 \text{ m} \end{aligned}$$

Primerjava grafov različnih numeričnih rešitev za upogibni moment pokaže spodobno ujemanje med numerično rešitvijo (črna linija), dobljeno s pomočjo interpolacijskih funkcij H1, ter analitičnimi rešitvami vezanih diferencialnih enačb (zeleni liniji).

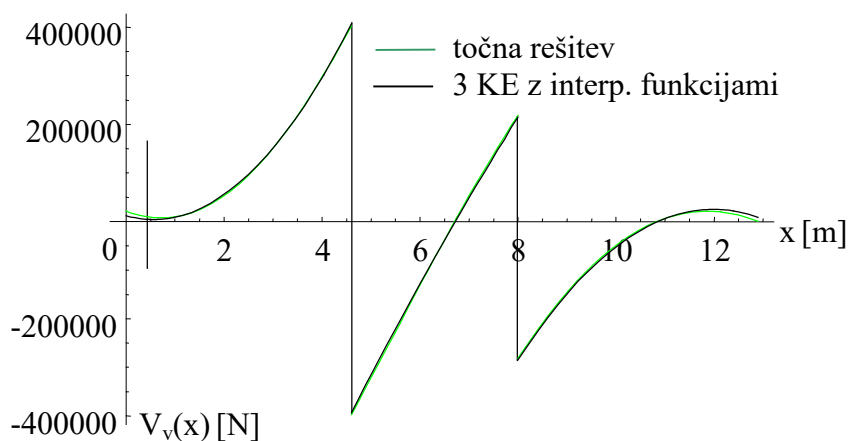


Slika 168: Grafa različnih numeričnih rešitev za upogibni moment

Približne funkcije prečne sile sledijo z odvajanjem (približnih) izrazov za upogibni moment:

$$\begin{aligned}
 V_{y1,N}(x) &= 11742.92662077012 - 27345.8310594115 \cdot x + 24618.909657503 \cdot x^2 & 0 \leq x \leq 4.6 \text{ m} \\
 V_{y2,N}(x) &= -1.399835115622 \cdot 10^6 + 241823.376001 \cdot x - 4993.5813743826 \cdot x^2 & 4.6 \text{ m} \leq x \leq 8 \text{ m} \\
 V_{y3,N}(x) &= -2.77864707697 \cdot 10^6 \cdot x + 467888.10964 \cdot x - 19520.2361837 \cdot x^2 & 8 \text{ m} \leq x \leq 12.9 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Grafična primerjava pravih (zeleni liniji) in numeričnih rešitev (črna linija) za prečne sile pokaže, da so tudi dobljeni približki funkcij prečne sile zelo dobri:



Slika 169: Grafa različnih numeričnih rešitev za prečno silo

### 3. pristop – diskretizacija s tremi točnimi končnimi elementi

Ponovno bomo uporabili diskretizacijo iz prvega računskega modela s šestimi neničelnimi prostostnimi stopnjami  $\Phi_1$ ,  $Y_2$ ,  $\Phi_2$ ,  $Y_3$ ,  $\Phi_3$  in  $\Phi_4$ , ki predstavljajo vozliščne vertikalne pomike in zasuke, vendar bomo sedaj uporabili točne končne elemente tipa V-V.

Pri uporabi teh končnih elementov togostne matrike niso več sestavljene iz ločenih prispevkov nosilcev in zemljin z Winklerjevim modelom, temveč nastopi enovita togostna matrika. Za prvi končni element sledi enovita togostna matrika v obliki:

$$[k_1] = 10^7 \cdot \begin{bmatrix} -9.45286162315999 & -14.82761041079715 & -3.9010948223063253 & -10.5199914483752 \\ 14.82761041079715 & 39.501856718397256 & -10.61463755831446 & 16.997914327202935 \\ -3.9010948223063253 & -10.61463755831446 & 9.45286162315999 & -14.82761041079715 \\ 10.5199914483752 & 16.997914327202935 & -14.82761041079715 & 39.501856718397256 \end{bmatrix}$$

Členi izračunane togostne matrike niso enaki členom matrike iz prve diskretizacije, so pa podobni (in sedaj točni).

Za drugi končni element sledi:

$$[k_2] = 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 16.22359955881419 & 23.75027355423841 & -12.018894078639846 & 21.374938453739613 \\ 23.75027355423841 & 51.36472253732657 & -21.374938453739613 & 24.53056795226318 \\ -12.018894078639846 & -21.374938453739613 & 16.22359955881419 & -23.75027355423841 \\ 21.374938453739613 & 24.53056795226318 & -23.75027355423841 & 51.36472253732657 \end{bmatrix}$$

Za tretji končni element sledi:

$$[k_3] = 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 8.781931032862206 & 13.713323653681105 & -2.9250118628037662 & 8.992649533402808 \\ 13.713323653681105 & 37.6503423978822 & -8.992649533402808 & 15.544477455823708 \\ -2.9250118628037662 & -8.992649533402808 & 8.781931032862206 & -13.713323653681105 \\ 8.992649533402808 & 15.544477455823708 & -13.713323653681105 & 37.6503423978822 \end{bmatrix}$$

Togostna matrika konstrukcije je tako:

$$[k] = \begin{bmatrix} 39.501857 & -10.614638 & 16.997914 & 0 & 0 & 0 \\ -10.614638 & 25.676461 & 8.922663 & -12.018894 & 21.374938 & 0 \\ 16.997914 & 8.922663 & 90.866579 & -21.374938 & 24.530568 & 0 \\ 0 & -12.018894 & -21.374938 & 25.005531 & -10.036950 & 8.992650 \\ 0 & 21.374938 & 24.530568 & -10.036950 & 89.015065 & 15.544477 \\ 0 & 0 & 0 & 8.992650 & 15.544477 & 37.650342 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Tudi obtežni vektorji zaradi porazdeljene obtežbe so sicer drugačni, a vseeno podobni vektorjem, dobljenim v prvem računskem modelu:

$$\{F_1\} = \begin{Bmatrix} -88828.26881365865 \\ -67407.56563972296 \\ -88828.26881365865 \\ 67407.56563972296 \end{Bmatrix} \quad \{F_2\} = \begin{Bmatrix} -67275.28768278957 \\ -38005.361607980914 \\ -67275.28768278957 \\ 38005.361607980914 \end{Bmatrix} \quad \{F_3\} = \begin{Bmatrix} -93710.70672093515 \\ -75530.78592445288 \\ -93710.70672093514 \\ 75530.78592445288 \end{Bmatrix}$$

Celotni globalni obtežni vektor konstrukcije dobimo, ko upoštevamo še koncentrirane sile:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} -67407.56563972296 \\ -156103.55649644823 \\ 29402.204031742047 \\ -160985.99440372473 \\ -37525.42431647202 \\ 75530.78592445291 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -800000 \\ 0 \\ -500000 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -67407.56563972296 \\ -956103.5564964482 \\ 29402.204031742047 \\ -660985.9944037248 \\ -37525.42431647202 \\ 75530.78592445291 \end{Bmatrix}$$

Rešitve sistema so:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.235590018644854 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -8.978904180314839 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -8.083249784172648 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ -7.729721930808879 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ 1.193742983269607 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -1.5539738628957609 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

in predstavljajo rešitve, enake analitičnim rešitvam vezanega sistema diferencialnih enačb.

Poprocesiranje: iskanje notranjih statičnih količin in sekundarnih spremenljivk v vozliščih

Za prvi končni element sledi:

$$\{Q_1\} = [k_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\} = [k_1] \cdot \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \Phi_1 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -88828.26881365865 \\ -67407.56563972296 \\ -88828.26881365865 \\ 67407.56563972296 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 9.4528616 & 14.8276104 & -3.9010948 & 10.5199914 \\ 14.8276104 & 39.5018567 & -10.6146376 & 16.9979143 \\ -3.9010948 & -10.6146376 & 9.4528616 & -14.8276104 \\ 10.5199914 & 16.9979143 & -14.8276104 & 39.5018567 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \text{ m} \\ -2.2355590 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -8.9789042 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -8.0832498 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{Bmatrix} -88828.26881365865 \\ -67407.56563972296 \\ -88828.26881365865 \\ 67407.56563972296 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 21823.088839479547 \\ 0 \\ -402783.3545245711 \\ 564647.586711739 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,1} \\ M_{z,1} \\ V_{y,2\text{levo}} \\ M_{z,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 21823.088839479547 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \\ 402783.3545245711 \text{ N} \\ 564647.586711739 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Za drugi končni element sledi:

$$\{Q_2\} = [k_2] \cdot \{U_2\} - \{F_2\} = [k_2] \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -67275.28768278957 \\ -38005.361607980914 \\ -67275.28768278957 \\ 38005.361607980914 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 16.2235996 & 23.7502736 & -12.0188941 & 21.3749385 \\ 23.7502736 & 51.3647225 & -21.3749385 & 24.5305680 \\ -12.0188941 & -21.3749385 & 16.2235996 & -23.7502736 \\ 21.3749385 & 24.5305680 & -23.7502736 & 51.3647225 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} -8.9789042 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -8.083250 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ -7.7297219 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ 1.1937439 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{Bmatrix} -67275.2876828 \\ -38005.3616080 \\ -67275.2876828 \\ 38005.3616080 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -397216.64547542883 \\ -564647.586711739 \\ -218337.11994504137 \\ 293465.56263801147 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,2\text{desno}} \\ M_{z,2} \\ V_{y,3\text{levo}} \\ M_{z,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -397216.64547542883 \text{ N} \\ 564647.586711739 \text{ Nm} \\ 218337.11994504137 \text{ N} \\ 293465.56263801147 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Za tretji končni element sledi:

$$\{Q_3\} = [k_3] \cdot \{U_3\} - \{F_3\} = [k_3] \cdot \begin{Bmatrix} Y_3 \\ \Phi_3 \\ Y_4 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -93710.70672093515 \\ -75530.78592445288 \\ -93710.70672093514 \\ 75530.78592445288 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 8.7819310 & 13.7133237 & -2.9250119 & 8.9926495 \\ 13.7133237 & 37.6503424 & -8.9926495 & 15.5444775 \\ -2.9250119 & -8.9926495 & 8.7819310 & -13.7133237 \\ 8.9926495 & 15.5444775 & -13.7133237 & 37.6503424 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} -7.7297219 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ 1.1937430 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ 0 \\ -1.5539738628957609 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

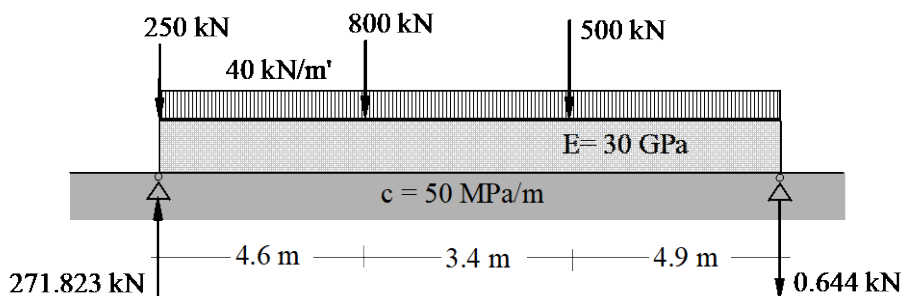
$$= \begin{Bmatrix} -93710.7067209 \\ -75530.7859245 \\ -93710.7067210 \\ 75530.7859245 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -281662.88005495875 \\ -293465.5626380119 \\ -644.597968690272 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,3\text{desno}} \\ M_{z,3} \\ V_{y,4} \\ M_{z,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -281662.88005495875 \text{ N} \\ 293465.5626380119 \text{ Nm} \\ 644.597968690272 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

*Poprocesiranje: izračun reakcij*

Izračunani vektorji sekundarnih spremenljivk pokažejo, da vertikalna reakcija v levi podpori znaša 21823.088839479547 N (oziroma 271823.08883947955 N z upoštevanjem koncentrirane obtežne sile, ki deluje direktno v tej podpori) in je usmerjena navzgor, kar je opazno drugačna vrednost kot v prejšnjih dveh računskih modelih.

Vertikalna reakcija v desni podpori znaša 644.597968690272 N (kar je ponovno opazno drugačna kot v prejšnjih dveh diskretizacijah) in je usmerjena *navzdol*.

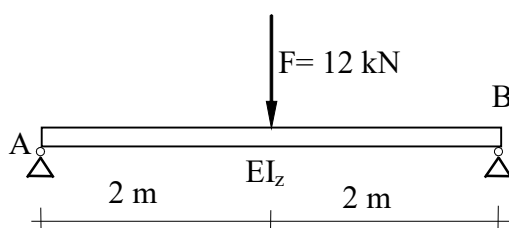
V predhodni preglednici, podani v prvem modelu, kjer so bili predstavljeni nekateri rezultati različnih diskretizacij, je razvidno, da tudi rezultati z "navadnimi" približnimi končnimi elementi konvergirajo k tema dvema vrednostima, kar ponovno potrди, da tudi približni končni elementi omogočajo kvalitetne rešitve, le da je zanje potrebnega več računskega napora.



Slika 170: Prikaz reakcij tretjega računskega modela

**Primer 10.a – Prostoležeči nosilec s koncentrirano silo na sredini**

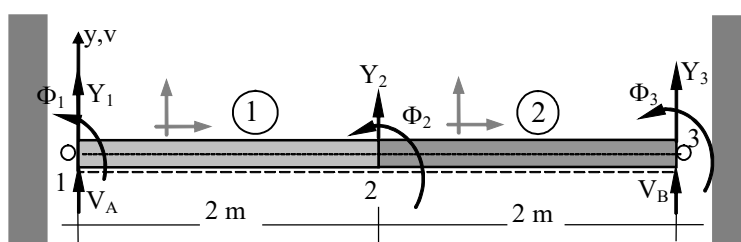
Za podani nosilec pravokotnega prereza ( $b / h = 0.2 \text{ m} / 0.4 \text{ m}$ ) določi pomik in zasuk pod obtežbo, funkcijo prečnega pomika in funkcije notranjih statičnih količin, ter reakcije v podporah. Modul elastičnosti znaša  $E = 30 \text{ GPa}$ , Poissonov količnik pa  $\nu = 0.2$ .



Slika 171: Obravnavani nosilec

**Rešitev***1. diskretizacija – elementa Č-V in V-Č*

Diskretizacijo izvedemo z dvema končnima elementoma. Najmanjši računski napor je potreben, kadar je prvi (levi) končni element na levi členkasto, na desni pa polno priključen (element tipa Č-V), medtem ko je desni končni element na levi polno, na desni pa členkasto priključen (element tipa V-Č). Ker sta oba elementa kolinearna, pretvorbe togostnih matrik iz lokalnih koordinatnih sistemov v globalne ni potrebno izvesti.



Slika 172: Diskretizacija z dvema končnima elementoma

Togostna matrika prvega elementa je (upoštevamo lahko samo prostostne stopnje, ki pripadajo prečnim pomikom):

$$A_s = \frac{0.2 \text{ m} \cdot 0.4 \text{ m}}{1.2} = 0.06666666666666668 \text{ m}^2$$

$$EI_z = 30 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{0.2 \text{ m} \cdot (0.4 \text{ m})^3}{12} = 3.2 \cdot 10^7 \text{ Nm}^2$$

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = \frac{30 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{2 \cdot (1 + 0.2)} = 12.5 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$L_1 = 2.0 \text{ m}$$

$$\Phi = \frac{12 \cdot EI_z}{G \cdot L_1^2 \cdot A_s} = \frac{12 \cdot 3.2 \cdot 10^7 \text{ Nm}^2}{12.5 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot (2 \text{ m})^2 \cdot 0.06666666666666668 \text{ m}^2} = 0.1152$$

$$[K_1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_e^3} & 0 & -\frac{1}{L_e^3} & \frac{1}{L_e^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_e^3} & 0 & \frac{1}{L_e^3} & -\frac{1}{L_e^2} \\ \frac{1}{L_e^2} & 0 & -\frac{1}{L_e^2} & \frac{1}{L_e} \end{bmatrix} \cdot \frac{12 \cdot EI_z}{4 + \Phi}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.1664074650077767 & 0 & -1.1664074650077767 & 2.3328149300155534 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.1664074650077767 & 0 & 1.1664074650077767 & -2.3328149300155534 \\ 2.3328149300155534 & 0 & -2.3328149300155534 & 4.665629860031107 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Pripadajoča togostna matrika drugega elementa je

$$L_2 = 2.0 \text{ m}$$

$$\Phi = \frac{12 \cdot EI_z}{G \cdot L_2^2 \cdot A_s} = \frac{12 \cdot 3.2 \cdot 10^7 \text{ Nm}^2}{12.5 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot (2 \text{ m})^2 \cdot 0.06666666666666668 \text{ m}^2} = 0.1152$$

$$[K_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_e^3} & \frac{1}{L_e^2} & -\frac{1}{L_e^3} & 0 \\ \frac{1}{L_e^2} & \frac{1}{L_e} & -\frac{1}{L_e^2} & 0 \\ -\frac{1}{L_e^3} & -\frac{1}{L_e^2} & \frac{1}{L_e^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{12 \cdot EI_z}{4 + \Phi}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.1664074650077767 & 2.3328149300155534 & -1.1664074650077767 & 0 \\ 2.3328149300155534 & 4.665629860031107 & -2.3328149300155534 & 0 \\ -1.1664074650077767 & -2.3328149300155534 & 1.1664074650077767 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Obtežna vektorja obeh elementov sta enaka nič, ker bomo obtežbo upoštevali kar neposredno v obtežnem vektorju konstrukcije.

### *Sestava bistvenih enačb konstrukcije*

Namesto tvorbe celotnega sistema enačb (z upoštevanjem togostne matrike konstrukcije in obtežnega vektorja konstrukcije) iz togostnih matrik in obtežnih vektorjev elementov upoštevamo zgolj člene, ki pripadajo neznanim primarnim spremenljivkam. Ker imamo dve neznani primarni spremenljivki (pomik  $Y_2$  in zasuk  $\Phi_2$  drugega vozlišča), sledi sistem dveh enačb z dvema neznankama.

Iz togostne matrike prvega končnega elementa sedaj odčitamo zgolj člene, ki pripadajo neznanim primarnima spremenljivkama:

$$[K_1] = \begin{bmatrix} 1.1664074650077767 & 0 & -1.1664074650077767 & 2.3328149300155534 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.1664074650077767 & 0 & 1.1664074650077767 & -2.3328149300155534 \\ 2.3328149300155534 & 0 & -2.3328149300155534 & 4.665629860031107 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Tudi iz togostne matrike drugega končnega elementa odčitamo zgolj člene, ki pripadajo neznanim primarnima spremenljivkama:

$$[K_2] = \begin{bmatrix} 1.1664074650077767 & 2.3328149300155534 & -1.1664074650077767 & 0 \\ 2.3328149300155534 & 4.665629860031107 & -2.3328149300155534 & 0 \\ -1.1664074650077767 & -2.3328149300155534 & 1.1664074650077767 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Sistem dobi obliko (kjer je že upoštevana koncentrirana obtežba  $F$  v vozlišču 2):

$$\begin{bmatrix} 2.3328149300155534 & 0 \\ 0 & 9.331259720062214 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -12000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Dobljeni sistem *slučajno* (zaradi simetrije konstrukcije, obtežbe in računskega modela) tvorita dve nevezani enačbi, ki ju lahko rešimo vsako zase.

Sistem ima rešitvi:

$$\begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5.144 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ki sta točni.

*Poprocesiranje rezultatov – iskanje sekundarnih spremenljivk (notranjih statičnih količin)*

Notranje statične količine za *prvi element* dobimo tako, da togostno matriko prvega elementa pomnožimo z vektorjem pomikov prvega elementa, ter odštejemo obtežni vektor (ki ga v obravnavanem primeru ni). Notranje statične količine dobimo izražene v koordinatnem sistemu MKE v obliki vektorja sekundarnih spremenljivk in zato moramo spremeniti nekatere predznake izračunanih količin.

$$\begin{aligned} \{Q_1\} &= [K_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\} \\ \begin{Bmatrix} Q_{1,1} \\ Q_{1,2} \\ Q_{1,3} \\ Q_{1,4} \end{Bmatrix} &= [K_1] \cdot \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \Phi_1 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [K_1] \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Y_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1.1664074650077767 & 0 & -1.1664074650077767 & 2.3328149300155534 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.1664074650077767 & 0 & 1.1664074650077767 & -2.3328149300155534 \\ 2.3328149300155534 & 0 & -2.3328149300155534 & 4.665629860031107 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5.144 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 6000 \\ 0 \\ -6000 \\ 12000 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,1} \\ M_{z,1} \\ V_{y,2\text{levo}} \\ M_{z,2\text{levo}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6000 \text{ N} \\ 0 \\ 6000 \text{ N} \\ 12000 \text{ Nm} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Prvotno izračunane notranje statične količine so podane v koordinatnem sistemu metode končnih elementov, kar pomeni, da moramo v *začetnem* vozlišču spremeniti predznak momenta, v *končnem* vozlišču pa predznak prečne sile.

Ker k reakciji v levi podpori prispeva zgolj prvi končni element, vektor sekundarnih spremenljivk  $\{Q_1\}$  pokaže, da je vertikalna reakcija v levi podpori usmerjena navzgor in znaša 6 kN (ki je enaka kot pri analizi z »navadnim« Bernoulli-Eulerjevim končnim elementom, saj je konstrukcija statično določena), medtem ko je upogibni moment enak 0.

Notranje statične količine za *drugi element* dobimo tako, da togostno matriko drugega elementa pomnožimo z vektorjem pomikov drugega elementa, ter odštejemo obtežni vektor (ki ga v obravnavanem primeru ni).

$$\{Q_2\} = [K_2] \cdot \{U_2\} - \{F_2\}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{2,1} \\ Q_{2,2} \\ Q_{2,3} \\ Q_{2,4} \end{Bmatrix} = [K_2] \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [K_2] \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1.1664074650077767 & 2.3328149300155534 & -1.1664074650077767 & 0 \\ 2.3328149300155534 & 4.665629860031107 & -2.3328149300155534 & 0 \\ -1.1664074650077767 & -2.3328149300155534 & 1.1664074650077767 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \begin{Bmatrix} -5.144 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -6000 \\ -12000 \\ 6000 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,2\text{desno}} \\ M_{z,2\text{desno}} \\ V_{y,3} \\ M_{z,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6000 \text{ N} \\ 12000 \text{ Nm} \\ -6000 \text{ N} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ker k reakciji v desni podpori prispeva zgolj drugi končni element, vektor sekundarnih spremenljivk  $\{Q_2\}$  pokaže, da je tudi vertikalna reakcija v desni podpori usmerjena navzgor in znaša 6 kN, medtem ko je upogibni moment tudi v tej podpori enak 0.

*Poprocesiranje rezultatov – izračun funkcij upogibnega momenta ter prečne sile*

– *izračun funkcij notranjih statičnih količin za 1. končni element*

Čeprav lahko za izračun približne funkcije upogibnega momenta za prvi končni element uporabimo tudi interpolacijske funkcije H1 (za standardni končni element brez členkov), je, ker nimamo zvezne obtežbe, najkrajša pot linearna interpolacija (znana iz superpozicije) kar vodi do funkcije:

$$M_o(x) = M_{z,1} + \frac{M_{z,2\text{levo}} - M_{z,1}}{L} \cdot x = 0 + \frac{12000 \text{ Nm} - 0}{2} \cdot x$$

$$M_{z,1N}(x) = M_o(x) = 6000 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 2 \text{ m}$$

ki je enaka točni razporeditvi upogibnega momenta.

Približna funkcija prečne sile za prvi končni element je:

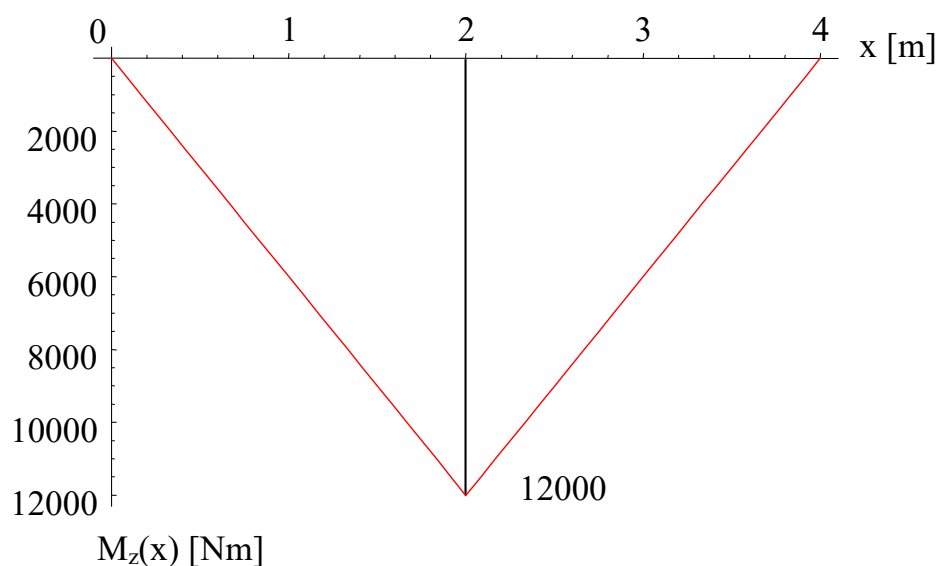
$$V_{y,1N}(x) = \frac{dM_{z,1N}(x)}{dx} = 6000 \text{ N} \quad 0 \leq x \leq 2 \text{ m}$$

ki je, zaradi korektnosti izraza za upogibni moment, enaka točni razporeditvi prečne sile.

– *izračun funkcij notranjih statičnih količin za 2. končni element*

Približna funkcija upogibnega momenta za drugi končni element, ki sledi iz linearne interpolacije, je:

$$M_o(x) = 24000 - 6000 \cdot x \quad 2 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$
$$M_{z,2N}(x) = M_o(x) = 24000 - 6000 \cdot x \quad 2 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$



Slika 173: Graf upogibnega momenta

Približna funkcija prečne sile za drugi končni element je:

$$V_{y,2N}(x) = \frac{dM_{z,2N}(x)}{dx} = -6000 \text{ N} \quad 2 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

ki je, zaradi korektnosti izraza za upogibne momente, enaka točni razporeditvi prečne sile.

Poprocesiranje rezultatov – iskanje funkcije prečnega pomika

Približna funkcija prečnega pomika, izračunana z ustreznimi H1 interpolacijskimi funkcijami Bernoulli-Eulerjevega elementa, je za prvi končni element enaka:

$$\begin{aligned} v_{1N}(x) &= Y_1 \cdot N_{1,1}(x) + Y_2 \cdot N_{1,3}(x) + \Phi_2 \cdot N_{1,4}(x) \\ &= 0 \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot x}{4} + \frac{x^3}{16}\right) - 5.144 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \left(\frac{3 \cdot x}{4} - \frac{x^3}{16}\right) - 0 \text{ rad} \cdot \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^3}{8}\right) \\ &= -3.858 \cdot 10^{-4} \cdot x + 3.215 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 \quad 0 \leq x \leq 2 \text{ m} \end{aligned}$$

in predstavlja zgolj *približek* prave funkcije prečnega pomika.

Približna funkcija prečnega pomika za drugi končni element, prav tako izračunana z ustreznimi H1 interpolacijskimi funkcijami Bernoulli-Eulerjevega elementa, pa je:

$$\begin{aligned} v_{2N}(x) &= Y_2 \cdot N_{2,1}(x) + \Phi_2 \cdot N_{2,2}(x) + Y_3 \cdot N_{2,3}(x) \\ &= -5.144 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \left(1 + \frac{9 \cdot x}{4} - \frac{3 \cdot x^2}{4} + \frac{x^3}{16}\right) + 0 \text{ rad} \cdot \left(-6 + \frac{11 \cdot x}{2} - \frac{3 \cdot x^2}{2} + \frac{x^3}{8}\right) \\ &\quad - 0 \text{ m} \cdot \left(2 - \frac{9 \cdot x}{4} + \frac{3 \cdot x^2}{4} - \frac{x^3}{16}\right) \\ &= 5.144 \cdot 10^{-4} - 1.1574 \cdot 10^{-3} \cdot x + 3.858 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 - 3.215 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 \quad 2 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

in prav tako predstavlja zgolj *približek* prave funkcije prečnega pomika.

Analitični oz. točni rešitvi upogibnice pa dobimo z uporabo posebnih interpolacijskih funkcij:

$$\begin{aligned} v_{1N}(x) &= Y_1 \cdot N_{1,1}(x) + Y_2 \cdot N_{1,3}(x) + \Phi_2 \cdot N_{1,4}(x) \\ &= Y_1 \cdot \left(\frac{2 \cdot x^3 + L_e^3 \cdot (4 + \Phi) - L_e^2 \cdot x \cdot (6 + \Phi)}{L_e^3 \cdot (4 + \Phi)}\right) + Y_2 \cdot \left(\frac{-2 \cdot x^3 + L_e^2 \cdot x \cdot (6 + \Phi)}{L_e^3 \cdot (4 + \Phi)}\right) + \Phi_2 \cdot \left(\frac{2 \cdot (x^2 - L_e^2) \cdot x}{L_e^2 \cdot (4 + \Phi)}\right) \\ &= 0 - 5.144 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \left(\frac{-2 \cdot x^3 + 2^2 \cdot x \cdot (6 + 0.1152)}{2^3 \cdot (4 + 0.1152)}\right) - 0 \\ &= -5.144 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot (0.7430015552099534 \cdot x - 6.075038880248834 \cdot 10^{-2} \cdot x^3) \\ &= -3.822 \cdot 10^{-4} \cdot x + 3.125 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 \quad 0 \leq x \leq 2 \text{ m} \end{aligned}$$

in

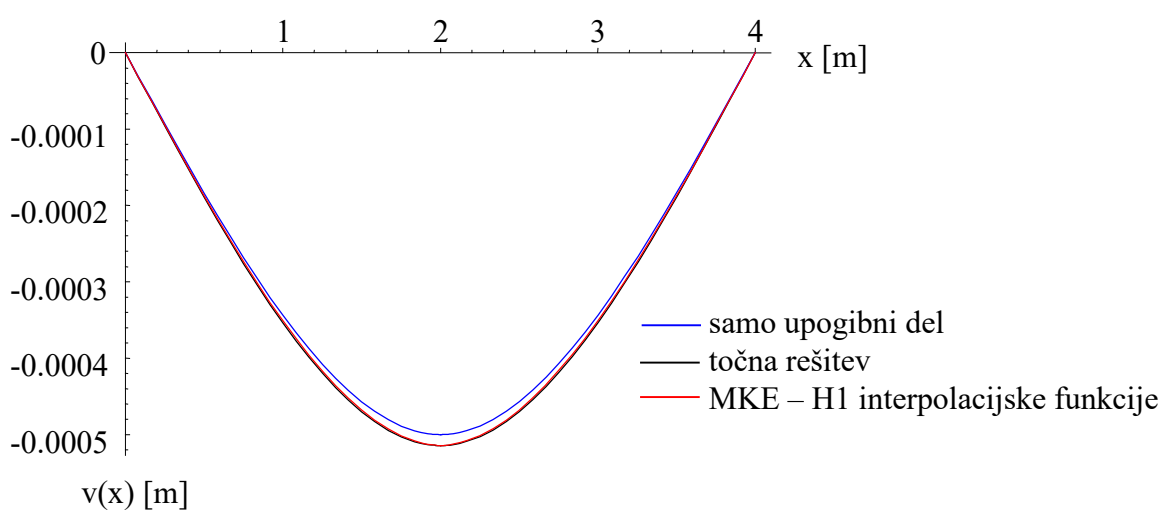
$$\begin{aligned}
 v_{2N}(x) &= Y_2 \cdot N_{2,1}(x) + \Phi_2 \cdot N_{2,2}(x) + Y_3 \cdot N_{2,3}(x) \\
 &= Y_2 \cdot \frac{(L_e - x) \cdot (4 \cdot L_e \cdot x - 2 \cdot x^2 + L_e^2 \cdot (4 + \Phi))}{L_e^3 \cdot (4 + \Phi)} + \Phi_2 \cdot \frac{2 \cdot x \cdot (2 \cdot L_e^2 - 3 \cdot L_e \cdot x + x^2)}{L_e^2 \cdot (4 + \Phi)} \\
 &\quad + Y_3 \cdot \frac{x \cdot (6 \cdot L_e \cdot x - 2 \cdot x^2 + L_e^2 \cdot \Phi)}{L_e^3 \cdot (4 + \Phi)} \\
 &= -5.144 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \frac{(2 - x) \cdot (4 \cdot 2 \cdot x - 2 \cdot x^2 + 2^2 \cdot (4 + 0.1152))}{2^3 \cdot (4 + 0.1152)} + 0 + 0 \\
 &= -5.144 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \\
 &\quad (1 - 1.3996889580093264 \cdot 10^{-2} \cdot x - 0.36450233281493005 \cdot x^2 + 6.075038880248834 \cdot 10^{-2} \cdot x^3) \\
 &= -5.144 \cdot 10^{-4} + 7.2 \cdot 10^{-6} \cdot x + 1.875 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 - 3.125 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}
 \end{aligned}$$

ki jo lahko zapišemo tudi v globalnem koordinatnem sistemu kot:

$$v_2(x) = 4.712 \cdot 10^{-4} - 1.1178 \cdot 10^{-3} \cdot x + 3.75 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 - 3.125 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 \quad 2 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Iz zapisanih funkcij pa z odvajanjem ne dobimo funkcij zasuka. Funkciji zasuka, ki ju lahko uporabimo za izračun funkcije momenta, moramo izračunati s pomočjo posebnih pripadajočih interpolacijskih funkcij.

Primerjava približnih numeričnih in točnih analitičnih funkcij prečnega pomika pokaže, da je razlika med obema rešitvama zanemarljiva, opazna razlika pa nastopi glede na vrednosti pomika, izračunane samo z upoštevanjem upogibnih deformacij.

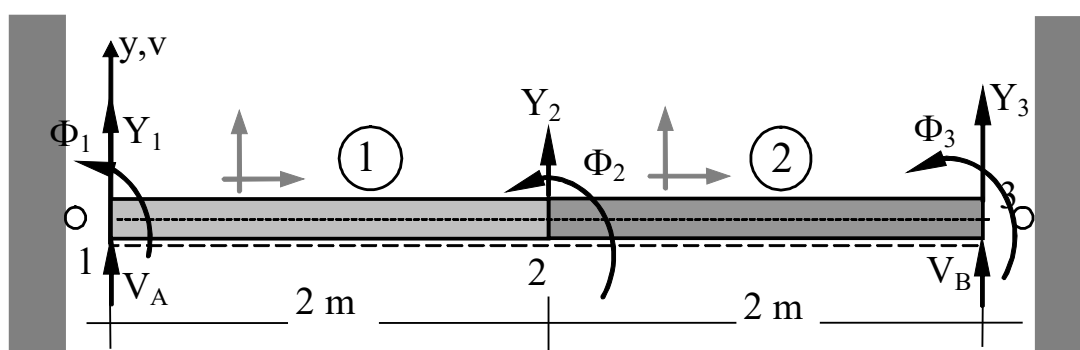


Slika 174: Primerjava grafov prečnega pomika

Pri uporabi točnih interpolacijskih funkcij (ločenih za interpolacijo prečnega pomika ter zasuka) pa je ujemanje funkcij pomika z analitično rešitvijo popolno (saj ni zvezne obtežbe).

## 2. diskretizacija – elementa $V$ - $V$ in $V$ - $V$

Tudi v tej diskretizaciji uporabimo dva končna elementa, ki pa bosta zahtevala reševanje sistema štirih enačb. Ker sta oba elementa kolinearna, pretvorbe togostnih matrik iz lokalnih koordinatnih sistemov v globalne ni potrebno izvesti.



Slika 175: Druga diskretizacija z dvema končnima elementoma

Togostni matriki obeh elementov sta sedaj medsebojno enaki (upoštevamo lahko samo prostostne stopnje, ki pripadajo prečnim pomikom):

$$A_s = \frac{0.2 \text{ m} \cdot 0.4 \text{ m}}{1.2} = 0.06666666666666668 \text{ m}^2$$

$$EI_z = 30 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{0.2 \text{ m} \cdot (0.4 \text{ m})^3}{12} = 3.2 \cdot 10^7 \text{ Nm}^2$$

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = \frac{30 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{2 \cdot (1 + 0.2)} = 12.5 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$L_1 = 2.0 \text{ m}$$

$$\Phi = \frac{12 \cdot EI_z}{G \cdot L_1^2 \cdot A_s} = \frac{12 \cdot 3.2 \cdot 10^7 \text{ Nm}^2}{12.5 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot (2 \text{ m})^2 \cdot 0.06666666666666668 \text{ m}^2} = 0.1152$$

$$[K_1] = [K_2] = \begin{bmatrix} \frac{12}{L_e^3} & \frac{6}{L_e^2} & -\frac{12}{L_e^3} & \frac{6}{L_e^2} \\ \frac{6}{L_e^2} & \frac{4+\Phi}{L_e} & -\frac{6}{L_e^2} & \frac{2+\Phi}{L_e} \\ -\frac{12}{L_e^3} & -\frac{6}{L_e^2} & \frac{12}{L_e^3} & -\frac{6}{L_e^2} \\ \frac{6}{L_e^2} & \frac{2+\Phi}{L_e} & -\frac{6}{L_e^2} & \frac{4+\Phi}{L_e} \end{bmatrix} \cdot \frac{EI_z}{1+\Phi} = 10^7 \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 4.304160688665712 & 4.304160688665712 & -4.304160688665712 & 4.304160688665712 \\ 4.304160688665712 & 5.904160688665713 & -4.304160688665712 & 2.7041606886657115 \\ -4.304160688665712 & -4.304160688665712 & 4.304160688665712 & -4.304160688665712 \\ 4.304160688665712 & 2.7041606886657115 & -4.304160688665712 & 5.904160688665713 \end{bmatrix}$$

Obtežna vektorja obeh elementov sta enaka nič.

*Sestava bistvenih enačb konstrukcije*

Po upoštevanju ustreznih členov togostnih matrik obeh elementov sledi naslednja togostna matrika konstrukcije:

$$\begin{bmatrix} 5.904160688665713 & -4.304160688665712 & 2.7041606886657115 & 0 \\ -4.304160688665712 & 8.608321377331425 & 0 & 4.304160688665712 \\ 2.7041606886657115 & 0 & 11.808321377331426 & 2.7041606886657115 \\ 0 & 4.304160688665712 & 2.7041606886657115 & 5.904160688665713 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Sistem enačb pa dobi obliko (kjer je že upoštevana koncentrirana obtežba  $F$  v vozlišču 2):

$$\begin{bmatrix} 5.9041606887 & -4.3041606887 & 2.7041606887 & 0 \\ -4.3041606887 & 8.6083213773 & 0 & 4.3041606887 \\ 2.7041606887 & 0 & 11.8083213773 & 2.7041606887 \\ 0 & 4.3041606887 & 2.7041606887 & 5.9041606887 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -12000 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Sistem ima rešitve:

$$\begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3.75 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ -5.144 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ 0 \\ 3.75 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

ki so točne.

*Poprocesiranje rezultatov – iskanje sekundarnih spremenljivk (notranjih statičnih količin)*

Notranje statične količine za *prvi element* dobimo tako, da togostno matriko prvega elementa pomnožimo z vektorjem pomikov prvega elementa, ter odštejemo obtežni vektor (ki ga v obravnavanem primeru ni). Notranje statične količine dobimo izražene v koordinatnem sistemu MKE.

$$\{Q_1\} = [K_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{1,1} \\ Q_{1,2} \\ Q_{1,3} \\ Q_{1,4} \end{Bmatrix} = [K_1] \cdot \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \Phi_1 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [K_1] \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \Phi_1 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6000 \\ 0 \\ -6000 \\ 12000 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,1} \\ M_{z,1} \\ V_{y,2\text{levo}} \\ M_{z,2\text{levo}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6000 \text{ N} \\ 0 \\ 6000 \text{ N} \\ 12000 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Dobljene vrednosti so identične rešitvam iz prvega modela.

Ker k reakciji v levi podpori prispeva zgolj prvi končni element, vektor sekundarnih spremenljivk  $\{Q_1\}$  pokaže, da je vertikalna reakcija v levi podpori usmerjena navzgor in znaša 6 kN, medtem ko je upogibni moment enak 0.

Notranje statične količine za *drugi element* pa so:

$$\{Q_2\} = [K_2] \cdot \{U_2\} - \{F_2\}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{2,1} \\ Q_{2,2} \\ Q_{2,3} \\ Q_{2,4} \end{Bmatrix} = [K_2] \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [K_2] \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ 0 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6000 \\ -12000 \\ 6000 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,2\text{desno}} \\ M_{z,2\text{desno}} \\ V_{y,3} \\ M_{z,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6000 \text{ N} \\ 12000 \text{ Nm} \\ -6000 \text{ N} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Dobljene vrednosti so identične rešitvam iz prvega modela.

Ker k reakciji v desni podpori prispeva zgolj drugi končni element, vektor sekundarnih spremenljivk  $\{Q_2\}$  pokaže, da je tudi vertikalna reakcija v desni podpori usmerjena navgor in znaša 6 kN, medtem ko je upogibni moment tudi v tej podpori enak 0.

*Poprocesiranje rezultatov – iskanje funkcije prečnega pomika*

Približna funkcija prečnega pomika, izračunana z ustreznimi H1 interpolacijskimi funkcijami Bernoulli-Eulerjevega elementa, je za prvi končni element sedaj enaka:

$$\begin{aligned}
 v_{1N}(x) &= Y_1 \cdot N_{1,1}(x) + \Phi_1 \cdot N_{1,2}(x) + Y_2 \cdot N_{1,3}(x) + \Phi_2 \cdot N_{1,4}(x) \\
 &= 0 \cdot \left(1 - \frac{3}{4} \cdot x^2 + \frac{x^3}{4}\right) - 3.75 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \cdot \left(x - x^2 + \frac{x^3}{4}\right) - 5.144 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot x^2 - \frac{x^3}{4}\right) - 0 \text{ rad} \cdot \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4}\right) \\
 &= -3.75 \cdot 10^{-4} \cdot x - 1.08 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 + 3.485 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 \quad 0 \leq x \leq 2 \text{ m}
 \end{aligned}$$

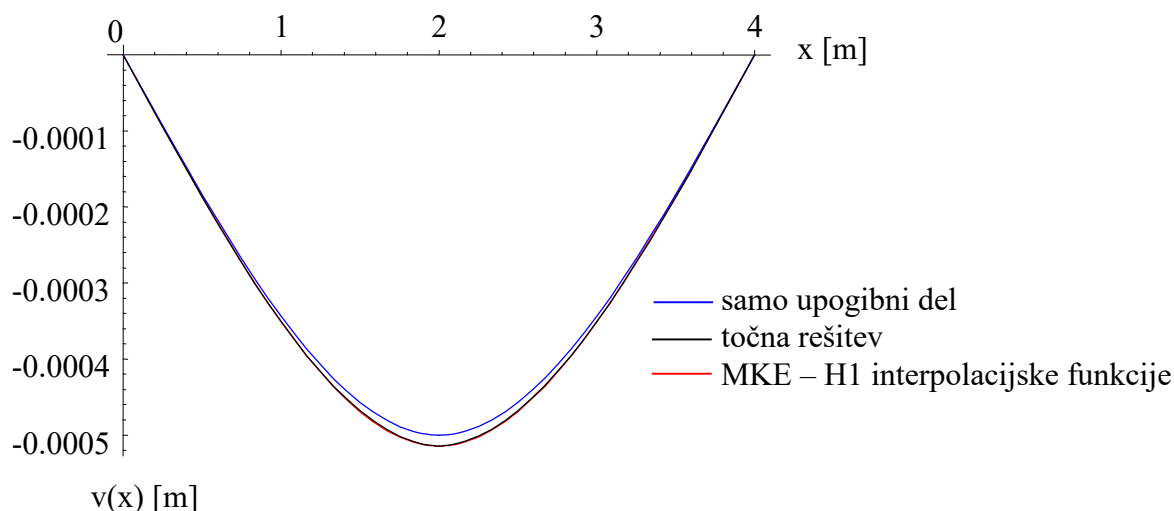
in predstavlja zgolj *približek* prave funkcije prečnega pomika.

Približna funkcija prečnega pomika za drugi končni element, izračunana z ustreznimi H1 interpolacijskimi funkcijami Bernoulli-Eulerjevega elementa, pa je:

$$\begin{aligned}
 v_{2N}(x) &= Y_2 \cdot N_{2,1}(x) + \Phi_2 \cdot N_{2,2}(x) + Y_3 \cdot N_{2,3}(x) + \Phi_3 \cdot N_{2,4}(x) \\
 &= -5.144 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \left(-4 + 6 \cdot x - \frac{9}{4} \cdot x^2 + \frac{x^3}{4}\right) + 0 \text{ rad} \cdot \left(-8 + 8 \cdot x - \frac{5}{2} \cdot x^2 + \frac{x^3}{4}\right) \\
 &\quad - 0 \text{ m} \cdot \left(5 - 6 \cdot x + \frac{9}{4} \cdot x^2 - \frac{x^3}{4}\right) + 3.75 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \cdot \left(-4 + 5 \cdot x - 2 \cdot x^2 + \frac{x^3}{4}\right) \\
 &= 5.576 \cdot 10^{-4} - 1.2114 \cdot 10^{-3} \cdot x + 4.074 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 - 3.485 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 \quad 2 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}
 \end{aligned}$$

in prav tako predstavlja zgolj *približek* prave funkcije prečnega pomika.

Primerjava približnih numeričnih in točnih analitičnih funkcij prečnega pomika pokaže, da je razlika med obema rešitvama sedaj še manj opazna (saj je upoštevan kvalitetnejši robni pogoj), opazna razlika pa nastopi glede na vrednosti pomika, izračunane samo z upoštevanjem upogibnih deformacij.



Slika 176: Primerjava grafov prečnega pomika

### 3. model – uporaba končnega elementa z ločeno matriko za upoštevanje strižnih deformacij

Alternativno možnost modeliranja predstavlja pristop, kjer že znani togostni matriki Bernoulli-Eulerjevega (upogibnega) končnega elementa prištejemo posebno togostno matriko  $[k_s]$ , s katero upoštevamo prispevek strižnih deformacij. Izbiramo lahko med dvema različnima možnima matrikama  $[k_s]$ , ki sta izpeljani na osnovi različnih predpostavk.

#### 3.1 Splošna oblika togostne matrike $[k_s]$

Splošna oblika (in za vitke elemente “pretoga” rešitev) je tako:

$$[k] = [k_u] + [k_s] = \frac{EI}{L_e} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{5 \cdot G \cdot A}{6 \cdot L_e} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{L_e}{2} & -1 & \frac{L_e}{2} \\ \frac{L_e}{2} & \frac{L_e^2}{3} & -\frac{L_e}{2} & \frac{L_e^2}{6} \\ -1 & -\frac{L_e}{2} & 1 & -\frac{L_e}{2} \\ \frac{L_e}{2} & \frac{L_e^2}{6} & -\frac{L_e}{2} & \frac{L_e^2}{3} \end{bmatrix}$$

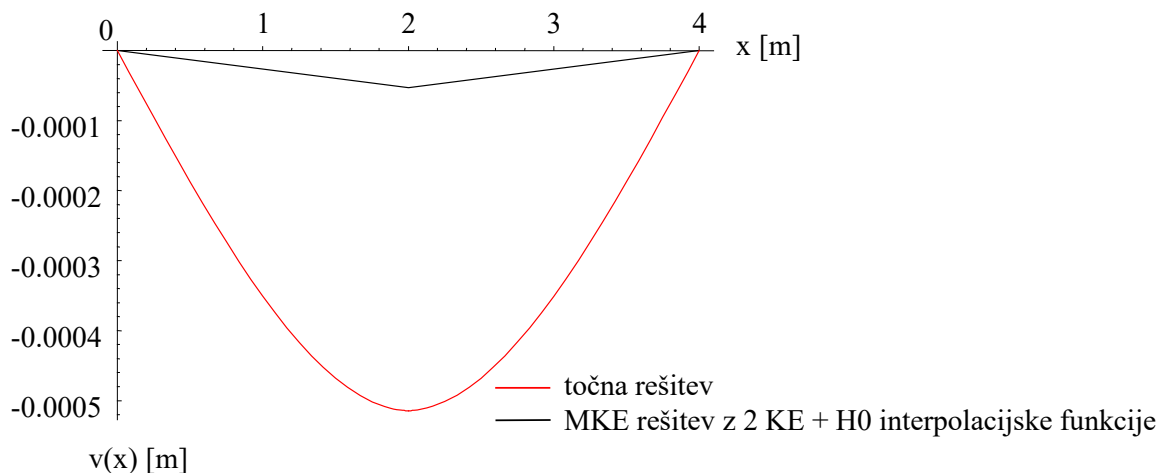
Pri uporabi te oblike togostne matrike, imata togostni matriki elementov V-V obliko:

$$[K_1] = [K_2] = 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 41.66666666666667 & 41.66666666666667 & -41.66666666666667 & 41.66666666666667 \\ 41.66666666666667 & 57.15555555555557 & -41.66666666666667 & 26.177777777777784 \\ -41.66666666666667 & -41.66666666666667 & 41.66666666666667 & -41.66666666666667 \\ 41.66666666666667 & 26.177777777777784 & -41.66666666666667 & 57.15555555555557 \end{bmatrix}$$

iz katere vidimo, da so členi opazno večji kot pri uporabi prejšnjega modela.

Izračunana vrednost pomika pod silo znaša samo  $-5.3137446197991366 \cdot 10^{-5}$  m in opazno premajhna.

Ujemanje fukcije pomika, izračunane s H0 interpolacijskimi funkcijami (zaradi nekvalitetnih rešitev uporaba H1 interpolacijskih funkcij ni potrebna, je pa seveda mogoča), s pravo rešitvijo pričakovano pokaže velika odstopanja:



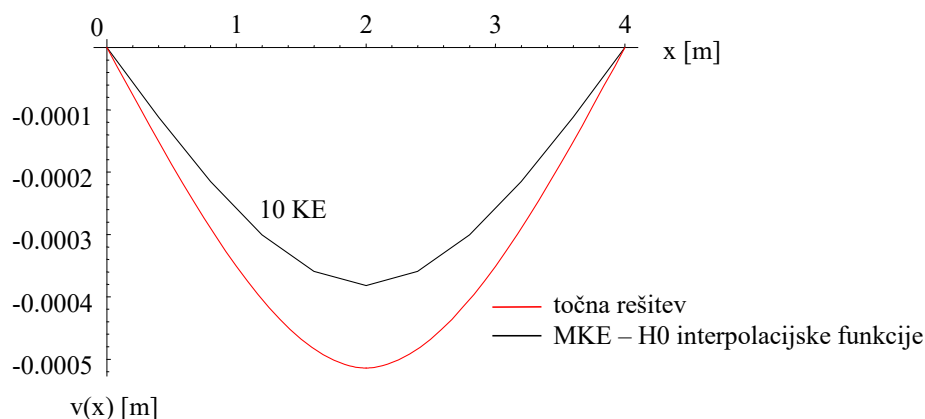
Slika 177: Primerjava grafa točne funkcije prečnega pomika z modelom z dvema KE

Za doseg kvalitetnih rezultatov primarnih spremenljivk je tako potrebno zgostiti mrežo končnih elementov.

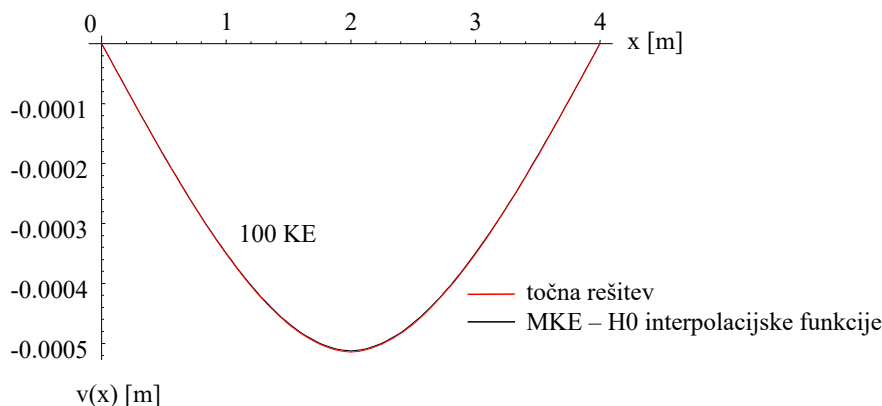
Preglednica 2

Št. elementov	pomik pod silo	napaka %
2	-0.000053137446197991366	89.67001434720231
4	-0.00016226418400876207	68.4556407447974
10	-0.0003818226804123698	25.77319587628889
20	-0.00047331373801919095	7.98722044728011
50	-0.000507353424657458	1.369863013713427
100	-0.0005126200692038596	0.34602076130252357
200	-0.0005139538594974649	0.0867302687665103
500	-0.0005143285654765745	0.013886960230424655
1000	-0.0005143821395222244	0.003472099100982745

S povečevanjem števila končnih elementov se povečuje tudi ujemanje pomika vzdolž nosilca.



Slika 178: Primerjava grafa točne funkcije prečnega pomika z modelom z desetimi KE



Slika 179: Primerjava grafa točne funkcije prečnega pomika z modelom s sto KE

Ko pa z izračunano togostno matriko elementa in že izračunanim pomikom (iz modela z 2 končnima elementoma) izračunamo še notranje statične količine za *prvi element*, vseeno dobimo točne vrednosti sekundarnih spremenljivk in nato še notranjih statičnih količin:

$$\{Q_1\} = [K_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\} = \begin{Bmatrix} 6000 \\ 0 \\ -6000 \\ 12000 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,1} \\ M_{z,1} \\ V_{y,2\text{levo}} \\ M_{z,2\text{levo}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6000 \text{ N} \\ 0 \\ 6000 \text{ N} \\ 12000 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Enako velja tudi za *drugi element*, kjer prav tako dobimo točne vrednosti sekundarnih spremenljivk:

$$\{Q_2\} = [K_2] \cdot \{U_2\} - \{F_2\} = \begin{Bmatrix} -6000 \\ -12000 \\ 6000 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,2\text{desno}} \\ M_{z,2\text{desno}} \\ V_{y,3} \\ M_{z,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6000 \text{ N} \\ 12000 \text{ Nm} \\ -6000 \text{ N} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

### 3.2 Togostna matrika $[k_s]$ za vitke elemente

Za *vitke* elemente uporabimo togostno matriko v obliki:

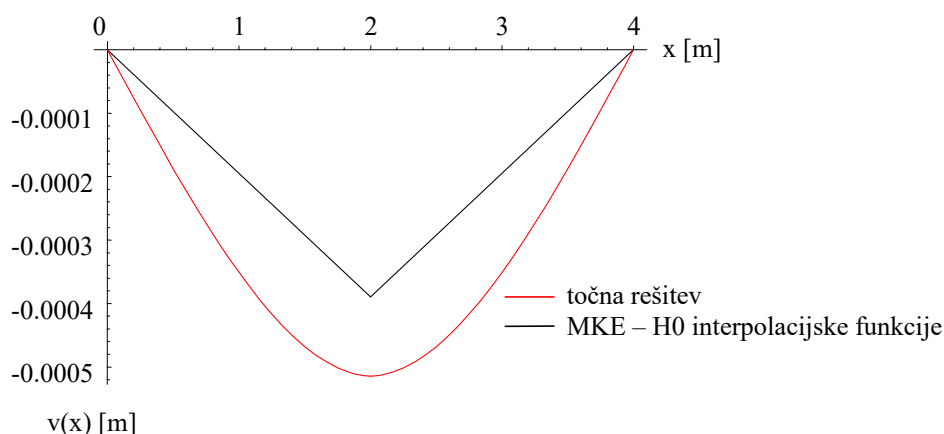
$$[k] = [k_u] + [k_s] = \frac{EI}{L_e} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{5 \cdot G \cdot A}{6 \cdot L_e} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{L_e}{2} & -1 & \frac{L_e}{2} \\ \frac{L_e}{2} & \frac{L_e^2}{4} & -\frac{L_e}{2} & \frac{L_e^2}{4} \\ -1 & -\frac{L_e}{2} & 1 & -\frac{L_e}{2} \\ \frac{L_e}{2} & \frac{L_e^2}{4} & -\frac{L_e}{2} & \frac{L_e^2}{4} \end{bmatrix}$$

Pri uporabi *druge* oblike togostne matrike, imata togostni matriki elementov V-V obliko:

$$[K_1] = [K_2] = 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 41.66666666666667 & 41.66666666666667 & -41.66666666666667 & 41.66666666666667 \\ 41.66666666666667 & 43.26666666666667 & -41.66666666666667 & 40.06666666666668 \\ -41.66666666666667 & -41.66666666666667 & 41.66666666666667 & -41.66666666666667 \\ 41.66666666666667 & 40.06666666666668 & -41.66666666666667 & 43.26666666666667 \end{bmatrix}$$

iz katere vidimo, da so členi drugačni, a še vedno opazno večji kot pri uporabi prejšnjega modela.

Posledično je izračunana vrednost pomika pod silo še vedno premajhna, saj znaša samo  $-3.894 \cdot 10^{-5}$  m, vendar je ujemanje funkcije pomika, izračunane s H0 interpolacijskimi funkcijami, s pravo rešitvijo vseeno že opazno boljše kot pri uporabi prvega končnega elementa:



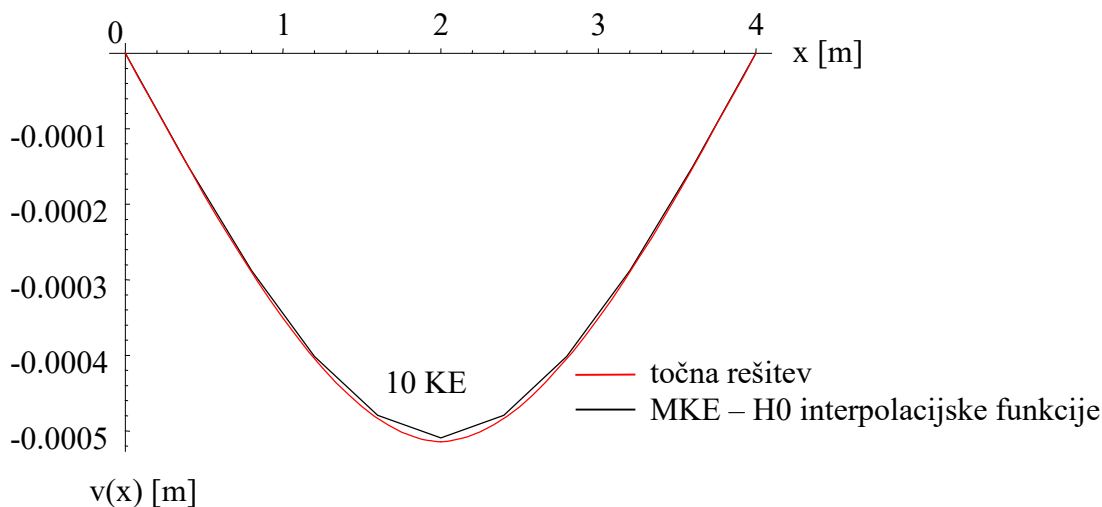
Slika 180: Primerjava grafa točne funkcije prečnega pomika z modelom z dvema KE

Pri uporabi *druge* oblike togostne matrike, primernejše za vitke elemente, pa sledi:

Preglednica 3

Št. elementov	pomik pod silo	napaka %
2	-0.0003894	24.30015552099531
4	-0.00048314999999999665	6.075038880249452
10	-0.0005093999999999994	0.9720062208409544
20	-0.0005131500000000268	0.24300155520471642
50	-0.0005141999999999901	0.038880248835490426
100	-0.00051434999999995823	0.009720062289571266
200	-0.000514387499999986723	0.0024300158101732755
500	-0.00051439800000007587	0.0003888023408028714
1000	-0.000514399499999979822	0.0000972010143184109

Vidimo, da je konvergenca sedaj dosežena bistveno hitreje, s povečevanjem števila končnih elementov pa se povečuje tudi ujemanje pomika vzdolž nosilca.



Slika 181: Primerjava grafa točne funkcije prečnega pomika z modelom z desetimi KE

Ko pa z izračunano novo togostno matriko elementa in že izračunanim novim pomikom (iz modela z 2 končnima elementoma) izračunamo še notranje statične količine za *prvi element*, vseeno dobimo točne vrednosti sekundarnih spremenljivk in nato še notranjih statičnih količin:

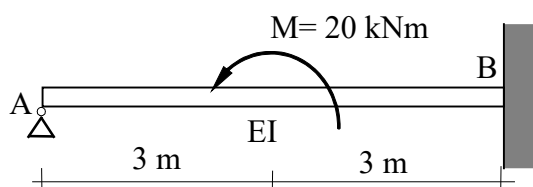
$$\{Q_1\} = [K_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\} = \begin{Bmatrix} 6000 \\ 0 \\ -6000 \\ 12000 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,1} \\ M_{z,1} \\ V_{y,2\text{levo}} \\ M_{z,2\text{levo}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6000 \text{ N} \\ 0 \\ 6000 \text{ N} \\ 12000 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Enako velja tudi za *drugi element*, kjer prav tako dobimo točne vrednosti sekundarnih spremenljivk:

$$\{Q_2\} = [K_2] \cdot \{U_2\} - \{F_2\} = \begin{Bmatrix} -6000 \\ -12000 \\ 6000 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,2\text{desno}} \\ M_{z,2\text{desno}} \\ V_{y,3} \\ M_{z,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6000 \text{ N} \\ 12000 \text{ Nm} \\ -6000 \text{ N} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

### Primer 10.b – Nosilec, na levi strani členkasto podprt, na desni polno vpet

Za dani nosilec pravokotnega prereza ( $b / h = 0.3 \text{ m} / 0.5 \text{ m}$ ) določi pomik in zasuk pod obtežbo, funkcije notranjih statičnih količin in prečnega pomika ter reakcije v podporah. Modul elastičnosti znaša  $E = 30 \text{ GPa}$ , Poissonov količnik pa  $\nu = 0.2$ .

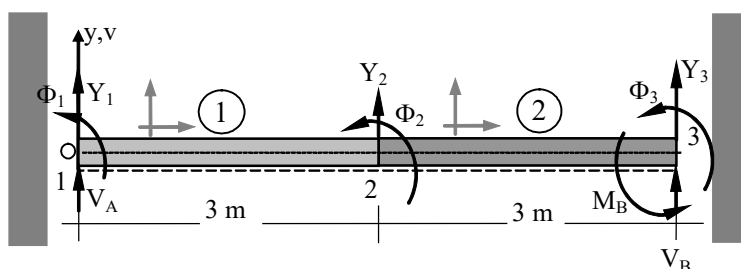


Slika 182: Obravnavani nosilec

### Rešitev

#### 1. diskretizacija – elementa Č-V in V-V

Diskretizacijo izvedemo z dvema končnima elementoma. Prvi (levi) končni element je na levi členkasto, na desni pa polno priključen (element Č-V). Drugi končni element je na obeh straneh polno vpet (element V-V). Ker sta oba elementa kolinearna in vzporedna globalni osi X, pretvorb togostnih matrik iz lokalnih koordinatnih sistemov v globalne ni potrebno izvesti.



Slika 183: Izbrana diskretizacija

Togostna matrika prvega elementa je (upoštevamo lahko samo prostostne stopnje, ki pripadajo prečnim pomikom):

$$A_s = \frac{0.3 \text{ m} \cdot 0.5 \text{ m}}{1.2} = 0.125 \text{ m}^2$$

$$EI_z = 30 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{0.3 \text{ m} \cdot (0.5 \text{ m})^3}{12} = 9.375 \cdot 10^7 \text{ Nm}^2$$

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} = \frac{30 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{2 \cdot (1 + 0.2)} = 12.5 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$L_1 = 3.0 \text{ m}$$

$$\Phi = \frac{12 \cdot EI_z}{G \cdot L_1^2 \cdot A_s} = \frac{12 \cdot 9.375 \cdot 10^7 \text{ Nm}^2}{12.5 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot (3 \text{ m})^2 \cdot 0.125 \text{ m}^2} = 0.08$$

$$[K_1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1^3} & 0 & -\frac{1}{L_1^3} & \frac{1}{L_1^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_1^3} & 0 & \frac{1}{L_1^3} & -\frac{1}{L_1^2} \\ \frac{1}{L_1^2} & 0 & -\frac{1}{L_1^2} & \frac{1}{L_1} \end{bmatrix} \cdot \frac{12 \cdot EI_z}{4 + \Phi}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.0212418300653594 & 0 & -1.0212418300653597 & 3.063725490196078 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0212418300653597 & 0 & 1.0212418300653594 & -3.063725490196078 \\ 3.063725490196078 & 0 & -3.063725490196078 & 9.191176470588236 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Pripadajoča togostna matrika drugega elementa pa je

$$L_2 = 3.0 \text{ m}$$

$$\Phi = \frac{12 \cdot EI_z}{G \cdot L_2^2 \cdot A_s} = \frac{12 \cdot 9.375 \cdot 10^7 \text{ Nm}^2}{12.5 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot (3 \text{ m})^2 \cdot 0.125 \text{ m}^2} = 0.08$$

$$[K_2] = \begin{bmatrix} \frac{12}{L_e^3} & \frac{6}{L_e^2} & -\frac{12}{L_e^3} & \frac{6}{L_e^2} \\ 6 & 4 + \Phi & -6 & 2 + \Phi \\ \frac{12}{L_e^2} & \frac{6}{L_e} & -\frac{12}{L_e^2} & \frac{6}{L_e} \\ -\frac{12}{L_e^3} & -\frac{6}{L_e^2} & \frac{12}{L_e^3} & -\frac{6}{L_e^2} \\ 6 & 2 + \Phi & -6 & 4 + \Phi \\ \frac{12}{L_e^2} & \frac{6}{L_e} & -\frac{12}{L_e^2} & \frac{6}{L_e} \end{bmatrix} \cdot \frac{EI_z}{1 + \Phi} =$$

$$\begin{bmatrix} 3.858024691358024 & 5.787037037037036 & -3.85802469135802 & 5.787037037037036 \\ 5.787037037037036 & 11.805555555555555 & -5.787037037037036 & 5.555555555555555 \\ -3.85802469135802 & -5.787037037037036 & 3.858024691358024 & -5.78703703703704 \\ 5.787037037037036 & 5.555555555555555 & -5.78703703703704 & 11.805555555555555 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Oba obtežna vektorja sta enaka nič.

*Sestava bistvenih enačb konstrukcije*

Namesto tvorbe celotnega sistema enačb (z upoštevanjem togostne matrike konstrukcije in obtežnega vektorja konstrukcije) iz togostnih matrik in obtežnih vektorjev elementov upoštevamo zgolj člene, ki pripadajo neznanim primarnim spremenljivkam. Ker imamo dve neznanim primarnim spremenljivki (pomik  $Y_2$  in zasuk  $\Phi_2$  drugega vozlišča), sledi sistem dveh enačb z dvema neznanima. Iz togostne matrike prvega končnega elementa odčitamo zgolj člene, ki pripadajo neznanim primarnim spremenljivkam:

$$[K_1] = \begin{bmatrix} -1.0212418300653594 & 0 & -1.0212418300653597 & -3.063725490196078 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0212418300653597 & 0 & 1.0212418300653594 & -3.063725490196078 \\ 3.063725490196078 & 0 & -3.063725490196078 & 9.191176470588236 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Tudi iz togostne matrike drugega končnega elementa odčitamo zgolj člene, ki pripadajo neznanim primarnim spremenljivkam:

$$[K_2] = \begin{bmatrix} 3.858024691358024 & 5.787037037037036 & -3.85802469135802 & 5.78703703703704 \\ 5.787037037037036 & 11.805555555555555 & -5.78703703703704 & 5.555555555555555 \\ -3.85802469135802 & -5.78703703703704 & 3.858024691358024 & -5.78703703703704 \\ -5.78703703703704 & -5.555555555555555 & -5.787037037037036 & 11.805555555555555 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Sistem dobi obliko (kjer je že upoštevan koncentrirani obtežni moment  $M$  v vozlišču 2):

$$\begin{bmatrix} 4.879266521423383 & 2.723311546840958 \\ 2.723311546840958 & 20.99673202614379 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 20000 \end{Bmatrix}$$

Sistem ima rešitvi:

$$\begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.5731343283582091 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ 1.026865671641791 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Vrednosti pomika in zasuca sta enaki vrednostima iz točnih rešitev (dveh vezanih) diferencialnih enačb.

*Poprocesiranje rezultatov – iskanje sekundarnih spremenljivk (notranjih statičnih količin)*

Notranje statične količine za *prvi element* dobimo tako, da togostno matriko prvega elementa pomnožimo z vektorjem pomikov prvega elementa, ter odštejemo obtežni vektor (ki ga v obravnavanem primeru ni). Notranje statične količine oz. sekundarne spremenljivke dobimo izražene v koordinatnem sistemu MKE.

$$\begin{aligned} \{Q_1\} &= [K_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\} \\ \begin{Bmatrix} Q_{1,1} \\ Q_{1,2} \\ Q_{1,3} \\ Q_{1,4} \end{Bmatrix} &= [K_1] \cdot \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \Phi_1 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [K_1] \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1.0212418300654 & 0 & -1.021241830065 & 3.0637254901961 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.0212418300654 & 0 & 1.0212418300654 & -3.063725490196 \\ 3.0637254901961 & 0 & -3.063725490196 & 9.1911764705882 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.573134328358 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ 1.02686567164 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 3731.3432835820895 \\ 0 \\ -3731.3432835820895 \\ 11194.02985074627 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,1} \\ M_{z,1} \\ V_{y,2\text{levo}} \\ M_{z,2\text{levo}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3731.3432835820895 \text{ N} \\ 0 \\ 3731.3432835820895 \text{ N} \\ 11194.02985074627 \text{ Nm} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Prvotno izračunane notranje statične količine oz. sekundarne spremenljivke so podane v koordinatnem sistemu metode končnih elementov, kar pomeni, da moramo v *začetnem* vozlišču spremeniti predznak *momenta*, v *končnem vozlišču* pa predznak *prečne sile*.

Ker k reakciji v levi podpori prispeva zgolj prvi končni element, vektor sekundarnih spremenljivk  $\{Q_1\}$  pokaže, da je vertikalna reakcija v levi podpori usmerjena navzgor in znaša 3731.3432835820895 N (ki pa **ni** enaka kot pri analizi z Bernoulli-Eulerjevim končnim elementom, saj je konstrukcija statično nedoločena, in brez upoštevanja strižnih deformacij sledi vrednost 3750 N), medtem ko je upogibni moment enak 0.

Notranje statične količine za *drugi element* dobimo tako, da togostno matriko drugega elementa pomnožimo z vektorjem pomikov drugega elementa, ter odštejemo obtežni vektor (ki ga v obravnavanem primeru ni). Notranje statične količine oz. sekundarne spremenljivke dobimo izražene v koordinatnem sistemu MKE.

$$\{Q_2\} = [K_2] \cdot \{U_2\} - \{F_2\}$$

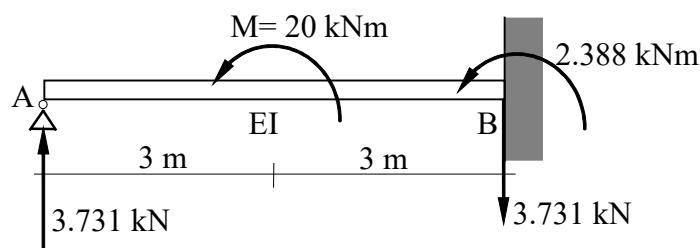
$$\begin{Bmatrix} Q_{2,1} \\ Q_{2,2} \\ Q_{2,3} \\ Q_{2,4} \end{Bmatrix} = [K_2] \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [K_2] \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3.85802469136 & 5.78703703704 & -3.8580246914 & 5.78703703704 \\ 5.78703703704 & 11.80555555556 & -5.7870370370 & 5.55555555556 \\ -3.8580246914 & -5.7870370370 & 3.85802469136 & -5.7870370370 \\ 5.78703703704 & 5.55555555556 & -5.7870370370 & 11.80555555556 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \begin{Bmatrix} -0.573134328 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ 1.026865672 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{2,1} \\ Q_{2,2} \\ Q_{2,3} \\ Q_{2,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3731.3432835820895 \\ 8805.970149253732 \\ -3731.3432835820895 \\ 2388.0597014925365 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,2\text{desno}} \\ M_{z,2\text{desno}} \\ V_{y,3} \\ M_{z,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3731.3432835820895 \text{ N} \\ -8805.970149253732 \text{ Nm} \\ 3731.3432835820895 \text{ N} \\ 2388.0597014925365 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Ker k reakciji v desni podpori prispeva zgolj drugi končni element, vektor sekundarnih spremenljivk  $\{Q_2\}$  pokaže, da je vertikalna reakcija v desni podpori dejansko usmerjena navzdol in znaša 3731.3432835820895 N (oz. 3750 N brez upoštevanja strižnih deformacij), medtem ko je upogibni moment v tej podpori usmerjen protiurno in je enak 2388.0597014925365 Nm (oz. 2500 Nm brez upoštevanja strižnih deformacij).

Vse izračunane reakcije so točne.



Slika 184: Reakcije

*Poprocesiranje rezultatov – izračun funkcij prečne sile ter upogibnega momenta*

Ker sta končna elementa kolinearna, je funkcije smiselno zapisati za globalni koordinatni sistem.

– *izračun funkcij notranjih statičnih količin za 1. končni element*

Približna funkcija upogibnega momenta za prvi končni element je (kljub temu, da gre za končni element, ki je na začetku členkasto vpet, uporabimo H1 interpolacijske funkcije za obojestransko polnovpet končni element):

$$\begin{aligned} M_{z,1N}(x) &= M_{z,1} \cdot N_{1,1}(x) + V_{y,1} \cdot N_{1,2}(x) + M_{z,2\text{levo}} \cdot N_{1,3}(x) + V_{y,2} \cdot N_{1,4}(x) \\ &= 0 \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot x^2}{L^2} + \frac{2 \cdot x^3}{L^3}\right) + 3731.3432835820895 \text{ N} \cdot \left(x - \frac{2 \cdot x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \\ &\quad + 11194.02985074627 \text{ Nm} \cdot \left(\frac{3 \cdot x^2}{L^2} - \frac{2 \cdot x^3}{L^3}\right) + 3731.3432835820895 \text{ N} \cdot \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \\ &= 3731.3432835820895 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 3 \text{ m} \end{aligned}$$

ki je enaka točni razporeditvi momenta.

Še enostavnejša je uporaba izraza iz superpozicije, kajti zvezne obtežbe na elementu ni in tako velja kar:

$$\begin{aligned} M_o(x) &= M_{z,1} + \frac{M_{z,2\text{desno}} - M_{z,1}}{L} \cdot x \\ &= 0 + \frac{11194.02985074627 \text{ Nm} - 0}{3} \cdot x \\ M_{z,1N}(x) &= M_o(x) = 3731.3432835820895 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 3 \text{ m} \end{aligned}$$

Približna funkcija prečne sile za prvi končni element je:

$$V_{y,1N}(x) = \frac{dM_{z,1N}(x)}{dx} = 3731.3432835820895 \text{ N} \quad 0 \leq x \leq 3 \text{ m}$$

ki je, zaradi korektnosti izraza za upogibni moment, enaka točni razporeditvi prečne sile.

– izračun funkcij notranjih statičnih količin za 2. končni element

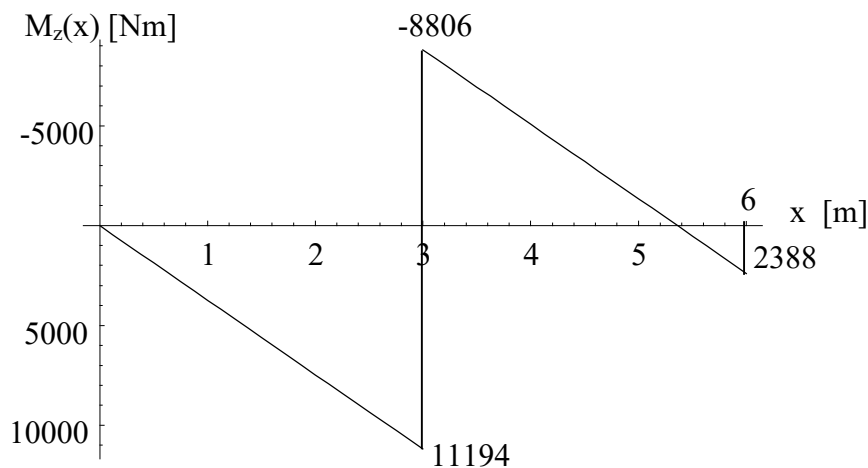
Približna funkcija upogibnega momenta za drugi končni element je:

$$\begin{aligned} M_{z,2N}(x) &= M_{z,2,desno} \cdot N_{2,1}(x) + V_{y,2} \cdot N_{2,2}(x) + M_{z,3} \cdot N_{2,3}(x) + V_{y,3} \cdot N_{2,4}(x) \\ &= -8805.970149253732 \text{ Nm} \cdot \left( -4 + 4 \cdot x - x^2 + \frac{2 \cdot x^3}{27} \right) \\ &\quad + 3731.3432835820895 \text{ N} \cdot \left( -12 + 8 \cdot x - \frac{5 \cdot x^2}{3} + \frac{x^3}{9} \right) + 2388.0597014925365 \text{ Nm} \cdot \left( 5 - 4 \cdot x + x^2 - \frac{2 \cdot x^3}{27} \right) \\ &\quad + 3731.3432835820895 \text{ N} \cdot \left( -6 + 5 \cdot x - \frac{4 \cdot x^2}{3} + \frac{x^3}{9} \right) \\ &= -20000 + 3731.3432835821004 \cdot x \quad 3 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m} \end{aligned}$$

ki je prav tako enaka točni razporeditvi momenta.

Še enostavnejša je ponovno uporaba izraza iz superpozicije, kajti zvezne obtežbe ni in tako s pomočjo linearne interpolacije sledi:

$$\begin{aligned} M_o(x) &= -20000 + 3731.3432835821004 \cdot x \quad 3 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m} \\ M_{z,2N}(x) &= M_o(x) = -20000 + 3731.3432835821004 \cdot x \quad 3 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m} \end{aligned}$$



Slika 185: Graf upogibnega momenta

Približna funkcija prečne sile za drugi končni element je:

$$V_{y,2N}(x) = \frac{dM_{z,2N}(x)}{dx} = 3731.3432835820895 \text{ N} \quad 3 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$$

ki je, zaradi korektnosti izraza za upogibni moment, tudi enaka točni razporeditvi prečne sile (in je tudi enaka kot za prvi končni element).

*Poprocesiranje rezultatov – iskanje približne funkcije prečnega pomika*

Približna funkcija prečnega pomika za prvi končni element, izračunana z ustreznimi (standardnimi) H1 interpolacijskimi funkcijami Bernoulli-Eulerjevega končnega elementa, je:

$$\begin{aligned} v_{1N}(x) &= Y_1 \cdot N_{1,1}(x) + \Phi_1 \cdot N_{1,2}(x) + Y_2 \cdot N_{1,3}(x) + \Phi_2 \cdot N_{1,4}(x) \\ &= 0 \cdot \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{54}\right) + \Phi_1 \cdot 0 - 0.5731343283 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{54}\right) + 1.02686567 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \cdot \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^3}{18}\right) \\ &= -8 \cdot 10^{-5} \cdot x + 6.766169154228856 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 \quad 0 \leq x \leq 3 \text{ m} \end{aligned}$$

in predstavlja zgolj približek prave funkcije prečnega pomika. Prava rešitev je namreč:

$$v_{1A}(x) = -7.880597014925553 \cdot 10^{-5} \cdot x + 6.633499170812681 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 \quad 0 \leq x \leq 3 \text{ m}$$

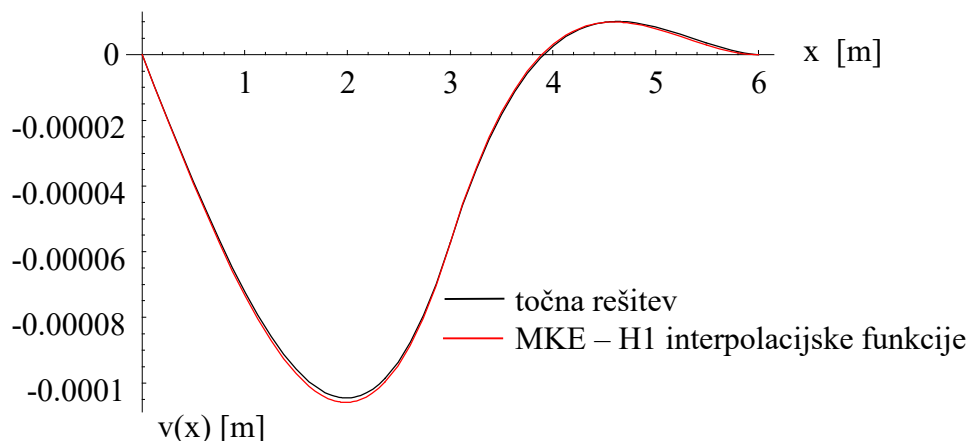
Približna funkcija prečnega pomika za drugi končni element, izračunana z ustreznimi H1 interpolacijskimi funkcijami Bernoulli-Eulerjevega končnega elementa, je:

$$\begin{aligned} v_{2N}(x) &= Y_2 \cdot N_{2,1}(x) + \Phi_2 \cdot N_{2,2}(x) + Y_3 \cdot N_{2,3}(x) + \Phi_3 \cdot N_{2,4}(x) \\ &= -0.5731343283 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \left(-4 + 4 \cdot x - x^2 + \frac{2 \cdot x^3}{27}\right) \\ &\quad + 1.02686567 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \cdot \left(-12 + 8 \cdot x - \frac{5 \cdot x^2}{3} + \frac{x^3}{9}\right) + 0 \cdot N_{2,3}(x) + 0 \cdot N_{2,4}(x) \\ &= -1.0029850746268655 \cdot 10^{-3} + 5.922388059701493 \cdot 10^{-4} \cdot x \\ &\quad - 1.1383084577114428 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 7.164179104477611 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 \quad 3 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m} \end{aligned}$$

in prav tako predstavlja zgolj približek prave funkcije prečnega pomika. Prava rešitev je:

$$\begin{aligned} v_{2A}(x) &= -0.96 \cdot 10^{-3} + 5.611940298507377 \cdot 10^{-4} \cdot x \\ &\quad - 1.0666666666666666 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 6.63349917081243 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 \quad 3 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m} \end{aligned}$$

Kljub temu pa primerjava približka numeričnih in analitičnih prečnih pomikov pokaže, da razlika ni posebej velika.



Slika 186: Primerjava funkcij prečnega pomika

Pri uporabi približne rešitve maksimalni prečni pomik nastopi na razdalji

$$x = 1.9852396506689653 \text{ m}$$

od leve podpore, njegova vrednost pa znaša:

$$v_{1N}(1.985) = -8 \cdot 10^{-5} \cdot 1.985 + 6.766169154228856 \cdot 10^{-6} \cdot 1.985^3 = -1.0587944803567817 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Iz točne rešitve pa sledi:

$$x = 1.989974874213251 \text{ m}$$

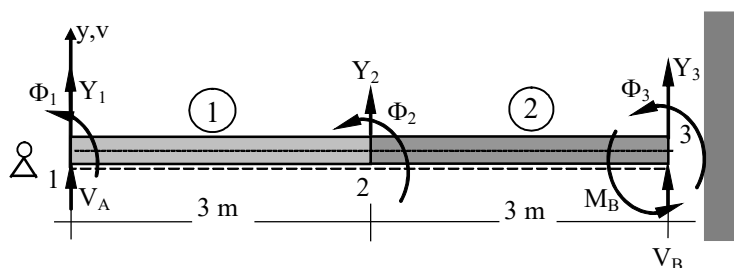
vrednost maksimalnega prečnega pomika pa znaša:

$$\begin{aligned} v_{1A}(1.9) &= -7.880597014925553 \cdot 10^{-5} \cdot 1.9 + 6.633499170812681 \cdot 10^{-6} \cdot 1.9^3 \\ &= -1.04547933690012 \cdot 10^{-4} \text{ m} \end{aligned}$$

kar pokaže, da znaša napaka približne oz. numerične rešitve 1.273 %.

## 2. diskretizacija – elementa V-V in V-V

Diskretizacijo ponovno izvedemo z dvema končnima elementoma, pri čemer sta sedaj uporabljena osnovna oz. standardna končna elementa (elementa tipa V-V). Ker sta oba elementa kolinearna in vzporedna globalni osi X, pretvorb togostnih matrik iz lokalnih koordinatnih sistemov v globalne ni potrebno izvesti.



Slika 187: Izbrana diskretizacija

Togostni matriki obeh elementov sta medsebojno enaki (in že znani iz prvega modela):

$$L_1 = L_2 = 3.0 \text{ m}$$

$$\begin{aligned}
 [K_1] &= [K_2] = \\
 &= \begin{bmatrix} 3.858024691358024 & 5.787037037037036 & -3.858024691358024 & 5.787037037037036 \\ 5.787037037037036 & 11.805555555555555 & -5.787037037037036 & 5.555555555555555 \\ -3.858024691358024 & -5.787037037037036 & 3.858024691358024 & -5.787037037037036 \\ 5.787037037037036 & 5.555555555555555 & -5.787037037037036 & 11.805555555555555 \end{bmatrix} \cdot 10^7
 \end{aligned}$$

Oba obtežna vektorja sta ponovno enaka nič.

*Sestava bistvenih enačb konstrukcije*

Sistem bistvenih enačb konstrukcije sedaj dobi obliko:

$$\begin{bmatrix} 11.805555555555555 & -5.787037037037036 & 5.555555555555555 \\ -5.787037037037036 & 7.716049382716048 & 0 \\ 5.555555555555555 & 0 & 23.611111111111111 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20000 \end{Bmatrix}$$

Sistem ima rešitve:

$$\begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7.641791044776119 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ -0.5731343283582091 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ 1.026865671641791 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Primerjava rešitev za pomik in zasuk na sredini nosilca z vrednostima iz prejšnjega modela pokaže, da sta *enaki*.

Poprocesiranje rezultatov – iskanje sekundarnih spremenljivk (notranjih statičnih količin)

Sekundarne spremenljivke za 1. končni element so:

$$\{Q_1\} = [K_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{1,1} \\ Q_{1,2} \\ Q_{1,3} \\ Q_{1,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3731.3432835820895 \\ 0 \\ -3731.3432835820895 \\ 11194.02985074627 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,1} \\ M_{z,1} \\ V_{y,2\text{levo}} \\ M_{z,2\text{levo}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3731.3432835820895 \text{ N} \\ 0 \\ 3731.3432835820895 \text{ N} \\ 11194.02985074627 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

in so identične rešitvam iz prvega modela.

Notranje statične količine oz. sekundarne spremenljivke za drugi element so:

$$\{Q_2\} = [K_2] \cdot \{U_2\} - \{F_2\}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{2,1} \\ Q_{2,2} \\ Q_{2,3} \\ Q_{2,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3731.3432835820895 \\ 8805.970149253732 \\ -3731.3432835820895 \\ 2388.0597014925365 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,2\text{desno}} \\ M_{z,2\text{desno}} \\ V_{y,3} \\ M_{z,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3731.3432835820895 \text{ N} \\ -8805.970149253732 \text{ Nm} \\ 3731.3432835820895 \text{ N} \\ 2388.0597014925365 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

in so prav tako identične rešitvam iz drugega modela.

Poprocesiranje rezultatov – izračun funkcij prečne sile ter upogibnega momenta

Dobljeni funkciji upogibnega momenta ter prečne sile sta identični funkcijama iz prvega modela.

Poprocesiranje rezultatov – iskanje funkcije prečnega pomika

Približna funkcija prečnega pomika za prvi končni element, izračunana z ustreznimi H1 interpolacijskimi funkcijami Bernoulli-Eulerjevega končnega elementa, je:

$$v_{1N}(x) = Y_1 \cdot N_{1,1}(x) + \Phi_1 \cdot N_{1,2}(x) + Y_2 \cdot N_{1,3}(x) + \Phi_2 \cdot N_{1,4}(x)$$

$$= 0 \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot x^2}{L^2} + \frac{2 \cdot x^3}{L^3}\right) + \Phi_1 \cdot \left(x - \frac{2 \cdot x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) - 0.5731343283 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \left(\frac{3 \cdot x^2}{L^2} - \frac{2 \cdot x^3}{L^3}\right)$$

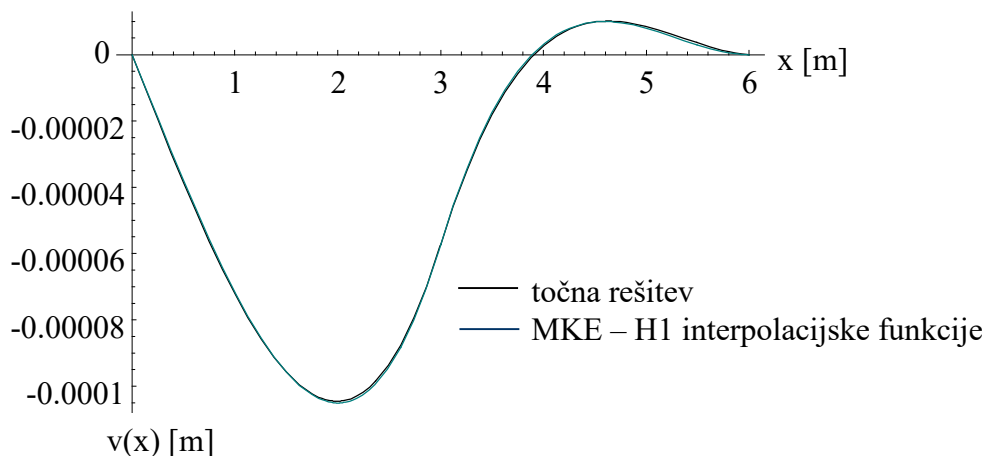
$$+ 1.02686567 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \cdot \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)$$

$$= -7.641791044776119 \cdot 10^{-5} \cdot x - 2.3880597014925406 \cdot 10^{-6} \cdot x^2$$

$$+ 7.164179104477613 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 \quad 0 \leq x \leq 3 \text{ m}$$

ki pa *ni enaka* kot v prvi diskretizaciji (in še vedno predstavlja zgolj *približek* prave funkcije prečnega pomika).

Približna funkcija prečnega pomika za drugi končni element, izračunana z ustreznimi H1 interpolacijskimi funkcijami Bernoulli-Eulerjevega končnega elementa, pa je enaka funkciji, izračunani že v prvi diskretizaciji.



Slika 188: Primerjava funkcij prečnega pomika

Pri uporabi te približne rešitve maksimalni prečni pomik nastopi na razdalji

$$x = 2 \text{ m}$$

od leve podpore, njegova vrednost pa je:

$$v_{\text{IN}}(2) = -1.0507462686567165 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

napaka v primerjavi s točno oz. analitično rešitvijo pa znaša 0.503 % in je manjša kot v prvi diskretizaciji.

Uporaba *točnih* interpolacijskih funkcij za prvi končni pa vodi do:

$$\begin{aligned}
 v_{1N}(x) &= Y_2 \cdot N_{2,1}(x) + \Phi_2 \cdot N_{2,2}(x) + Y_3 \cdot N_{2,3}(x) + \Phi_3 \cdot N_{2,4}(x) \\
 &= 0 \cdot \frac{1}{1+\Phi} \cdot \left( 1 - \frac{3 \cdot x^2}{L_e^2} + \frac{2 \cdot x^3}{L_e^3} + \Phi \cdot \left( 1 - \frac{x}{L_e} \right) \right) \\
 &\quad - 7.6417910448 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \cdot \frac{1}{1+\Phi} \cdot \left( x - \frac{2 \cdot x^2}{L_e} + \frac{x^3}{L_e^2} + \frac{\Phi}{2} \cdot \left( x - \frac{x^2}{L_e} \right) \right) \\
 &\quad - 0.5731343283 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \frac{1}{1+\Phi} \cdot \left( \frac{3 \cdot x^2}{L_e^2} - \frac{2 \cdot x^3}{L_e^3} + \Phi \cdot \frac{x}{L_e} \right) \\
 &\quad + 1.02686567 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \cdot \frac{1}{1+\Phi} \cdot \left( -\frac{x^2}{L_e} + \frac{x^3}{L_e^2} - \frac{\beta}{2} \cdot \left( x - \frac{x^2}{L_e} \right) \right) \\
 &= 0 \cdot (1 - 0.024691358024691357 \cdot x - 0.30864197530864196 \cdot x^2 + 0.06858710562414265 \cdot x^3) \\
 &\quad - 7.6417910448 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \cdot \\
 &\quad (0.9629629629629628 \cdot x - 0.6296296296296295 \cdot x^2 + 0.10288065843621398 \cdot x^3) \\
 &\quad - 0.5731343283 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \\
 &\quad (0.024691358024691353 \cdot x + 0.30864197530864196 \cdot x^2 - 0.06858710562414265 \cdot x^3) \\
 &\quad + 1.02686567 \cdot 10^{-4} \cdot \\
 &\quad (-0.037037037037037035 \cdot x - 0.2962962962962963 \cdot x^2 + 0.10288065843621398 \cdot x^3) \\
 &= -7.880597014925373 \cdot 10^{-5} \cdot x + 6.633499170812602 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 3 \text{ m}
 \end{aligned}$$

kar predstavlja točno rešitev (malenkostne razlike nastopijo zgolj zaradi zaokroževanja), saj element ni obremenjen z zvezno obtežbo.

Uporaba *točnih* interpolacijskih funkcij za drugi končni pa vodi do:

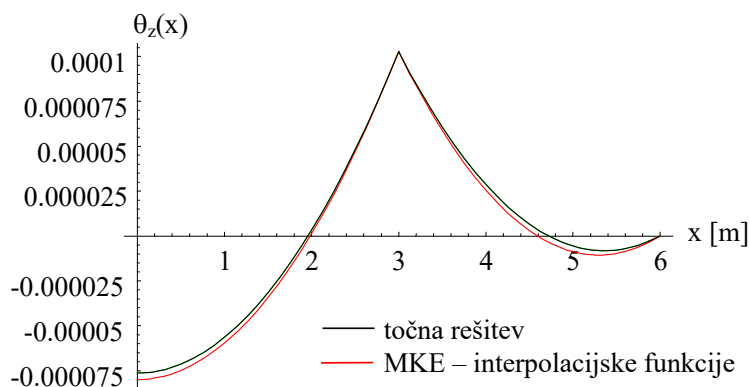
$$\begin{aligned}
 v_{2N}(x) &= Y_2 \cdot N_{2,1}(x) + \Phi_2 \cdot N_{2,2}(x) + Y_3 \cdot N_{2,3}(x) + \Phi_3 \cdot N_{2,4}(x) \\
 &= -0.5731343283 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \frac{1}{1+\Phi} \cdot \left( 1 - \frac{3 \cdot x^2}{L_e^2} + \frac{2 \cdot x^3}{L_e^3} + \Phi \cdot \left( 1 - \frac{x}{L_e} \right) \right) \\
 &\quad + 1.02686567 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \cdot \frac{1}{1+\Phi} \cdot \left( x - \frac{2 \cdot x^2}{L_e} + \frac{x^3}{L_e^2} + \frac{\Phi}{2} \cdot \left( x - \frac{x^2}{L_e} \right) \right) \\
 &\quad + 0 \cdot \frac{1}{1+\Phi} \cdot \left( \frac{3 \cdot x^2}{L_e^2} - \frac{2 \cdot x^3}{L_e^3} + \Phi \cdot \frac{x}{L_e} \right) + 0 \cdot \frac{1}{1+\Phi} \cdot \left( -\frac{x^2}{L_e} + \frac{x^3}{L_e^2} - \frac{\beta}{2} \cdot \left( x - \frac{x^2}{L_e} \right) \right) \\
 &= -0.5731343283 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \\
 &\quad (1 - 0.024691358024691357 \cdot x - 0.30864197530864196 \cdot x^2 + 0.06858710562414265 \cdot x^3) \\
 &\quad + 1.02686567 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \cdot \\
 &\quad (0.9629629629629628 \cdot x - 0.6296296296296295 \cdot x^2 + 0.10288065843621398 \cdot x^3) \\
 &\quad + 0 \cdot (0.024691358024691353 \cdot x + 0.30864197530864196 \cdot x^2 - 0.06858710562414265 \cdot x^3) \\
 &\quad + 0 \cdot (-0.037037037037037035 \cdot x - 0.2962962962962963 \cdot x^2 + 0.10288065843621398 \cdot x^3) \\
 &= -5.731343283582091 \cdot 10^{-5} + 1.0029850746268656 \cdot 10^{-4} \cdot x - 4.696517412935324 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 \\
 &\quad + 6.633499170812603 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 3 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Ko zapisano funkcijo pretvorimo iz lokalnega v globalni koordinatni sistem, sledi:

$$v_{2N}(x) = -0.96 \cdot 10^{-3} + 5.611940298507463 \cdot 10^{-4} \cdot x - 1.066666666666667 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 6.633499170812603 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 \quad 3 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$$

kar predstavlja točno rešitev (malenkostne razlike nastopijo zgolj zaradi zaokroževanja), saj element ni obremenjen z zvezno obtežbo.

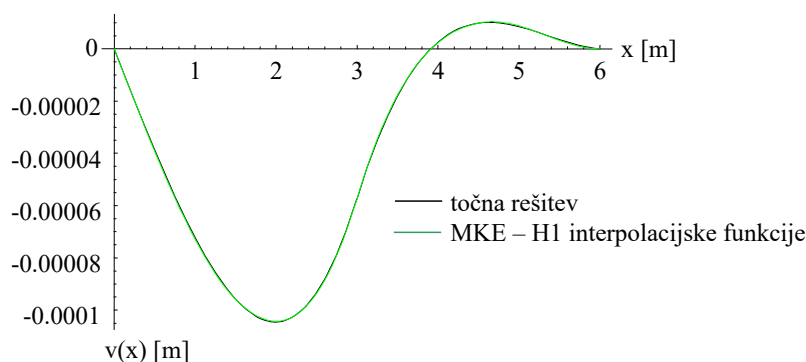
Podobno velja za zasuk. Uporaba standardnih interpolacijskih funkcij (Bernoulli-Eulerjevega končnega elementa) za izračun pomika vodi do približkov zasuka, uporaba posebnih točnih interpolacijskih funkcij za zasuk pa do točnega zasuka (saj element ni obremenjen z zvezno obtežbo):



Slika 189: Primerjava funkcij zasuka

### 3. diskretizacija – uporaba 4 elementov: enega Č-V in treh V-V

Če uporabimo model s štirimi končnimi elementi, pa izkazuje slika pomika, izračunana z ustreznimi H1 interpolacijskimi funkcijami Bernoulli-Eulerjevega končnega elementa, (pričakovano) boljše ujemanje (čeprav gre še vedno za približke):



Slika 190: Primerjava funkcij prečnega pomika

Pri uporabi te približne rešitve maksimalni prečni pomik nastopi na razdalji

$$x = 2 \text{ m}$$

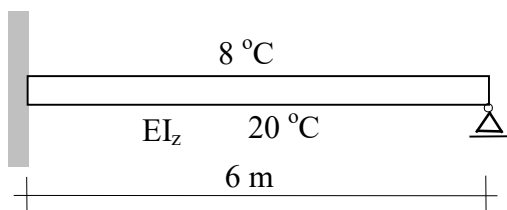
od leve podpore, njegova vrednost pa znaša:

$$v_{2N}(2) = -1.0427860696517417 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

napaka proti točni oz. analitični rešitvi pa znaša -0.258 % in je najmanjša izmed vseh treh prikazanih diskretizacij.

### Primer 11 – Osni in prečni pomiki nosilca zaradi temperaturne obtežbe

Določi upogibnico in razporeditev notranjih statičnih količin nosilca pravokotnega prereza ( $b = 0.1 \text{ m}$ ,  $h = 0.2 \text{ m}$ ) z dolžino 6 m na sliki, ki je na levem koncu polno vpet, na desni pa členkasto podprt, obremenjenega s temperaturno obtežbo. Modul elastičnosti znaša  $E = 30 \text{ GPa}$ , linearni koeficient toplotnega raztezka pa znaša  $\alpha_T = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$ .



Slika 191: Obravnavani nosilec

### Rešitev

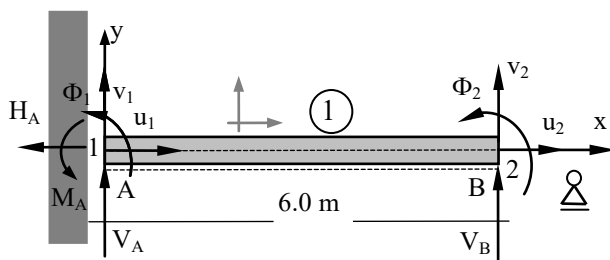
Osna in upogibna togost prereza znašata:

$$EA = 30 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 0.1 \text{ m} \cdot 0.2 \text{ m} = 6 \cdot 10^8 \text{ N}$$

$$EI_z = 30 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{0.1 \text{ m} \cdot (0.2 \text{ m})^3}{12} = 2 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

## 1. diskretizacija – rešitev z enim standardnim končnim elementom

Če uporabimo (najmanjšo mogočo) diskretizacijo z enim standardnim končnim elementom, nastopita 2 vozlišči, in sicer pri  $x_1=0$ , in  $x_2=6.0$  m, računski model pa ima dve prostostni stopnji: vodoravni pomik  $u_2$  (oz. splošnejše  $X_2$ ) in pripadajoči zasuk  $\Phi_2$  desnega konca.



Slika 192: Diskretizacija z enim standardnim končnim elementom

Togostna matrika edinega končnega elementa je tako:

$$[k_1] = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^8 & 0 & 0 & -1 \cdot 10^8 & 0 & 0 \\ 0 & 111111.11 & 333333.33 & 0 & -111111.11 & 333333.33 \\ 0 & 333333.33 & 1333333.33 & 0 & -333333.33 & 666666.67 \\ -1 \cdot 10^8 & 0 & 0 & 1 \cdot 10^8 & 0 & 0 \\ 0 & -111111.11 & -333333.33 & 0 & 111111.11 & -333333.33 \\ 0 & 333333.33 & 666666.67 & 0 & -333333.33 & 1333333.33 \end{bmatrix}$$

Nadomestni osni vozliščni sili, ki sta posledica spremembe temperature, sta:

$$H_T = \alpha_T \cdot \Delta T_{os} \cdot E \cdot A = \frac{1 \cdot 10^{-5}}{^{\circ}\text{C}} \cdot \frac{8^{\circ}\text{C} + 20^{\circ}\text{C}}{2} \cdot 30 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.1 \text{ m} \cdot 0.2 \text{ m} = 84000 \text{ N}$$

Nadomestna vozliščna momenta, ki sta posledica spremembe temperature, sta:

$$M_T = \alpha_T \cdot \frac{\Delta T_{zgoraj} - \Delta T_{spodaj}}{h} \cdot E \cdot I_z = \frac{1 \cdot 10^{-5}}{^{\circ}\text{C}} \cdot \frac{8^{\circ}\text{C} - 20^{\circ}\text{C}}{0.2 \text{ m}} \cdot 30 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot \frac{0.1 \text{ m} \cdot (0.2 \text{ m})^3}{12} = -1200 \text{ Nm}$$

Obtežni vektor elementa je:

$$\{F_1\} = \begin{Bmatrix} -H_T \\ 0 \\ M_T \\ H_T \\ 0 \\ -M_T \end{Bmatrix} = \alpha_T \cdot E \cdot \begin{Bmatrix} -\Delta T_{os} \cdot A \\ 0 \\ \frac{\Delta T_{zgoraj} - \Delta T_{spodaj}}{h} \cdot I_z \\ \Delta T_{os} \cdot A \\ 0 \\ -\frac{\Delta T_{zgoraj} - \Delta T_{spodaj}}{h} \cdot I_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -84000 \\ 0 \\ -1200 \\ 84000 \\ 0 \\ 1200 \end{Bmatrix}$$

Bistveni enačbi konstrukcije (*izjemoma* celo nevezani, ker bi lahko problem osnih pomikov obravnavali ločeno od problema prečnih pomikov) po upoštevanju ničelnih pomikov ter zasuka v točki A ( $u_1=X_1=0$ ,  $v_1=Y_1=0$  in  $\Phi_1=0$ ), ter prečnega pomika v točki B ( $v_2=Y_2=0$ ) konstrukcije sta:

$$\begin{bmatrix} 1 \cdot 10^8 & 0 \\ 0 & 1333333.333 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 84000 \\ 1200 \end{Bmatrix}$$

Iz enačb tako sledita vozliščni vrednosti osnega pomika in zasuka (primarnih spremenljivk) v končnem vozlišču oz. desni podpori:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.00084 \text{ m} \\ 0.0009 \text{ rad} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8.4 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ 9 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

ki sta identični pravima vrednostima.

*Poprocesiranje rezultatov – izračun vozliščnih vrednosti notranjih statičnih količin*

Sekundarne spremenljivke (osni in prečni sili ter vrednosti upogibnega momenta na koncih elementa) sledijo iz:

$$\{Q_1\} = [K_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^8 & 0 & 0 & -1 \cdot 10^8 & 0 & 0 \\ 0 & 111111.11 & 333333.33 & 0 & -111111.11 & 333333.33 \\ 0 & 333333.33 & 1333333.33 & 0 & -333333.33 & 666666.67 \\ -1 \cdot 10^8 & 0 & 0 & 1 \cdot 10^8 & 0 & 0 \\ 0 & -111111.11 & -333333.33 & 0 & 111111.11 & -333333.33 \\ 0 & 333333.33 & 666666.67 & 0 & -333333.33 & 1333333.33 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8.4 \cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 9 \cdot 10^{-4} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -84000 \\ 0 \\ -1200 \\ 84000 \\ 0 \\ 1200 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 300 \\ 1800 \\ 0 \\ -300 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,1} \\ V_{y,1} \\ M_{z,1} \\ N_{x,2} \\ V_{y,2} \\ M_{z,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 300 \text{ N} \\ -1800 \text{ Nm} \\ 0 \\ 300 \text{ N} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Rešitve pokažejo, da osne sile zaradi temperaturne obtežbe v obravnavanem primeru ni.

*Poprocesiranje rezultatov – izračun reakcij iz NSK*

Iz ravnotežja sil in momentov v skladu z izbranimi usmeritvami sledijo:

$$V_A - V_{y,1} = 0 \rightarrow V_A = V_{y,1} = 300 \text{ N}$$

usmerjena navzgor

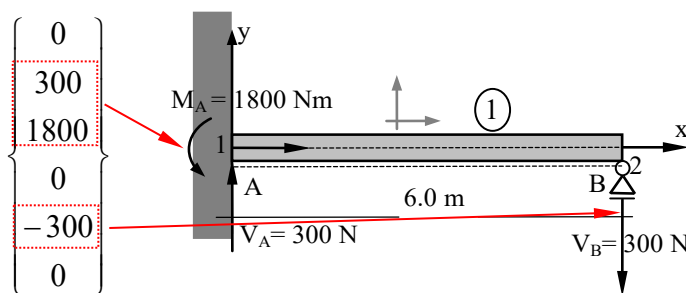
$$M_A + M_{z,1} = 0 \rightarrow M_A = -M_{z,1} = -(-1800) \text{ Nm} = 1800 \text{ Nm}$$

deluje protiurno

$$V_B + V_{y,2} = 0 \rightarrow V_B = -V_{y,2} = -300 \text{ N}$$

ki pokaže, da je vertikalna reakcija v desni podpori usmerjena navzdol.

Enake velikosti in usmeritve reakcij sledijo tudi neposredno iz vektorja sekundarnih spremenljivk:



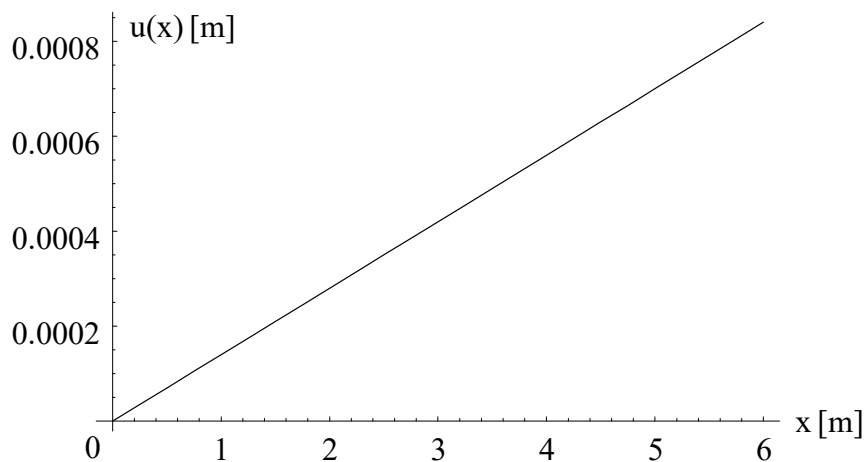
Slika 193: Reakcije

*Poprocesiranje rezultatov – izračun funkcij osnega in prečnega pomika*

Približna funkcija osnega pomika je:

$$u_{x,1N}(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot u_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot u_2 = 0 \cdot \frac{6 - x}{6 - 0} + 8.4 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \frac{x - 0}{6 - 0} = 1.4 \cdot 10^{-4} \cdot x \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m}$$

in je enaka točni rešitvi.

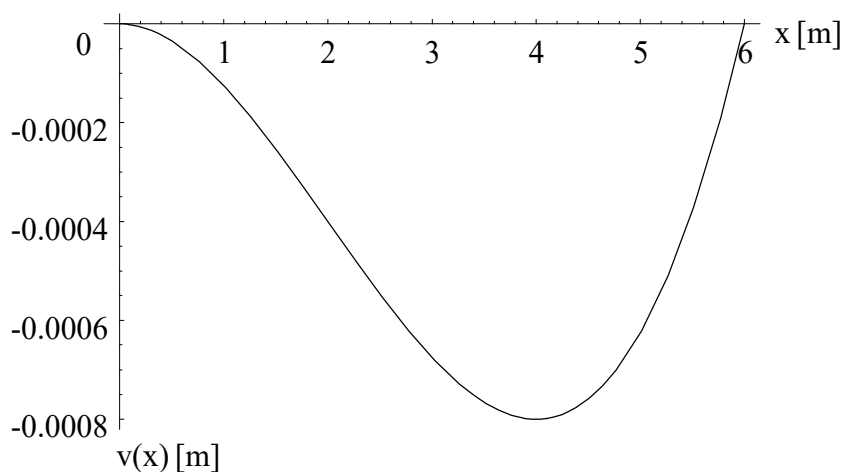


Slika 194: Graf funkcije osnega pomika

Približna funkcija prečnega pomika je ( $x_A = 0$  in  $L_e = 6$  m):

$$\begin{aligned}
 v_{1,N}(x) &= \{N_{1,1}(x), N_{1,2}(x), N_{1,3}(x), N_{1,4}(x)\} \cdot \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \Phi_1 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} \\
 &= \left\{ 1 - \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{108}, x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{36}, \frac{x^2}{12} - \frac{x^3}{108}, -\frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{36} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \end{Bmatrix} \\
 &= -1.5 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 2.5 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m}
 \end{aligned}$$

in je prav tako enaka točni rešitvi.



Slika 195: Prečni pomik

Na sredini nosilca nastopi prečni pomik:

$$v_{1,N}(3 \text{ m}) = -1.5 \cdot 10^{-4} \cdot 3^2 + 2.5 \cdot 10^{-5} \cdot 3^3 = -6.75 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

medtem ko maksimalni prečni pomik nastopi pri:

$$\frac{dv_{1,N}(x)}{dx} = -3.0 \cdot 10^{-4} \cdot x + 7.5 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 = 0 \rightarrow (-3.0 \cdot 10^{-4} + 7.5 \cdot 10^{-5} \cdot x) \cdot x = 0$$

$$7.5 \cdot 10^{-5} \cdot x = 3.0 \cdot 10^{-4} \rightarrow x = \frac{3.0 \cdot 10^{-4}}{7.5 \cdot 10^{-5}} = 4 \text{ m}$$

in znaša:

$$v_{1,N}(4 \text{ m}) = -1.5 \cdot 10^{-4} \cdot 4^2 + 2.5 \cdot 10^{-5} \cdot 4^3 = -8 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

*Poprocesiranje rezultatov – iskanje funkcije upogibnega momenta z interpolacijo vozliščnih vrednosti*

Z uporabo H1 interpolacijskih funkcij (že znanih iz interpolacije za izračun funkcije prečnega pomika) sledi:

$$M_{1,N}(x) = M_{z,1} \cdot N_{1,1}(x) + V_{y,1} \cdot N_{1,2}(x) + M_{z,2} \cdot N_{1,3}(x) + V_{y,2} \cdot N_{1,4}(x)$$

$$= -1800 \cdot N_{1,1}(x) + 300 \cdot N_{1,2}(x) + 0 \cdot N_{1,3}(x) + 300 \cdot N_{1,4}(x) = -1800 + 300 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m}$$

kar pokaže, da je razporeditev momenta linearna.

*Poprocesiranje rezultatov – iskanje funkcije upogibnega momenta iz funkcije prečnega pomika*

Ker pa je funkcija prečnega pomika točna, bi točno funkcijo upogibnega momenta lahko dobili tudi s pomočjo dvakratnega odvoda funkcije prečnega pomika, pri čemer izhajamo iz diferencialne zveze:

$$\frac{d^2 v_{1,N}(x)}{dx^2} = \frac{M_{z1,N}(x)}{EI_z} - \alpha_T \cdot \frac{\Delta T_{\text{zgoraj}} - \Delta T_{\text{spodaj}}}{h} \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m}$$

$$-3.0 \cdot 10^{-4} + 15 \cdot 10^{-5} \cdot x = \frac{M_{z1,N}(x)}{2 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2} - \frac{1 \cdot 10^{-5}}{^\circ\text{C}} \cdot \frac{8 \text{ }^\circ\text{C} - 20 \text{ }^\circ\text{C}}{0.2 \text{ m}} \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m}$$

$$-3.0 \cdot 10^{-4} + 15 \cdot 10^{-5} \cdot x = \frac{M_{z1,N}(x)}{2 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2} + 60 \cdot 10^{-5} \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m}$$

$$\frac{M_{z1,N}(x)}{2 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2} = -6 \cdot 10^{-4} - 3.0 \cdot 10^{-4} + 15 \cdot 10^{-5} \cdot x = -9 \cdot 10^{-4} + 15 \cdot 10^{-5} \cdot x \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m}$$

$$M_{z1,N}(x) = -1800 + 300 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m}$$

Poprocesiranje rezultatov – iskanje funkcije upogibnega momenta s superpozicijo

Funkcija linearne razporeditve momenta za edini element sledi iz robnih pogojev:

$$M_{1,o}(0) = -1800 \text{ Nm}$$

in

$$M_{1,o}(6 \text{ m}) = 0$$

kar vodi do:

$$M_{1,o}(x) = -1800 + 300 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m}$$

Ker na elementu ni zvezne obtežbe, je to tudi končna vrednost upogibnega momenta:

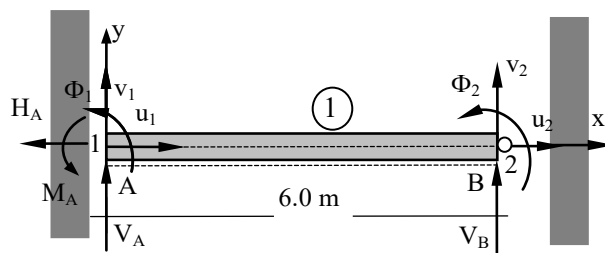
$$M_{z1N}(x) = -1800 + 300 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m}$$

Funkcija prečne sile je tako:

$$V_{y,1N}(x) = \frac{dM_{z1N}(x)}{dx} = 300 \text{ N} \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m}$$

## 2. diskretizacija – uporaba enega končnega elementa s členkom

Če uporabimo (najmanjšo mogočo) diskretizacijo z enim končnim elementom V-Č, nastopita 2 vozlišči, in sicer pri  $x_1=0$ , in  $x_2=6.0$  m, računski model pa ima eno prostostno stopnjo: vodoravni pomik  $u_2$  (oz. splošnejše  $X_2$ ).



Slika 196: Diskretizacija s končnim elementom V-Č

Togostna matrika edinega končnega elementa je tako:

$$[k_i] = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^8 & 0 & 0 & -1 \cdot 10^8 & 0 & 0 \\ 0 & 27777.77777777785 & 166666.66666666672 & 0 & -27777.77777777785 & 0 \\ 0 & 166666.66666666672 & 1000000.0 & 0 & -166666.66666666672 & 0 \\ -1 \cdot 10^8 & 0 & 0 & 1 \cdot 10^8 & 0 & 0 \\ 0 & -27777.77777777785 & -166666.66666666672 & 0 & 27777.77777777785 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Osnovni vozliščni sili, ki sta posledica spremembe temperature, sta:

$$H_T = \alpha_T \cdot \Delta T_{os} \cdot E \cdot A = \frac{1 \cdot 10^{-5}}{^{\circ}\text{C}} \cdot \frac{8^{\circ}\text{C} + 20^{\circ}\text{C}}{2} \cdot 30 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot 0.1 \text{ m} \cdot 0.2 \text{ m} = 84000 \text{ N}$$

Vozliščna momenta, ki sta posledica spremembe temperature, sta:

$$M_T = \alpha_T \cdot \frac{\Delta T_{zgoraj} - \Delta T_{spodaj}}{h} \cdot E \cdot I_z = \frac{1 \cdot 10^{-5}}{^{\circ}\text{C}} \cdot \frac{8^{\circ}\text{C} - 20^{\circ}\text{C}}{0.2 \text{ m}} \cdot 30 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot \frac{0.1 \text{ m} \cdot (0.2 \text{ m})^3}{12} = -1200 \text{ Nm}$$

Obtežni vektor elementa je:

$$\{F_{\Delta T}^r\} = \begin{Bmatrix} -H_T \\ \frac{3}{2 \cdot L} \cdot M_T \\ \frac{3}{2} \cdot M_T \\ H_T \\ -\frac{3}{2 \cdot L} \cdot M_T \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -84000 \\ -300 \\ -1800 \\ 84000 \\ 300 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Matrična enačba končnega elementa je:

$$1 \cdot 10^8 \cdot u_2 = 84000$$

iz katere sledi vozliščna vrednost osnega pomika (primarne spremenljivke) v desni podpori:

$$u_2 = X_2 = 0.00084 \text{ m} = 8.4 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

ki je identična pravi vrednosti.

*Poprocesiranje rezultatov – izračun vozliščnih vrednosti notranjih statičnih količin*

Sekundarne spremenljivke (osni in prečni sili ter vrednosti upogibnega momenta na koncih elementa) sledijo iz:

$$\{Q_i\} = [K_i] \cdot \{U_i\} - \{F_i\} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 \cdot 10^8 & 0 & 0 & -1 \cdot 10^8 & 0 & 0 \\ 0 & 27777.7778 & 166666.6667 & 0 & -27777.7778 & 0 \\ 0 & 166666.6667 & 1000000.0 & 0 & -166666.6667 & 0 \\ -1 \cdot 10^8 & 0 & 0 & 1 \cdot 10^8 & 0 & 0 \\ 0 & -27777.7778 & -166666.6667 & 0 & 27777.7778 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8.4 \cdot 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -84000 \\ -300 \\ -1800 \\ 84000 \\ 300 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 300 \\ 1800 \\ 0 \\ -300 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,1} \\ V_{y,1} \\ M_{z,1} \\ N_{x,2} \\ V_{y,2} \\ M_{z,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 300 \text{ N} \\ -1800 \text{ Nm} \\ 0 \\ 300 \text{ N} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

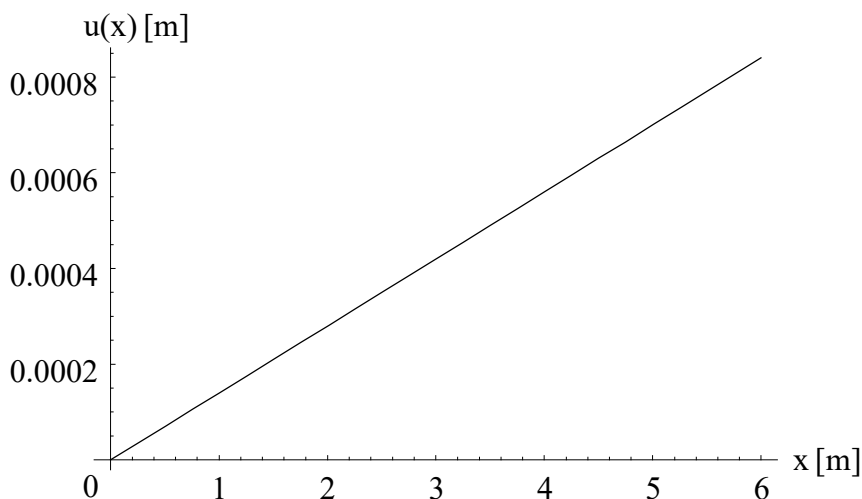
in so točne vrednosti.

*Poprocesiranje rezultatov – izračun funkcij osnega in prečnega pomika*

Približna funkcija osnega pomika je:

$$u_{x,IN}(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot u_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot u_2 = 0 \cdot \frac{6 - x}{6 - 0} + 8.4 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \frac{x - 0}{6 - 0} = 1.4 \cdot 10^{-4} \cdot x \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m}$$

in je enaka točni rešitvi.



Slika 197: Osní pomik

Približna funkcija prečnega pomika je ( $x_A = 0$  in  $L_e = 6$  m):

$$v_{1,N}(x) = \{N_{1,1}(x), N_{1,2}(x), N_{1,3}(x), N_{1,4}(x)\} \cdot \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \Phi_1 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} \\ = \left\{ 1 - \frac{x^2}{24} + \frac{x^3}{432}, x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{72}, \frac{x^2}{24} - \frac{x^3}{432}, 0 \right\} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m}$$

kar pokaže, da s takšno diskretizacijo in temi interpolacijskimi funkcijami ne moremo dobiti funkcije prečnega pomika.

Če želimo uporabiti interpolacijo, moramo uporabiti interpolacijske funkcije H2, s katerimi v analizo zajamemo tudi druga odvoda funkcije pomika (»ukrivljenosti«) v začetnem in končnem vozlišču, ki znašata (vrednost v desnem vozlišču ni enaka nič, pa čeprav je tam vrednost upogibnega momenta enaka 0):

$$\begin{aligned}\kappa(0) &= \frac{d^2 v_{1,N}(0)}{dx^2} = \frac{M_{z1,N}(0)}{EI_z} - \alpha_T \cdot \frac{\Delta T_{\text{zgoraj}} - \Delta T_{\text{spodaj}}}{h} = \frac{-1800 \text{ Nm}}{2 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2} - \frac{1 \cdot 10^{-5}}{^\circ\text{C}} \cdot \frac{8 \text{ }^\circ\text{C} - 20 \text{ }^\circ\text{C}}{0.2 \text{ m}} \\ &= -0.0003 \frac{1}{\text{m}} = -3 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{m}}\end{aligned}$$

ter

$$\begin{aligned}\kappa(6) &= \frac{d^2 v_{1,N}(6)}{dx^2} = \frac{M_{z1,N}(6)}{EI_z} - \alpha_T \cdot \frac{\Delta T_{\text{zgoraj}} - \Delta T_{\text{spodaj}}}{h} = \frac{0 \text{ Nm}}{2 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2} - \frac{1 \cdot 10^{-5}}{^\circ\text{C}} \cdot \frac{8 \text{ }^\circ\text{C} - 20 \text{ }^\circ\text{C}}{0.2 \text{ m}} \\ &= 0.0006 \frac{1}{\text{m}} = 6 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{m}}\end{aligned}$$

Približna funkcija prečnega pomika je ( $x_A = 0$  in  $L_e = 6$  m):

$$\begin{aligned}v_{1,N}(x) &= \{N_{1,1}(x), N_{1,2}(x), N_{1,3}(x), N_{1,4}(x), N_{1,5}(x)\} \cdot \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \Phi_1 \\ Y_2 \\ \kappa(6) \end{Bmatrix} = \\ &= \left\{ 1 - \frac{x^3}{108} + \frac{x^4}{1296}, x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^4}{216}, \frac{x^2}{2} - \frac{5 \cdot x^3}{36} + \frac{x^4}{108}, \frac{x^3}{108} - \frac{x^4}{1296}, -\frac{x^3}{36} + \frac{x^4}{216} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \cdot 10^{-4} \\ 6 \cdot 10^{-4} \end{Bmatrix} \\ &= -1.5 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 2.5 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m}\end{aligned}$$

in je enaka točni rešitvi.



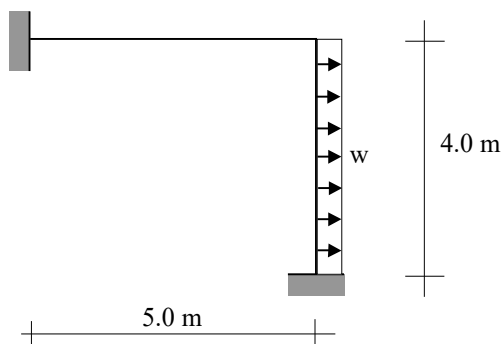
# Ravninske linijske konstrukcije

## Primer 12 – Enostavna okvirna konstrukcija

Izračunaj vozliščne pomike, reakcije in notranje statične količine za okvirno konstrukcijo na sliki. Poišči tudi ekstremni vrednosti upogibnega momenta v stebru.

Prerez stebra je pravokotnik z dimenzijama  $b/h = 0.3/0.3$  m, prerez prečke pa pravokotnik z dimenzijama  $b/h = 0.3/0.6$  m. Oba elementa sta iz betona, ki ima modul elastičnosti  $E=30.5$  GPa.

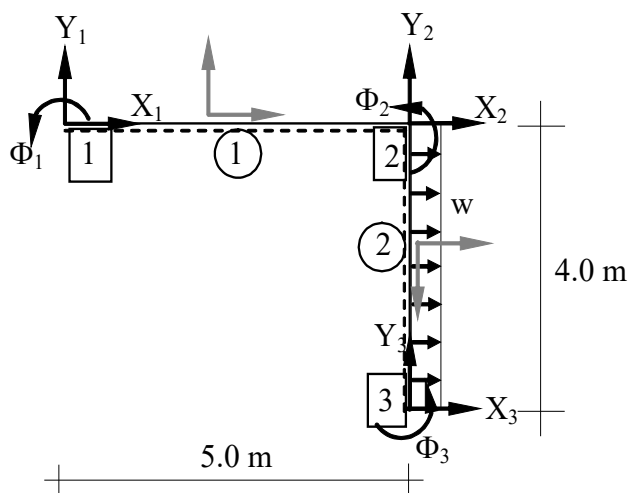
Enakomerna zvezna obtežba znaša  $w= 1000$  N/m<sup>2</sup>.



Slika 198: Obravnavani okvir

**Rešitev**

Zaradi dveh nekoliniarnih konstrukcijskih elementov diskretiziramo konstrukcijo izvedemo z vsaj dvema končnima elementoma in označimo vozlišča, elemente in njihove orientacije ter globalne prostostne stopnje:



Slika 199: Izbrana diskretizacija

Ker so vozliščni pomiki  $X_1$ ,  $Y_1$ ,  $\Phi_1$ ,  $X_3$ ,  $Y_3$  in  $\Phi_3$  enaki nič, so prostostne stopnje dva pomika ( $X_2$  in  $Y_2$ ) ter en zasuk ( $\Phi_2$ ).

Za oba elementa sedaj izračunamo globalni togostni matriki.

*Element 1 – standardni končni element V-V*

$$L_e = 5.0 \text{ m}$$

$$EA = 30.5 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 0.3 \text{ m} \cdot 0.6 \text{ m} = 5.49 \cdot 10^9 \text{ N}$$

$$EI_z = 30.5 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{0.3 \text{ m} \cdot (0.6 \text{ m})^3}{12} = 1.647 \cdot 10^8 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

Lokalna togostna matrika je:

$$[k_1] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L_e} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot EI_z}{L_e^3} & \frac{6 \cdot EI_z}{L_e^2} & 0 & -\frac{12 \cdot EI_z}{L_e^3} & \frac{6 \cdot EI_z}{L_e^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot EI_z}{L_e^2} & \frac{4 \cdot EI_z}{L_e} & 0 & -\frac{6 \cdot EI_z}{L_e^2} & \frac{2 \cdot EI_z}{L_e} \\ -\frac{EA}{L_e} & 0 & 0 & \frac{EA}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot EI_z}{L_e^3} & -\frac{6 \cdot EI_z}{L_e^2} & 0 & \frac{12 \cdot EI_z}{L_e^3} & -\frac{6 \cdot EI_z}{L_e^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot EI_z}{L_e^2} & \frac{2 \cdot EI_z}{L_e} & 0 & -\frac{6 \cdot EI_z}{L_e^2} & \frac{4 \cdot EI_z}{L_e} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -109.8 & 0 & 0 & -109.8 & 0 & 0 \\ 0 & -1.58112 & -3.9528 & 0 & -1.58112 & -3.9528 \\ 0 & 3.9528 & 13.176 & 0 & -3.9528 & -6.588 \\ -109.8 & 0 & 0 & 109.8 & 0 & 0 \\ 0 & -1.58112 & -3.9528 & 0 & 1.58112 & -3.9528 \\ 0 & 3.9528 & 6.588 & 0 & -3.9528 & 13.176 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Kot, ki ga lokalna x os prvega končnega elementa oklepa z globalno osjo X, je  $0^\circ$ , in tako velja:

$$\alpha = 0 \rightarrow \begin{cases} s = \sin(0) = 0 \\ c = \cos(0) = 1 \end{cases}$$

Rotacijska matrika je:

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I]$$

in tako je globalna togostna matrika prvega končnega elementa enaka lokalni togostni matriki:  $[K_1] = [k_1]$ .

Ker na element ne deluje nobena zunanja obtežba, je pripadajoči obtežni vektor enak 0.

*Element 2 – standardni končni element*

$L_e = 4.0 \text{ m}$

$$EA = 30.5 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 0.3 \text{ m} \cdot 0.3 \text{ m} = 2.745 \cdot 10^9 \text{ N}$$

$$EI_z = 30.5 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{0.3 \text{ m} \cdot (0.3 \text{ m})^3}{12} = 2.05875 \cdot 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

Lokalna togostna matrika je:

$$[k_2] = \begin{bmatrix} 68.625 & 0 & 0 & -68.625 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3860156 & 0.7720313 & 0 & -0.3860156 & 0.7720313 \\ 0 & 0.7720313 & 2.05875 & 0 & -0.7720313 & 1.029375 \\ -68.625 & 0 & 0 & 68.625 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3860156 & -0.7720313 & 0 & 0.3860156 & -0.7720313 \\ 0 & 0.7720313 & 1.029375 & 0 & -0.7720313 & 2.05875 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Kot, ki ga lokalna x os drugega končnega elementa oklepa z globalno osjo X, je  $270^\circ$  (oziroma  $-90^\circ$ ), in tako velja:

$$\alpha = 270^\circ = -90^\circ \rightarrow \begin{aligned} s &= \sin(270) = -1 \\ c &= \cos(270) = 0 \end{aligned}$$

kar vodi do transformacijske matrike:

$$[T_2] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Globalna togostna matrika drugega končnega elementa je tako:

$$[K_2] = \begin{bmatrix} 0.3860156 & 0 & 0.7720313 & -0.3860156 & 0 & 0.7720313 \\ 0 & 68.625 & 0 & 0 & -68.625 & 0 \\ 0.7720313 & 0 & 2.05875 & -0.7720313 & 0 & 1.029375 \\ -0.3860156 & 0 & -0.7720313 & 0.3860156 & 0 & -0.7720313 \\ 0 & -68.625 & 0 & 0 & 68.625 & 0 \\ -0.7720313 & 0 & 1.029375 & 0.7720313 & 0 & -2.05875 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Lokalni obtežni vektor zaradi enakomerne zvezne obtežbe  $w$  na drugem končnem elementu je (glede na izbrano orientacijo 2. končnega elementa moramo upoštevati pozitivno vrednost velikosti obtežbe):

$$\{f_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2000 \\ 1333.333333 \\ 0 \\ 2000 \\ -1333.333333 \end{Bmatrix}$$

Globalni obtežni vektor drugega končnega elementa zaradi enakomerne zvezne obtežbe na drugem končnem elementu dobimo z uporabo že znane transformacijske matrike:

$$\{F_2\} = [T_2] \cdot \{f_2\} = \frac{q \cdot L}{12} \cdot \begin{Bmatrix} -6 \cdot \sin \alpha \\ 6 \cdot \cos \alpha \\ L \\ -6 \cdot \sin \alpha \\ 6 \cdot \cos \alpha \\ -L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2000 \\ 0 \\ 1333.333333 \\ -2000 \\ 0 \\ -1333.333333 \end{Bmatrix}$$

Opomba: ker gre za enostavno transformacijo, je mogoče člene globalnega vektorja zapisati tudi brez uporabe rotacijske matrike.

Togostna matrika konstrukcije je tako:

$$[K] = \begin{bmatrix} 110.186015625 & 0 & 0.77203125 \\ 0 & 70.20612 & -3.9528 \\ 0.77203125 & -3.9528 & 15.23475 \end{bmatrix}$$

obtežni vektor pa:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 2000 \\ 0 \\ 1333.33333333 \end{Bmatrix}$$

Neznana pomika in zasuk (primarne spremenljivke) sledijo iz sistema, ki predstavlja bistvene enačbe konstrukcije:

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\}$$

oziroma

$$\begin{bmatrix} 110.186015625 & 0 & 0.77203125 \\ 0 & 70.20612 & -3.9528 \\ 0.77203125 & -3.9528 & 15.23475 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2000 \\ 0 \\ 1333.33333333 \end{Bmatrix}$$

Rešitve sistema so:

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.753513767726749 \cdot 10^{-6} \text{ m} \\ 4.949853303944393 \cdot 10^{-7} \text{ m} \\ 8.791489451505679 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

*Poprocesiranje: iskanje vozliščnih vrednosti sekundarnih spremenljivk in notranjih statičnih količin*

– *izračun notranjih statičnih količin za 1. končni element*

Vektor globalnih pomikov prvega končnega elementa je:

$$\{U_1\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ \Phi_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ X_2 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.753513767726749 \cdot 10^{-6} \text{ m} \\ 4.949853303944393 \cdot 10^{-7} \text{ m} \\ 8.791489451505679 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

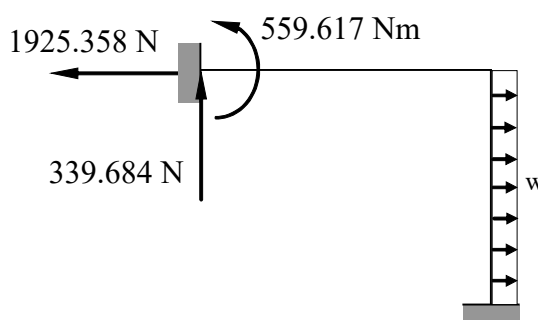
Globalni vektor sekundarnih spremenljivk je tako:

$$\{Q_1\} = [K_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\}$$

$$= \begin{bmatrix} 109.8 & 0 & 0 & -109.8 & 0 & 0 \\ 0 & 1.58112 & 3.9528 & 0 & -1.58112 & 3.9528 \\ 0 & 3.9528 & 13.176 & 0 & -3.9528 & 6.588 \\ -109.8 & 0 & 0 & 109.8 & 0 & 0 \\ 0 & -1.58112 & -3.9528 & 0 & 1.58112 & -3.9528 \\ 0 & 3.9528 & 6.588 & 0 & -3.9528 & 13.176 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.75351 \cdot 10^{-6} \text{ m} \\ 4.94985 \cdot 10^{-7} \text{ m} \\ 8.79149 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} Q_{1,1} \\ Q_{1,2} \\ Q_{1,3} \\ Q_{1,4} \\ Q_{1,5} \\ Q_{1,6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1925.35811696397 \text{ N} \\ 339.6836829831839 \text{ N} \\ 559.6175449253627 \text{ Nm} \\ 1925.358116963971 \text{ N} \\ -339.6836829831839 \text{ N} \\ 1138.800869990556 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Reakcijski sili in moment v levem oz. začetnem vozlišču horizontalnega elementa, ki jih odčitamo iz prvih treh členov vektorja sekundarnih spremenljivk, so:



Slika 200: Reakcije v levi podpori

in seveda predstavljajo reakcije v tej podpori.

Lokalni vektor sekundarnih spremenljivk, ki je za ta končni element enak globalnemu (prvi končni element je namreč horizontalen in rotacijska matrika je enotska matrika), je formalno izračunljiv kot:

$$\{q_1\} = [T_1]^T \cdot \{Q_1\} = \begin{Bmatrix} -1925.35811696397 \text{ N} \\ 339.6836829831839 \text{ N} \\ 559.6175449253627 \text{ Nm} \\ 1925.358116963971 \text{ N} \\ -339.6836829831839 \text{ N} \\ 1138.800869990556 \text{ Nm} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,I}^1 \\ V_{y,I}^1 \\ M_{z,I}^1 \\ N_{x,II}^1 \\ V_{y,II}^1 \\ M_{z,II}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1925.35811696397 \text{ N} \\ 339.6836829831839 \text{ N} \\ -559.6175449253627 \text{ Nm} \\ 1925.358116963971 \text{ N} \\ 339.6836829831839 \text{ N} \\ 1138.800869990556 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

kjer indeks I označuje začetno vozlišče elementa, II pa končno vozlišče končnega elementa.

Sekundarne spremenljivke oz. notranje statične količine pa lahko alternativno izračunamo tudi tako, da globalni vektor pomikov  $\{U_1\}$  najprej pretvorimo v lokalni vektor pomikov:

$$\{u_1\} = [T_1]^T \cdot \{U_1\}$$

Ker pa je prvi končni element horizontalen in je rotacijska matrika enotska matrika, za tak element velja kar:

$$\{u_1\} = \{U_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.753513767726749 \cdot 10^{-6} \text{ m} \\ 4.949853303944393 \cdot 10^{-7} \text{ m} \\ 8.791489451505679 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Tako sledi:

$$\{q_1\} = [k_1] \cdot \{u_1\} - \{f_1\}$$

$$\begin{Bmatrix} q_{1,1} \\ q_{1,2} \\ q_{1,3} \\ q_{1,4} \\ q_{1,5} \\ q_{1,6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 109.8 & 0 & 0 & -109.8 & 0 & 0 \\ 0 & 1.58112 & 3.9528 & 0 & -1.58112 & 3.9528 \\ 0 & 3.9528 & 13.176 & 0 & -3.9528 & 6.588 \\ -109.8 & 0 & 0 & 109.8 & 0 & 0 \\ 0 & -1.58112 & -3.9528 & 0 & 1.58112 & -3.9528 \\ 0 & 3.9528 & 6.588 & 0 & -3.9528 & 13.176 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.75351376773 \cdot 10^{-6} \text{ m} \\ 4.94985330394 \cdot 10^{-7} \text{ m} \\ 8.79148945151 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1925.358116964 \text{ N} \\ 339.68368298318 \text{ N} \\ 559.6175449254 \text{ Nm} \\ 1925.3581169640 \text{ N} \\ -339.6836829832 \text{ N} \\ 1138.8008699906 \text{ Nm} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,I}^1 \\ V_{y,I}^1 \\ M_{z,I}^1 \\ N_{x,II}^1 \\ V_{y,II}^1 \\ M_{z,II}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1925.358116964 \text{ N} \\ 339.6836829832 \text{ N} \\ -559.6175449254 \text{ Nm} \\ 1925.3581169640 \text{ N} \\ 339.68368298318 \text{ N} \\ 1138.80086999 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

– izračun notranjih statičnih količin za 2. končni element

Vektor globalnih pomikov drugega končnega elementa je:

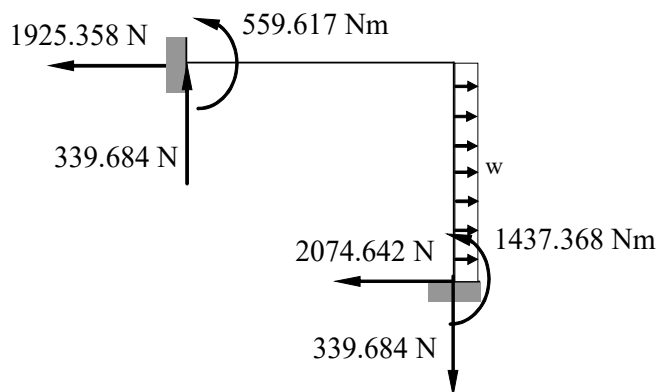
$$\{U_2\} = \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.753513767726749 \cdot 10^{-6} \text{ m} \\ 4.949853303944393 \cdot 10^{-7} \text{ m} \\ 8.791489451505679 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Globalni vektor sekundarnih spremenljivk je tako:

$$\{Q_2\} = [K_2] \cdot \{U_2\} - \{F_2\}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.38602 & 0 & 0.77203 & -0.38602 & 0 & 0.77203 \\ 0 & 68.625 & 0 & 0 & -68.625 & 0 \\ 0.77203 & 0 & 2.05875 & -0.77203 & 0 & 1.02938 \\ -0.38602 & 0 & -0.77203 & 0.38602 & 0 & -0.77203 \\ 0 & -68.625 & 0 & 0 & 68.625 & 0 \\ 0.77203 & 0 & 1.02938 & -0.77203 & 0 & 2.05875 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} 1.753514 \cdot 10^{-6} \\ 4.94985 \cdot 10^{-7} \\ 8.79149 \cdot 10^{-6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 2000 \\ 0 \\ 1333.333333 \\ 2000 \\ 0 \\ -1333.33333 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1925.358116963971 \text{ N} \\ 339.68368298318404 \text{ N} \\ -1138.8008699905572 \text{ Nm} \\ -2074.641883036029 \text{ N} \\ -339.68368298318404 \text{ N} \\ 1437.3684021346728 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Reakcijski sili in moment v končnem vozlišču vertikalnega elementa, ki jih odčitamo iz zadnjih treh členov vektorja sekundarnih spremenljivk, so:



Slika 201: Reakcije v konstrukciji

in seveda predstavljajo reakcije v tej podpori.

Lokalni vektor vozliščnih vrednosti notranjih statičnih količin oziroma sekundarnih spremenljivk je tako:

$$\{q_2\} = [T_2]^T \cdot \{Q_2\} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -1925.358116963971 \text{ N} \\ 339.68368298318404 \text{ N} \\ -1138.8008699905572 \text{ Nm} \\ -2074.641883036029 \text{ N} \\ -339.68368298318404 \text{ N} \\ 1437.3684021346728 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

$$\{q_2\} = \begin{Bmatrix} -339.68368298318404 \text{ N} \\ -1925.358116963971 \text{ N} \\ -1138.8008699905572 \text{ Nm} \\ 339.68368298318404 \text{ N} \\ -2074.641883036029 \text{ N} \\ 1437.3684021346728 \text{ Nm} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,I}^2 \\ V_{y,I}^2 \\ M_{z,I}^2 \\ N_{x,II}^2 \\ V_{y,II}^2 \\ M_{z,II}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 339.68368298318404 \text{ N} \\ -1925.358116963971 \text{ N} \\ 1138.8008699905572 \text{ Nm} \\ 339.68368298318404 \text{ N} \\ 2074.641883036029 \text{ N} \\ 1437.3684021346728 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Vozliščne vrednosti notranjih statičnih količin lahko alternativno izračunamo tudi tako, da globalni vektor pomikov  $\{U_2\}$  pretvorimo v lokalni vektor pomikov kot:

$$\{u_2\} = [T_2]^T \cdot \{U_2\} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1.753513767726749 \cdot 10^{-6} \text{ m} \\ 4.949853303944393 \cdot 10^{-7} \text{ m} \\ 8.791489451505679 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4.949853303944393 \cdot 10^{-7} \text{ m} \\ 1.753513767726749 \cdot 10^{-6} \text{ m} \\ 8.791489451505679 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Opomba: v obravnanem primeru, ko je kot  $270^\circ$ , bi lahko lokalni vektor pomikov odčitali kar iz slike.

Tako (ponovno) sledi lokalni vektor sekundarnih spremenljivk:

$$\{q_2\} = [k_2] \cdot \{u_2\} - \{f_2\}$$

$$\begin{Bmatrix} q_{2,1} \\ q_{2,2} \\ q_{2,3} \\ q_{2,4} \\ q_{2,5} \\ q_{2,6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 68.625 & 0 & 0 & -68.625 & 0 & 0 \\ 0 & 0.386016 & 0.772031 & 0 & -0.386016 & 0.772031 \\ 0 & 0.772031 & 2.05875 & 0 & -0.772031 & 1.02938 \\ -68.625 & 0 & 0 & 68.625 & 0 & 0 \\ 0 & -0.386016 & -0.772031 & 0 & 0.386016 & -0.772031 \\ 0 & 0.772031 & 1.029375 & 0 & -0.772031 & 2.05875 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\begin{Bmatrix} 1.753513767726749 \cdot 10^{-6} \text{ m} \\ 4.949853303944393 \cdot 10^{-7} \text{ m} \\ 8.791489451505679 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 2000 \\ 1333.333333 \\ 0 \\ 2000 \\ -1333.333333 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -339.68368298318404 \text{ N} \\ -1925.358116963971 \text{ N} \\ -1138.8008699905572 \text{ Nm} \\ 339.68368298318404 \text{ N} \\ -2074.641883036029 \text{ N} \\ 1437.3684021346728 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} N_{x,I}^2 \\ V_{y,I}^2 \\ M_{z,I}^2 \\ N_{x,II}^2 \\ V_{y,II}^2 \\ M_{z,II}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 339.68368298318404 \text{ N} \\ -1925.358116963971 \text{ N} \\ 1138.8008699905572 \text{ Nm} \\ 339.68368298318404 \text{ N} \\ 2074.641883036029 \text{ N} \\ 1437.3684021346728 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

*Poprocesiranje: izračun funkcij notranjih statičnih količin*

Ker sta osni sili v obeh elementih konstantni, iskanje njunih funkcij ni potrebno.

– *iskanje funkcije upogibnega momenta in prečne sile za prvi končni element*

Ker je iz elementarne mehanike jasno, da bo funkcija upogibnega momenta linearna funkcija, jo lahko izračunamo z uporabo H0 interpolacijskih funkcij (ali pa s superpozicijo), pri čemer sledi točna funkcija za upogibni moment:

$$M_{z1,N}(x) = M_{z,1} \cdot N_{1,1}(x) + M_{z,2} \cdot N_{1,2}(x)$$

$$= -559.6175449254 \text{ Nm} \cdot \left(1 - \frac{x}{5}\right) + 1138.80086999 \text{ Nm} \cdot \frac{x}{5}$$

$$= -559.6175449254 + 339.683682983184 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 5 \text{ m}$$

Funkcija prečne sile je tako:

$$V_{y,IN}(x) = \frac{dM_{z,IN}(x)}{dx} = 339.683682983184 \text{ N} \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Opomba: ker sta znani reakciji v levem koncu elementa, lahko za pridobitev izrazov uporabimo tudi Newtonove zakone.

– *iskanje funkcije upogibnega momenta za drugi končni element z interpolacijo*

Približna funkcija upogibnega momenta za drugi element, dobljena z uporabo H1 interpolacijskih funkcij, je (v lokalnem koordinatnem sistemu):

$$\begin{aligned} M_{z,2N}(x) &= M_{z,I}^2 \cdot N_{2,1}(x) + V_{y,I}^2 \cdot N_{2,2}(x) + M_{z,II}^2 \cdot N_{2,3}(x) + V_{y,II}^2 \cdot N_{2,4}(x) \\ &= 1138.8008699905572 \text{ Nm} \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot x^2}{16} + \frac{2 \cdot x^3}{32}\right) - 1925.358116963971 \text{ N} \cdot \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{16}\right) \\ &+ 1437.3684021346728 \text{ Nm} \cdot \left(\frac{3 \cdot x^2}{16} - \frac{x^3}{32}\right) + 2074.641883036029 \text{ N} \cdot \left(-\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{16}\right) \\ &= -500 \cdot x^2 - 1925.358116963971 \cdot x + 1138.8008699905572 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

in je enaka točni razporeditvi upogibnega momenta (morebitni neničelni koeficient, ki se morebiti pojavi pri členu  $x^3$ , je zgolj posledica zaradi zaokroževanja, in mora biti majhen, ter ga zato zanemarimo).

– *iskanje funkcije upogibnega momenta za drugi končni element s superpozicijo*

Pri tem pristopu najprej linearno povežemo vozliščni vrednosti upogibnega momenta, nato pa tej funkciji prištejemo funkcijo razporeditve upogibnih momentov zaradi morebitne na končni element delujoče zvezne obtežbe na prostoležečem nosilcu.

Funkcija linearne razporeditve momenta za prvi element sledi iz robnih pogojev:

$$M_{2,o}(0) = 1138.8008699905572 \text{ Nm}$$

in

$$M_{2,0}(4 \text{ m}) = 1437.3684021346728 \text{ Nm}$$

kar (npr. z uporabo H0 interpolacijskih funkcij) vodi do:

$$\begin{aligned} M_0(x) &= 1138.8008699905572 \text{ Nm} \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right) + 1437.3684021346728 \text{ Nm} \cdot \frac{x}{4} \\ &= 1138.8008699905572 + 74.6418830360289 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

Za pomožni prostoležeči nosilec dolžine 4 m, obremenjen z enakomerno zvezno obtežbo 1000 N/m, ki deluje v smeri pozitivne lokalne osi  $y$ , sledi funkcija upogibnega momenta:

$$M_q(x) = -2000 + 500 \cdot x^2 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Seštevek obeh funkcij je:

$$M_{z,2N}(x) = 500 \cdot x^2 - 1925.358116963971 \cdot x + 1138.8008699905572 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Rezultat je enak kot uporabi interpolacijskih funkcij.

Funkcija prečne sile je tako:

$$V_{y,2N}(x) = \frac{dM_{z,2N}(x)}{dx} = -1925.358116963971 + 1000 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Mesto maksimalnega upogibnega momenta nastopi, ko velja:

$$V_{y,2N}(x) = 0 \rightarrow -1925.358116963971 + 1000 \cdot x = 0 \rightarrow x = 1.925358116963971 \text{ m} < 4 \text{ m}$$

od začetnega vozlišča drugega končnega elementa, torej od stika prečke in stebra.

Maksimalni negativni upogibni moment je tako:

$$\begin{aligned} M_{z,2N}(1.92535811696397 \text{ m}) &= 1138.8008699905572 - 1925.358116963971 \cdot 1.92535811696397 \text{ m} \\ &+ 500 \cdot (1.92535811696397 \text{ m})^2 = -714.7010692889671 \text{ Nm} \end{aligned}$$

Maksimalni pozitivni upogibni moment pa nastopi na mestu vpetja stebra in znaša

$$1437.3684021346728 \text{ Nm}$$

*Poprocesiranje: izračun funkcij prečnega in osnega pomika*

– *iskanje funkcij za prvi končni element*

Z uporabo H0 interpolacijskih funkcij sledi funkcija osnega pomika:

$$\begin{aligned} u_{1,N}(x) &= X_1 \cdot N_{1,1}(x) + X_2 \cdot N_{1,2}(x) = 0 \cdot \left(1 - \frac{x}{5}\right) + 1.753513767726749 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \frac{x}{5} \\ &= 3.5070275354535 \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot x \quad 0 \leq x \leq 5 \text{ m} \end{aligned}$$

ki predstavlja točno rešitev.

Funkcija prečnega pomika za prvi element, dobljena z uporabo H1 interpolacijskih funkcij, je:

$$\begin{aligned} v_{1N}(x) &= Y_1 \cdot N_{1,1}(x) + \Phi_1 \cdot N_{1,2}(x) + Y_2 \cdot N_{1,3}(x) + \Phi_2 \cdot N_{1,4}(x) \\ &= 0 \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot x^2}{25} + \frac{2 \cdot x^3}{125}\right) + 0 \cdot \left(x - \frac{2 \cdot x^2}{5} + \frac{x^3}{25}\right) + 4.949853303944393 \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot \left(\frac{3 \cdot x^2}{25} - \frac{2 \cdot x^3}{125}\right) \\ &\quad + 8.791489451505679 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \cdot \left(-\frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{25}\right) \\ &= -1.6988996506538 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 + 3.43739812773916 \cdot 10^{-7} \cdot x^3 \quad 0 \leq x \leq 5 \text{ m} \end{aligned}$$

in je enaka točni razporeditvi prečnega pomika.

– *iskanje funkcij za drugi končni element*

Če se odločimo, da bomo obe funkciji pomika zapisali v lokalnem koordinatnem sistemu, je pri izračunu obeh funkcij potrebno upoštevati orientacijo lokalnega koordinatnega sistema glede na globalni koordinatni sistem, v katerem so zapisane vse vrednosti vozliščnih pomikov. Tako z uporabo interpolacijskih funkcij H0 sledi funkcija osnega (= navpičnega) pomika v lokalnem koordinatnem sistemu (negativni predznaki nastopijo zaradi usmeritve pomikov v lokalnem koordinatnem sistemu):

$$\begin{aligned} u_{2,N}(x) &= (-Y_2) \cdot N_{2,1}(x) + (-Y_3) \cdot N_{2,2}(x) = -4.949853303944393 \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right) + 0 \cdot \frac{x}{4} \\ &= -4.949853303944393 \cdot 10^{-7} + 1.2374633259861 \cdot 10^{-7} \cdot x \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

ki predstavlja točno rešitev.

Približna funkcija prečnega (= vodoravnega) pomika za drugi element, dobljena z uporabo H1 interpolacijskih funkcij, v lokalnem koordinatnem sistemu je:

$$\begin{aligned} v_{2N}(x) &= X_2 \cdot N_{2,1}(x) + \Phi_2 \cdot N_{2,2}(x) + X_3 \cdot N_{2,3}(x) + \Phi_3 \cdot N_{2,4}(x) \\ &= 1.753513767726749 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot x^2}{16} + \frac{x^3}{32}\right) + 8.791489451505679 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \cdot \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{16}\right) \\ &+ 0 \cdot \left(\frac{3 \cdot x^2}{16} - \frac{x^3}{32}\right) + 0 \cdot \left(-\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{16}\right) = 1.753513767726749 \cdot 10^{-6} + 8.79148945150569 \cdot 10^{-6} \cdot x \\ &- 4.72452855720161 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 + 6.04265395960566 \cdot 10^{-7} \cdot x^3 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

in predstavlja približno razporeditev prečnega pomika, saj je prava rešitev polinom četrte stopnje.

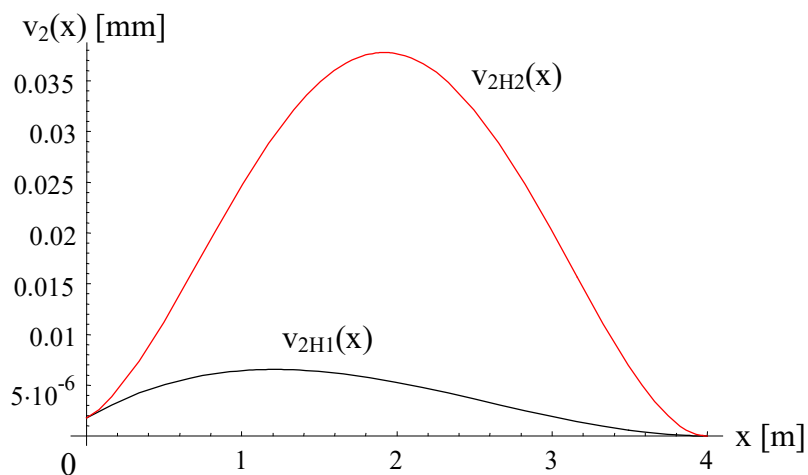
Če pa želimo dobiti točno funkcijo prečnega pomika drugega elementa, moramo bodisi rešiti diferencialno enačbo 2. reda (ker je funkcija upogibnega momenta točna), ali pa uporabiti kvalitetnejšo interpolacijo, npr. H2 interpolacijske funkcije, ki v interpolacijo vključijo še vozliščni vrednosti drugega odvoda prečnega pomika, ki sta povezani z vozliščnima vrednostima upogibnega momenta.

Točna funkcija prečnega pomika v lokalnem koordinatnem sistemu je tako:

$$\begin{aligned} v_{2NH2}(x) &= X_2 \cdot N_{2,1}(x) + \Phi_2 \cdot N_{2,2}(x) + M_{z,2} \cdot N_{2,3}(x) + X_3 \cdot N_{2,4}(x) + \Phi_3 \cdot N_{2,5}(x) + M_{z,5} \cdot N_{2,6}(x) \\ &= 1.753513767726749 \cdot 10^{-6} \cdot \left(1 - \frac{5 \cdot x^3}{32} + \frac{15 \cdot x^4}{256} - \frac{3 \cdot x^5}{512}\right) \\ &+ 8.791489451505679 \cdot 10^{-6} \cdot \left(x - \frac{3 \cdot x^3}{8} + \frac{x^4}{8} - \frac{3 \cdot x^5}{256}\right) \\ &+ 1138.8008699905572 \cdot \left(\frac{x^2}{2 \cdot EI} - \frac{3 \cdot x^3}{8 \cdot EI} + \frac{3 \cdot x^4}{32 \cdot EI} - \frac{x^5}{128 \cdot EI}\right) \\ &+ 0 \cdot \left(\frac{5 \cdot x^3}{32} - \frac{15 \cdot x^4}{256} + \frac{3 \cdot x^5}{512}\right) + 0 \cdot \left(-\frac{3 \cdot x^3}{4} + \frac{7 \cdot x^4}{64} - \frac{3 \cdot x^5}{256}\right) \\ &1138.8008699905572 \cdot \left(\frac{3 \cdot x^3}{8 \cdot EI} - \frac{x^4}{16 \cdot EI} + \frac{x^5}{128 \cdot EI}\right) \\ &= 1.753513767726749 \cdot 10^{-6} + 8.79148945150569 \cdot 10^{-6} \cdot x + 2.765758032763952 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 \\ &- 1.558678904646 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 + 2.0238818053025705 \cdot 10^{-6} \cdot x^4 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

Čeprav so posamezne interpolacijske funkcije polinomi 5. stopnje, je rešitev polinom 4. stopnje (morebitni neničelni koeficient, ki pripada členu  $x^5$ , se lahko pojavi zgolj zaradi zaokroževanja, in mora biti majhen).

Primerjava grafov obeh funkcij prečnega (= vodoravnega) pomika pa pokaže, da predstavlja prva funkcija zelo slab približek, kar je posledica neupoštevanja partikularne rešitve. Takšna razlika je lahko izjemno problematična pri preverjanju mejnega stanja uporabnosti, saj zelo podceni vrednosti pomika.

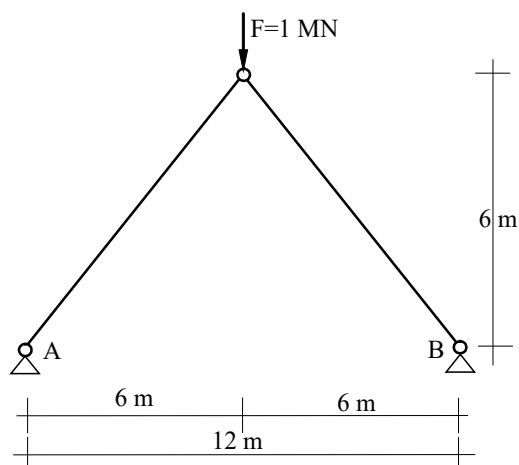


Slika 202: Primerjava funkciji prečnega pomika v stebru

Kadar je torej analiza pomika zelo pomembna, je tam, kjer nastopa zvezna obtežba, priporočljivo uporabiti diskretizacijo z več kot enim samim končnim elementom!

### Primer 13 – Enostavna členkasta konstrukcija

Izračunaj vozliščne pomike, reakcije, notranje statične količine in reakcije za jekleno paličje (z modulom elastičnosti  $E = 210$  GPa) na sliki. Izbran je jekleni profil I160 s ploščino  $A = 22.8$  cm<sup>2</sup> in vztrajnostnim momentom  $I = 935$  cm<sup>4</sup>.



Slika 203: Obravnavano paličje

Izračun izvedi ločeno z uporabo končnih elementov nosilcev in z uporabo paličnih končnih elementov.

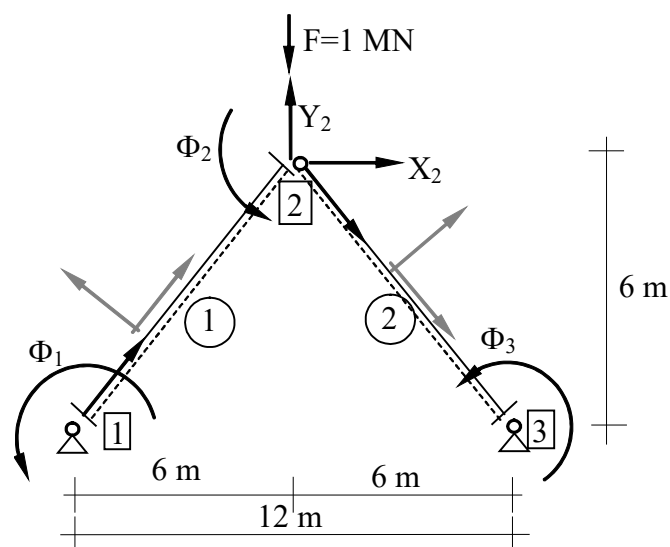
## Rešitev

Skupno je mogočih več kot 10 diskretizacij z dvema končnima elementoma nosilcev.

### I. pristop – uporaba dveh končnih elementov nosilcev

#### 1. način diskretizacije – eden najobsežnejših po računskem naporu

V tej diskretizaciji kot prostostne stopnje nastopata dva pomika in trije zasuki.



Slika 204: Prva diskretizacija in prostostne stopnje

Lokalna togostna matrika prvega končnega elementa je:

$$[k_1] = \begin{bmatrix} 56427.1211 & 0 & 0 & -56427.1211 & 0 & 0 \\ 0 & 38.5667825 & 163.625 & 0 & -38.5667825 & 163.625 \\ 0 & 163.625 & 925.602777 & 0 & -163.625 & 462.801388 \\ -56427.1211 & 0 & 0 & 56427.1211 & 0 & 0 \\ 0 & -38.5667825 & -163.625 & 0 & 38.5667825 & -163.625 \\ 0 & 163.625 & 462.801388 & 0 & -163.625 & 925.602777 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

Transformacijska matrika prvega končnega elementa je ( $\alpha=45^\circ$ ):

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Globalna togostna matrika prvega končnega elementa je tako:

$$[K_1] = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} -28232.84396 & -28194.27718 & -115.70035 & -28232.84396 & -28194.27718 & -115.70035 \\ -28194.27718 & -28232.84396 & -115.70035 & -28194.27718 & -28232.84396 & -115.70035 \\ -115.70035 & 115.70035 & 925.60278 & 115.70035 & -115.70035 & 462.80139 \\ -28232.84396 & -28194.27718 & 115.70035 & 28232.84396 & 28194.27718 & 115.70035 \\ -28194.27718 & -28232.84396 & -115.70035 & 28194.27718 & 28232.84396 & -115.70035 \\ -115.70035 & 115.70035 & 462.80139 & 115.70035 & -115.70035 & 925.60278 \end{bmatrix}$$

Lokalna togostna matrika drugega elementa je:

$$[k_2] = \begin{bmatrix} 56427.12114 & 0 & 0 & -56427.12114 & 0 & 0 \\ 0 & 9.6416955893 & 0 & 0 & -9.6416955893 & 81.8125 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -56427.12114 & 0 & 0 & 56427.12114 & 0 & 0 \\ 0 & -9.6416955893 & 0 & 0 & 9.6416955893 & -81.8125 \\ 0 & 81.8125 & 0 & 0 & -81.8125 & 694.20208243 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

Transformacijska matrika prvega končnega elementa je ( $\alpha=315^\circ$  oz.  $-45^\circ$ ):

$$[T_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Globalna togostna matrika drugega elementa je tako:

$$[K_2] = \begin{bmatrix} 28218.38142 & -28208.73972 & 0 & -28218.38142 & 28208.73972 & 57.850174 \\ -28208.73972 & 28218.38142 & 0 & 28208.73972 & -28218.38142 & 57.850174 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -28218.38142 & 28208.73972 & 0 & 28218.38142 & -28208.73972 & -57.850174 \\ 28208.73972 & -28218.38142 & 0 & -28208.73972 & 28218.38142 & -57.850174 \\ 57.850174 & 57.850174 & 0 & -57.850174 & -57.850174 & 694.202082 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

Globalna togostna matrika konstrukcije je:

$$[K] = \begin{bmatrix} 925.6027766 & 115.7003471 & -115.7003471 & 462.8013883 & 0 \\ 115.7003471 & 56451.22537 & -14.4625434 & 115.7003471 & 57.8501735 \\ -115.7003471 & -14.4625434 & 56451.22537 & -115.7003471 & 57.8501735 \\ 462.8013883 & 115.7003471 & -115.7003471 & 925.6027766 & 0 \\ 0 & 57.8501735 & 57.8501735 & 0 & 694.2020824 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

Obtežni vektor konstrukcije pa ima obliko:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1000000 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Pomike in zasuke izračunamo iz bistvenih enačb konstrukcije oz. sistema:

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\}$$

$$[K]^{-1} \cdot \{F\} = \{U\} \rightarrow \{U\} = \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.001476831205485687 \\ 4.644813009941317 \cdot 10^{-20} \\ -0.01772197446582826 \\ -0.001476831205485688 \\ 0.001476831205485688 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.001476831205485687 \text{ rad} \\ 0 \text{ m} \\ -0.01772197446582826 \text{ m} \\ -0.001476831205485688 \text{ rad} \\ 0.001476831205485688 \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Izredno majhna neničelna vrednost izračunanega pomika  $X_2$  je posledica numeričnega zaokroževanja, saj je zaradi simetrije konstrukcije jasno, da mora biti ta vrednost enaka 0!

*Poprocesiranje: izračun vozliščnih vrednosti notranjih statičnih količin*

*Element 1*

Vozliščne vrednosti notranjih statičnih količin lahko dobimo tako, da lokalno togostno matriko elementa pomnožimo z lokalnim vektorjem pomikov elementa. Lokalna togostna matrika je že znana, globalni vektor pomikov elementa pa je:

$$\{U_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.001476831205485687 \\ 0 \\ -0.01772197446582826 \\ -0.001476831205485688 \end{Bmatrix}$$

Prva možnost je, da ga pretvorimo v lokalni vektor pomikov:

$$\{u_1\} = [T_1]^T \cdot \{U_1\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.001476831205485687 \\ 0 \\ -0.01772197446582826 \\ -0.001476831205485688 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.001476831205485687 \text{ rad} \\ -0.012531328320802 \text{ m} \\ -0.012531328320802 \text{ m} \\ -0.001476831205485688 \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Tako sledi lokalni vektor sekundarnih spremenljivk prvega končnega elementa (ob upoštevanju  $\{f_1\} = \{0\}$ ):

$$\{q_1\} = [k_1] \cdot \{u_1\} = \begin{Bmatrix} 707106.7811865476 \\ 0 \\ 0 \\ -707106.7811865476 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} -707106.7811865476 \text{ N} \\ 0 \\ 0 \\ -707106.7811865476 \text{ N} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Dobljene vrednosti so podane v koordinatnem sistemu metode končnih elementov, kar pomeni, da je potrebno nekatere predznake spremeniti, da se notranje statične količine izrazijo v standardnem dogovoru iz mehanike.

Iz vektorja notranjih statičnih količin vidimo, da v elementu nastopa samo konstantna vrednost osne sile (palica je tlačena) in je zato iskanje njene funkcije brezpredmetno.

Postopek ponovimo še za drugi končni element

Tudi ta lokalna togostna matrika je že znana, globalni vektor pomikov je:

$$\{U_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.01772197446582826 \text{ m} \\ -0.001476831205485687 \text{ rad} \\ 0 \\ 0 \\ 0.001476831205485688 \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Nato iz globalnega vektorja pomikov izračunamo lokalni vektor pomikov:

$$\{u_2\} = [T_2]^T \cdot \{U_2\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.01772197446582826 \\ -0.001476831205485687 \\ 0 \\ 0 \\ 0.001476831205485688 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.012531328320802006 \\ -0.012531328320802006 \\ -0.0014768312054856886 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0014768312054856886 \end{Bmatrix}$$

in z njegovo pomočjo tako sledi lokalni vektor sekundarnih spremenljivk (ob upoštevanju  $\{f_2\} = \{0\}$ ):

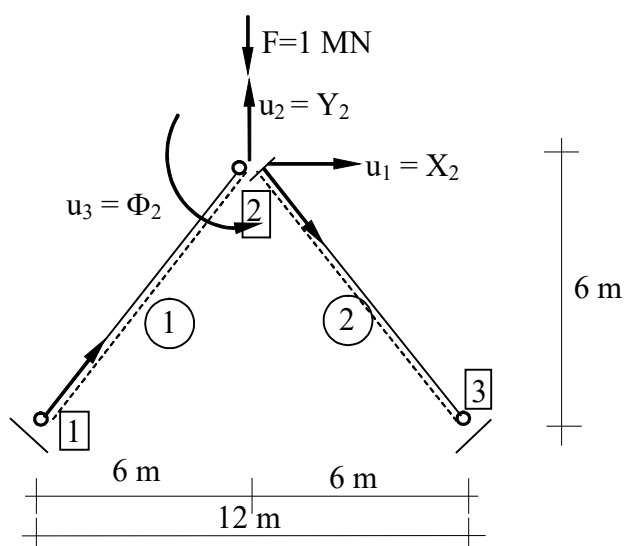
$$\{q_2\} = [k_2] \cdot \{u_2\} = \begin{Bmatrix} 707106.7811865475 \\ 0 \\ 0 \\ -707106.7811865475 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} -707106.7811865475 \text{ N} \\ 0 \\ 0 \\ -707106.7811865475 \text{ N} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

iz katerega s spremembo nekaterih predznakov dobimo vektor notranjih statičnih količin v standardnem zapisu oz. dogovoru. Tudi iz tega vektorja notranjih statičnih količin vidimo, da v elementu nastopa samo konstantna vrednost osne sile (palica je tlačena) in je zato iskanje njene funkcije brezpredmetno.

Poznavanje vrednosti osne sile v posamezni podpori sedaj omogoči izračun reakcij s pomočjo Newtonovih zakonov.

## 2. način diskretizacije (eden izmed modelov s skoraj najmanj računskega napora)

V tej diskretizaciji kot prostostne stopnje nastopata dva pomika in en zasuk.



Slika 205: Druga diskretizacija in prostostne stopnje

Globalna togostna matrika prvega končnega elementa je sedaj:

$$[K_1] = \begin{bmatrix} -28213.56057 & -28213.56057 & 0 & -28213.56057 & -28213.56057 & 0 \\ -28213.56057 & -28213.56057 & 0 & -28213.56057 & -28213.56057 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -28213.56057 & -28213.56057 & 0 & 28213.56057 & 28213.56057 & 0 \\ -28213.56057 & -28213.56057 & 0 & 28213.56057 & 28213.56057 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

Globalna togostna matrika drugega končnega elementa pa je:

$$[K_2] = \begin{bmatrix} 28218.38142 & -28208.73972 & 57.85017 & -28218.38142 & 28208.73972 & 0 \\ -28208.73972 & 28218.38142 & 57.85017 & 28208.73972 & -28218.38142 & 0 \\ 57.85017 & 57.85017 & 694.20208 & -57.85017 & -57.85017 & 0 \\ -28218.38142 & -28208.73972 & -57.85017 & 28218.38142 & 28208.73972 & 0 \\ -28208.73972 & -28218.38142 & -57.85017 & -28208.73972 & -28218.38142 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^3$$

Globalna togostna matrika in obtežni vektor konstrukcije imata sedaj obliko:

$$[K] = \begin{bmatrix} 5.6431942 \cdot 10^7 & 4820.8477956 & 57850.1735 \\ 4820.8477956 & 5.6431942 \cdot 10^7 & 57850.17354 \\ 57850.1735 & 57850.17354 & 694202.0824 \end{bmatrix} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1000000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Pomika in zasuk izračunamo iz sistema:

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\}$$

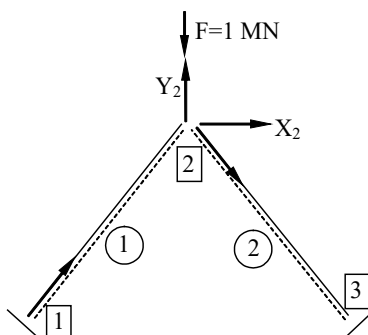
$$[K]^{-1} \cdot \{F\} = \{U\}$$

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.575197455545316 \cdot 10^{-20} \text{ m} \\ -0.01772197446582826 \text{ m} \\ 0.001476831205485688 \text{ rad} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \text{ m} \\ -0.01772197446582826 \text{ m} \\ 0.001476831205485688 \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Dobljene vrednosti so enake kot v prvi diskretizaciji, majhna neničelna vrednost pomika  $X_2$  pa je ponovno zgolj posledica numeričnega zaokroževanja.

## II. pristop – uporaba dveh paličnih končnih elementov

Uporabimo naslednjo diskretizacijo, v kateri kot prostostni stopnji nastopata zgolj dva pomika:



Slika 206: Tretja diskretizacija in prostostne stopnje

1. končni element

$$L_1 = 6 \cdot \sqrt{2} = 8.485281374238571 \text{ m}$$

$$\alpha_1 = 45^\circ \rightarrow \begin{aligned} s &= \sin(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7071067811865475 \\ c &= \cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7071067811865475 \end{aligned}$$

Globalna togostna matrika je:

$$[K_1] = 2.821356056934324 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

2. končni element

$$L_2 = 6 \cdot \sqrt{2} = 8.485281374238571 \text{ m}$$

$$\alpha_2 = -45^\circ \rightarrow \begin{aligned} s &= \sin(45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -0.7071067811865475 \\ c &= \cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7071067811865475 \end{aligned}$$

Globalna togostna matrika je:

$$[K_2] = 2.821356056934324 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Globalna togostna matrika konstrukcije je:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{K}] &= 2.821356056934324 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot 10^7 + 2.821356056934324 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \\
 &= 2.821356056934324 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot 10^7 = 5.6427121138686486 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot 10^7
 \end{aligned}$$

Obtežni vektor konstrukcije pa je:

$$\{\mathbf{F}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1000000 \end{Bmatrix}$$

in neznana vozliščna pomika izračunamo iz sistema:

$$[\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\}$$

$$[\mathbf{K}]^{-1} \cdot \{\mathbf{F}\} = \{\mathbf{U}\}$$

$$\{\mathbf{U}\} = \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.01772197446582826 \text{ m} \end{Bmatrix}$$

Tudi sedaj je neničelna vrednost pomika  $X_2$  posledica numeričnega zaokroževanja.

*Poprocesiranje: izračun sekundarnih spremenljivk in vozliščnih vrednosti notranjih statičnih količin*

– *izračun notranjih statičnih količin za 1. končni element*

Vektor globalnih pomikov prvega končnega elementa je:

$$\{\mathbf{U}_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \text{ m} \\ 0 \text{ m} \\ 0 \text{ m} \\ -0.01772197446582826 \text{ m} \end{Bmatrix}$$

Globalni vektor sekundarnih spremenljivk je tako (ob upoštevanju  $\{F_1\} = \{0\}$ ):

$$\begin{aligned}
 \{\mathbf{Q}_1\} &= [\mathbf{K}_1] \cdot \{\mathbf{U}_1\} = \\
 &2.821356056934324 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \text{ m} \\ -0.01772197446583 \text{ m} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{1,1} \\ Q_{1,2} \\ Q_{1,3} \\ Q_{1,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 50000 \text{ N} \\ 50000 \text{ N} \\ -50000 \text{ N} \\ -50000 \text{ N} \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Lokalni vektor sekundarnih spremenljivk je nato:

$$\{q_1\} = [T_1]^T \cdot \{Q_1\} = \begin{Bmatrix} q_{1,1} \\ q_{1,2} \\ q_{1,3} \\ q_{1,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 707106.7811865474 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \\ -707106.7811865474 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,I} \\ V_{y,I} \\ N_{x,II} \\ V_{y,II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -707106.7811865474 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \\ -707106.7811865474 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

kjer indeks I označuje začetno vozlišče elementa, II pa končno vozlišče elementa. Palica 1 je tako tlačena.

– *izračun notranjih statičnih količin za 2. končni element*

Vektor globalnih pomikov drugega končnega elementa pa je:

$$\{U_2\} = \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \text{ m} \\ -0.01772197446582826 \text{ m} \\ 0 \text{ m} \\ 0 \text{ m} \end{Bmatrix}$$

Globalni vektor sekundarnih spremenljivk je tako (ob upoštevanju  $\{F_2\} = \{0\}$ ):

$$\begin{aligned} \{Q_2\} &= [K_2] \cdot \{U_2\} \\ &= 2.821356056934324 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \text{ m} \\ -0.01772197446583 \text{ m} \\ 0 \text{ m} \\ 0 \text{ m} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{2,1} \\ Q_{2,2} \\ Q_{2,3} \\ Q_{2,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 50000 \text{ N} \\ -50000 \text{ N} \\ -50000 \text{ N} \\ 50000 \text{ N} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Lokalni vektor sekundarnih spremenljivk je tako:

$$\{q_2\} = [T_2]^T \cdot \{Q_2\} = \begin{Bmatrix} q_{2,1} \\ q_{2,2} \\ q_{2,3} \\ q_{2,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 707106.7811865474 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \\ -707106.7811865474 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,I} \\ V_{y,I} \\ N_{x,II} \\ V_{y,II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -707106.7811865474 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \\ -707106.7811865474 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

Tudi palica 2 je tlačena.

Reakciji v vozlišču 1, ki ju odčitamo iz prvih dveh členov iz vektorja  $\{Q_1\}$ , sta tako:

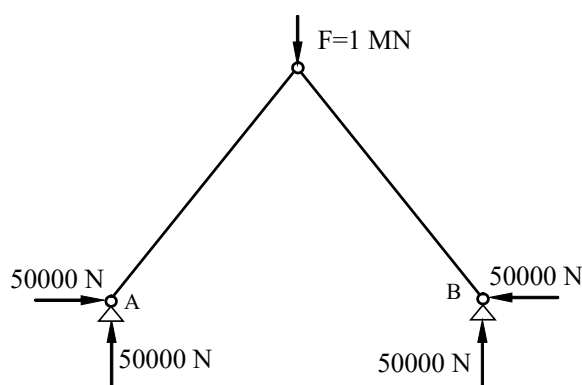
$$H_A = 50000 \text{ N (usmerjena v desno)}$$

$$V_A = 50000 \text{ N (usmerjena navzgor)}$$

Reakciji v vozlišču 3, ki pa ju odčitamo iz zadnjih dveh členov vektorja  $\{Q_2\}$ , sta:

$$H_B = -50000 \text{ N (usmerjena v levo)}$$

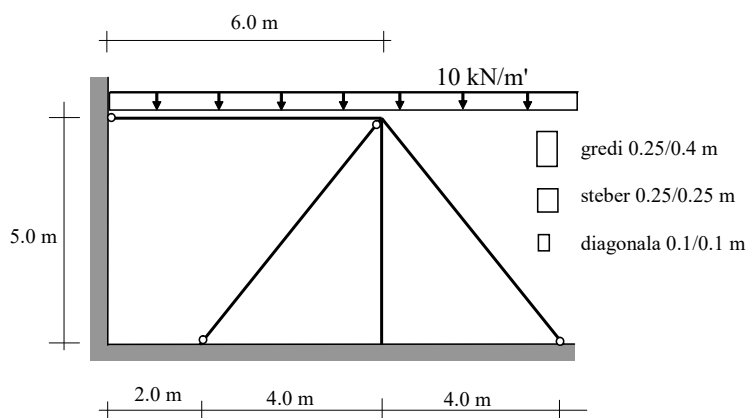
$$V_B = 50000 \text{ N (usmerjena navzgor)}$$



Slika 207: Reakcije

### Primer 14 – Ravninska okvirna konstrukcija

Izračunaj vozliščne pomike, reakcije in funkcije notranjih statičnih količin za ravninsko konstrukcijo na sliki:



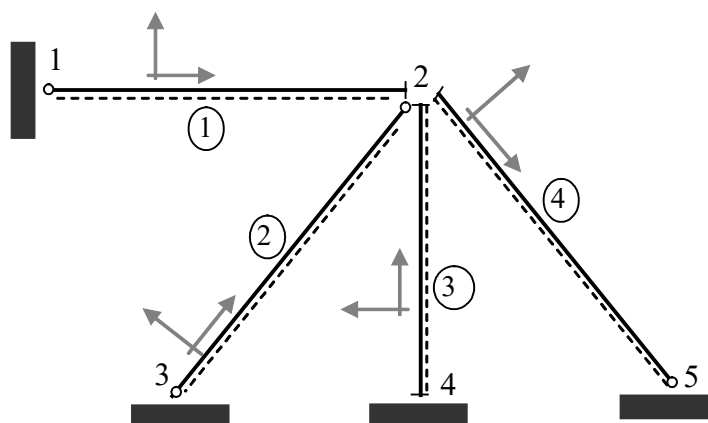
Slika 208: Analizirana konstrukcija

Vsi elementi imajo pravokotni prerez, pri čemer sta dimenziji prereza stebra  $b/h = 0.25/0.25$  m, vodoravne in poševne grede  $b/h = 0.25/0.4$  m, ter členkasto priključene diagonale pa  $b/h = 0.1/0.1$  m. Vsi elementi so iz betona C20/25, ki ima modul elastičnosti  $E=30$  GPa.

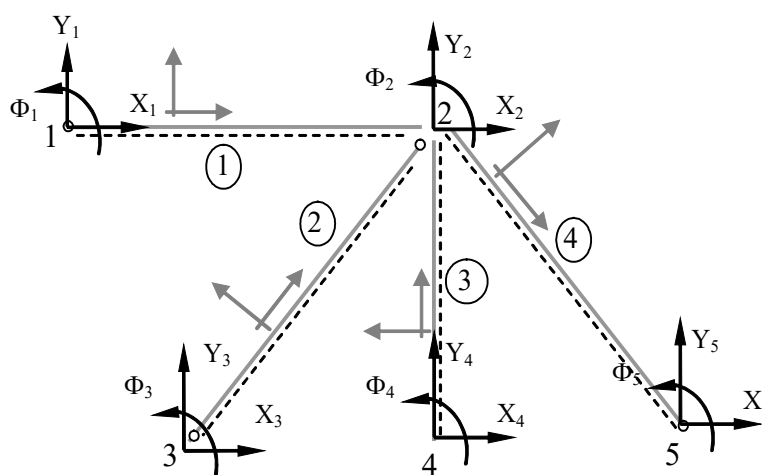
## Rešitev

Minimalni računski model zahteva uporabo štirih končnih elementov. Mogočih je več različnih diskretizacij, ki se razlikujejo tudi v številu bistvenih prostostnih stopenj.

Obravnavana je diskretizacija, v kateri nastopajo vsi štirje tipi končnih elementov nosilcev, hkrati pa tudi vodi do najmanjše togostne matrike konstrukcije:



Slika 209: Izbrane označbe vozlišč in elementov



Slika 210: Označbe prostostnih stopenj

Ker so pomiki oz. zasuki  $X_1, Y_1, \Phi_1, X_3, Y_3, \Phi_3, X_4, Y_4, \Phi_4, X_5, Y_5$  in  $\Phi_5$  v uporabljeni diskretizaciji enaki nič, bo uporabljeni računski model imel samo tri prostostne stopnje ( $X_2, Y_2$  in  $\Phi_2$ ) in posledično tri bistvene enačbe.

*Izračun togostnih matrik in obtežnih vektorjev elementov*

1. končni element – greda, na levi členkasto, na desni togo priključena

Zanj velja:

$$L_1 = 6.0 \text{ m}$$

$$EA_1 = 30 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 0.25 \text{ m} \cdot 0.4 \text{ m} = 3 \cdot 10^9 \text{ N}$$

$$EI_1 = 30 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{0.25 \text{ m} \cdot (0.4 \text{ m})^3}{12} = 4 \cdot 10^7 \text{ Nm}^2$$

Lokalna togostna matrika je:

$$[k_1] = \begin{bmatrix} \frac{EA_1}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA_1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 \cdot EI_1}{L_1^3} & 0 & 0 & -\frac{3 \cdot EI_1}{L_1^3} & \frac{3 \cdot EI_1}{L_1^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA_1}{L_1} & 0 & 0 & \frac{EA_1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3 \cdot EI_1}{L_1^3} & 0 & 0 & \frac{3 \cdot EI_1}{L_1^3} & -\frac{3 \cdot EI_1}{L_1^2} \\ 0 & \frac{3 \cdot EI_1}{L_1^2} & 0 & 0 & -\frac{3 \cdot EI_1}{L_1^2} & \frac{3 \cdot EI_1}{L_1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 500 & 0 & 0 & -500 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5555555555555557 & 0 & 0 & -0.5555555555555557 & 3.3333333333333344 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -500 & 0 & 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5555555555555557 & 0 & 0 & 0.5555555555555557 & -3.3333333333333344 \\ 0 & 3.3333333333333344 & 0 & 0 & -3.3333333333333344 & 20 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

Lokalni obtežni vektor je:

$$\{f_1\} = q \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{3 \cdot L_1}{8} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5 \cdot L_1}{8} \\ -\frac{L_1^2}{8} \end{Bmatrix} = -10000 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{3 \cdot 6}{8} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5 \cdot 6}{8} \\ -\frac{6^2}{8} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -22500 \\ 0 \\ 0 \\ -37500 \\ 45000 \end{Bmatrix}$$

Pretvorba togostne matrike in obtežnega vektorja v globalni koordinatni system

$$\alpha_1 = 0^\circ \rightarrow \begin{aligned} s &= \sin(0^\circ) = 0 \\ c &= \cos(0^\circ) = 1 \end{aligned}$$

Rotacijska matrika je:

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in tako sta globalna togostna matrika in obtežni vektor prvega elementa enaka lokalnima ( $[K_1] = [k_1]$  in  $\{F_1\} = \{f_1\}$ ).

2. končni element – diagonala, na začetku in koncu členkasto priključena

Zanj velja:

$$L_2 = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} = 6.4031242374328485 \text{ m}$$

$$EA_2 = 30 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 0.1 \text{ m} \cdot 0.1 \text{ m} = 3 \cdot 10^8 \text{ N}$$

$$EI_2 = 30 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{0.1 \text{ m} \cdot (0.1 \text{ m})^3}{12} = 250000 \text{ Nm}^2$$

Lokalna togostna matrika je:

$$[k_2] = \begin{bmatrix} \frac{EA_2}{L_2} & 0 & 0 & -\frac{EA_2}{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA_2}{L_2} & 0 & 0 & \frac{EA_2}{L_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4.685212856658183 & 0 & 0 & -4.685212856658183 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4.685212856658183 & 0 & 0 & 4.685212856658183 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Opomba: enake člene bi dobili, če bi uporabili končni element za paličje.

Obtežni vektor je enak 0.

Za pretvorbo togostne matrike in obtežnega vektorja v globalni koordinatni sistem potrebujemo kot (merjen protiurno), ki ga lokalna  $x$  os oklepa z globalno osjo  $X$ , ki znaša:

$$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{5}{4}\right) = 51.340191745909905^\circ$$

in tako sledita:

$$s = \sin(51.340191745909905^\circ) = 0.7808688094430304$$

$$c = \cos(51.340191745909905^\circ) = 0.6246950475544243$$

Rotacijska oz. transformacijska matrika je:

$$[T_2] = \begin{bmatrix} 0.624695 & -0.780869 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.780869 & 0.624695 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.624695 & -0.780869 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.780869 & 0.624695 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in tako sledi globalna togostna matrika drugega elementa:

$$[K_2] = [T_2] \cdot [k_2] \cdot [T_2]^T = \begin{bmatrix} 1.8283757489 & 2.2854696862 & 0 & -1.8283757489 & -2.2854696862 & 0 \\ 2.2854696862 & 2.8568371077 & 0 & -2.2854696862 & -2.8568371077 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.8283757489 & -2.2854696862 & 0 & 1.8283757489 & 2.2854696862 & 0 \\ -2.2854696862 & -2.8568371077 & 0 & 2.2854696862 & 2.8568371077 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

3. končni element – steber, na začetku in koncu priklučen – standardni končni element

Zanj velja:

$$L_3 = 5 \text{ m}$$

$$EA_3 = 30 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 0.25 \text{ m} \cdot 0.25 \text{ m} = 1.875 \cdot 10^9 \text{ N}$$

$$EI_3 = 30 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{0.25 \text{ m} \cdot (0.25 \text{ m})^3}{12} = 9765625 \text{ Nm}^2$$

Lokalna togostna matrika je:

$$\begin{aligned}
 [k_3] &= \begin{bmatrix} \frac{EA_3}{L_3} & 0 & 0 & -\frac{EA_3}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot EI_3}{L_3^3} & \frac{6 \cdot EI_3}{L_3^2} & 0 & -\frac{12 \cdot EI_3}{L_3^3} & \frac{6 \cdot EI_3}{L_3^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot EI_3}{L_3^2} & \frac{4 \cdot EI_3}{L_3} & 0 & -\frac{6 \cdot EI_3}{L_3^2} & \frac{2 \cdot EI_3}{L_3} \\ -\frac{EA_3}{L_3} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot EI_3}{L_3^3} & -\frac{6 \cdot EI_3}{L_3^2} & 0 & \frac{12 \cdot EI_3}{L_3^3} & -\frac{6 \cdot EI_3}{L_3^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot EI_3}{L_3^2} & \frac{2 \cdot EI_3}{L_3} & 0 & -\frac{6 \cdot EI_3}{L_3^2} & \frac{4 \cdot EI_3}{L_3} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 37.5 & 0 & 0 & -37.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.09375 & 0.234375 & 0 & -0.09375 & 0.234375 \\ 0 & 0.234375 & 0.78125 & 0 & -0.234375 & 0.390625 \\ -37.5 & 0 & 0 & 37.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.09375 & -0.234375 & 0 & 0.09375 & -0.234375 \\ 0 & 0.234375 & 0.390625 & 0 & -0.234375 & 0.78125 \end{bmatrix} \cdot 10^7
 \end{aligned}$$

Obtežni vektor je enak 0.

Za pretvorbo togostne matrike in obtežnega vektorja v globalni koordinatni sistem potrebujemo še kot, ki znaša:

$$\alpha_3 = 90^\circ \rightarrow \begin{cases} s = \sin(90^\circ) = 1 \\ c = \cos(90^\circ) = 0 \end{cases}$$

Rotacijska matrika je:

$$[T_3] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in tako sledi globalna togostna matrika tretjega elementa:

$$[K_3] = [T_3] \cdot [k_3] \cdot [T_3]^T =$$

$$\begin{bmatrix} 0.09375 & 0 & -0.234375 & -0.09375 & 0 & -0.234375 \\ 0 & 37.5 & 0 & 0 & -37.5 & 0 \\ -0.234375 & 0 & 0.78125 & 0.234375 & -0.234375 & 0.390625 \\ -0.09375 & 0 & 0.234375 & 0.09375 & 0 & 0.234375 \\ 0 & -37.5 & 0 & 0 & 37.5 & 0 \\ -0.234375 & 0 & 0.390625 & 0.234375 & 0 & 0.78125 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

4. končni element – greda, na začetku togo priključena, na koncu pa členkasto

Zanj pa velja:

$$L_4 = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} = 6.4031242374328485 \text{ m}$$

$$EA_4 = 30 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 0.25 \text{ m} \cdot 0.4 \text{ m} = 3 \cdot 10^9 \text{ N}$$

$$EI_4 = 30 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{0.25 \text{ m} \cdot (0.4 \text{ m})^3}{12} = 4 \cdot 10^7 \text{ Nm}^2$$

Lokalna togostna matrika je:

$$[k_4] = \begin{bmatrix} \frac{EA_4}{L_4} & 0 & 0 & -\frac{EA_4}{L_4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 \cdot EI_4}{L_4^3} & \frac{3 \cdot EI_4}{L_4^2} & 0 & -\frac{3 \cdot EI_4}{L_4^3} & 0 \\ 0 & \frac{3 \cdot EI_4}{L_4^2} & \frac{3 \cdot EI_4}{L_4} & 0 & -\frac{3 \cdot EI_4}{L_4^2} & 0 \\ -\frac{EA_4}{L_4} & 0 & 0 & \frac{EA_4}{L_4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3 \cdot EI_4}{L_4^3} & -\frac{3 \cdot EI_4}{L_4^2} & 0 & \frac{3 \cdot EI_4}{L_4^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 46.852128566 & 0 & 0 & -46.852128566 & 0 & 0 \\ 0 & 0.045709394 & 0.2926829268 & 0 & -0.045709394 & 0 \\ 0 & 0.2926829268 & 1.8740851427 & 0 & -0.292682926 & 0 \\ -46.852128566 & 0 & 0 & 46.852128566 & 0 & 0 \\ 0 & -0.045709394 & -0.292682926 & 0 & 0.045709394 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Za izračun obtežnega vektorja moramo navpično delujočo zvezno obtežbo pretvoriti v nadomestno prečno in osno zvezno obtežbo.

Kot, ki ga lokalna  $x$  os elementa oklepa z globalno osjo  $X$  je:

$$\alpha_4 = -\arctan\left(\frac{5}{4}\right) = -51.340191745909905^\circ = 308.6598082540901^\circ$$

$$s = \sin(-51.340191745909905^\circ) = -0.7808688094430304$$

$$c = \cos(-51.340191745909905^\circ) = 0.6246950475544243$$

Rezultanta vertikalne zvezne obtežbe je:

$$Q = q_{\text{ver}} \cdot 4 \text{ m} = 10000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 4 \text{ m} = 40000 \text{ N}$$

Komponenta rezultante  $Q$  v smeri prečno na element znaša:

$$Q_p = Q \cdot \cos(\alpha_4) = 40000 \text{ N} \cdot 0.6246950475544243 = 24987.801902176972 \text{ N}$$

Velikost porazdeljene prečne zvezne obtežbe je tako:

$$q_p = \frac{Q_p}{L_4} = \frac{24987.801902176972 \text{ N}}{6.4031242374328485 \text{ m}} = 3902.4390243902444 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

ker pa deluje v nasprotni smeri kot lokalna  $y$  os elementa, moramo upoštevati negativni predznak:

$$q_y = -q_p = -3902.4390243902444 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Komponenta rezultante  $Q$  v smeri vzdolž elementa znaša:

$$Q_v = Q \cdot \sin(\alpha_4) = 40000 \text{ N} \cdot 0.7808688094430304 = 31234.752377721215 \text{ N}$$

Velikost porazdeljene prečne zvezne obtežbe je tako:

$$q_v = \frac{Q_v}{L_4} = \frac{31234.752377721215 \text{ N}}{6.4031242374328485 \text{ m}} = 4878.048780487806 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

ki pa deluje v smeri lokalne  $x$  osi elementa, in zato upoštevamo pozitivni predznak:

$$q_x = q_v = 4878.048780487806 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Velikost osne zvezne obtežbe lahko izračunamo tudi direktno kot:

$$\begin{aligned} q_x &= q_{\text{ver}} \cdot \cos \alpha_4 \cdot \sin \alpha_4 = -10000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0.6246950475544243 \cdot (-0.7808688094430304) \\ &= 4878.048780487806 \frac{\text{N}}{\text{m}} \end{aligned}$$

Tudi velikost prečne zvezne obtežbe lahko izračunamo direktno kot:

$$q_y = q_{\text{ver}} \cdot \cos^2 \alpha_4 = -10000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0.6246950475544243^2 = -3902.439024390244 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Lokalni obtežni vektor, ki zajame vpliva zvezne obtežbe v prečni in vzdolžni smeri, je tako:

$$\{f_4\} = \begin{Bmatrix} q_x \cdot \frac{L_4}{2} \\ q_y \cdot \frac{5 \cdot L_4}{8} \\ q_y \cdot \frac{L_4^2}{8} \\ q_x \cdot \frac{L_4}{2} \\ q_y \cdot \frac{3 \cdot L_4}{8} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4878.0487804878 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \frac{6.40312423743285 \text{ m}}{2} \\ -3902.4390243902 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \frac{5 \cdot 6.40312423743285 \text{ m}}{8} \\ -3902.4390243902 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \frac{(6.40312423743285 \text{ m})^2}{8} \\ 4878.0487804878 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \frac{6.40312423743285 \text{ m}}{2} \\ -3902.4390243902 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \frac{3 \cdot 6.40312423743285 \text{ m}}{8} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 15617.37618886061 \\ -15617.37618886061 \\ -20000 \\ 15617.37618886061 \\ -9370.425713316365 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Rotacijska matrika, potrebna za pretvorbo togostne matrike in obtežnega vektorja elementa v globalni koordinatni sistem je:

$$[T_4] = \begin{bmatrix} 0.62469505 & 0.7808688 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.7808688 & 0.62469505 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.62469505 & 0.7808688 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.7808688 & 0.62469505 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in tako sledi globalna togostna matrika četrtega elementa:

$$[K_4] = [T_4] \cdot [k_4] \cdot [T_4]^T =$$

$$\begin{bmatrix} 18.311629071 & -22.83239960 & 0.2285469686 & -18.311629071 & 22.8323995965 & 0 \\ -22.83239960 & 28.586208889 & 0.1828375749 & 22.8323995965 & -28.58620889 & 0 \\ 0.2285469686 & 0.1828375749 & 1.87408514266 & -0.2285469686 & -0.1828375749 & 0 \\ -18.311629071 & 22.8323995965 & -0.2285469686 & 18.311629071 & -22.83239960 & 0 \\ 22.8323995965 & -28.58620889 & -0.1828375749 & -22.83239960 & 28.586208889 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Obtežni vektor v globalnem koordinatnem sistemu pa je:

$$\{F_4\} = [T_4] \cdot \{f_4\} = \begin{Bmatrix} -2439.0243902439015 \\ -21951.219512195123 \\ -20000 \\ 2439.0243902439033 \\ -18048.78048780488 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Posredno lahko člene vektorja preverimo tako, da uporabimo ravnotežne enačbe (ki sicer niso samostojno uporabne za določitev nadomestnih vozliščnih sil in momentov, omogočajo pa posredno kontrolo dobljenih vrednosti), ki jih apliciramo za kontrolo mehanske enakovrednosti. Tako izračunamo rezultanti vozliščnih sil v vodoravni in navpični smeri, in ju nato primerjamo z dejansko aplicirano obtežbo.

V vodoravni smeri tako sledi:

$$-2439.0243902439015 + 2439.0243902439033 = 0$$

kar ustreza vertikalno aplicirani obtežbi.

V navpični smeri pa sledi:

$$-21951.219512195126 \text{ N} - 18048.78048780488 \text{ N} = -40000 \text{ N}$$

kar prav tako ustreza aplicirani obtežbi.

Če pa izračunamo moment nadomestnih vozliščnih sil in momentov na desno podporo, sledi:

$$-2439.0243902439015 \text{ N} \cdot 5 \text{ m} - 21951.219512195123 \text{ N} \cdot 4 \text{ m} + 20000 \text{ Nm} = -80000 \text{ Nm}$$

kar prav tako ustreza momentu aplicirane zvezne obtežbe.

Ker so v izbranem modelu štiri vozlišča modelirana kot polno vpeta, kar pomeni, da so tam pomiki in zasuki znani in enaki nič ( $X_1=Y_1=\Phi_1=X_3=Y_3=\Phi_3=X_4=Y_4=\Phi_4=X_5=Y_5=\Phi_5=0$ ), sestavimo samo tiste dele globalne togostne matrike in globalnega obtežnega vektorja, ki pripadajo neničelnim prostostnim stopnjam (torej  $X_2=Y_2=\Phi_2$ ), ali pa v celotnem sistemu  $15 \times 15$  vrstice in stolpce, ki pripadajo ničelnim pomikom in zasukom, preprosto prečrtamo.

Iz posameznih globalnih togostnih matrik in globalnih obtežnih vektorjev tako v sistem enačb prepisemo naslednje označene člene:

$$[K_1] = \begin{bmatrix} 500 & 0 & 0 & -500 & 0 & 0 \\ 0 & 0.55\bar{5} & 0 & 0 & -0.55\bar{5} & 3.33\bar{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -500 & 0 & 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & -0.55\bar{5} & 0 & 0 & 0.55\bar{5} & -3.33\bar{3} \\ 0 & 3.33\bar{3} & 0 & 0 & -3.33\bar{3} & 20 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \quad \{F_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -22500 \\ 0 \\ 0 \\ -37500 \\ 45000 \end{Bmatrix}$$

$$[K_2] = \begin{bmatrix} -1.8283757489 & -2.2854696862 & 0 & -1.8283757489 & -2.2854696862 & 0 \\ -2.2854696862 & -2.8568371077 & 0 & -2.2854696862 & -2.8568371077 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.8283757489 & -2.2854696862 & 0 & 1.8283757489 & 2.2854696862 & 0 \\ -2.2854696862 & -2.8568371077 & 0 & 2.2854696862 & 2.8568371077 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$[K_3] = \begin{bmatrix} -0.09375 & 0 & -0.234375 & -0.09375 & 0 & -0.234375 \\ 0 & 37.5 & 0 & 0 & -37.5 & 0 \\ -0.234375 & 0 & 0.78125 & 0.234375 & -0.234375 & 0.390625 \\ -0.09375 & 0 & 0.234375 & 0.09375 & 0 & 0.234375 \\ 0 & -37.5 & 0 & 0 & 37.5 & 0 \\ -0.234375 & 0 & 0.390625 & 0.234375 & 0 & 0.78125 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

in

$$[K_4] = \begin{bmatrix} 18.31163 & -22.83240 & 0.22855 & -18.31163 & 22.83240 & 0 \\ -22.83240 & 28.58621 & 0.18284 & 22.83240 & -28.58621 & 0 \\ 0.22855 & 0.18284 & 1.87409 & -0.22855 & -0.18284 & 0 \\ -18.31163 & -22.83240 & -0.22855 & 18.31163 & -22.83240 & 0 \\ -22.83240 & -28.58621 & -0.18284 & -22.83240 & 28.58621 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\{F_4\} = \begin{bmatrix} -2439.02 \\ -21951.22 \\ -20000 \\ -2439.02 \\ -18048.78 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tako sledi sistem 3 treh bistvenih enačb konstrukcije s tremi neznankami:

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\}$$

oziroma

$$\begin{bmatrix} 70.23375481987628 & -20.54692991034154 & 0.4629219686174724 \\ -20.54692991034154 & 68.99860155264277 & -0.15049575843935553 \\ 0.4629219686174724 & -0.15049575843935553 & 4.655335142663275 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2439.0243902439015 \\ -59451.21951219512 \\ 25000 \end{Bmatrix}$$

Rešitve sistema so:

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.34921231780038703 \text{ m} \\ -0.9538988356068556 \text{ m} \\ 5.374070729217129 \text{ rad} \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

Poprocesiranje: iskanje vozliščnih vrednosti sekundarnih spremenljivk in notranjih statičnih količin

– izračun notranjih statičnih količin za 1. končni element

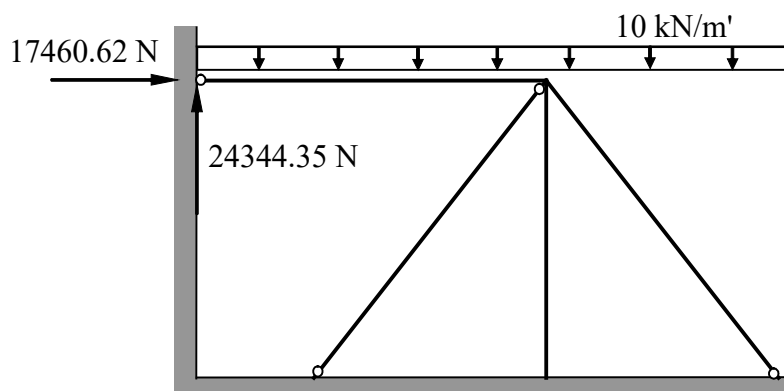
Vektor globalnih pomikov prvega končnega elementa je:

$$\{U_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ X_2 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.34921231780038703 \text{ m} \\ -0.9538988356068556 \text{ m} \\ 5.374070729217129 \text{ rad} \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

Globalni vektor sekundarnih spremenljivk je tako:

$$\{Q_1\} = [K_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\} = \begin{Bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ Q_3^1 \\ Q_4^1 \\ Q_5^1 \\ Q_6^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 17460.61589001935 \text{ N} \\ 24344.35128949498 \text{ N} \\ 0 \\ -17460.61589001935 \text{ N} \\ 35655.64871050502 \text{ N} \\ -33933.89226303012 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Reakciji v podpori horizontalnega elementa, ki jih odčitamo iz prvih dveh členov vektorja sekundarnih spremenljivk, sta prikazani na sliki.



Slika 211: Reakciji v podpori horizontalnega elementa

Lokalni vektor sekundarnih spremenljivk, ki je za ta končni element enak globalnemu (prvi končni element je namreč horizontalen in rotacijska matrika je enotska matrika), je formalno izračunljiv kot:

$$\{q_1\} = [T_1]^T \cdot \{Q_1\} = \begin{Bmatrix} 17460.61589001935 \\ 24344.35128949498 \\ 0 \\ -17460.61589001935 \\ 35655.64871050502 \\ -33933.89226303012 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,1} \\ V_{y,1} \\ M_{z,1} \\ N_{x,2} \\ V_{y,2} \\ M_{z,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -q_{1,1} \\ q_{1,2} \\ -q_{1,3} \\ q_{1,4} \\ -q_{1,5} \\ q_{1,6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -17460.61589001935 \text{ N} \\ 24344.35128949498 \text{ N} \\ 0 \\ -17460.61589001935 \text{ N} \\ -35655.64871050502 \text{ N} \\ -33933.89226303012 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Sekundarne spremenljivke oz. notranje statične količine lahko izračunamo tudi tako, da globalni vektor pomikov  $\{U_1\}$  najprej pretvorimo v lokalni vektor pomikov:

$$\{u_1\} = [T_1]^T \cdot \{U_1\}$$

Ker pa je prvi končni element horizontalen in je rotacijska matrika enotska matrika, za tak element velja kar:

$$\{u_1\} = \{U_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.34921231780038703 \text{ m} \\ -0.9538988356068556 \text{ m} \\ 5.374070729217129 \text{ rad} \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

Tako sledi:

$$\{q_1\} = [k_1] \cdot \{u_1\} - \{f_1\}$$

$$\begin{Bmatrix} q_{1,1} \\ q_{1,2} \\ q_{1,3} \\ q_{1,4} \\ q_{1,5} \\ q_{1,6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 & 0 & 0 & -500 & 0 & 0 \\ 0 & 0.55\bar{5} & 0 & 0 & -0.55\bar{5} & 3.33\bar{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -500 & 0 & 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & -0.55\bar{5} & 0 & 0 & 0.55\bar{5} & -3.33\bar{3} \\ 0 & 3.33\bar{3} & 0 & 0 & -3.33\bar{3} & 20 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.34921231780038703 \\ -0.9538988356068556 \\ 5.374070729217129 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

$$- \begin{Bmatrix} 0 \\ -22500 \\ 0 \\ 0 \\ -37500 \\ 45000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 17460.61589001935 \\ 24344.35128949498 \\ 0 \\ -17460.61589001935 \\ 35655.64871050502 \\ -33933.89226303012 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,1} \\ V_{y,1} \\ M_{z,1} \\ N_{x,2} \\ V_{y,2} \\ M_{z,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -q_{1,1} \\ q_{1,2} \\ -q_{1,3} \\ q_{1,4} \\ -q_{1,5} \\ q_{1,6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -17460.61589001935 \text{ N} \\ 24344.35128949498 \text{ N} \\ 0 \\ -17460.61589001935 \text{ N} \\ -35655.64871050502 \text{ N} \\ -33933.89226303012 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

– izračun notranjih statičnih količin za 2. končni element

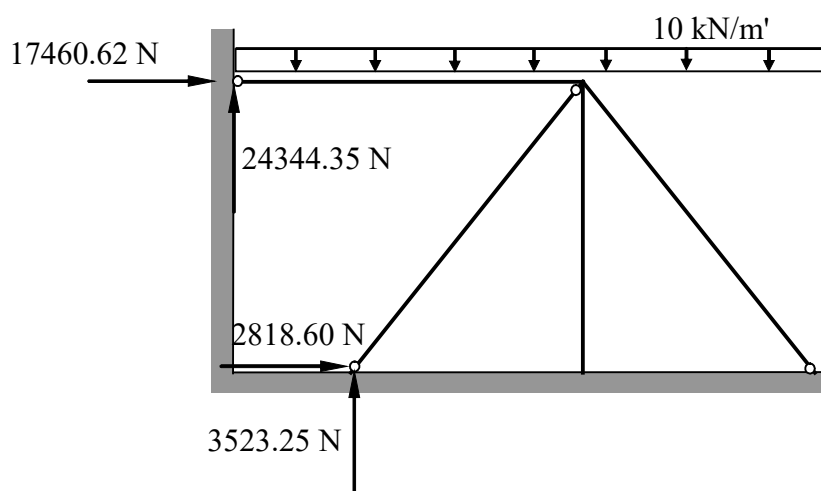
Vektor globalnih pomikov drugega končnega elementa je:

$$\{U_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ X_2 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.34921231780038703 \text{ m} \\ -0.9538988356068556 \text{ m} \\ 5.374070729217129 \text{ rad} \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

in je (zaradi izbrane diskretizacije) slučajno enak vektorju za prvi končni element. Globalni vektor sekundarnih spremenljivk je tako:

$$\{Q_2\} = [K_2] \cdot \{U_2\} - \{F_2\} = \begin{Bmatrix} 2818.5982055541135 \text{ N} \\ 3523.247756942642 \text{ N} \\ 0 \\ -2818.5982055541135 \text{ N} \\ -3523.247756942642 \text{ N} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Reakciji v podpori levega poševnega elementa/diagonale, ki ju odčitamo iz prvih dveh členov vektorja sekundarnih spremenljivk, sta:



Slika 212: Reakciji v podpori levega poševnega elementa

Lokalni vektor sekundarnih spremenljivk je tako:

$$\{q_2\} = [T_2]^T \cdot \{Q_2\} = \begin{Bmatrix} 4511.958621392068 \text{ N} \\ 0 \\ 0 \\ -4511.958621392068 \text{ N} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,3} \\ V_{y,3} \\ M_{z,3} \\ N_{x,2} \\ V_{y,2} \\ M_{z,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -q_{2,1} \\ q_{2,2} \\ -q_{2,3} \\ q_{2,4} \\ -q_{2,5} \\ q_{2,6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4511.95862139207 \text{ N} \\ 0 \\ 0 \\ -4511.95862139207 \text{ N} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Opomba: obravnavani primer služi zgolj za demonstracijo uporabe metode končnih elementov za analizo konstrukcije in analizo ustreznih veličin, in zato kontrola uklonske sile za ta element ni narejena.

Alternativno lahko globalni vektor pomikov  $\{U_2\}$  v lokalni vektor pomikov pretvorimo kot:

$$\{u_2\} = [T_2]^T \cdot \{U_2\} = \begin{bmatrix} 0.624695 & 0.78087 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.78087 & 0.62469 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.624695 & 0.78087 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.78087 & 0.62469 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.3492123178 \text{ m} \\ -0.953898836 \text{ m} \\ 5.374070729 \text{ rad} \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.9630210535643217 \text{ m} \\ -0.3232068716279052 \text{ m} \\ 5.374070729217129 \text{ rad} \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

Tako (ponovno) sledi lokalni vektor sekundarnih spremenljivk:

$$\{q_2\} = [k_2] \cdot \{u_2\} - \{f_2\}$$

$$\begin{Bmatrix} q_{2,1} \\ q_{2,2} \\ q_{2,3} \\ q_{2,4} \\ q_{2,5} \\ q_{2,6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.6852128567 & 0 & 0 & -4.6852128567 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4.6852128567 & 0 & 0 & 4.6852128567 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.9630210535643217 \\ -0.3232068716279052 \\ 5.374070729217129 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

$$= \begin{Bmatrix} 4511.958621392068 \\ 0 \\ 0 \\ -4511.958621392068 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,3} \\ V_{y,3} \\ M_{z,3} \\ N_{x,2} \\ V_{y,2} \\ M_{z,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -q_{2,1} \\ q_{2,2} \\ -q_{2,3} \\ q_{2,4} \\ -q_{2,5} \\ q_{2,6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4511.958621392068 \text{ N} \\ 0 \\ 0 \\ -4511.958621392068 \text{ N} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

– izračun notranjih statičnih količin za 3. končni element

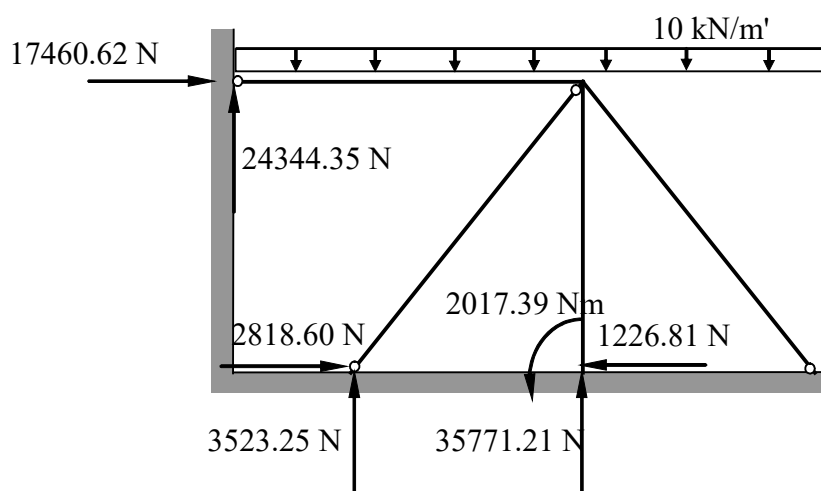
Tudi vektor globalnih pomikov tretjega končnega elementa je slučajno (zaradi izbrane diskretizacije) enak vektorju za prvi in drugi končni element:

$$\{U_3\} = \{U_2\} = \{U_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ X_2 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.34921231780038703 \text{ m} \\ -0.9538988356068556 \text{ m} \\ 5.374070729217129 \text{ rad} \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

Globalni vektor sekundarnih spremenljivk je tako:

$$\{Q_3\} = [K_3] \cdot \{U_3\} - \{F_3\} = \begin{Bmatrix} -1226.8091723664784 \text{ N} \\ 35771.206335257084 \text{ N} \\ 2017.3997416159752 \text{ Nm} \\ 1226.8091723664784 \text{ N} \\ -35771.206335257084 \text{ N} \\ 4116.646120216416 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Reakcije v podpori vertikalnega elementa, ki jih odčitamo iz prvih treh členov vektorja sekundarnih spremenljivk, so:



Slika 213: Reakcije v podpori stebra

Lokalni vektor sekundarnih spremenljivk je tako:

$$\{q_3\} = [T_3]^T \cdot \{Q_3\} = \begin{Bmatrix} 35771.206335257084 \text{ N} \\ 1226.8091723664784 \text{ N} \\ 2017.3997416159752 \text{ Nm} \\ -35771.206335257084 \text{ N} \\ -1226.8091723664784 \text{ N} \\ 4116.646120216416 \text{ Nm} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,4} \\ V_{y,4} \\ M_{z,4} \\ N_{x,2} \\ V_{y,2} \\ M_{z,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -35771.206335257084 \text{ N} \\ 1226.8091723664784 \text{ N} \\ -2017.3997416159752 \text{ Nm} \\ -35771.206335257084 \text{ N} \\ 1226.8091723664784 \text{ N} \\ 4116.646120216416 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Alternativno lahko globalni vektor pomikov  $\{U_3\}$  v lokalni vektor pomikov pretvorimo kot:

$$\{u_3\} = [T_3]^T \cdot \{U_3\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.34921231780038703 \text{ m} \\ -0.9538988356068556 \text{ m} \\ 5.374070729217129 \text{ rad} \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.9538988356068556 \text{ m} \\ 0.34921231780038703 \text{ m} \\ 5.374070729217129 \text{ rad} \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

Opomba: ker gre za navpični element, bi lahko lokalni vektor pomikov zapisali tudi brez formalne transformacije.

Tako ponovno sledi:

$$\{q_3\} = [k_3] \cdot \{u_3\} - \{f_3\}$$

$$\begin{Bmatrix} q_{3,1} \\ q_{3,2} \\ q_{3,3} \\ q_{3,4} \\ q_{3,5} \\ q_{3,6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 37.5 & 0 & 0 & -37.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.09375 & 0.23438 & 0 & -0.09375 & 0.23438 \\ 0 & 0.23438 & 0.78125 & 0 & -0.23438 & 0.39063 \\ -37.5 & 0 & 0 & 37.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.09375 & -0.23438 & 0 & 0.09375 & -0.23438 \\ 0 & 0.23438 & 0.39063 & 0 & -0.23438 & 0.78125 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.9538988 \text{ m} \\ 0.34921232 \text{ m} \\ 5.3740707 \text{ rad} \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

$$= \begin{Bmatrix} 35771.206335257084 \\ 1226.8091723664784 \\ 2017.3997416159752 \\ -35771.206335257084 \\ -1226.8091723664784 \\ 4116.646120216416 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,4} \\ V_{y,4} \\ M_{z,4} \\ N_{x,2} \\ V_{y,2} \\ M_{z,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -q_{3,1} \\ q_{3,2} \\ -q_{3,3} \\ q_{3,4} \\ -q_{3,5} \\ q_{3,6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -35771.206335257084 \text{ N} \\ 1226.8091723664784 \text{ N} \\ -2017.3997416159752 \text{ Nm} \\ -35771.206335257084 \text{ N} \\ 1226.8091723664784 \text{ N} \\ 4116.646120216416 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

– izračun notranjih statičnih količin za 4. končni element

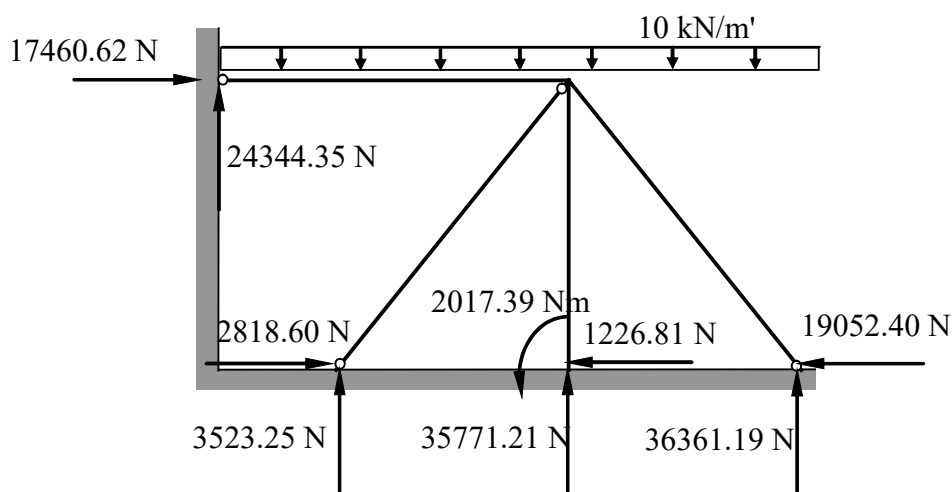
Vektor globalnih pomikov četrtega končnega elementa je:

$$\{U_4\} = \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \\ X_5 \\ Y_5 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.34921231780038703 \text{ m} \\ -0.9538988356068556 \text{ m} \\ 5.374070729217129 \text{ rad} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

Globalni vektor sekundarnih spremenljivk je tako:

$$\{Q_4\} = [K_4] \cdot \{U_4\} - \{F_4\} = \begin{Bmatrix} 19052.40492320699 \text{ N} \\ 3638.805381694692 \text{ N} \\ 29817.2461428137 \text{ Nm} \\ -19052.40492320699 \text{ N} \\ 36361.19461830531 \text{ N} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Reakciji v podpori desnega poševnega elementa, ki ju odčitamo iz četrtega in petega člena vektorja sekundarnih spremenljivk, sta:



Slika 214: Vse izračunane reakcije

Reakcije lahko posredno preverimo z izračunom vsote sil v posamezni smeri. V horizontalni smeri tako sledi:

$$17460.61589001935 \text{ N} + 2818.5982055541135 \text{ N} - 1226.8091723664784 \text{ N} - 19052.40492320699 \text{ N} = 0$$

V vertikalni smeri pa sledi:

$$24344.35128949498 \text{ N} + 3523.247756942642 \text{ N} + 35771.206335257084 \text{ N} + 36361.19461830531 \text{ N} = 100000 \text{ N}$$

Lokalni vektor sekundarnih spremenljivk je tako:

$$\{q_4\} = [T_4]^T \cdot \{Q_4\} = \begin{Bmatrix} 9060.5133733301 \text{ N} \\ 17150.572450370 \text{ N} \\ 29817.246142814 \text{ Nm} \\ -40295.26575105 \text{ N} \\ 7837.2294518067 \text{ N} \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,2} \\ V_{y,2} \\ M_{z,2} \\ N_{x,5} \\ V_{y,5} \\ M_{z,5} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -q_{4,1} \\ q_{4,2} \\ -q_{4,3} \\ q_{4,4} \\ -q_{4,5} \\ q_{4,6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -9060.5133733301 \text{ N} \\ 17150.572450370 \text{ N} \\ -29817.24614281 \text{ Nm} \\ -40295.265751051 \text{ N} \\ 7837.2294518067 \text{ N} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Alternativno lahko globalni vektor pomikov  $\{U_4\}$  v lokalni vektor pomikov pretvorimo kot:

$$\begin{aligned} \{u_4\} &= [T_4]^T \cdot \{U_4\} \\ &= \begin{bmatrix} 0.624695 & -0.78087 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.78087 & 0.624695 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.624695 & -0.78087 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.78087 & 0.624695 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -0.34921232 \text{ m} \\ -0.9538988 \text{ m} \\ 5.37407073 \text{ rad} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4} \\ &= \begin{Bmatrix} 0.5267186426145147 \text{ m} \\ -0.8685848853151639 \text{ m} \\ 5.374070729217129 \text{ rad} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

Tako ponovno sledi sledi:

$$\begin{aligned} \{q_4\} &= [k_4] \cdot \{u_4\} - \{f_4\} \\ \begin{Bmatrix} q_{4,1} \\ q_{4,2} \\ q_{4,3} \\ q_{4,4} \\ q_{4,5} \\ q_{4,6} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 46.85212 & 0 & 0 & -46.85212 & 0 & 0 \\ 0 & 0.04571 & 0.29268 & 0 & -0.04571 & 0 \\ 0 & 0.29268 & 1.87409 & 0 & -0.29268 & 0 \\ -46.85212 & 0 & 0 & 46.85212 & 0 & 0 \\ 0 & -0.04571 & -0.29268 & 0 & 0.04571 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} 0.5267186427 \\ -0.868584885 \\ 5.3740707292 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4} \\ &= \begin{Bmatrix} 15617.376188861 \\ -15617.376188861 \\ -20000 \\ 15617.376188861 \\ -9370.425713316 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9060.5133733301 \\ 17150.57245037 \\ 29817.246142814 \\ -40295.26575105 \\ 7837.2294518067 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,2} \\ V_{y,2} \\ M_{z,2} \\ N_{x,5} \\ V_{y,5} \\ M_{z,5} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -q_{4,1} \\ q_{4,2} \\ -q_{4,3} \\ q_{4,4} \\ -q_{4,5} \\ q_{4,6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -9060.5133733301 \text{ N} \\ 17150.5724503702 \text{ N} \\ -29817.24614281 \text{ Nm} \\ -40295.265751051 \text{ N} \\ 7837.2294518067 \text{ N} \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

*Poprocesiranje: izračun funkcij osne in prečne sile ter upogibnega momenta*

Ker se lege končnih elementov medsebojno precej razlikujejo, funkcij ni smiselno zapisati za globalni koordinatni sistem. Vsako funkcijo tako raje enakovredno zapišemo v lokalnem koordinatnem sistemu, interpolacijske funkcije pa zaradi tega (saj velja  $x_A=0$ ) dobijo enostavnejšo obliko.

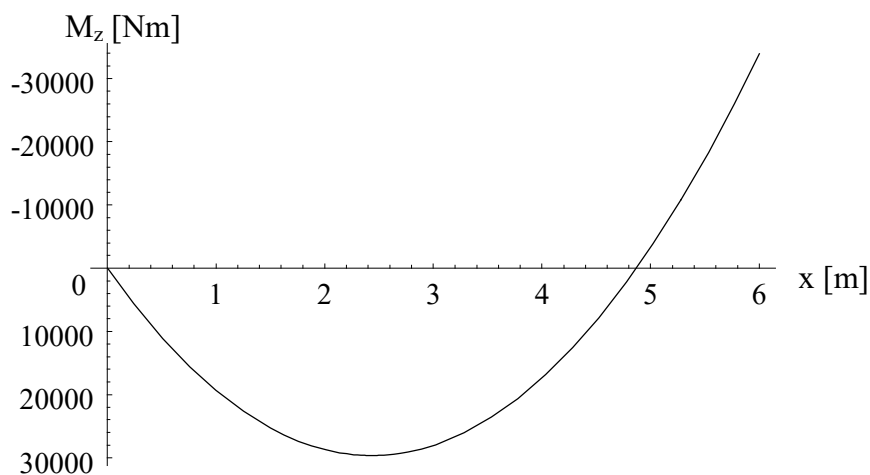
– *izračun funkcij notranjih statičnih količin za 1. končni element*

Ker je jasno, da bo osna sila vzdolž 1. končnega elementa konstantna, iskanje funkcije osne sile z interpolacijo ni smiselno.

Funkcija upogibnega momenta za prvi element je (kljub temu, da gre za končni element, ki je na začetku členkasto vpet, uporabimo H1 interpolacijske funkcije za obojestransko polnovpet končni element):

$$\begin{aligned} M_{z,IN}(x) &= M_{z,I}^1 \cdot N_{1,1}(x) + V_{y,I}^1 \cdot N_{1,2}(x) + M_{z,II}^1 \cdot N_{1,3}(x) + V_{y,II}^1 \cdot N_{1,4}(x) \\ &= 0 \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot x^2}{L^2} + \frac{2 \cdot x^3}{L^3}\right) + 24344.35128949498 \text{ N} \cdot \left(x - \frac{2 \cdot x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \\ &\quad - 33933.89226303012 \text{ Nm} \cdot \left(\frac{3 \cdot x^2}{L^2} - \frac{2 \cdot x^3}{L^3}\right) - 35655.64871050502 \text{ N} \cdot \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \\ &= 24344.35128949498 \cdot x - 5000 \cdot x^2 \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m} \end{aligned}$$

ki je enaka točni razporeditvi momenta.



**Slika 215: Razporeditev upogibnega momenta na vodoravnem elementu**

Enaka razporeditev momenta sledi tudi, če uporabimo superpozicijo funkcije linearne razporeditve momenta, ki sledi iz vozliščnih vrednosti momenta, s funkcijo upogibnega momenta prostoležečega nosilca, obremenjenega z enakomerno zvezno obtežbo 10 kN/m'. Funkcijo linearne razporeditve momenta lahko poiščemo z različnimi matematičnimi pristopi. Ker pa je vrednost momenta v začetnem vozlišču enaka 0,

funkcijo za takšno razporeditev momenta najlažje pridobimo s podobnimi trikotniki (oz. sklepnim računom), kar vodi do:

$$M_o(x) = \frac{x}{L} \cdot M_{z,2} = \frac{x}{L} \cdot M_z(L) = \frac{x}{6} \cdot (-33933.89226303012 \text{ Nm}) = -5655.648710505019 \cdot x$$

Funkcija upogibnega momenta prostoležečega nosilca, obremenjenega z zvezno obtežbo  $10000 \text{ N/m}'$ , pa je:

$$M_q(x) = 30000 \cdot x - 10000 \cdot \frac{x^2}{2}$$

kar vodi do:

$$M_{z,1N}(x) = -5655.648710505019 \cdot x + 30000 \cdot x - 10000 \cdot \frac{x^2}{2} = 24344.35128949498 \cdot x - 5000 \cdot x^2$$

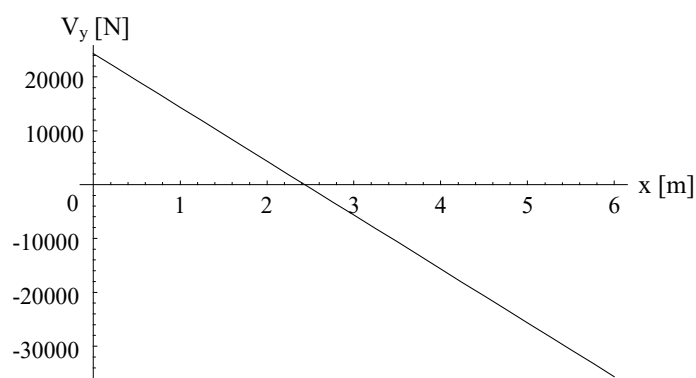
$$0 \leq x \leq 6 \text{ m}$$

Opomba: ker sta znani reakciji na levem koncu elementa, lahko funkcijo momenta (in tudi prečne sile) dobimo tudi z uporabo Newtonovih zakonov ravnotežja momentov in prečnih sil.

Približna funkcija prečne sile za prvi element je:

$$V_{y,1N}(x) = \frac{dM_{z,1N}(x)}{dx} = 24344.35128949498 - 10000 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 6 \text{ m}$$

ki je, zaradi točnosti izraza za upogibni moment, enaka točni razporeditvi prečne sile.



Slika 216: Razporeditev prečne sile na vodoravnem elementu

Mesto, kjer nastopi maksimalni upogibni moment, nastopi pri:

$$V_{y,IN}(x) = 0 \rightarrow 24344.35128949498 - 10000 \cdot x = 0 \rightarrow x = 2.434435128949498 \text{ m} < 6 \text{ m}$$

in maksimalni pozitivni upogibni moment v prvem končnem elementu je tako:

$$\begin{aligned} M_{z,IN}(2.434435128949498 \text{ m}) \\ &= 24344.35128949498 \cdot 2.434435128949498 \text{ m} - 5000 \cdot (2.434435128949498 \text{ m})^2 \\ &= 29632.371985316793 \text{ Nm} \end{aligned}$$

Maksimalni negativni upogibni moment pa nastopi v končnem vozlišču elementa.

– *izračun funkcij notranjih statičnih količin za 2. končni element*

Ker je jasno, da bo osna sila (edina notranja statična količina) vzdolž 2. končnega elementa konstantna, iskanje funkcije osne sile ni smiselno.

– *izračun funkcij notranjih statičnih količin za 3. končni element*

Ker je jasno, da bo osna sila vzdolž 3. končnega elementa konstantna, iskanje funkcije osne sile tudi v tem elementu ni smiselno.

Funkcijo linearne razporeditve momenta, ki sledi iz vozliščnih momentnih vrednosti vrednosti (zvezne obtežbe na elementu ni), lahko poiščemo z različnimi matematičnimi pristopi. Če uporabimo splošni izraz za linearno funkcijo, izhajamo iz:

$$M_o(x) = A_1 + A_2 \cdot x$$

kjer konstanti  $A_1$  in  $A_2$  določimo iz robnih pogojev, torej vozliščni vrednosti momenta, in sicer:

$$\begin{aligned} x = 0 \quad M_o(0) &= M_{z,I} \\ x = L \quad M_o(L) &= M_{z,II} \end{aligned}$$

od koder je razvidno, da vedno sledi

$$A_1 = M_{z,I},$$

konstanto  $A_2$  pa izračunamo kot:

$$M_{z,II} = M_{z,I} + A_2 \cdot L \rightarrow A_2 = \frac{M_{z,II} - M_{z,I}}{L}$$

kar vodi do splošnega zapisa:

$$\begin{aligned} M_o(x) &= M_{z,I} + \frac{M_{z,II} - M_{z,I}}{L} \cdot x \\ &= -2017.3997416159752 + \frac{4115.646120216416 - (-2017.3997416159752)}{5} \cdot x \\ M_o(x) &= -2017.3997416159752 + 1226.8091723664784 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 5 \text{ m} \end{aligned}$$

Ker pa na elementu ni prečne obtežbe, dalje sledi:

$$M_{z,3N}(x) = M_o(x) = -2017.3997416159752 + 1226.8091723664784 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 5 \text{ m}$$

ki je enaka točni funkciji razporeditvi momenta.

Enako funkcijo dobimo tudi, če uporabimo H0 interpolacijski funkciji:

$$\begin{aligned} M_o(x) &= M_{z,I} \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right) + M_{z,II} \cdot \frac{x}{L} \\ &= -2017.3997416159752 \cdot \left(1 - \frac{x}{5}\right) + 4115.646120216416 \cdot \frac{x}{5} \\ &= -2017.3997416159752 + 1226.8091723664784 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 5 \text{ m} \end{aligned}$$

Funkcija prečne sile za tretji element je:

$$V_{y,3N}(x) = \frac{dM_{z,N}(x)}{dx} = 1226.8091723664784 \quad 0 \leq x \leq 5 \text{ m}$$

ki je, zaradi korektnosti izraza za upogibni moment, tudi enaka točni razporeditvi prečne sile.

– *izračun funkcij notranjih statičnih količin za 4. končni element*

Ker je jasno, da (zaradi prisotnosti osne zvezne obtežbe) osna sila vzdolž 4. končnega elementa ne bo več konstantna, moramo izvesti iskanje njene funkcije. Najlažje to storimo s smiselno uporabo funkcije za linearno medvozliščno razporeditev upogibnega momenta:

$$\begin{aligned} N_{x,4N}(x) &= N_{x,I} + \frac{N_{x,II} - N_{x,I}}{L} \cdot x \\ &= -9060.513373330097 + \frac{-40295.265751051316 - (-9060.513373330097)}{6.4031242374328485} \cdot x \\ N_{x,4N}(x) &= -9060.513373330097 - 4878.048780487806 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 6.4031242374328485 \text{ m} \end{aligned}$$

ali z uporabo H0 interpolacijskih funkcij:

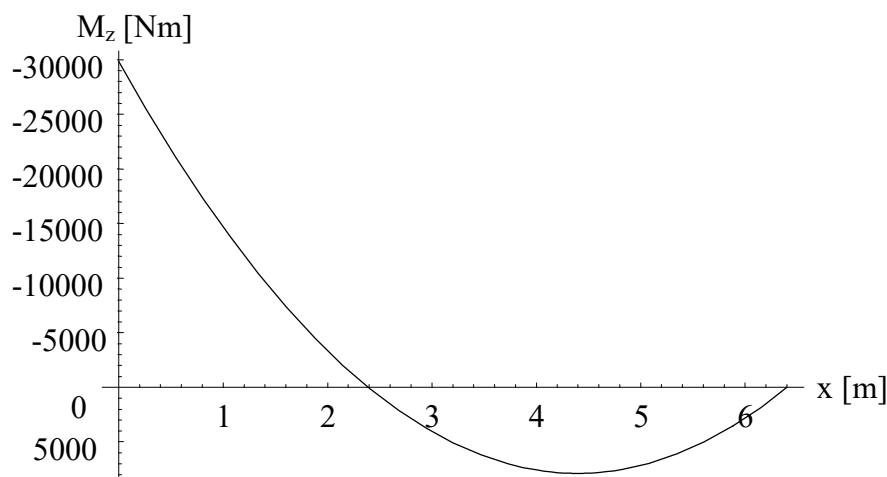
$$\begin{aligned} N_{x,4N}(x) &= N_{x,I} \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right) + N_{x,II} \cdot \frac{x}{L} = -9060.513373330097 \cdot \left(1 - \frac{x}{6.4031242374328485}\right) \\ &+ (-40295.265751051316) \cdot \frac{x}{6.4031242374328485} \\ &= -9060.513373330097 - 4878.048780487806 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 6.4031242374328485 \text{ m} \end{aligned}$$

Ker na elementu deluje enakomerna osna zvezna obtežba, je funkcija osne sile točna.

Funkcija upogibnega momenta za četrti element je (kljub temu, da gre za končni element, ki je na koncu členkasto vpet, uporabimo H1 interpolacijske funkcije za obojestransko polnovpet končni element):

$$\begin{aligned} M_{z,4N}(x) &= M_{z,I}^4 \cdot N_{4,1}(x) + V_{y,I}^4 \cdot N_{4,2}(x) + M_{z,II}^4 \cdot N_{4,3}(x) + V_{y,II}^4 \cdot N_{4,4}(x) \\ &= -29817.2461428137 \text{ Nm} \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot x^2}{L^2} + \frac{2 \cdot x^3}{L^3}\right) + 17150.57245037023 \text{ N} \cdot \left(x - \frac{2 \cdot x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \\ &+ 0 \cdot \left(\frac{3 \cdot x^2}{L^2} - \frac{2 \cdot x^3}{L^3}\right) - 7837.229451806742 \text{ N} \cdot \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \\ &= -29817.2461428137 + 17150.57245037023 \cdot x - 1951.2195121951222 \cdot x^2 \\ & \quad 0 \leq x \leq 6.4031242374328485 \text{ m} \end{aligned}$$

ki je enaka točni razporeditvi momenta (ker je ta (kvadratna) funkcija dobljena s seštevanjem kubnih funkcij, se lahko zaradi zaokroževanja pojavi majhen koeficient pri členu  $x^3$ , ki pa ga zanemarimo).



Slika 217: Razporeditev upogibnega momenta v četrtem elementu

Enaka razporeditev momenta sledi tudi, če uporabimo superpozicijo, torej seštejemo funkcijo linearne razporeditve momenta, ki sledi iz vozliščnih momentnih vrednosti:

$$M_o(x) = -29817.2461428137 \text{ Nm} \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right) + 0 \cdot \frac{x}{L}$$

$$= -29817.2461428137 + 4656.671499281744 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 6.4031242374328485 \text{ m}$$

s funkcijo upogibnega momenta prostoležečega nosilca, obremenjenega z zvezno prečno obtežbo 3902.439 kN/m':

$$M_q(x) = 12493.900951088484 \cdot x - 1951.219512195122 \cdot x^2$$

kar ponovno vodi do:

$$M_{z,4N}(x) = -29817.2461428137 + 17150.57245037023 \cdot x - 1951.219512195122 \cdot x^2$$

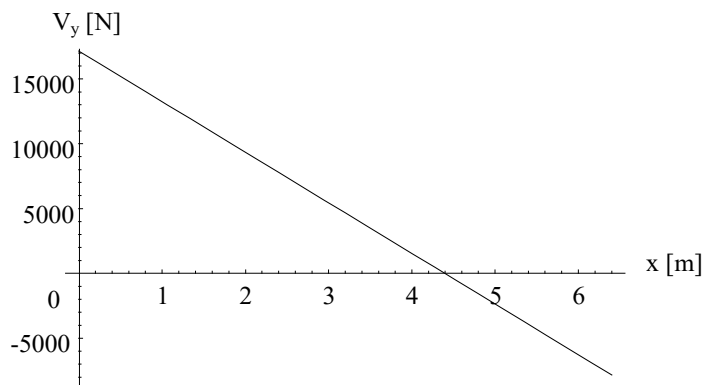
$$0 \leq x \leq 6.4031242374328485 \text{ m}$$

Funkcija prečne sile za četrti končni element je:

$$V_{y,4N}(x) = \frac{dM_{z,4N}(x)}{dx}$$

$$= 17150.57245037023 - 3902.439024390244 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 6.4031242374328485 \text{ m}$$

ki je, zaradi točnosti izraza za upogibni moment, enaka točni razporeditvi prečne sile.



Slika 218: Razporeditev prečne sile v četrtem elementu

Mesto, kjer nastopi maksimalni upogibni moment, je pri:

$$0 = 17150.57245037023 - 3902.439024390244 \cdot x$$

$$x = \frac{17150.57245037023}{3902.439024390244} = 4.39483419040737 \text{ m} \leq 6.4031242374328485 \text{ m}$$

Maksimalni pozitivni upogibni moment je tako:

$$M_{z,4N}(x) = -29817.2461428137 + 17150.57245037023 \cdot 4.39483419040737$$

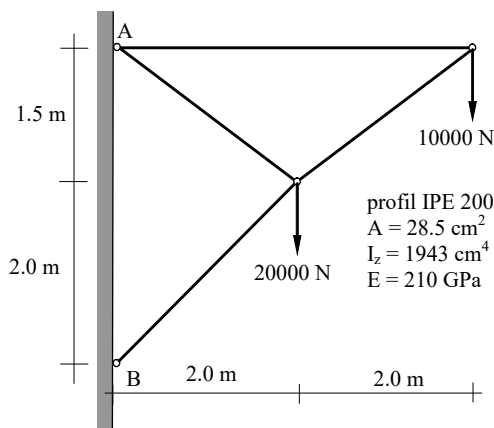
$$- 1951.2195121951222 \cdot 4.39483419040737^2$$

$$= 7869.714952159210 \text{ Nm}$$

Maksimalni negativni upogibni moment pa nastopi v začetnem vozlišču elementa.

### Primer 15 – Ravninska palična konstrukcija

Izračunaj pomike, reakcije in notranje statične količine za ravninsko palično konstrukcijo na sliki:

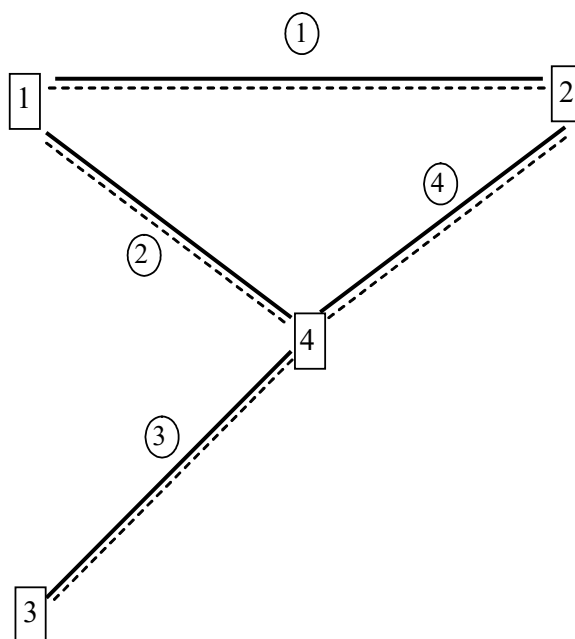


Slika 219: Analizirano paličje

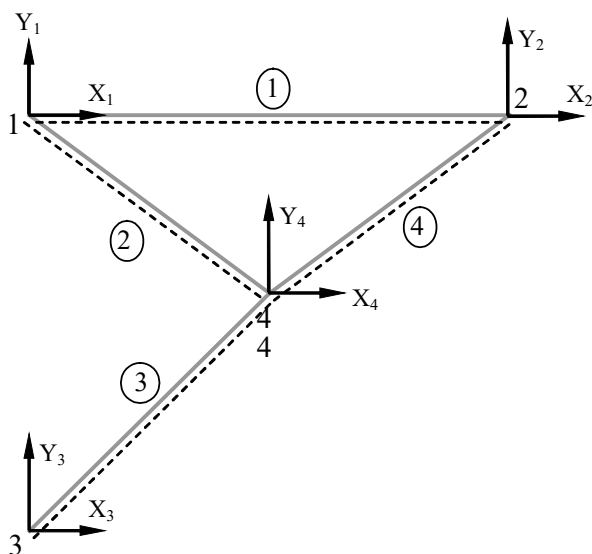
Vsi elementi so iz jekla in profila IPE 200, ki ima modul elastičnosti  $E = 210$  GPa.

### Rešitev

Minimalni (in hkrati popolnoma zadosten) računski model zahteva uporabo štirih končnih elementov. Izbrana je naslednja diskretizacija, pri čemer bomo uporabili končne elemente za paličja, s čimer bomo občutno zmanjšali računski napor (reševali bomo zgolj 4 enačbe namesto 6 oz. celo 11 enačb):



Slika 220: Označbe vozlišč in elementov



Slika 221: Označbe prostostnih stopenj

Togostne matrike elementov (vsi obtežni vektorji so enaki nič)

Vsi elementi imajo enako osno togost:

$$EA_1 = 210 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 28.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 5.985 \cdot 10^8 \text{ N}$$

### 1. končni element

$$L_1 = 4.0 \text{ m}$$

$$\alpha_1 = 0^\circ \rightarrow \begin{cases} s = \sin(0^\circ) = 0 \\ c = \cos(0^\circ) = 1 \end{cases}$$

Globalna togostna matrika (ki je tudi enaka lokalni togostni matriki) je:

$$[K_1] = \begin{bmatrix} 1.49625 & 0 & -1.49625 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.49625 & 0 & 1.49625 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^8$$

### 2. končni element

$$L_2 = \sqrt{2^2 + 1.5^2} = 2.5 \text{ m}$$

$$\alpha_2 = -36.86989764584402^\circ \rightarrow \begin{cases} s = \sin(-36.86989764584402^\circ) = -0.6 \\ c = \cos(-36.86989764584402^\circ) = 0.8 \end{cases}$$

kar vodi do transformacijske matrike:

$$[T_2] = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.6 \\ 0 & 0 & -0.6 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Globalna togostna matrika drugega elementa je:

$$[K_2] = \begin{bmatrix} 1.53216 & -1.14912 & -1.53216 & 1.14912 \\ -1.14912 & 0.86184 & 1.14912 & -0.86184 \\ -1.53216 & 1.14912 & 1.53216 & -1.14912 \\ 1.14912 & -0.86184 & -1.14912 & 0.86184 \end{bmatrix} \cdot 10^8$$

### 3. končni element

$$L_3 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2.8284271247461903 \text{ m}$$

$$\alpha_3 = 45^\circ \rightarrow \begin{cases} s = \sin(45^\circ) = 0.7071067811865475 \\ c = \cos(45^\circ) = 0.7071067811865475 \end{cases}$$

kar vodi do transformacijske matrike:

$$[T_3] = 0.7071067811865475 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Globalna togostna matrika tretjega elementa je:

$$[K_3] = 1.0580085213503716 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot 10^8$$

### 4. končni element

$$L_4 = \sqrt{2^2 + 1.5^2} = 2.5 \text{ m}$$

$$\alpha_4 = 36.86989764584402^\circ \rightarrow \begin{cases} s = \sin(36.86989764584402^\circ) = 0.6 \\ c = \cos(36.86989764584402^\circ) = 0.8 \end{cases}$$

kar vodi do transformacijske matrike:

$$[T_4] = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & -0.6 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Globalna togostna matrika četrtega elementa je:

$$[K_4] = \begin{bmatrix} 1.53216 & 1.14912 & -1.53216 & -1.14912 \\ 1.14912 & 0.86184 & -1.14912 & -0.86184 \\ -1.53216 & -1.14912 & 1.53216 & 1.14912 \\ -1.14912 & -0.86184 & 1.14912 & 0.86184 \end{bmatrix} \cdot 10^8$$

Ker v konstrukciji nastopata dve podprti vozlišči, kar pomeni, da so tam pomiki znani in enaki nič ( $X_1=Y_1=X_3=Y_3=0$ ), sestavimo samo tiste dele globalne togostne matrike in obtežnega vektorja, ki pripadajo neničelnim prostostnim stopnjam (torej  $X_2, Y_2, X_4$  in  $Y_4$ ), ali pa v sistemu  $8 \times 8$  enačb vrstice in stolpce z ničelnimi pomiki preprosto prečrtamo. Tako sledi sistem štirih enačb s štirimi neznankami.

Pri sestavi globalne togostne matrike se kot najpriročnejša izkaže uporaba neznanih vozliščnih pomikov v (neobičajnem, a vseeno korektnem) vrstnem redu  $X_4, Y_4, X_2$  in  $Y_2$ , saj lahko globalno togostno matriko enostavno tvorimo na osnovi togostne matrike elementa 4:

$$\begin{bmatrix} 4.122328521350372 & 1.0580085213503714 & -1.53216 & -1.14912 \\ 1.0580085213503714 & 2.7816885213503717 & -1.14912 & -0.86184 \\ -1.53216 & -1.14912 & 3.02841 & 1.14912 \\ -1.14912 & -0.86184 & 1.14912 & 0.86184 \end{bmatrix} \cdot 10^8 \cdot \begin{Bmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -20000 \\ 0 \\ -10000 \end{Bmatrix}$$

Rešitve sistema so:

$$\begin{Bmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.5706863666273423 \text{ m} \\ -1.5897067111117213 \text{ m} \\ 0.8911166805903649 \text{ m} \\ -4.699085618587368 \text{ m} \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

Poprocesiranje rezultatov – iskanje sekundarnih spremenljivk (vozliščnih vrednosti notranjih statičnih količin)

– izračun notranjih statičnih količin za 1. končni element

Vektor globalnih pomikov prvega končnega elementa je:

$$\{U_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.8911166805903649 \text{ m} \\ -4.699085618587368 \text{ m} \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

Globalni vektor sekundarnih spremenljivk je tako (ob upoštevanju  $\{F_1\} = \{0\}$ ):

$$\begin{aligned} \{Q_1\} &= [K_1] \cdot \{U_1\} = \begin{bmatrix} 1.49625 & 0 & -1.49625 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.49625 & 0 & 1.49625 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^8 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.8911166805903649 \text{ m} \\ -4.699085618587368 \text{ m} \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4} \\ &= \begin{Bmatrix} Q_{1,1} \\ Q_{1,2} \\ Q_{1,3} \\ Q_{1,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -13333.333333333334 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \\ 13333.333333333334 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Lokalni vektor sekundarnih spremenljivk je formalno tako:

$$\{q_1\} = [T_1]^T \cdot \{Q_1\} = \begin{Bmatrix} q_{1,1} \\ q_{1,2} \\ q_{1,3} \\ q_{1,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -13333.333333333334 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \\ 13333.333333333334 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,I} \\ V_{y,I} \\ N_{x,II} \\ V_{y,II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 13333.333333333334 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \\ 13333.333333333334 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

kjer indeks I označuje začetno vozlišče elementa, II pa končno vozlišče elementa.

Palica 1 je tako tegnjena.

– izračun notranjih statičnih količin za 2. končni element

Vektor globalnih pomikov drugega končnega elementa je:

$$\{U_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ X_4 \\ Y_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.5706863666273423 \text{ m} \\ -1.5897067111117213 \text{ m} \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

Globalni vektor sekundarnih spremenljivk je tako (ob upoštevanju  $\{F_2\} = \{0\}$ ):

$$\begin{aligned} \{Q_2\} &= [K_2] \cdot \{U_2\} \\ &= \begin{bmatrix} 1.53216 & -1.14912 & -1.53216 & 1.14912 \\ -1.14912 & 0.86184 & 1.14912 & -0.86184 \\ -1.53216 & 1.14912 & 1.53216 & -1.14912 \\ 1.14912 & -0.86184 & -1.14912 & 0.86184 \end{bmatrix} \cdot 10^8 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.5706863666273423 \text{ m} \\ -1.5897067111117213 \text{ m} \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4} \\ &= \begin{Bmatrix} Q_{2,1} \\ Q_{2,2} \\ Q_{2,3} \\ Q_{2,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -9523.809523809525 \text{ N} \\ 7142.857142857144 \text{ N} \\ 9523.809523809525 \text{ N} \\ -7142.857142857144 \text{ N} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Lokalni vektor sekundarnih spremenljivk je tako:

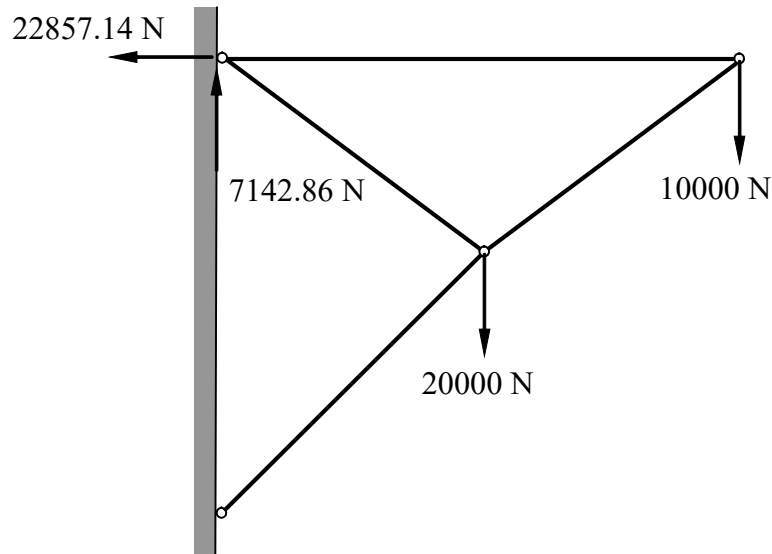
$$\{q_2\} = [T_2]^T \cdot \{Q_2\} = \begin{Bmatrix} q_{2,1} \\ q_{2,2} \\ q_{2,3} \\ q_{2,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -11904.761904761906 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \\ 11904.761904761906 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,I} \\ V_{y,I} \\ N_{x,II} \\ V_{y,II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11904.761904761906 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \\ 11904.761904761906 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

kjer indeks I označuje začetno vozlišče elementa, II pa končno vozlišče elementa.  
Tudi palica 2 je tegnjena.

Reakciji v vozlišču 1, ki ju izračunamo oz. odčitamo iz komponent vektorjev  $\{Q_1\}$  in  $\{Q_2\}$ , sta tako:

$$H_A = -13333.333333333334 \text{ N} + (-9523.809523809525 \text{ N}) = -22857.14285714286 \text{ N} \quad (\text{v levo})$$

$$V_A = 7142.857142857144 \text{ N} \quad (\text{usmerjena navzgor})$$



Slika 222: Reakciji v točki A oz. vozlišču 1

– izračun notranjih statičnih količin za 3. končni element

Vektor globalnih pomikov tretjega končnega elementa je (slučajno) enak vektorju globalnih pomikov drugega končnega elementa:

$$\{U_3\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ X_4 \\ Y_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.5706863666273423 \text{ m} \\ -1.5897067111117213 \text{ m} \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

Globalni vektor sekundarnih spremenljivk je tako (ob upoštevanju  $\{F_3\} = \{0\}$ ):

$$\{Q_3\} = [K_3] \cdot \{U_3\} = 1.05800852135 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot 10^8 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.5706863666273423 \text{ m} \\ -1.5897067111117213 \text{ m} \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

$$= \begin{Bmatrix} Q_{3,1} \\ Q_{3,2} \\ Q_{3,3} \\ Q_{3,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 22857.142857142848 \text{ N} \\ 22857.142857142848 \text{ N} \\ -22857.142857142848 \text{ N} \\ -22857.142857142848 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

Lokalni vektor sekundarnih spremenljivk je tako:

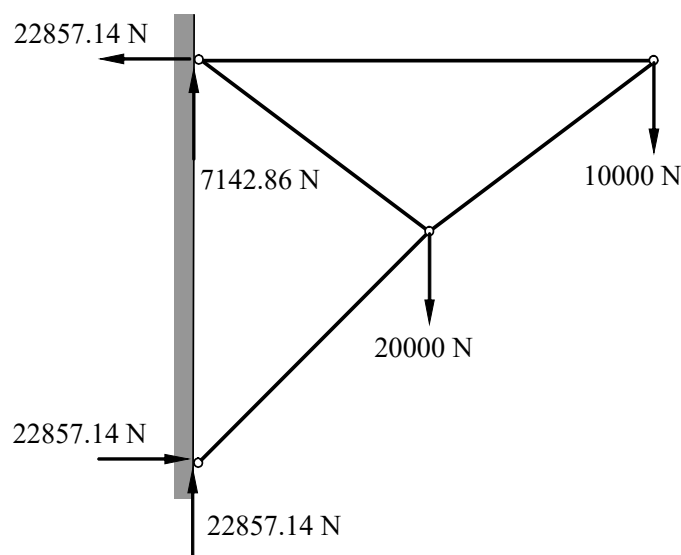
$$\{q_3\} = [T_3]^T \cdot \{Q_3\} = \begin{Bmatrix} q_{3,1} \\ q_{3,2} \\ q_{3,3} \\ q_{3,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 32324.88142567073 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \\ -32324.88142567073 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,I} \\ V_{y,I} \\ N_{x,II} \\ V_{y,II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -32324.88142567073 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \\ -32324.88142567073 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

Palica 3 je tako tlačena.

Reakciji v vozlišču 3, ki ju direktno odčitamo iz vektorja  $\{Q_3\}$ , sta tako:

$$H_B = 22857.142857142848 \text{ N} \text{ (usmerjena v desno)}$$

$$V_B = 22857.142857142848 \text{ N} \text{ (usmerjena navzgor)}$$



Slika 223: Reakcije v podporah

– *izračun notranjih statičnih količin za 4. končni element*

Vektor globalnih pomikov četrtega končnega elementa je:

$$\{U_4\} = \begin{Bmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.5706863666273423 \text{ m} \\ -1.5897067111117213 \text{ m} \\ 0.8911166805903649 \text{ m} \\ -4.699085618587368 \text{ m} \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

Globalni vektor sekundarnih spremenljivk je tako (ob upoštevanju  $\{F_4\} = \{0\}$ ):

$$\begin{aligned} \{Q_4\} &= [K_4] \cdot \{U_4\} \\ &= \begin{bmatrix} 1.53216 & 1.14912 & -1.53216 & -1.14912 \\ 1.14912 & 0.86184 & -1.14912 & -0.86184 \\ -1.53216 & -1.14912 & 1.53216 & 1.14912 \\ -1.14912 & -0.86184 & 1.14912 & 0.86184 \end{bmatrix} \cdot 10^8 \cdot \begin{Bmatrix} -0.5706863666273423 \text{ m} \\ -1.5897067111117213 \text{ m} \\ 0.8911166805903649 \text{ m} \\ -4.699085618587368 \text{ m} \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4} \\ &= \begin{Bmatrix} Q_{4,1} \\ Q_{4,2} \\ Q_{4,3} \\ Q_{4,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 13333.33333333328 \text{ N} \\ 10000 \text{ N} \\ -13333.33333333328 \text{ N} \\ -10000 \text{ N} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Lokalni vektor sekundarnih spremenljivk je tako:

$$\{q_4\} = [T_4]^T \cdot \{Q_4\} = \begin{Bmatrix} q_{4,1} \\ q_{4,2} \\ q_{4,3} \\ q_{4,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 16666.66666666664 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \\ -16666.66666666664 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,I} \\ V_{y,I} \\ N_{x,II} \\ V_{y,II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -16666.66666666664 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \\ -16666.66666666664 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

Tudi palica 4 je tlačena.

Ker pa je globalni vektor sekundarnih spremenljivk tega elementa nezanimiv (vozlišči elementa ne pripadata podporam), lahko postopamo tudi tako, da globalni vektor pomikov  $\{U_4\}$  pretvorimo v lokalni vektor pomikov:

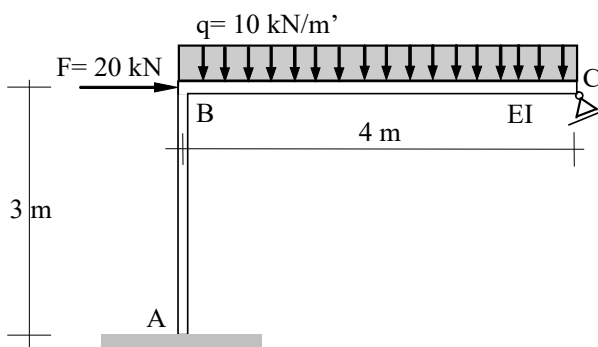
$$\{u_4\} = [T_4]^T \cdot \{U_4\} = \begin{Bmatrix} -1.4103731199689067 \text{ m} \\ -0.9293535489129718 \text{ rad} \\ -2.1065580266801294 \text{ m} \\ -4.293938503224114 \text{ rad} \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

Tako sledi (ob upoštevanju morebitnega vektorja  $\{f_4\}$ ):

$$\{q_4\} = [k_4] \cdot \{u_4\} = \begin{Bmatrix} 16666.66666666664 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \\ -16666.66666666664 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,I} \\ V_{y,I} \\ N_{x,II} \\ V_{y,II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -16666.66666666664 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \\ -16666.66666666664 \text{ N} \\ 0 \text{ N} \end{Bmatrix}$$

### Primer 16 – Enostavni okvir s poševno drsno podporo

Za prikazani betonski okvir (z elementoma pravokotnih dimenzij  $b/h = 0.2\text{m}/0.4\text{ m}$  in modulom elastičnosti  $E = 30\text{ GPa}$ ), pri katerem je drsna ploskev desne pomične podpore nagnjena proti horizontali za kot  $30^\circ$ , določi pomik in zasuk desnega konca nosilca, funkciji upogibnega momenta in prečne sile ter reakcije v podporah. Poišči tudi ekstremni vrednosti upogibnega momenta, ter izračunaj upogibnico za gredo.



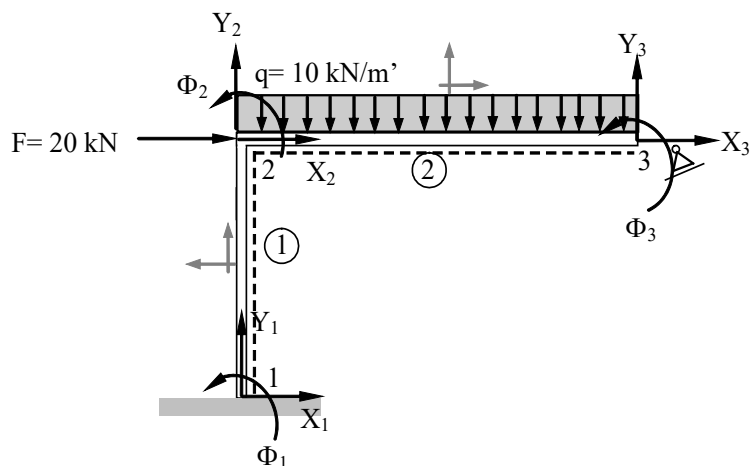
Slika 224: Okvir s poševno drsno podporo

### Rešitev

Zaradi dveh nekolinearnih konstrukcijskih elementov moramo uporabiti diskretizacijo z (najmanj) dvema končnima elementoma.

#### I. računski model

Najprej se odločimo za dva standardna končna elementa:



Slika 225: Izbrana diskretizacija in začetne prostostne stopnje

Prostostne stopnje bodo trije pomiki ( $X_2$  in  $Y_2$  ter  $X_3$ ) ter dva zasuka ( $\Phi_2$  in  $\Phi_3$ ).

1. pristop – globalna transformacija enačb konstrukcije

Prvi končni element (steber)

Lokalna togostna matrika prvega elementa je:

$$L=3.0 \text{ m}$$

$$EA = 30 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 0.2 \text{ m} \cdot 0.4 \text{ m} = 2.4 \cdot 10^9 \text{ N}$$

$$EI = 30 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{0.2 \text{ m} \cdot (0.4 \text{ m})^3}{12} = 3.2 \cdot 10^7 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

Lokalna togostna matrika je tako:

$$[k_1] = \begin{bmatrix} 80 & 0 & 0 & -80 & 0 & 0 \\ 0 & 1.4222222 & 2.1333333 & 0 & -1.4222222 & 2.1333333 \\ 0 & 2.1333333 & 4.2666667 & 0 & -2.1333333 & 2.1333333 \\ -80 & 0 & 0 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & -1.4222222 & -2.1333333 & 0 & 1.4222222 & -2.1333333 \\ 0 & 2.1333333 & 2.1333333 & 0 & -2.1333333 & 4.2666667 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Kot, ki ga lokalna  $x$  os prvega končnega elementa oklepa z globalno osjo  $X$ , je  $90^\circ$ , in tako je rotacijska matrika:

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Globalna togostna matrika prvega končnega elementa je tako:

$$[K_1] = \begin{bmatrix} 1.4222222 & 0 & -2.1333333 & -1.4222222 & 0 & -2.1333333 \\ 0 & 80 & 0 & 0 & -80 & 0 \\ -2.1333333 & 0 & 4.2666667 & 2.1333333 & 0 & 2.1333333 \\ -1.4222222 & 0 & 2.1333333 & 1.4222222 & 0 & 2.1333333 \\ 0 & -80 & 0 & 0 & 80 & 0 \\ -2.1333333 & 0 & 2.1333333 & 2.1333333 & 0 & 4.2666667 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Obtežni vektor elementa je enak 0.

*Drugi končni element (greda)*

Za drugi element velja  $L = 4.0$  m in lokalna togostna matrika drugega elementa je:

$$[k_2] = \begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 & -60 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 1.2 & 0 & -0.6 & 1.2 \\ 0 & 1.2 & 3.2 & 0 & -1.2 & 1.6 \\ -60 & 0 & 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6 & -1.2 & 0 & 0.6 & -1.2 \\ 0 & 1.2 & 1.6 & 0 & -1.2 & 3.2 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Lokalni obtežni vektor zaradi enakomerne zvezne obtežbe je:

$$\{f_2\} = \frac{1}{3} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -60000 \\ -40000 \\ 0 \\ -60000 \\ 40000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -20000 \\ -13333.333333333334 \\ 0 \\ -20000 \\ 13333.333333333334 \end{Bmatrix}$$

Kot, ki ga lokalna  $x$  os drugega končnega elementa oklepa z globalno osjo  $X$ , je  $0^\circ$ , in tako pretvorba togostne matrike in obtežnega vektorja ni potrebna, saj velja  $[K_2] = [k_2]$  in  $\{f_2\} = \{F_2\}$ . Ker pa ima element poševno drsno podporo, katere drsna ravnina ni vzporedna osi  $X$ , bomo najprej sestavili togostno matriko konstrukcije, kakor da gre na mestu poševne drsne podpore za prosti konec.

Togostna matrika bistvenih enačb konstrukcije, ki pripada šestim prostostnim stopnjam vozlišč 2 in 3, je tako:

$$[K] = \begin{bmatrix} 61.4222222 & 0 & 2.1333333 & -60 & 0 & 0 \\ 0 & 80.6 & 1.2 & 0 & -0.6 & 1.2 \\ 2.1333333 & 1.2 & 7.4666667 & 0 & -1.2 & 1.6 \\ -60 & 0 & 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6 & -1.2 & 0 & 0.6 & -1.2 \\ 0 & 1.2 & 1.6 & 0 & -1.2 & 3.2 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

pripadajoči obtežni vektor pa je:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 0 + 20000 \\ -20000 \\ -13333.333333333334 \\ 0 \\ -20000 \\ 13333.333333333334 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20000 \\ -20000 \\ -13333.333333333334 \\ 0 \\ -20000 \\ 13333.333333333334 \end{Bmatrix}$$

Ker gibanje vozlišča 3 dejansko ni popolnoma svobodno oz. prosto, temveč ima gibanje omejeno zgolj v eni smeri, ki pa ni vzporedna nobeni izmed osi globalnega koordinatnega sistema, moramo za vpeljavo te informacije v tem vozlišču upoštevati ustrezno prilagojeni koordinatni sistem  $X'Y'$ . Če merimo kot v protiurni smeri od ciljne osi  $X'$  proti aktualni osi  $X$ , ta znaša  $330^\circ$  oziroma  $\varphi = -30^\circ$ . Tako lahko zapišemo kinematični zvezi:

$$\begin{aligned} X_3 &= X_3' \cdot \cos(-30^\circ) - Y_3' \cdot \sin(-30^\circ) = X_3' \cdot \cos 30^\circ + Y_3' \cdot \sin 30^\circ \\ Y_3 &= X_3' \cdot \sin(-30^\circ) + Y_3' \cdot \cos(-30^\circ) = -X_3' \cdot \sin 30^\circ + Y_3' \cdot \cos 30^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ & 0 \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_3' \\ Y_3' \\ \Phi_3 \end{Bmatrix}$$

in iz zveze odčitamo rotacijsko oz. transformacijsko matriko.

Rotacijsko oz. transformacijsko matriko vozlišča 3 pa lahko izračunamo neposredno hitreje z uporabo bolj splošnega izraza:

$$\begin{aligned}
 [T_{v3}] &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 330^\circ & -\sin 330^\circ & 0 \\ \sin 330^\circ & \cos 330^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-30^\circ) & -\sin(-30^\circ) & 0 \\ \sin(-30^\circ) & \cos(-30^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ & 0 \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8660254037844387 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.8660254037844387 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Tako lahko zapišemo transformacijsko matriko konstrukcije, s katero matrične enačbe konstrukcije transformiramo v ustrezno obliko:

$$\begin{aligned}
 [T] &= \begin{bmatrix} [T_{v2}] & [0] \\ [0] & [T_{v3}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [T_{v3}] \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \\ \hline \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0.86602540 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.86602540 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Transformirana togostna matrika konstrukcije tako dobi obliko:

$$\begin{aligned}
 [K'] &= [T] \cdot [K] \cdot [T]^T \\
 &= \begin{bmatrix} 61.4222222 & 0 & 2.1333333 & -51.9615242 & 30 & 0 \\ 0 & 80.6 & 1.2 & -0.3 & -0.5196152 & 1.2 \\ 2.1333333 & 1.2 & 7.4666667 & -0.6 & -1.0392305 & 1.6 \\ -51.9615242 & -0.3 & -0.6 & 45.15 & -25.7209545 & -0.6 \\ 30 & -0.5196152 & -1.0392305 & -25.7209545 & 15.45 & -1.0392305 \\ 0 & 1.2 & 1.6 & -0.6 & -1.0392305 & 3.2 \end{bmatrix} \cdot 10^7
 \end{aligned}$$

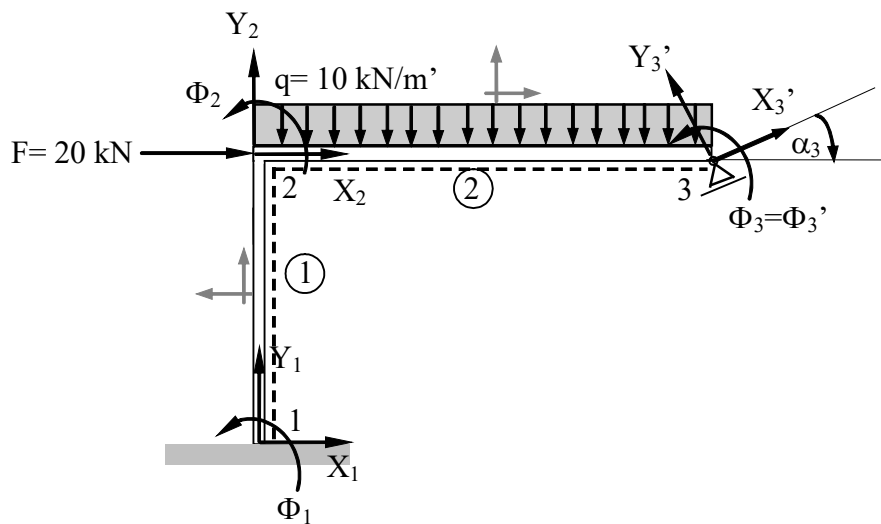
Prav tako moramo transformirati še obtežni vektor konstrukcije, ki pa je:

$$\{F'\} = [T] \cdot \{F\} = \begin{Bmatrix} 20000 \\ -20000 \\ -13333.333333333334 \\ -10000 \\ -17320.508075688773 \\ 13333.333333333334 \end{Bmatrix}$$

in transformirani sistem enačb dobi obliko:

$$[K'] \cdot \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \\ X_3' \\ Y_3' \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \{F'\} + \{Q'\}$$

$$\begin{bmatrix} 61.422222 & 0 & 2.133333 & -51.961524 & 30 & 0 \\ 0 & 80.6 & 1.2 & -0.3 & -0.519615 & 1.2 \\ 2.133333 & 1.2 & 7.466667 & -0.6 & -1.039231 & 1.6 \\ -51.961524 & -0.3 & -0.6 & 45.15 & -25.720955 & -0.6 \\ 30 & -0.519615 & -1.039231 & -25.720955 & 15.45 & -1.039231 \\ 0 & 1.2 & 1.6 & -0.6 & -1.039231 & 3.2 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \\ X_3' \\ Y_3' \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20000 \\ -20000 \\ -13333.333333333334 \\ -10000 \\ -17320.508075688773 \\ 13333.333333333334 \end{Bmatrix} + \{Q'\}$$



Slika 226: Izbrana diskretizacija in transformirane prostostne stopnje v točki C

Ker pa velja  $Y_3' = 0$ , preostale pomike ter zasuke izračunamo iz sistema enačb, ki sledi po črtanju pete vrstice in stolpca, ki pripadata znanemu prečnemu (ničelnemu) pomiku:

$$\begin{bmatrix} 61.42222 & 0 & 2.13333 & -51.962 & 30 & 0 \\ 0 & 80.6 & 1.2 & -0.3 & -0.5196 & 1.2 \\ 2.13333 & 1.2 & 7.4667 & -0.6 & -1.0392 & 1.6 \\ -51.962 & -0.3 & -0.6 & 45.15 & -25.721 & -0.6 \\ 30 & -0.5196 & -1.0392 & -25.721 & 15.45 & -1.0392 \\ 0 & 1.2 & 1.6 & -0.6 & -1.0392 & 3.2 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \\ X_3' \\ Y_3' \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20000 \\ -20000 \\ -13333.33 \\ -10000 \\ -17320.51 \\ 13333.33 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 61.422222 & 0 & 2.133333 & -51.961524 & 0 \\ 0 & 80.6 & 1.2 & -0.3 & 1.2 \\ 2.133333 & 1.2 & 7.466667 & -0.6 & 1.6 \\ -51.961524 & -0.3 & -0.6 & 45.15 & -0.6 \\ 0 & 1.2 & 1.6 & -0.6 & 3.2 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \\ X_3' \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20000 \\ -20000 \\ -13333.333333333334 \\ -10000 \\ 13333.333333333334 \end{Bmatrix}$$

Rešitve sistema so:

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \\ X_3' \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.6783613116760079 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -2.379455280101018 \cdot 10^{-5} \text{ m} \\ -7.487721159137676 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ 1.9147109793436463 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ 1.158983990550863 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Pomiki  $\{U_3\}$  vozlišča 3 v koordinatnem sistemu  $XY$  sledijo kot:

$$\begin{aligned} \{U_3\} = \begin{Bmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} &= [T_{v3}] \cdot \{U_3'\} = [T_{v3}] \cdot \begin{Bmatrix} X_3' \\ Y_3' \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = [T_{v3}] \cdot \begin{Bmatrix} 1.9147109793436463 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ 0 \text{ m} \\ 1.158983990550863 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 1.6581883490165794 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ 9.573554896718231 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ 1.158983990550863 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Prepričamo se lahko, da je rezultanta obeh komponent pomika enaka prej izračunanemu pomiku  $X_3'$ , torej da velja:

$$\begin{aligned} \sqrt{X_3^2 + Y_3^2} &= X_3' \\ \sqrt{(1.6581883490165794 \cdot 10^{-3})^2 + (9.573554896718231 \cdot 10^{-4})^2} &= 1.9147109793436463 \cdot 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

Prav tako se lahko (neobvezno) prepričamo, da izračunani rezultirajoči pomik resnično oklepa kot  $30^\circ$  z globalno osjo  $X$ :

$$\arctan\left(\frac{Y_3}{X_3}\right) = \arctan\left(\frac{9.573554896718231 \cdot 10^{-4}}{1.6581883490165794 \cdot 10^{-3}}\right) = 30^\circ$$

*Poprocesiranje: iskanje vozliščnih vrednosti sekundarnih spremenljivk in notranjih statičnih količin*

Vektor globalnih pomikov prvega končnega elementa je (v koordinatnem sistemu, v katerem je zapisana njegova globalna togostna matrika):

$$\{U_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ X_2 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.6783613116760079 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -2.379455280101018 \cdot 10^{-5} \text{ m} \\ -7.487721159137676 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Globalni vektor sekundarnih spremenljivk je tako:

$$\{Q_1\} = [K_1] \cdot \{U_1\} - \{F_1\}$$

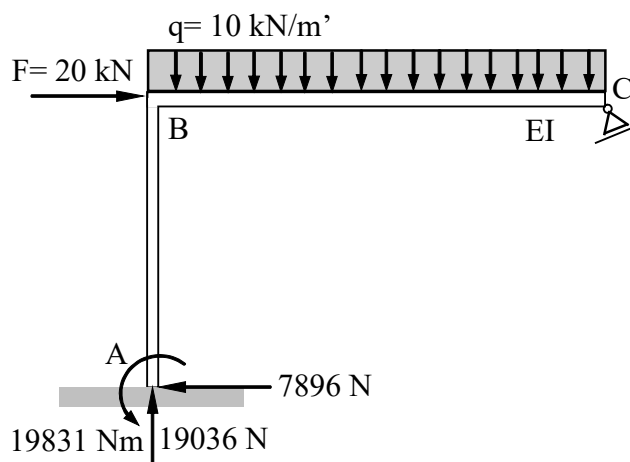
$$= \begin{Bmatrix} -7896.222404342847 \text{ N} \\ 19035.642240808145 \text{ N} \\ 19831.236176261133 \text{ Nm} \\ 7896.222404342847 \text{ N} \\ -19035.642240808145 \text{ N} \\ 3857.431036767419 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Tako sledijo reakcije v levi podpori, ki jih odčitamo iz prvih treh členov tega vektorja:

$$H_A = -7896.222404342847 \text{ N} \quad (\text{v levo})$$

$$V_A = 19035.642240808145 \text{ N} \quad (\text{navzgor})$$

$$M_A = 19831.236176261133 \text{ Nm} \quad (\text{protiurno})$$



Slika 227: Reakcije v vpetem delu stebra

Nato izračunamo lokalni vektor sekundarnih spremenljivk in iz njega pridobimo vozliščne vrednosti notranjih statičnih količin prvega končnega elementa:

$$\{q_1\} = [T_1]^T \cdot \{Q_1\} = \begin{Bmatrix} 19035.642240808145 \text{ N} \\ 7896.222404342847 \text{ N} \\ 19831.236176261133 \text{ Nm} \\ -19035.642240808145 \text{ N} \\ -7896.222404342847 \text{ N} \\ 3857.431036767419 \text{ Nm} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,1} \\ V_{y,1} \\ M_{z,1} \\ N_{x,2} \\ V_{y,2} \\ M_{z,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -19035.642240808145 \text{ N} \\ 7896.222404342847 \text{ N} \\ -19831.236176261133 \text{ Nm} \\ -19035.642240808145 \text{ N} \\ 7896.222404342847 \text{ N} \\ 3857.431036767419 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Analizo ponovimo še za drugi končni element, pri čemer je njegov vektor globalnih pomikov:

$$\{U_2\} = \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.6783613116760079 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -2.379455280101018 \cdot 10^{-5} \text{ m} \\ -7.487721159137676 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ 1.6581883490165794 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ 9.573554896718231 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ 1.158983990550863 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Globalni vektor sekundarnih spremenljivk je tako:

$$\{Q_2\} = [K_2] \cdot \{U_2\} - \{F_2\}$$

$$= \begin{Bmatrix} 12103.77759565704 \text{ N} \\ 19035.642240808145 \text{ N} \\ -3857.431036767428 \text{ Nm} \\ -12103.77759565704 \text{ N} \\ 20964.357759191855 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

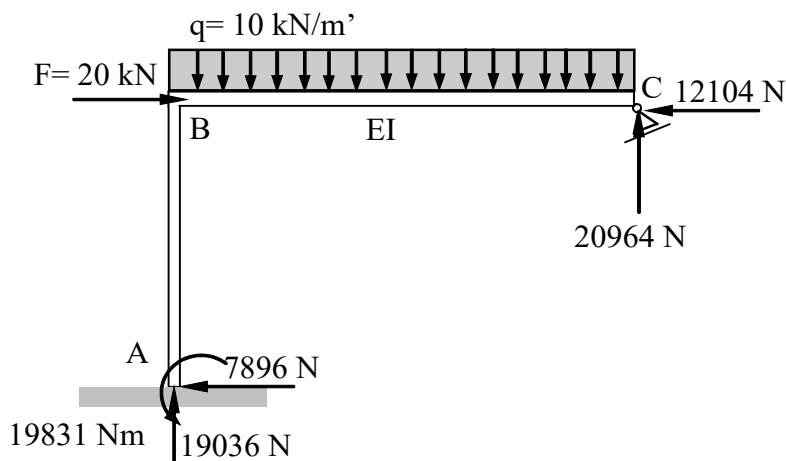
Tako sledijo reakcije v desni podpori (v skupnem globalnem koordinatnem sistemu), ki jih odčitamo iz zadnjih treh členov globalnega vektorja sekundarnih spremenljivk:

$$H_C = -12103.77759565704 \text{ N} \quad (\text{v levo})$$

$$V_C = 20964.357759191855 \text{ N} \quad (\text{navzgor})$$

$$M_C = 0 \text{ Nm}$$

pri čemer reakcijski sili predstavljata komponenti reakcijske sile v desni drsni podpori.

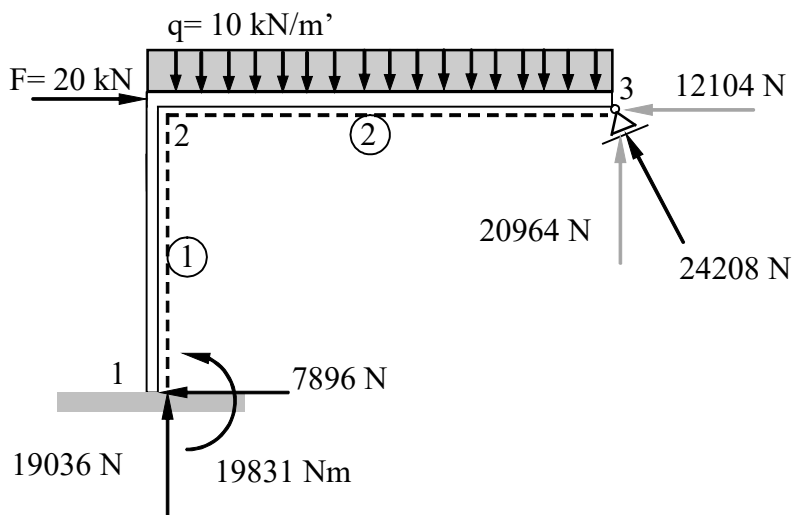


Slika 228: Komponente reakcij v podporah konstrukcije

Rezultirajoča sila v desni podpori je:

$$R_C = \sqrt{H_C^2 + V_C^2} = \sqrt{(-12103.77759565704 \text{ N})^2 + (20964.357759191855 \text{ N})^2}$$

$$= 24207.555191314077 \text{ N}$$



Slika 229: Reakcije v konstrukciji

Lokalni vektor sekundarnih spremenljivk je enak globalnemu in tako sledijo še vozliščne vrednosti notranjih statičnih količin drugega končnega elementa:

$$\{q_2\} = \{Q_2\} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,2} \\ V_{y,2} \\ M_{z,2} \\ N_{x,3} \\ V_{y,3} \\ M_{z,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -12103.77759565704 \text{ N} \\ 19035.642240808145 \text{ N} \\ 3857.431036767428 \text{ Nm} \\ -12103.77759565704 \text{ N} \\ -20964.357759191855 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

*Poprocesiranje: iskanje funkcije upogibnega momenta s superpozicijo*

*Steber*

Funkcija linearne razporeditve momenta za prvi element – steber – sledi iz robnih pogojev:

$$M_{1,o}(0) = -19831.236176261133 \text{ Nm} \quad \text{in} \quad M_{1,o}(3 \text{ m}) = 3857.431036767419 \text{ Nm}$$

kar ob uporabi H0 interpolacijskih funkcij vodi do:

$$\begin{aligned} M_{1,o}(x) &= -19831.236176261133 \text{ Nm} \cdot \left(1 - \frac{x}{3}\right) + 3857.431036767419 \text{ Nm} \cdot \frac{x}{3} \\ &= -19831.236176261133 + 7896.2224043428505 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 3 \text{ m} \end{aligned}$$

ki je tudi kar končna in tudi točna funkcija upogibnega momenta, saj steber ni obremenjen z enakomerno zvezno obtežbo.

Funkcija prečne sile je tako:

$$V_{y,1N}(x) = \frac{dM_{z,1N}(x)}{dx} = 7896.2224043428505 \quad 0 \leq x \leq 3 \text{ m}$$

Ker gre za linearno razporeditev upogibnega momenta, ekstremni vrednosti upogibnega momenta nastopita v krajnih točkah stebra oz. vozliščih končnega elementa.

*Greda*

Funkcija linearne razporeditve momenta za drugi element – gredo – sledi iz robnih pogojev:

$$M_o(0) = 3857.431036767428 \text{ Nm in } M_o(4 \text{ m}) = 0 \text{ Nm}$$

kar ob uporabi H0 interpolacijskih funkcij vodi do:

$$\begin{aligned} M_o(x) &= 3857.431036767428 \text{ Nm} \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right) + 0 \text{ Nm} \cdot \frac{x}{4} \\ &= 3857.431036767428 - 964.3577591918547 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

Za prostoležeči nosilec dolžine 4 m, obremenjen z enakomerno zvezno obtežbo 10000 N/m, ki deluje navzdol, pa sledi funkcija upogibnega momenta:

$$M_q(x) = -5000 \cdot x^2 + 20000 \cdot x \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Seštevek obeh funkcij je točna funkcija upogibnega momenta:

$$M_{z,2,N}(x) = -5000 \cdot x^2 + 19035.642240808145 \cdot x + 3857.431036767428 \quad 0 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

Enak rezultat sledi tudi neposredno z uporabo interpolacijskih funkcij H1 in dodatnim upoštevanjem dveh vozliščnih vrednosti prečne sile.

Funkcija prečne sile je tako:

$$V_{y,2N}(x) = \frac{dM_{z,2N}(x)}{dx} = -10000 \cdot x + 19035.642240808145 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}$$

in je točna funkcija.

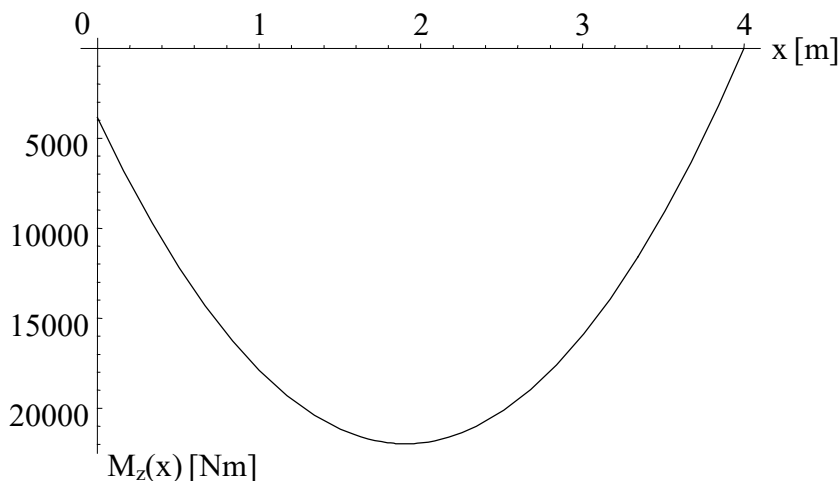
Mesto maksimalnega pozitivnega upogibnega momenta nastopi, ko velja:

$$V_{y,2N}(x) = 0 \rightarrow -10000 \cdot x + 19035.642240808145 = 0 \rightarrow x = 1.9035642240808146 \text{ m}$$

od začetnega vozlišča drugega končnega elementa.

Maksimalni pozitivni upogibni moment na gredi je tako:

$$\begin{aligned} M_{z,2,\max}(1.9036) &= -5000 \cdot 1.9036^2 + 19035.642240808145 \cdot 1.9036 + 3857.431036767428 \\ &= 21975.214812769394 \text{ Nm} \end{aligned}$$



Slika 230: Graf funkcije upogibnega momenta na gredi

Iz diagrama upogibnega momenta na gredi vidimo, da na gredi negativni moment ne nastopi. Maksimalni negativni moment na konstrukciji torej nastopi kar v vpetem koncu stebra in znaša -19831.236 Nm.

Poprocesiranje: iskanje funkcije prečnega pomika grede  $z$  interpolacijskimi funkcijami H1

Približna funkcija prečnega pomika za drugi končni element oz. gredo je:

$$\begin{aligned} v_{2N,H1}(x) &= Y_2 \cdot N_{2,1}(x) + \Phi_2 \cdot N_{2,2}(x) + Y_3 \cdot N_{2,3}(x) + \Phi_3 \cdot N_{2,4}(x) \\ &= -2.379455280101018 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot x^2}{16} + \frac{2 \cdot x^3}{32}\right) - 7.487721159137676 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \cdot \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{16}\right) \\ &\quad + 9.573554896718231 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \left(\frac{3 \cdot x^2}{16} - \frac{2 \cdot x^3}{32}\right) + 1.158983990550863 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot \left(-\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{16}\right) \\ &= -2.3794552801010184 \cdot 10^{-5} - 7.487721159137677 \cdot 10^{-4} \cdot x \\ &\quad + 2.6860569328282426 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 - 5.022696662457561 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

in predstavlja zgolj približek prave funkcije prečnega pomika, ki je polinom 4. stopnje.

Ekstrema te funkcije nastopita pri:

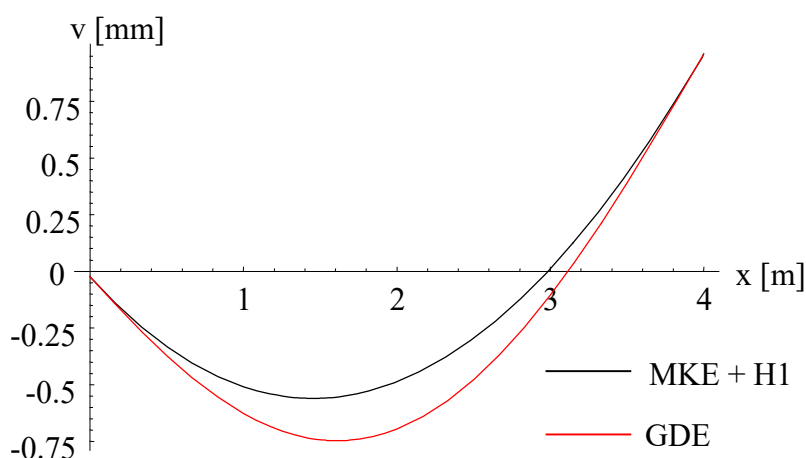
$$x = 1.4530321396184978 \text{ m} < 4 \text{ m}$$

$$x = 34.199222858582395 \text{ m} > 4 \text{ m}$$

in približek maksimalnega prečnega pomika znaša:

$$v_{2N,H1}(1.4530321396184978 \text{ m}) = -5.600852377329857 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Iz grafa funkcije pomika vidimo, da tako dobljena funkcija prečnega pomika *ni* najboljša:



Slika 231: Primerjava upogibnic iz različnih pristopov in računskih modelov

Napaka pri maksimalnem pomiku znaša kar  $-25.00374877009181$  % in tudi podcenjuje točno vrednost. Taka napaka je problematična pri analizi mejnega stanja uporabnosti. Kvalitetnejše rešitve lahko dobimo bodisi z uporabo dveh končnih elementov na gredi (kar vodi do kvalitetnejšega približka), ali pa izračun funkcije prečnega pomika grede uporabimo kvalitetnejše interpolacijske funkcije, npr. H2, ki upoštevajo še vrednosti upogibnega momenta v vozliščih tega končnega elementa (kar pa vodi do točne funkcije prečnega pomika). Tako sledi nova funkcija:

$$\begin{aligned}
 v_{2N,H2}(x) &= Y_2 \cdot N_{2,1}(x) + \Phi_2 \cdot N_{2,2}(x) + M_{z,2} \cdot N_{2,3}(x) + Y_3 \cdot N_{2,4}(x) + \Phi_3 \cdot N_{2,5}(x) + M_{z,3} \cdot N_{2,6}(x) \\
 &= -2.379455280101018 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \left( 1 - \frac{5 \cdot x^3}{32} + \frac{15 \cdot x^4}{256} - \frac{3 \cdot x^5}{512} \right) \\
 &\quad - 7.487721159137676 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \cdot \left( x - \frac{3 \cdot x^3}{8} + \frac{x^4}{8} - \frac{3 \cdot x^5}{256} \right) \\
 &\quad + 3857.431036767428 \text{ Nm} \cdot \left( \frac{x^2}{2 \cdot EI_z} - \frac{3 \cdot x^3}{8 \cdot EI_z} + \frac{3 \cdot x^4}{32 \cdot EI_z} - \frac{x^5}{128 \cdot EI_z} \right) \\
 &\quad + 9.573554896718231 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \left( \frac{5 \cdot x^3}{32} - \frac{15 \cdot x^4}{256} + \frac{3 \cdot x^5}{512} \right) \\
 &\quad + 1.158983990550863 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot \left( -\frac{x^3}{4} + \frac{7 \cdot x^4}{64} - \frac{3 \cdot x^5}{256} \right) \\
 &\quad + 0 \text{ Nm} \cdot \left( \frac{x^3}{8 \cdot EI_z} - \frac{x^4}{16 \cdot EI_z} + \frac{x^5}{128 \cdot EI_z} \right) \\
 &= -2.3794552801010184 \cdot 10^{-5} - 7.487721159137677 \cdot 10^{-4} \cdot x + 6.0272359949491 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 \\
 &\quad + 9.914397000420903 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 - 1.3020833333333255 \cdot 10^{-5} \cdot x^4 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m}
 \end{aligned}$$

ki je točna funkcija prečnega pomika (pri izračunu se sicer pojavi zelo majhen koeficient pri členu  $x^5$ , ki pa je posledica zaokroževanja in ga zanemarimo).

## 2. pristop – lokalna transformacija enačb 2. končnega elementa

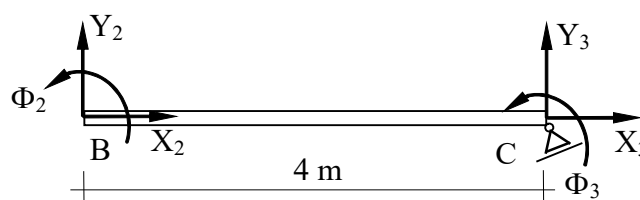
V tem pristopu ohranimo osnovno diskretizacijo iz prejšnjega pristopa, vendar bistvene globalne enačbe konstrukcije tvorimo drugače.

### Prvi končni element (steber)

Lokalna in globalna togostna matrika ter obtežni vektor so enaki kot v prvem pristopu.

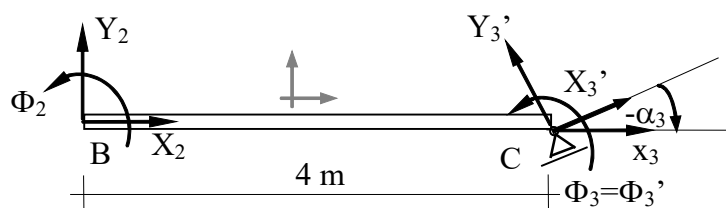
Drugi končni element (greda)

Za drugi element veljata enaka lokalna togostna matrika in obtežni vektor kot v prvem pristopu, vendar bomo sedaj matrične enačbe elementa pretvorili iz zapisa s “standardnimi” globalnimi prostostnimi stopnjami:



Slika 232: Končni element s standardnimi prostostnimi stopnjami

v zapis z modificiranimi globalnimi prostostnimi stopnjami:



Slika 233: Končni element z modificiranimi prostostnimi stopnjami v končnem vozlišču

kar bo omogočilo enostavno vpeljavo informacije o preprečenem prečnem pomiku poševne podpore v točki C še pred sestavo bistvenih enačb konstrukcije.

Rotacijska matrika drugega elementa ima obliko (kjer se indeks kota nanaša na številko vozlišča in ne na številko elementa, kot  $\alpha_3$  pa znaša  $330^\circ$  oz.  $-30^\circ$ ):

$$[T_2] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_3 & -\sin \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

oziroma

$$\begin{aligned}
 [T_2] &= \begin{bmatrix} \cos 0^\circ & -\sin 0^\circ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin 0^\circ & \cos 0^\circ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos 330^\circ & -\sin 330^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin 330^\circ & \cos 330^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 [T_2] &= \begin{bmatrix} \cos 0^\circ & -\sin 0^\circ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin 0^\circ & \cos 0^\circ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(-30^\circ) & -\sin(-30^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(-30^\circ) & \cos(-30^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8660254037844387 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0.8660254037844387 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Globalna togostna matrika elementa, zapisana z izbranimi globalnimi prostostnimi stopnjami  $X_2, Y_2, \Phi_2, X_3', Y_3'$  in  $\Phi_3$ , je tako:

$$[K_2] = [T_2] \cdot [k_2] \cdot [T_2]^T = 10^7 \cdot$$

$$\begin{bmatrix}
 60 & 0 & 0 & -51.961524 & 30 & 0 \\
 0 & 0.6 & 1.2 & -0.3 & -0.51961524 & 1.2 \\
 0 & 1.2 & 3.2 & -0.6 & -1.03923049 & 1.6 \\
 -51.961524 & -0.3 & -0.6 & 45.15 & -25.7209545 & -0.6 \\
 30 & -0.51961524 & -1.03923049 & -25.7209545 & 15.45 & -1.03923049 \\
 0 & 1.2 & 1.6 & -0.6 & -1.03923049 & 3.2
 \end{bmatrix}$$

Globalni obtežni vektor elementa, zapisan z izbranimi globalnimi prostostnimi stopnjami, je tako:

$$\{F_2\} = [T_2] \cdot \{f_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -20000 \\ -13333.333333333334 \\ -10000 \\ -17320.508075688773 \\ 13333.333333333334 \end{Bmatrix}$$

Togostna matrika bistvenih enačb konstrukcije je tako reda 5\*5:

$$[K] = \begin{bmatrix} 61.42222222222222 & 0 & 2.133333333333333 & -51.96152422706632 & 0 \\ 0 & 80.6 & 1.2 & -0.3 & 1.2 \\ 2.133333333333333 & 1.2 & 7.4666667 & -0.6 & 1.6 \\ -51.96152422706632 & -0.3 & -0.6 & 45.15 & -0.6 \\ 0 & 1.2 & 1.6 & -0.6 & 3.2 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

pripadajoči obtežni vektor po upoštevanju vozliščne obtežne sile, ki deluje v vozlišču 2, pa je:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 0 + 20000 \\ -20000 \\ -13333.333333333334 \\ -10000 \\ 13333.333333333334 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20000 \\ -20000 \\ -13333.333333333334 \\ -10000 \\ 13333.333333333334 \end{Bmatrix}$$

Neznane vozliščne pomike ter zasuke izračunamo iz sistema enačb:

$$\begin{bmatrix} 61.422222222 & 0 & 2.133333333 & -51.96152423 & 0 \\ 0 & 80.6 & 1.2 & -0.3 & 1.2 \\ 2.133333333 & 1.2 & 7.4666667 & -0.6 & 1.6 \\ -51.96152423 & -0.3 & -0.6 & 45.15 & -0.6 \\ 0 & 1.2 & 1.6 & -0.6 & 3.2 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \\ X_3' \\ \Phi_3' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20000 \\ -20000 \\ -13333.3333333 \\ -10000 \\ 13333.3333333 \end{Bmatrix}$$

Rešitve sistema so:

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \\ X_3' \\ \Phi_3' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.6783613116760083 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -2.3794552801010184 \cdot 10^{-5} \text{ m} \\ -7.487721159137677 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ 1.9147109793436463 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ 1.1589839905508633 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

in so seveda enake kot v prejšnjem pristopu.

*Poprocesiranje: iskanje sekundarnih spremenljivk in vozliščnih vrednosti notranjih statičnih količin*

Iskanje sekundarnih spremenljivk in vozliščnih vrednosti notranjih statičnih količin za prvi končni element je enako kot v 1. pristopu.

Vektor globalnih pomikov drugega končnega elementa pa je:

$$\{U_2\} = \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \\ X_3' \\ Y_3' \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.6783613116760083 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -2.3794552801010184 \cdot 10^{-5} \text{ m} \\ -7.487721159137677 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ 1.9147109793436463 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ 0 \text{ m} \\ 1.1589839905508633 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Lokalni vektor pomikov je:

$$\{u_2\} = [T_2]^T \cdot \{U_2\} = \begin{Bmatrix} 1.6783613116760083 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -2.3794552801010184 \cdot 10^{-5} \text{ m} \\ -7.487721159137677 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ 1.6581883490165794 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ 9.573554896718231 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ 1.1589839905508633 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

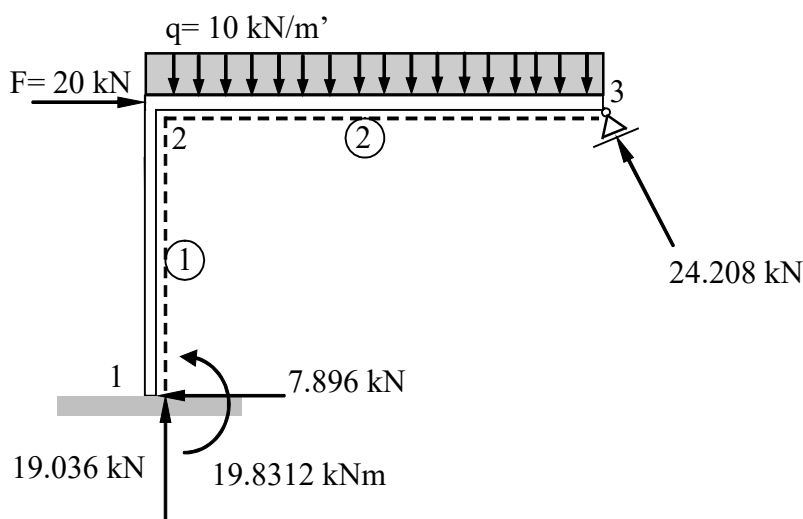
Globalni vektor sekundarnih spremenljivk je:

$$\{Q_2\} = [K_2] \cdot \{U_2\} - \{F_2\} = \begin{Bmatrix} 12103.77759565739 \text{ N} \\ 19035.64224080815 \text{ N} \\ -3857.4310367674243 \text{ Nm} \\ 0 \text{ N} \\ \boxed{24207.555191314157 \text{ N}} \\ 0 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Tako sledi reakcija v desni podpori:

$$R_C = 24207.555191314157 \text{ N} \quad (\text{v smeri osi } Y_3')$$

$$M_C = 0 \text{ Nm}$$



Slika 234: Reakcije v konstrukciji

Lokalni vektor sekundarnih spremenljivk ni enak globalnemu in tako sledijo najprej lokalne vrednosti in nato še vrednosti notranjih statičnih količin:

$$\{q_2\} = [T_2]^T \cdot \{Q_2\} = \begin{Bmatrix} 12103.77759565739 \text{ N} \\ 19035.64224080815 \text{ N} \\ -3857.4310367674243 \text{ Nm} \\ -12103.777595657217 \text{ N} \\ 20964.357759191847 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N_{x,2} \\ V_{y,2} \\ M_{z,2} \\ N_{x,3} \\ V_{y,3} \\ M_{z,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -12103.77759565739 \text{ N} \\ 19035.64224080815 \text{ N} \\ 3857.4310367674243 \text{ Nm} \\ -12103.777595657217 \text{ N} \\ -20964.357759191847 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Vrednosti osne in prečne sile v točki C lahko uporabimo za izračun navpične in vodoravne komponente reakcije, ali pa komponenti reakcije (še enostavneje) kar *odčitamo* v lokalnem vektorju sekundarnih spremenljivk.

*Poprocesiranje: iskanje funkcije upogibnega momenta s superpozicijo*

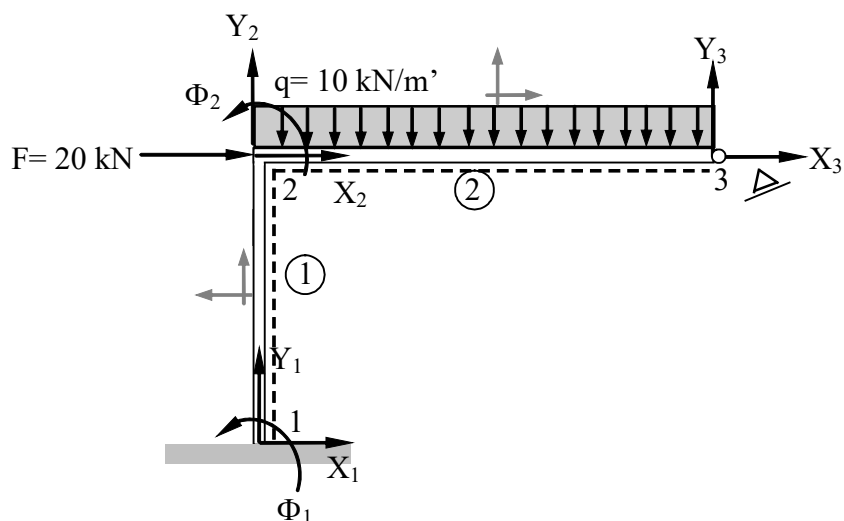
Iskanje funkcij notranjih statičnih količin je enako kot v 1. pristopu.

*Poprocesiranje rezultatov – iskanje funkcije prečnega pomika grede*

Funkcija prečnega pomika je enaka kot v prejšnjem pristopu.

## II. računski model

Tudi v tem pristopu bomo izvedli lokalno transformacijo enačb 2. končnega elementa, kjer pa bomo sedaj za modeliranje grede uporabili končni element V-Č s členkom na desnem koncu, s čimer bomo zmanjšali število bistvenih enačb konstrukcije.



Slika 235: Izbrana diskretizacija in začetne prostostne stopnje

Prostostne stopnje bodo trije pomiki ( $X_2$  in  $Y_2$  ter  $X_3$ ) ter en zasuk ( $\Phi_2$ ).

*Prvi končni element (steber)*

Lokalna in globalna togostna matrika ter obtežni vektor so enaki kot v prvih dveh pristopih.

Drugi končni element (greda)

Za drugi element velja  $L = 4.0$  m in lokalna togostna matrika drugega elementa je sedaj tipa V-Č:

$$[k_2] = \begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 & -60 & 0 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0.6 & 0 & -0.15 & 0 \\ 0 & 0.6 & 2.4 & 0 & -0.6 & 0 \\ -60 & 0 & 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & -0.15 & -0.6 & 0 & 0.15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Za pretvorbo matrične enačbe elementa bomo uporabili že iz 2. pristopa I. modela znano rotacijsko matriko drugega elementa:

$$[T_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8660254037844387 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0.8660254037844387 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Togostna matrika elementa, zapisana z izbranimi globalnimi prostostnimi stopnjami, je tako:

$$[K_2] = [T_2] \cdot [k_2] \cdot [T_2]^T =$$

$$\begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 & -51.9615242 & 30 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0.6 & -0.075 & -0.129903811 & 0 \\ 0 & 0.6 & 2.4 & -0.3 & -0.519615242 & 0 \\ -51.9615242 & -0.075 & -0.3 & 45.0375 & -25.91581021 & 0 \\ 30 & -0.129903811 & -0.519615242 & -25.91581021 & 15.1125 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Lokalni obtežni vektor zaradi enakomerne zvezne obtežbe je:

$$\{f_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -25000 \\ -20000 \\ 0 \\ -15000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Globalni obtežni vektor elementa, zapisan z izbranimi globalnimi prostostnimi stopnjami, je tako:

$$\{F_2\} = [T_2] \cdot \{f_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -25000 \\ -20000 \\ -7500 \\ -12990.38105676658 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Togostna matrika bistvenih enačb konstrukcije je tako sedaj reda 4\*4:

$$[K] = \begin{bmatrix} 61.42222222222224 & 0 & 2.133333333333337 & -51.96152422706632 \\ 0 & 80.15 & 0.6 & -0.075 \\ 2.133333333333337 & 0.6 & 6.666666666666669 & -0.3 \\ -51.96152422706632 & -0.075 & -0.3 & 45.0375 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

pripadajoči obtežni vektor konstrukcije po upoštevanju vozliščne obtežne sile v vozlišču 2 pa je:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 0 + 20000 \\ -25000 \\ -20000 \\ -7500 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20000 \\ -25000 \\ -20000 \\ -7500 \end{Bmatrix}$$

Rešitve sistema, ki je manjši kot v prejšnjih diskretizacijah, so:

$$\begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \\ X_3' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.678361311676008 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -2.3794552801010174 \cdot 10^{-5} \text{ m} \\ -7.487721159137676 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ 1.9147109793436461 \cdot 10^{-3} \text{ m} \end{Bmatrix}$$

že znane iz I. modela.

*Poprocesiranje: iskanje vozliščnih vrednosti sekundarnih spremenljivk in notranjih statičnih količin*

Izračun za prvi končni element je enak kot v prejšnjem modelu.

Vektor globalnih pomikov drugega končnega elementa je:

$$\{U_2\} = \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \\ X_3' \\ Y_3' \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.678361311676008 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -2.3794552801010174 \cdot 10^{-5} \text{ m} \\ -7.487721159137676 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ 1.9147109793436461 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ 0 \text{ m} \\ \Phi_3 \end{Bmatrix}$$

Lokalni vektor pomikov je:

$$\{u_2\} = [T_2]^T \cdot \{U_2\} = \begin{Bmatrix} 1.678361311676008 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -2.3794552801010174 \cdot 10^{-5} \text{ m} \\ -7.487721159137676 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ 1.6581883490165792 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ 9.57355489671823 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ \Phi_3 \end{Bmatrix}$$

Globalni vektor sekundarnih spremenljivk pa je:

$$\{Q_2\} = [K_2] \cdot \{U_2\} - \{F_2\} = \begin{Bmatrix} 12103.77759565739 \text{ N} \\ 19035.64224080814 \text{ N} \\ -3857.4310367674298 \text{ Nm} \\ 0 \text{ N} \\ \boxed{24207.555191314284 \text{ N}} \\ 0 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Tako sledi reakcija v desni podpori:

$$R_C = 24207.555191314284 \text{ N} \quad (\text{v smeri osi } Y_3')$$

$$M_C = 0 \text{ Nm}$$

*Poprocesiranje: iskanje funkcije upogibnega momenta s superpozicijo*

Funkciji upogibnega momenta in prečne sile za steber in gredo so enake kot v prejšnjem pristopu.

*Poprocesiranje: iskanje funkcije prečnega pomika grede*

Približna funkcija prečnega pomika za drugi končni element je (sedaj so uporabljene ustrezne interpolacijske funkcije za končni element V-Č, torej drugačne kot v prejšnjem modelu):

$$\begin{aligned} v_{2N}(x) &= Y_2 \cdot N_{2,1}(x) + \Phi_2 \cdot N_{2,2}(x) + Y_3 \cdot N_{2,3}(x) + \Phi_3 \cdot N_{2,4}(x) \\ &= -2.379455280101018 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot x^2}{32} + \frac{x^3}{128}\right) - 7.487721159137676 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \cdot \left(x - \frac{3 \cdot x^2}{8} + \frac{x^3}{32}\right) \\ &\quad + 9.573554896718231 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \left(\frac{3 \cdot x^2}{32} - \frac{x^3}{128}\right) + \Phi_3 \cdot 0 \\ &= -2.3794552801010174 \cdot 10^{-5} - 7.487721159137676 \cdot 10^{-4} \cdot x \\ &\quad + 3.7277235994949095 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 - 3.1064363329124246 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m} \end{aligned}$$

in predstavlja zgolj *približek* prave funkcije prečnega pomika.

Ekstrema te funkcije nastopita pri:

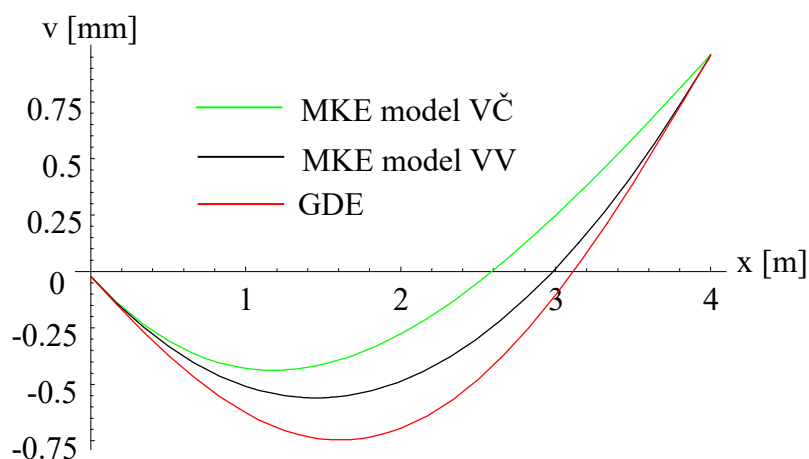
$$x = 1.1777015183062733 \text{ m} < 4 \text{ m}$$

$$x = 6.822298481693727 \text{ m} > 4 \text{ m}$$

in približek maksimalnega prečnega pomika znaša:

$$v_{2N}(1.1777015183062733 \text{ m}) = -4.3933854775038867 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Iz grafa funkcije pomika vidimo, da je tako dobljena funkcija prečnega pomika *še slabši* približek kot v prejšnjih dveh pristopih:



Slika 236: Primerjava upogibnic iz različnih pristopov in računskih modelov

Napaka pri maksimalnem pomiku sedaj znaša kar -41.171911197953904 %.

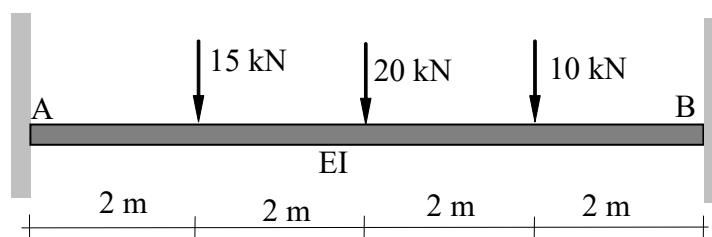
Opomba: čeprav je stopnja polinoma enaka v približnih rešitvah obeh modelov, je rešitev iz prvega modela kvalitetnejša, saj je bila v končnem vozlišču upoštevana kvalitetnejša informacija o zasuku (oz. prvem odvodu iskane funkcije), sedaj informacija o momentu (oz. drugem odvodu iskane funkcije). Z zgoščevanjem diskretizacije elementov na gredi pa bi se razlike med upogibnicama različnih modeliranj členka v desni podpori zmanjševale!



# Alternativni pristopi analiz

## Primer 17 – Analiza obojestransko polnovpetega nosilca s statično in Guyanovo kondenzacijo

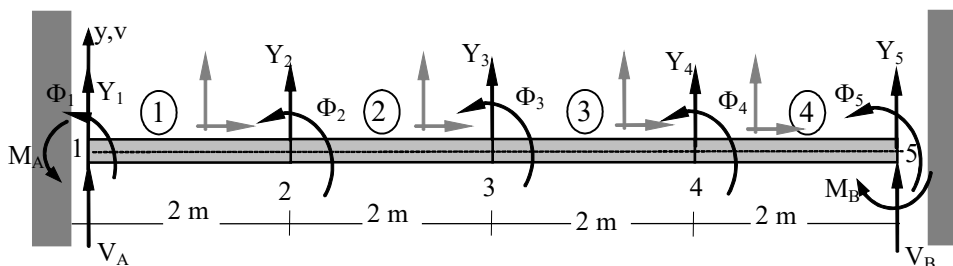
Izračunaj pomike pod silami, reakcije v podporah in razporeditve notranjih statičnih količin za obojestransko polnovpeti betonski nosilec ( $E = 30$  GPa) pravokotnega prereza ( $b/h = 0.3\text{m}/0.4$  m) na sliki:



Slika 237: Obravnavani nosilec

### Rešitev

Najmanjše smiselno število končnih elementov za diskretizacijo je štiri, kar je hkrati tudi popolnoma zadostno število.



Slika 238: Označbe vozlišč in elementov ter prostostnih stopenj

Ker osni pomiki ne nastopajo, so prostostne stopnje  $Y_1$ ,  $\Phi_1$ ,  $Y_2$ ,  $\Phi_2$ ,  $Y_3$ ,  $\Phi_3$ ,  $Y_4$ ,  $\Phi_4$ ,  $Y_5$  in  $\Phi_5$ , ki predstavljajo vozliščne vertikalne pomike in zasuke, od katerih je neznanih šest vrednosti ( $Y_2$ ,  $\Phi_2$ ,  $Y_3$ ,  $\Phi_3$ ,  $Y_4$  in  $\Phi_4$ ).

Vsi elementi imajo enako upogibno togost:

$$EI = 30 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{0.30 \text{ m} \cdot (0.40 \text{ m})^3}{12} = 4.8 \cdot 10^7 \text{ Nm}^2$$

Ker so vsi končni elementi tudi enakih dolžin, so togostne matrike vseh končnih elementov enake (vsi obtežni vektorji pa so enaki nič):

$$[\mathbf{K}_1] = [\mathbf{K}_2] = [\mathbf{K}_3] = [\mathbf{K}_4] = \begin{bmatrix} 7.2 & 7.2 & -7.2 & 7.2 \\ 7.2 & 9.6 & -7.2 & 7.2 \\ -7.2 & -7.2 & 7.2 & -7.2 \\ 7.2 & 7.2 & -7.2 & 9.6 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Zaradi kolinearnosti vseh končnih elementov so lokalne togostne matrike kar enake globalnim in posebna pretvorba ni potrebna.

»Klasično« tvorjena globalna togostna matrika oz. togostna matrika konstrukcije bistvenih prostostnih stopenj je tako:

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} 14.4 & 0 & -7.2 & 7.2 & 0 & 0 \\ 0 & 19.2 & -7.2 & 4.8 & 0 & 0 \\ -7.2 & -7.2 & 14.4 & 0 & -7.2 & 7.2 \\ 7.2 & 4.8 & 0 & 19.2 & -7.2 & 4.8 \\ 0 & 0 & -7.2 & -7.2 & 14.4 & 0 \\ 0 & 0 & 7.2 & 4.8 & 0 & 19.2 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

medtem ko sta vektor neznank in obtežni vektor konstrukcije naslednja:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \\ Y_4 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} -15000 \\ 0 \\ -20000 \\ 0 \\ -10000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Čeprav je rešitve sistema  $\{F\} = [K] \cdot \{U\}$  mogoče poiskati neposredno, jih bomo poiskali s pomočjo kondenzacije. Ker imamo obtežbe samo v prostostnih stopnjah, ki pripadajo pomikom, bomo le te smatrali kot bistvene prostostne stopnje, zasuke pa kot nebistvene prostostne stopnje.

Zato najprej z zamenjavami vrstic preuredimo zapis togostne matrike konstrukcije tako, da v prvih treh vrsticah zapišemo člene, ki pripadajo prečnim pomikom oz. bistvenim prostostnim stopnjam, preostale vrstice pa zasukom oz. nebistvenim prostostnim stopnjam (opomba: če bi bistvene, kot tudi nebistvene prostostne stopnje že pri tvorbi togostne matrike konstrukcije zapisali v »neurejenem«, a prav tako korektnem, vrstnem redu  $Y_2, Y_4$  in  $Y_3$  ter  $\Phi_2, \Phi_3$  in  $\Phi_4$ , bi zamenjave vrstic in stolpcev sedaj odpadle), kar vodi do štirih podmatrik:

$$\begin{bmatrix} 14.4 & 0 & -7.2 & 7.2 & 0 & 0 \\ 0 & 19.2 & -7.2 & 4.8 & 0 & 0 \\ -7.2 & -7.2 & 14.4 & 0 & -7.2 & 7.2 \\ 7.2 & 4.8 & 0 & 19.2 & -7.2 & 4.8 \\ 0 & 0 & -7.2 & -7.2 & 14.4 & 0 \\ 0 & 0 & 7.2 & 4.8 & 0 & 19.2 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \rightarrow \begin{bmatrix} 14.4 & 0 & -7.2 & 7.2 & 0 & 0 \\ -7.2 & -7.2 & 14.4 & 0 & -7.2 & 7.2 \\ 0 & 0 & -7.2 & -7.2 & 14.4 & 0 \\ 0 & 19.2 & -7.2 & 4.8 & 0 & 0 \\ 7.2 & 4.8 & 0 & 19.2 & -7.2 & 4.8 \\ 0 & 0 & 7.2 & 4.8 & 0 & 19.2 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Nato v istem vrstnem redu prostostnih stopenj (da ohranimo simetrijo matrike) uredimo še stolpce:

$$\begin{bmatrix} 14.4 & -7.2 & 0 & 0 & 7.2 & 0 \\ -7.2 & 14.4 & -7.2 & -7.2 & 0 & 7.2 \\ 0 & -7.2 & 14.4 & 0 & -7.2 & 0 \\ 0 & -7.2 & 0 & 19.2 & 4.8 & 0 \\ 7.2 & 0 & -7.2 & 4.8 & 19.2 & 4.8 \\ 0 & 7.2 & 0 & 0 & 4.8 & 19.2 \end{bmatrix} \cdot 10^7 = \begin{bmatrix} [K_{bb}] & [K_{bn}] \\ [K_{nb}] & [K_{nn}] \end{bmatrix}$$

pri čemer mora biti dobljena togostna matrika, kot tudi podmatriki  $[K_{bb}]$  in  $[K_{mn}]$ , simetrična.

Tako urejeni togostni matriki pripadata enako urejena vektor neznank in obtežni vektor:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{U_b\} \\ \{U_n\} \end{Bmatrix} \rightarrow \{U_b\} = \begin{Bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{Bmatrix} \quad \{U_n\} = \begin{Bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix}$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} -15000 \\ -20000 \\ -10000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_b\} \\ \{F_n\} \end{Bmatrix} \rightarrow \{F_b\} = \begin{Bmatrix} -15000 \\ -20000 \\ -10000 \end{Bmatrix} \quad \{F_n\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Tako sledijo podmatrike (ki so v obravnavanem primeru slučajno vse enakega reda  $[3 \times 3]$ ):

$$[K_{bb}] = \begin{bmatrix} 14.4 & -7.2 & 0 \\ -7.2 & 14.4 & -7.2 \\ 0 & -7.2 & 14.4 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$[K_{bn}] = \begin{bmatrix} 0 & 7.2 & 0 \\ -7.2 & 0 & 7.2 \\ 0 & -7.2 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \quad [K_{nb}] = \begin{bmatrix} 0 & -7.2 & 0 \\ 7.2 & 0 & -7.2 \\ 0 & 7.2 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7 = [K_{bn}]^T$$

$$[K_{mn}] = \begin{bmatrix} 19.20 & 4.8 & 0 \\ 4.8 & 19.2 & 4.8 \\ 0 & 4.8 & 19.2 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

### 1. pristop – iskanje kondenzirane togostne matrike in obtežnega vektorja s statično kondenzacijo

Gre za »klasični« pristop, ki pa ni uporaben za kondenziranje masne matrike pri problemih dinamike konstrukcij.

Kondenzirana togostna matrika konstrukcije, ki mora biti simetrična, je tako:

$$\begin{aligned}
 [K_c] &= [K_{bb}] - [K_{bn}] \cdot [K_{nn}]^{-1} \cdot [K_{nb}] \\
 &= \begin{bmatrix} 14.4 & -7.2 & 0 \\ -7.2 & 14.4 & -7.2 \\ 0 & -7.2 & 14.4 \end{bmatrix} \cdot 10^7 - \begin{bmatrix} 0 & 7.2 & 0 \\ -7.2 & 0 & 7.2 \\ 0 & -7.2 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 19.20 & 4.8 & 0 \\ 4.8 & 19.2 & 4.8 \\ 0 & 4.8 & 19.2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -7.2 & 0 \\ 7.2 & 0 & -7.2 \\ 0 & 7.2 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \\
 &= \begin{bmatrix} 11.31428571428572 & -7.2 & 3.085714285714287 \\ -7.2 & 9 & -7.2 \\ 3.085714285714287 & -7.2 & 11.31428571428572 \end{bmatrix} \cdot 10^7
 \end{aligned}$$

Do enakega rezultata lahko pridemo tudi po drugačni (in nekoliko daljši) poti. Če izračunamo podajnostno matriko konstrukcije, sledi:

$$\begin{aligned}
 [d] = [K]^{-1} &= \begin{bmatrix} 14.4 & 0 & -7.2 & 7.2 & 0 & 0 \\ -7.2 & -7.2 & 14.4 & 0 & -7.2 & 7.2 \\ 0 & 0 & -7.2 & -7.2 & 14.4 & 0 \\ 0 & 19.2 & -7.2 & 4.8 & 0 & 0 \\ 7.2 & 4.8 & 0 & 19.2 & -7.2 & 4.8 \\ 0 & 0 & 7.2 & 4.8 & 0 & 19.2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot 10^{-7} = \\
 &= \begin{bmatrix} 2.34375 & 1.171875 & 2.77777\bar{7} & -0.520833\bar{3} & 1.1284722\bar{2} & -0.9114583\bar{3} \\ -1.171875 & -1.3671875 & -2.08333\bar{3} & -0.2604166\bar{6} & 0.91145833\bar{3} & -0.71614583\bar{3} \\ 2.77777\bar{7} & 2.08333\bar{3} & 5.55555\bar{5} & 0 & 2.777777\bar{7} & -2.083333\bar{3} \\ -0.520833\bar{3} & -0.2604166\bar{6} & 0 & 1.04166666\bar{6} & 0.5208333\bar{3} & -0.2604166\bar{6} \\ 1.1284722\bar{2} & 0.91145833\bar{3} & 2.777777\bar{7} & 0.5208333\bar{3} & 2.34375 & -1.171875 \\ -0.9114583\bar{3} & -0.71614583\bar{3} & -2.083333\bar{3} & -0.2604166\bar{6} & -1.171875 & 1.3671875 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}
 \end{aligned}$$

Kondenzirano podajnostno matriko sedaj dobimo s črtanjem vrstic in stolpcev, ki pripadajo nebitvenim prostostnim stopnjam (torej druge, četrte in šeste vrstice in stolpca):

$$[d_c] = \begin{bmatrix} 2.34375 & 2.77777\bar{7} & 1.1284722\bar{2} \\ 2.77777\bar{7} & 5.55555\bar{5} & 2.777777\bar{7} \\ 1.1284722\bar{2} & 2.777777\bar{7} & 2.34375 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}$$

Z inverzijo kondenzirane podajnostne matrike ponovno sledi kondenzirana togostna matrika (ki pa je sedaj praktično nezanimiva, saj za reševanje sistema lahko uporabimo kar kondenzirano podajnostno matriko):

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{K}_c] &= [\mathbf{d}_c]^{-1} = \begin{bmatrix} 2.34375 & 2.77777\bar{7} & 1.1284722\bar{2} \\ 2.77777\bar{7} & 5.55555\bar{5} & 2.77777\bar{7} \\ 1.1284722\bar{2} & 2.77777\bar{7} & 2.34375 \end{bmatrix}^{-1} \cdot 10^8 \\
 &= \begin{bmatrix} 11.314285714285715 & -7.2 & 3.085714285714285 \\ -7.2 & 9 & -7.2 \\ 3.085714285714285 & -7.2 & 11.314285714285718 \end{bmatrix} \cdot 10^7
 \end{aligned}$$

Pripadajoči kondenzirani obtežni vektor konstrukcije pa je:

$$\{\mathbf{F}_c\} = \{\mathbf{F}_b\} - [\mathbf{K}_{bn}] \cdot [\mathbf{K}_{nn}]^{-1} \cdot \{\mathbf{F}_n\} = \begin{Bmatrix} -15000 \\ -20000 \\ -10000 \end{Bmatrix} - [\mathbf{K}_{bn}] \cdot [\mathbf{K}_{nn}]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15000 \\ -20000 \\ -10000 \end{Bmatrix}$$

2. pristop – iskanje kondenzirane togostne matrike in obtežnega vektorja z uporabo Guyanove transformacijske matrike

Gre za splošnejši (in posledično obširnejši) pristop, ki je uporaben tudi za kondenziranje masne matrike konstrukcije.

Izbrane nebistvene prostostne stopnje moramo najprej izraziti s pomočjo bistvenih prostostnih stopenj, kar storimo kot:

$$\begin{aligned}
 \{\mathbf{U}_n\} &= [\mathbf{K}_{nn}]^{-1} \cdot \{\mathbf{F}_n\} - [\mathbf{K}_{nn}]^{-1} \cdot [\mathbf{K}_{nb}] \cdot \{\mathbf{U}_b\} = -[\mathbf{K}_{nn}]^{-1} \cdot [\mathbf{K}_{nb}] \cdot \{\mathbf{U}_b\} = [\mathbf{t}_G] \cdot \{\mathbf{U}_b\} \\
 \begin{Bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.10714285714285716 & 0.375 & -0.10714285714285716 \\ -0.4285714285714286 & 0 & 0.4285714285714286 \\ 0.10714285714285716 & -0.375 & -0.10714285714285716 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

ter nato tvorimo Guyanovo transformacijsko matriko, ki jo sestavljata dve podmatriki, enotska in pravkar izračunana matrika, ki povezuje nebistvene in bistvene prostostne stopnje:

$$[\mathbf{T}_G] = \begin{Bmatrix} [\mathbf{I}] \\ [\mathbf{t}_G] \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0.10714285714285716 & 0.375 & -0.10714285714285716 \\ -0.4285714285714286 & 0 & 0.4285714285714286 \\ 0.10714285714285716 & -0.375 & -0.10714285714285716 \end{bmatrix}$$

za katero velja zveza:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} = [T_G] \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{Bmatrix}$$

Guyanova (kondenzirana) togostna matrika je tako (uporabimo togostno matriko  $[K]$ , ki ima člene urejene v ustreznem vrstnem redu prostostnih stopenj v Guyanovi transformacijski matriki, torej  $Y_2, Y_4, Y_3, \Phi_2, \Phi_3$  in  $\Phi_4$ , in je že znana iz 1. pristopa):

$$\begin{aligned} [K_G] &= [T_G]^T \cdot [K] \cdot [T_G] \\ &= [T_G]^T \cdot \begin{bmatrix} 14.4 & -7.2 & 0 & 0 & 7.2 & 0 \\ -7.2 & 14.4 & -7.2 & -7.2 & 0 & 7.2 \\ 0 & -7.2 & 14.4 & 0 & -7.2 & 0 \\ 0 & -7.2 & 0 & 19.2 & 4.8 & 0 \\ 7.2 & 0 & -7.2 & 4.8 & 19.2 & 4.8 \\ 0 & 7.2 & 0 & 0 & 4.8 & 19.2 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot [T_G] \\ &= \begin{bmatrix} 11.314285714285718 & -7.2 & 3.0857142857142876 \\ -7.2 & 9 & -7.2 \\ 3.0857142857142876 & -7.2 & 11.314285714285718 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \end{aligned}$$

Ta matrika je enaka kot v prejšnjem pristopu.

Kondenzirani obtežni vektor izračunamo kot (tudi tukaj uporabimo obtežni vektor, ki ima člene urejene v ustreznem vrstnem redu prostostnih stopenj v Guyanovi transformacijski matriki in je že znan iz 1. pristopa):

$$\{F_c\} = [T_G]^T \cdot \{F\} = [T_G]^T \cdot \begin{Bmatrix} -15000 \\ -20000 \\ -10000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15000 \\ -20000 \\ -10000 \end{Bmatrix}$$

Ta vektor je enak kot v prejšnjem pristopu.

*Analiza vrednosti v bistvenih prostostnih stopnjah*

Tako smo iskanje (delnih) rešitev sistema  $6 \times 6 \{F\} = [K] \cdot \{U\}$  prevedli v reševanje sistema  $3 \times 3$ :

$$\{F_c\} = [K_c] \cdot \{U_c\} = [K_c] \cdot \{U_b\}$$

$$\begin{Bmatrix} -15000 \\ -20000 \\ -10000 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.31428571428572 & -7.2 & 3.085714285714287 \\ & -7.2 & 9 & -7.2 \\ 3.085714285714287 & -7.2 & 11.31428571428572 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{Bmatrix}$$

Rešitve sistema – vrednosti primarnih spremenljivk v bistvenih prostostnih stopnjah – so:

$$\{U_b\} = \begin{Bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.0199652777777775 \text{ m} \\ -1.8055555555555551 \text{ m} \\ -0.9592013888888886 \text{ m} \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

*Analiza vrednosti v NEbistvenih prostostnih stopnjah*

Vrednosti »manjkajočih« pripadajočih zasukov (= izbranih nebistvenih prostostnih stopenj) izračunamo kot (v prvem pristopu):

$$\{U_n\} = [K_{nn}]^{-1} \cdot (\{F_n\} - [K_{nb}] \cdot \{U_b\})$$

$$= \begin{bmatrix} 19.20 & 4.8 & 0 \\ 4.8 & 19.2 & 4.8 \\ 0 & 4.8 & 19.2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left( \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -7.2 & 0 \\ 7.2 & 0 & -7.2 \\ 0 & 7.2 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} -1.0199652777777775 \text{ m} \\ -1.8055555555555551 \text{ m} \\ -0.9592013888888886 \text{ m} \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} \right)$$

$$\{U_n\} = \begin{Bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.68359375 \text{ rad} \\ 0.026041666666666564 \text{ rad} \\ 0.6705729166666665 \text{ rad} \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Alternativna možnost je uporaba (bolj splošne) zveze, znane iz Guyanove kondenzacije:

$$\{U\} = [T_G] \cdot \{U_b\} = \begin{Bmatrix} -1.0199652777777775 \text{ m} \\ -1.8055555555555551 \text{ m} \\ -0.9592013888888886 \text{ m} \\ -0.68359375 \text{ rad} \\ 0.026041666666666564 \text{ rad} \\ 0.6705729166666665 \text{ rad} \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

ali krajše zveze:

$$\{U_n\} = [t_G] \cdot \{U_b\}$$

*Poprocesiranje: iskanje vozliščnih vrednosti sekundarnih spremenljivk in notranjih statičnih količin*

*- izračun notranjih statičnih količin za 1. končni element*

Vektor globalnih (= lokalnih) pomikov prvega končnega elementa je:

$$\{U_1\} = \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \Phi_1 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.0199652777777775 \text{ m} \\ -0.68359375 \text{ rad} \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Globalni (= lokalni) vektor sekundarnih spremenljivk je tako (ob upoštevanju  $\{F_1\} = \{0\}$ ):

$$\{Q_1\} = [K_1] \cdot \{U_1\} = \begin{bmatrix} 7.2 & 7.2 & -7.2 & 7.2 \\ 7.2 & 9.6 & -7.2 & 7.2 \\ -7.2 & -7.2 & 7.2 & -7.2 \\ 7.2 & 7.2 & -7.2 & 9.6 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.0199652777777775 \text{ m} \\ -0.68359375 \text{ rad} \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$$= \begin{Bmatrix} 24218.75 \text{ N} \\ 40625 \text{ Nm} \\ -24218.75 \text{ N} \\ 7812.5 \text{ Nm} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,1} \\ M_{z,1} \\ V_{y,2,\text{levo}} \\ M_{z,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 24218.75 \text{ N} \\ -40625 \text{ Nm} \\ 24218.75 \text{ N} \\ 7812.5 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Reakciji v vozlišču 1 (levi podpori), ki ju odčitamo kar neposredno iz prvih dveh členov vektorja  $\{Q_1\}$ , sta tako:

$$V_A = 24218.75 \text{ N} \quad (\text{deluje navzgor})$$

$$M_A = 40625 \text{ Nm} \quad (\text{deluje protiurno})$$

– *izračun notranjih statičnih količin za 2. končni element*

Vektor globalnih (= lokalnih) pomikov drugega končnega elementa je:

$$\{U_2\} = \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.0199652777777775 \text{ m} \\ -0.68359375 \text{ rad} \\ -1.8055555555555551 \text{ m} \\ 0.026041666666666564 \text{ rad} \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Globalni (= lokalni) vektor sekundarnih spremenljivk je tako (ob upoštevanju  $\{F_2\} = \{0\}$ ):

$$\{Q_2\} = [K_2] \cdot \{U_2\} = \begin{bmatrix} 7.2 & 7.2 & -7.2 & 7.2 \\ 7.2 & 9.6 & -7.2 & 7.2 \\ -7.2 & -7.2 & 7.2 & -7.2 \\ 7.2 & 7.2 & -7.2 & 9.6 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} -1.0199652777777775 \text{ m} \\ -0.68359375 \text{ rad} \\ -1.8055555555555551 \text{ m} \\ 0.026041666666666564 \text{ rad} \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$$= \begin{Bmatrix} 9218.75 \text{ N} \\ -7812.5 \text{ Nm} \\ -9218.75 \text{ N} \\ 26250 \text{ Nm} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,2\text{desno}} \\ M_{z,2} \\ V_{y,3\text{levo}} \\ M_{z,3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9218.75 \text{ N} \\ 7812.5 \text{ Nm} \\ 9218.75 \text{ N} \\ 26250 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

– *izračun notranjih statičnih količin za 3. končni element*

Vektor globalnih (= lokalnih) pomikov tretjega končnega elementa je:

$$\{U_3\} = \begin{Bmatrix} Y_3 \\ \Phi_3 \\ Y_4 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.8055555555555551 \text{ m} \\ 0.026041666666666564 \text{ rad} \\ -0.9592013888888886 \text{ m} \\ 0.6705729166666665 \text{ rad} \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Globalni (= lokalni) vektor sekundarnih spremenljivk je tako (ob upoštevanju  $\{F_3\} = \{0\}$ ):

$$\{Q_3\} = [K_3] \cdot \{U_3\} = \begin{bmatrix} 7.2 & 7.2 & -7.2 & 7.2 \\ 7.2 & 9.6 & -7.2 & 7.2 \\ -7.2 & -7.2 & 7.2 & -7.2 \\ 7.2 & 7.2 & -7.2 & 9.6 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} -1.8055555555555551 \text{ m} \\ 0.026041666666666564 \text{ rad} \\ -0.9592013888888886 \text{ m} \\ 0.6705729166666665 \text{ rad} \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$$= \begin{Bmatrix} -10781.25 \text{ N} \\ -26250 \text{ Nm} \\ 10781.25 \text{ N} \\ 4687.5 \text{ Nm} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,3\text{desno}} \\ M_{z,3} \\ V_{y,4\text{levo}} \\ M_{z,4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10781.25 \text{ N} \\ 26250 \text{ Nm} \\ -10781.25 \text{ N} \\ 4687.5 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

– izračun notranjih statičnih količin za 4. končni element

Vektor globalnih (= lokalnih) pomikov četrtega končnega elementa je:

$$\{U_4\} = \begin{Bmatrix} Y_4 \\ \Phi_4 \\ Y_5 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.9592013888888886 \text{ m} \\ 0.6705729166666665 \text{ rad} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Globalni (= lokalni) vektor sekundarnih spremenljivk je tako (ob upoštevanju  $\{F_4\} = \{0\}$ ):

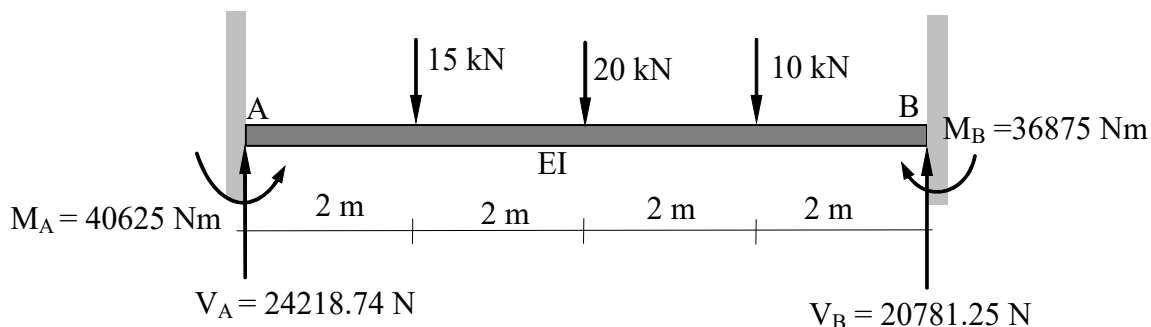
$$\{Q_4\} = [K_4] \cdot \{U_4\} = \begin{bmatrix} 7.2 & 7.2 & -7.2 & 7.2 \\ 7.2 & 9.6 & -7.2 & 7.2 \\ -7.2 & -7.2 & 7.2 & -7.2 \\ 7.2 & 7.2 & -7.2 & 9.6 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} -0.9592013888888886 \text{ m} \\ 0.6705729166666665 \text{ rad} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$$= \begin{Bmatrix} -20781.25 \text{ N} \\ -4687.5 \text{ Nm} \\ 20781.25 \text{ N} \\ -36875 \text{ Nm} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} V_{y,4\text{desno}} \\ M_{z,4} \\ V_{y,5} \\ M_{z,5} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -20781.25 \text{ N} \\ 4687.5 \text{ Nm} \\ -20781.25 \text{ N} \\ -36875 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Reakciji v vozlišču 5 (desni podpori), ki ju odčitamo kar neposredno iz zadnjih dveh členov vektorja  $\{Q_4\}$ , sta tako:

$$V_B = 20781.25 \text{ N} \quad (\text{deluje navzgor})$$

$$M_B = -36875 \text{ Nm} \quad (\text{deluje sournjo})$$



Slika 239: Izračunane reakcije

*Poprocesiranje: iskanje funkcij upogibnega momenta*

Ker na konstrukciji ne nastopa zvezna obtežba in je zato jasno, da bo razporeditev upogibnega momenta po posameznih končnih elementih linearna, funkcije momenta po posameznih končnih elementih dobimo z linearno interpolacijo vozliščnih vrednosti upogibnega momenta, npr. z uporabo H0 interpolacijskih funkcij.

Za prvi element sledi funkcija linearne razporeditve momenta:

$$M_{z1,N}(x) = -40625 \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right) + 7812.5 \cdot \frac{x}{2} = -40625 + 24218.75 \cdot x \quad 0 \leq x \leq 2 \text{ m}$$

Za drugi element sledi funkcija linearne razporeditve momenta:

$$M_{z2,N}(x) = \frac{4-x}{4-2} \cdot 7812.5 + \frac{x-2}{4-2} \cdot 26250 = -10625 + 9218.75 \cdot x \quad 2 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m}$$

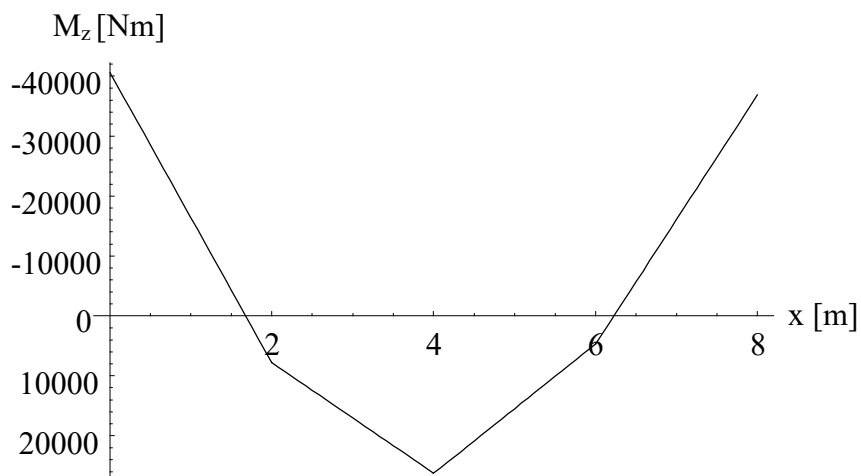
Za tretji element sledi funkcija linearne razporeditve momenta:

$$M_{z3,N}(x) = \frac{6-x}{6-4} \cdot 26250 + \frac{x-4}{6-4} \cdot 4687.5 = 69375 - 10781.25 \cdot x \quad 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m}$$

Za četrti element sledi funkcija linearne razporeditve momenta:

$$M_{z4,N}(x) = \frac{8-x}{8-6} \cdot 4687.5 + \frac{x-6}{8-6} \cdot (-36875) = 129375 - 20781.25 \cdot x \quad 6 \text{ m} \leq x \leq 8 \text{ m}$$

Vsi funkcije so enake pravim funkcijam obravnavanega primera.



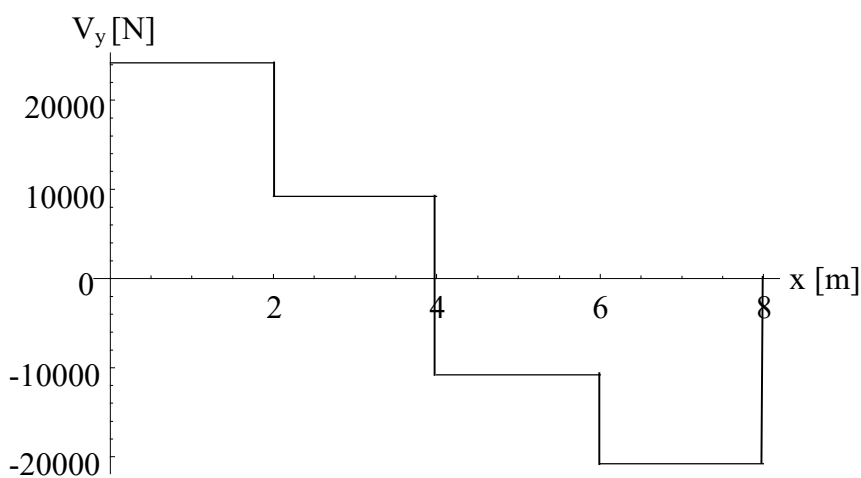
Slika 240: Razporeditev upogibnega momenta

*Poprocesiranje: iskanje funkcij prečne sile  $z$  odvajanjem funkcij upogibnega momenta*

Odvajanje dobljenih izrazov za upogibni moment vodi do funkcij za prečno silo:

$$\begin{aligned}
 V_{y1,N}(x) &= 24218.75 & 0 \leq x \leq 2 \text{ m} \\
 V_{y2,N}(x) &= 9218.75 & 2 \text{ m} \leq x \leq 4 \text{ m} \\
 V_{y3,N}(x) &= -10781.25 & 4 \text{ m} \leq x \leq 6 \text{ m} \\
 V_{y4,N}(x) &= -20781.25 & 6 \text{ m} \leq x \leq 8 \text{ m}
 \end{aligned}$$

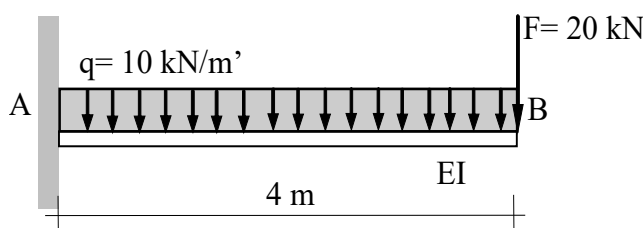
ki so enake pravim funkcijam obravnavanega primera.



Slika 241: Razporeditev prečne sile

**Primer 18 – Levo vpeta konzola – analiza s statično in Guyanovo kondenzacijo**

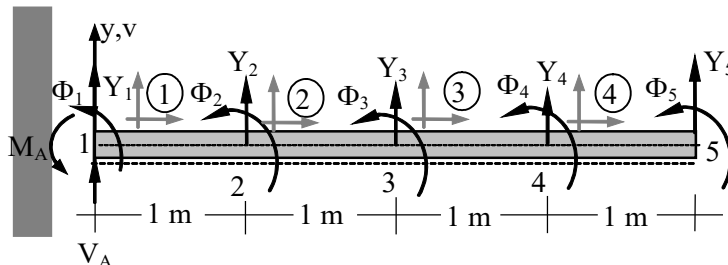
Za dani betonski konzolni nosilec pravokotnega prereza ( $b/h = 0.2 \text{ m}/0.4 \text{ m}$ ) iz betona C20/25 ( $E = 30 \text{ GPa}$ ) določi pomik in zasuk desnega konca nosilca, funkcijo prečnega pomika vzdolž konstrukcije, funkciji notranjih statičnih količin ter reakcije v podpori.



Slika 242: Obravnavana konzola

**Rešitev**

S pomočjo kondenzacije bo analiziran računski model s štirimi končnimi elementi enakih dolžin (izbran zgolj zaradi demonstracije kondenzacije):



Slika 243: Izbrana diskretizacija s štirimi enako dolgimi končnimi elementi

Pripadajoča »klasično« tvorjena globalna togostna matrika oz. togostna matrika konstrukcije tako:

$$[k_{\text{kon}}] = \begin{bmatrix} 768 & 0 & -384 & 192 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 256 & -192 & 64 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -384 & -192 & 768 & 0 & -384 & 192 & 0 & 0 \\ 192 & 64 & 0 & 256 & -192 & 64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -384 & -192 & 768 & 0 & -384 & 192 \\ 0 & 0 & 192 & 64 & 0 & 256 & -192 & 64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -384 & -192 & 384 & -192 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

Obtežni vektor pa je:

$$\{F_{\text{kon}}\} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \\ -10000 \\ 0 \\ -10000 \\ 0 \\ -25000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

*1. izbira nebistvenih prostostnih stopenj - iskanje kondenzirane togostne matrike in obtežnega vektorja*

V tem postopku kondenzacije bomo eliminirali npr. vse zasuke (ki jih klasificiramo kot nebistvene prostostne stopnje).

– 1. pristop – uporaba statične kondenzacije (pristop ni uporaben za kondenzacijo masne matrike)

Zato najprej z zamenjavami vrstic preuredimo zapis togostne matrike konstrukcije tako, da v prvih štirih vrsticah zapišemo člene, ki pripadajo prečnim pomikom oz. bistvenim prostostnim stopnjam, preostale vrstice pa zasukom oz. nebistvenim prostostnim stopnjam:

$$[k_{\text{kon}}] = \begin{bmatrix} 768 & 0 & -384 & 192 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -384 & -192 & 768 & 0 & -384 & 192 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -384 & -192 & 768 & 0 & -384 & 192 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -384 & -192 & 384 & -192 \\ \hline 0 & 256 & -192 & 64 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 192 & 64 & 0 & 256 & -192 & 64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 192 & 64 & 0 & 256 & -192 & 64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

Enako storimo še z obtežnim vektorjem:

$$\{F_{kon}\} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ -10000 \\ -10000 \\ -25000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix} \rightarrow \{F_b\} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ -10000 \\ -10000 \\ -25000 \end{Bmatrix} \quad \{F_n\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

ki pa s tem že dobi dokončno obliko, in ga že lahko razdelimo na dve komponenti, ki pripadata bistvenim ter nebistvenim prostostnim stopnjam.

Nato v istem vrstnem redu prostostnih stopenj (da ohranimo simetrijo matrike) uredimo še stolpce:

$$[k_{kon}] = \begin{bmatrix} 768 & -384 & 0 & 0 & 0 & 192 & 0 & 0 \\ -384 & 768 & -384 & 0 & -192 & 0 & 192 & 0 \\ 0 & -384 & 768 & -384 & 0 & -192 & 0 & 192 \\ 0 & 0 & -384 & 384 & 0 & 0 & -192 & -192 \\ 0 & -192 & 0 & 0 & 256 & 64 & 0 & 0 \\ 192 & 0 & -192 & 0 & 64 & 256 & 64 & 0 \\ 0 & 192 & 0 & -192 & 0 & 64 & 256 & 64 \\ 0 & 0 & 192 & -192 & 0 & 0 & 64 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6 = \begin{bmatrix} [K_{bb}] & [K_{bn}] \\ [K_{nb}] & [K_{nn}] \end{bmatrix}$$

Matrika mora biti simetrična (opomba: takšno matriko bi lahko dobili tudi brez zamenjav vrstic in stolpcev, če bi že pri njeni sestavi upoštevali ustrezní vrstni red prostostnih stopenj). Tako sledijo podmatrike (ki so v obravnavanem primeru slučajno vse enakega reda [4\*4]), pri čemer morata biti tudi podmatriki  $[K_{bb}]$  in  $[K_{nn}]$  simetrični:

$$\begin{aligned}
 [K_{bb}] &= \begin{bmatrix} 768 & -384 & 0 & 0 \\ -384 & 768 & -384 & 0 \\ 0 & -384 & 768 & -384 \\ 0 & 0 & -384 & 384 \end{bmatrix} \cdot 10^6 & [K_{nn}] &= \begin{bmatrix} 256 & 64 & 0 & 0 \\ 64 & 256 & 64 & 0 \\ 0 & 64 & 256 & 64 \\ 0 & 0 & 64 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \\
 [K_{bn}] &= \begin{bmatrix} 0 & 192 & 0 & 0 \\ -192 & 0 & 192 & 0 \\ 0 & -192 & 0 & 192 \\ 0 & 0 & -192 & -192 \end{bmatrix} \cdot 10^6 & [K_{nb}] &= \begin{bmatrix} 0 & -192 & 0 & 0 \\ 192 & 0 & -192 & 0 \\ 0 & 192 & 0 & -192 \\ 0 & 0 & 192 & -192 \end{bmatrix} \cdot 10^6 = [K_{bn}]^T
 \end{aligned}$$

Tako urejeni togostni matriki konstrukcije pripadata v enakem vrstnem redu primarnih spremenljivk urejena vektor neznank (= primarnih spremenljivk) in že prej zapisani obtežni vektor konstrukcije:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \left\{ \begin{Bmatrix} U_b \end{Bmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{Bmatrix} U_n \end{Bmatrix} \right\} \rightarrow \{U_b\} = \begin{Bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{Bmatrix} \quad \{U_n\} = \begin{Bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix}$$

Kondenzirana togostna matrika konstrukcije, dobljena s statično kondenzacijo, je tako:

$$\begin{aligned}
 [K_c] &= [K_{bb}] - [K_{bn}] \cdot [K_{nn}]^{-1} \cdot [K_{nb}] = \\
 &= \begin{bmatrix} 601.7319587628867 & -378.061855670103 & 142.5154639175258 & -23.7525773195876 \\ -378.061855670103 & 459.216494845361 & -306.804123711340 & 83.13402061855672 \\ 142.5154639175258 & -306.804123711340 & 316.7010309278351 & -116.7835051546392 \\ -23.7525773195876 & 83.13402061855672 & -116.7835051546392 & 51.463917525773226 \end{bmatrix} \cdot 10^6
 \end{aligned}$$

Pripadajoči kondenzirani obtežni vektor konstrukcije pa je:

$$\{F_c\} = \{F_b\} - [K_{bn}] \cdot [K_{nn}]^{-1} \cdot \{F_n\} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ -10000 \\ -10000 \\ -25000 \end{Bmatrix} - [K_{bn}] \cdot [K_{nn}]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 833.333333333334 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -10103.092783505155 \\ -9639.175257731958 \\ -11340.20618556701 \\ -23943.298969072166 \end{Bmatrix}$$

– 2. pristop – uporaba Guyanove transformacijske matrike (pristop je uporaben tudi za kondenzacijo masne matrike konstrukcije)

Nebistvene prostostne stopnje izrazimo s pomočjo bistvenih prostostnih stopenj kot:

$$\{U_n\} = \begin{Bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = [K_{nn}]^{-1} \cdot \{F_n\} - [K_{nn}]^{-1} \cdot [K_{nb}] \cdot \{U_b\} =$$

$$\begin{bmatrix} 0.216494845360825 & 0.7422680412371 & -0.1855670103093 & 0.0309278350515 \\ -0.8659793814433 & 0.0309278350515 & 0.7422680412371 & -0.123711340206 \\ 0.24742268041237 & -0.865979381443 & 0.21649484536082 & 0.4639175257732 \\ -0.1237113402062 & 0.4329896907216 & -1.6082474226804 & 1.268041237113 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{Bmatrix}$$

Zapišemo lahko tudi:

$$\{U_n\} = [t_G] \cdot \{U_b\}$$

Nato tvorimo Guyanovo transformacijsko matriko:

$$[T_G] = \begin{Bmatrix} [I] \\ [t_G] \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0.2164948454 & 0.7422680412 & -0.1855670103 & 0.03092783514 \\ -0.8659793814 & 0.0309278351 & 0.7422680412 & -0.1237113403 \\ 0.24742268041 & -0.8659793814 & 0.2164948454 & 0.4639175258 \\ -0.1237113402 & 0.43298969075 & -1.6082474227 & 1.2680412371 \end{bmatrix}$$

za katero velja:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = [T_G] \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{Bmatrix}$$

Guyanova (kondenzirana) togostna matrika je tako (uporabimo togostno matriko  $[K]$ , že znano iz statične kondenzacije, ki ima člene urejene v ustreznem vrstnem redu prostostnih stopenj v Guyanovi transformacijski matriki):

$$[K_G] = [T_G]^T \cdot [K] \cdot [T_G] = \begin{bmatrix} 601.7319587628867 & -378.061855670103 & 142.5154639175258 & -23.7525773195876 \\ -378.061855670103 & 459.216494845361 & -306.804123711340 & 83.13402061855672 \\ 142.5154639175258 & -306.804123711340 & 316.7010309278351 & -116.7835051546392 \\ -23.7525773195876 & 83.13402061855672 & -116.7835051546392 & 51.463917525773226 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

ki je enaka kot v prejšnjem pristopu.

Kondenzirani obtežni vektor izračunamo kot (uporabimo obtežni vektor, ki ima člene urejene v ustreznem vrstnem redu prostostnih stopenj v Guyanovi transformacijski matriki):

$$\{F_c\} = [T_G]^T \cdot \{F\} = [T_G]^T \cdot \begin{Bmatrix} -10000 \\ -10000 \\ -10000 \\ -25000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10103.092783505155 \\ -9639.175257731958 \\ -11340.20618556701 \\ -23943.298969072166 \end{Bmatrix}$$

in je tudi enak kot v prejšnjem pristopu, kjer smo prav tako morali poiskati inverzno matriko  $[K_m]$  nebistvenih prostostnih stopenj.

Z nekaj manj računskega napora ga lahko izračunamo tudi kot:

$$\{F_c\} = \{F_b\} + [t_G]^T \cdot \{F_n\} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ -10000 \\ -10000 \\ -25000 \end{Bmatrix} + [t_G]^T \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10103.092783505155 \\ -9639.175257731958 \\ -11340.20618556701 \\ -23943.298969072166 \end{Bmatrix}$$

### *Analiza vzdolžnih pomikov*

Tako smo iskanje (delnih) rešitev izvornega sistema  $\{F\} = [K] \cdot \{U\}$  reda  $8 \times 8$  prevedli v reševanje sistema reda  $4 \times 4$ , vendar se nismo mogli izogniti računsko zahtevnemu invertiranju matrike:

$$\{F_c\} = [K_c] \cdot \{U_c\} = [K_c] \cdot \{U_b\}$$

$$\begin{Bmatrix} -10103.092784 \\ -9639.175258 \\ -11340.206186 \\ -23943.298969 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 601.73195876 & -378.0618557 & 142.51546392 & -23.75257732 \\ -378.0618557 & 459.21649485 & -306.8041237 & 83.134020620 \\ 142.51546392 & -306.8041237 & 316.701030928 & -116.78350516 \\ -23.75257732 & 83.134020620 & -116.78350516 & 51.4639175258 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{Bmatrix}$$

Rešitve sistema – vrednosti primarnih spremenljivk v bistvenih prostostnih stopnjah oz. prečnih pomikov – so:

$$\{U_b\} = \begin{Bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.200520833333321 \text{ m} \\ -7.708333333333283 \text{ m} \\ -15.117187499999895 \text{ m} \\ -23.333333333333164 \text{ m} \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

in so enake, kot če bi izvedli klasično analizo celotnega sistema (glej Primer 6.a), ter enake (točnim) rešitvam diferencialne enačbe.

Vrednosti »manjkajočih« nebstvenih primarnih spremenljivk oz. prostostnih stopenj (pripadajočih zasukov) izračunamo kot :

$$\{U_n\} = [K_{nn}]^{-1} \cdot (\{F_n\} - [K_{nb}] \cdot \{U_c\}) = \begin{Bmatrix} \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4.114583333333489 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -6.666666666666618 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -7.96875 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -8.33333333333359 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

ki so prav tako enake vrednostim, dobljenim s klasično analizo celotnega sistema (glej Primer 6.a), ter enake (točnim) rešitvam diferencialne enačbe.

Nadaljevanje analize, torej faza poprocesiranja, je sedaj enaka kot pri klasični analizi (glej Primer 6.a).

## 2. izbira nebistvenih prostostnih stopenj

V postopku analize bomo kot bistveni prostostni stopnji upoštevali zgolj prostostni stopnji vozlišča 3. Zato najprej z zamenjavami vrstic preuredimo zapis prvotne togostne matrike konstrukcije tako, da v prvih dveh vrsticah zapišemo člene, ki pripadajo prečnemu pomiku in zasuku vozlišča 3:

$$[k_{\text{kon}}] = \begin{bmatrix} -384 & -192 & 768 & 0 & -384 & 192 & 0 & 0 \\ 192 & 64 & 0 & 256 & -192 & 64 & 0 & 0 \\ \hline 768 & 0 & -384 & 192 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 256 & -192 & 64 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -384 & -192 & 768 & 0 & -384 & 192 \\ 0 & 0 & 192 & 64 & 0 & 256 & -192 & 64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -384 & -192 & 384 & -192 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

Enako storimo še z obtežnim vektorjem (ki pa po ureditvi slučajno navidezno ostane isti):

$$\{F_{\text{kon}}\} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \\ \hline -10000 \\ 0 \\ -10000 \\ 0 \\ -25000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix} \rightarrow \{F_b\} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{F_n\} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \\ -10000 \\ 0 \\ -25000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

Vektor s tem že dobi dokončno obliko, in ga lahko razdelimo na dve komponenti (člene, ki pripadajo bistvenim prostostnim stopnjam, kot tudi člene, ki pripadajo nebistvenim prostostnim stopnjam).

Nato v istem vrstnem redu prostostnih stopenj (da ohranimo simetrijo matrike) uredimo še stolpce:

$$[k_{kon}] = \begin{bmatrix} 768 & 0 & -384 & -192 & -384 & 192 & 0 & 0 \\ 0 & 256 & 192 & 64 & -192 & 64 & 0 & 0 \\ -384 & 192 & 768 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -192 & 64 & 0 & 256 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -384 & -192 & 0 & 0 & 768 & 0 & -384 & 192 \\ 192 & 64 & 0 & 0 & 0 & 256 & -192 & 64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -384 & -192 & 384 & -192 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6 = \begin{bmatrix} [K_{bb}] & [K_{bn}] \\ [K_{nb}] & [K_{nn}] \end{bmatrix}$$

ki mora biti simetrična, tako kot tudi podmatriki  $[K_{bb}]$  in  $[K_{nn}]$ . Tako sledijo naslednje podmatrike (ki pa niso več vse enakih velikosti):

$$[K_{bb}] = \begin{bmatrix} 768 & 0 \\ 0 & 256 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \quad [K_{nn}] = \begin{bmatrix} 768 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 256 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 768 & 0 & -384 & 192 \\ 0 & 0 & 0 & 256 & -192 & 64 \\ 0 & 0 & -384 & -192 & 384 & -192 \\ 0 & 0 & 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

$$[K_{bn}] = \begin{bmatrix} -384 & -192 & -384 & 192 & 0 & 0 \\ 192 & 64 & -192 & 64 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \quad [K_{nb}] = \begin{bmatrix} -384 & 192 \\ -192 & 64 \\ -384 & -192 \\ 192 & 64 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^6 = [K_{bn}]^T$$

Tako urejeni togostni matriki konstrukcije pripadata enako urejena vektor neznank in že zapisani obtežni vektor konstrukcije:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} Y_3 \\ \Phi_3 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_4 \\ \Phi_4 \\ Y_5 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{U_b\} \\ \{U_n\} \end{Bmatrix} \rightarrow \{U_b\} = \begin{Bmatrix} Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} \quad \{U_n\} = \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_4 \\ \Phi_4 \\ Y_5 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix}$$

Pripadajoči kondenzirani obtežni vektor konstrukcije je tako:

$$\begin{aligned} \{F_c\} &= \{F_b\} - [K_{bn}] \cdot [K_{nn}]^{-1} \cdot \{F_n\} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 40000 \text{ N} \\ 56666.666666666674 \text{ Nm} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} -50000 \text{ N} \\ -56666.666666666674 \text{ Nm} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

*Analiza vzdolžnih pomikov in zasukov*

Najprej poiščemo pomik in zasuk v bistvenih prostostnih stopnjah:

$$\{U_b\} = ([K_{bb}] - [K_{bn}] \cdot [K_{nn}]^{-1} \cdot [K_{nb}])^{-1} \cdot \{F_c\} = \begin{Bmatrix} Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7.708333333333283 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -6.6666666666666902 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

kjer izraz v klepaju predstavlja kondenzirano togostno matriko konstrukcije:

$$[K_c] = [K_{bb}] - [K_{bn}] \cdot [K_{nn}]^{-1} \cdot [K_{nb}] = \begin{bmatrix} 4.8 & -4.8 \\ -4.8 & 6.4 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

nato pa še pomike in zasuke v nebistvenih prostostnih stopnjah kot:

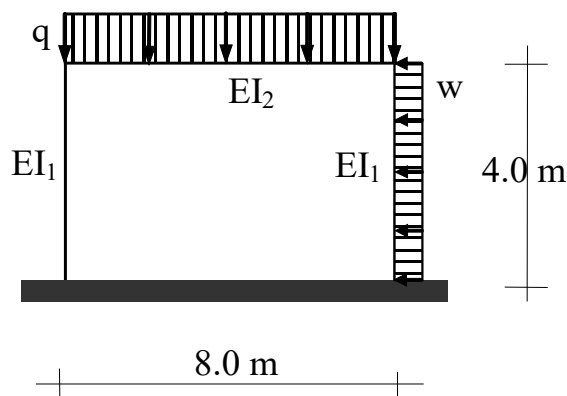
$$\{U_n\} = [K_{nn}]^{-1} \cdot \{F_n\} - [K_{nn}]^{-1} \cdot [K_{nb}] \cdot \{U_b\} = \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_4 \\ \Phi_4 \\ Y_5 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.200520833333321 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -4.114583333333489 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -15.117187499999895 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -7.96875 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -23.333333333333164 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -8.33333333333359 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Dobljene vrednosti so točne, torej enake rešitvam diferencialne enačbe.

Ko so vse vrednosti primarnih spremenljivk znane, je faza poprocesiranja enaka kot pri klasični analizi (glej Primer 6.a).

### Primer 19 – Ravninska okvirna konstrukcija - analiza s statično kondenzacijo

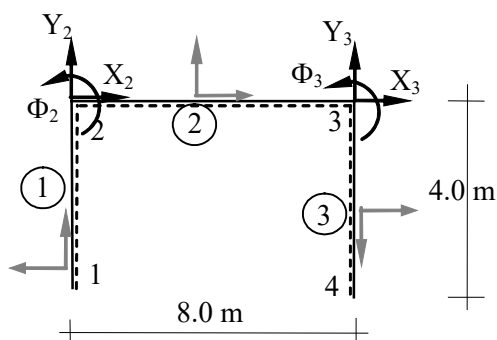
Za betonski okvir s skice določi vrednosti pomikov in zasukov v obeh koncih grede. Stebra imata prerez dimenzij  $b/b = 0.3/0.5$  m, greda pa  $b/b = 0.3/0.6$  m. Modul elastičnosti znaša  $E = 32$  GPa. Konstrukcija je obremenjena z enakomerno zvezno obtežbo  $q = 30$  kN/m' na gredi in vetrom  $w = 5$  kN/m' na desnem stebri.



Slika 244: Obravnavani okvir

### Rešitev

Uporabimo minimalno diskretizacijo konstrukcije s tremi končnimi elementi. K togostni matriki konstrukcije tako prispeva 6 prostostnih stopenj (dva vodoravna pomika, dva vertikalna pomika ter dva zasuka).



Slika 245: Izbrana diskretizacija

#### 1. končni element – standardni končni element

$$L_1 = 4 \text{ m}$$

$$EA_1 = 32 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 0.3 \text{ m} \cdot 0.5 \text{ m} = 4.8 \cdot 10^9 \text{ N}$$

$$EI_1 = 32 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{0.3 \text{ m} \cdot (0.5 \text{ m})^3}{12} = 10 \cdot 10^7 \text{ Nm}^2$$

Lokalna togostna matrika je:

$$[k_1] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot EI}{L^3} & \frac{6 \cdot EI}{L^2} & 0 & -\frac{12 \cdot EI}{L^3} & \frac{6 \cdot EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot EI}{L^2} & \frac{4 \cdot EI}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot EI}{L^2} & \frac{2 \cdot EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot EI}{L^3} & -\frac{6 \cdot EI}{L^2} & 0 & \frac{12 \cdot EI}{L^3} & -\frac{6 \cdot EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot EI}{L^2} & \frac{2 \cdot EI}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot EI}{L^2} & \frac{4 \cdot EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1200 & 0 & 0 & -1200 & 0 & 0 \\ 0 & 18.75 & 37.5 & 0 & -18.75 & 37.5 \\ 0 & 37.5 & 100 & 0 & -37.5 & 50 \\ -1200 & 0 & 0 & 1200 & 0 & 0 \\ 0 & -18.75 & -37.5 & 0 & 18.75 & -37.5 \\ 0 & 37.5 & 50 & 0 & -37.5 & 100 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

Kot, ki ga lokalni koordinatni sistem 1. končnega elementa oklepa z globalnim, znaša  $90^\circ$ :

$$\alpha_1 = 90^\circ \rightarrow \begin{cases} s = \sin(90^\circ) = 1 \\ c = \cos(90^\circ) = 0 \end{cases}$$

in transformacijska matrika je:

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in tako sledi globalna togostna matrika prvega končnega elementa:

$$[K_1] = [T_1] \cdot [k_1] \cdot [T_1]^T = \begin{bmatrix} -18.75 & 0 & -37.5 & -18.75 & 0 & -37.5 \\ 0 & -1200 & 0 & 0 & -1200 & 0 \\ -37.5 & 0 & 100 & 37.5 & 0 & 50 \\ -18.75 & 0 & 37.5 & 18.75 & 0 & 37.5 \\ 0 & -1200 & 0 & 0 & 1200 & 0 \\ -37.5 & 0 & 50 & 37.5 & 0 & 100 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

## 2. končni element – standardni končni element

$$L_2 = 8 \text{ m}$$

$$EA_2 = 32 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 0.3 \text{ m} \cdot 0.6 \text{ m} = 5.76 \cdot 10^9 \text{ N}$$

$$EI_2 = 32 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{0.3 \text{ m} \cdot (0.6 \text{ m})^3}{12} = 17.28 \cdot 10^7 \text{ Nm}^2$$

Lokalna togostna matrika drugega končnega elementa je:

$$[k_2] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot EI}{L^3} & \frac{6 \cdot EI}{L^2} & 0 & -\frac{12 \cdot EI}{L^3} & \frac{6 \cdot EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot EI}{L^2} & \frac{4 \cdot EI}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot EI}{L^2} & \frac{2 \cdot EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot EI}{L^3} & -\frac{6 \cdot EI}{L^2} & 0 & \frac{12 \cdot EI}{L^3} & -\frac{6 \cdot EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot EI}{L^2} & \frac{2 \cdot EI}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot EI}{L^2} & \frac{4 \cdot EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 720 & 0 & 0 & -720 & 0 & 0 \\ 0 & 4.05 & 16.2 & 0 & -4.05 & 16.2 \\ 0 & 16.2 & 86.4 & 0 & -16.2 & 43.2 \\ -720 & 0 & 0 & 720 & 0 & 0 \\ 0 & -4.05 & -16.2 & 0 & 4.05 & -16.2 \\ 0 & 16.2 & 43.2 & 0 & -16.2 & 86.4 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

Kot, ki ga lokalni koordinatni sistem 2. končnega elementa oklepa z globalnim, je 0 in tako sta lokalna in globalna togostna matrika enaki ( $[K_2] = [k_2]$ ).

Tudi lokalni obtežni vektor elementa je enak globalnemu obtežnemu vektorju:

$$\{f_2\} = \{F_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -120000 \\ -160000 \\ 0 \\ -120000 \\ 160000 \end{Bmatrix}$$

### 3. končni element – standardni končni element

$$L_3 = 4 \text{ m}$$

$$EA_3 = EA_1 = 32 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 0.3 \text{ m} \cdot 0.5 \text{ m} = 4.8 \cdot 10^9 \text{ N}$$

$$EI_3 = EI_1 = 32 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{0.3 \text{ m} \cdot (0.5 \text{ m})^3}{12} = 10 \cdot 10^7 \text{ Nm}^2$$

Lokalna togostna matrika tretjega končnega elementa je enaka kot za prvi končni element:

$$[k_3] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot EI}{L^3} & \frac{6 \cdot EI}{L^2} & 0 & -\frac{12 \cdot EI}{L^3} & \frac{6 \cdot EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot EI}{L^2} & \frac{4 \cdot EI}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot EI}{L^2} & \frac{2 \cdot EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot EI}{L^3} & -\frac{6 \cdot EI}{L^2} & 0 & \frac{12 \cdot EI}{L^3} & -\frac{6 \cdot EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot EI}{L^2} & \frac{2 \cdot EI}{L} & 0 & -\frac{6 \cdot EI}{L^2} & \frac{4 \cdot EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1200 & 0 & 0 & -1200 & 0 & 0 \\ 0 & 18.75 & 37.5 & 0 & -18.75 & 37.5 \\ 0 & 37.5 & 100 & 0 & -18.75 & 50 \\ -1200 & 0 & 0 & 1200 & 0 & 0 \\ 0 & -18.75 & -18.75 & 0 & 18.75 & -37.5 \\ 0 & 37.5 & 50 & 0 & -37.5 & 100 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

Kot, ki ga lokalni koordinatni sistem 3. končnega elementa oklepa z globalnim, znaša:

$$\alpha_3 = 270^\circ = -90^\circ \rightarrow \begin{cases} s = \sin(270^\circ) = -1 \\ c = \cos(270^\circ) = 0 \end{cases}$$

in transformacijska matrika je:

$$[T_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq [T_1]$$

in tako sledi globalna togostna matrika tretjega končnega elementa:

$$[K_3] = [T_3] \cdot [k_3] \cdot [T_3]^T = \begin{bmatrix} 18.75 & 0 & 37.5 & -18.75 & 0 & 37.5 \\ 0 & 1200 & 0 & 0 & -1200 & 0 \\ 37.5 & 0 & 100 & -37.5 & 0 & 50 \\ -18.75 & 0 & -37.5 & 18.75 & 0 & -37.5 \\ 0 & -1200 & 0 & 0 & 1200 & 0 \\ -37.5 & 0 & 50 & -37.5 & 0 & 100 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

Lokalni obtežni vektor elementa je:

$$\{f_3\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -10000 \\ -6666.666666666667 \\ 0 \\ -10000 \\ 6666.666666666667 \end{Bmatrix}$$

Obtežni vektor v globalnem koordinatnem sistemu pa je:

$$\{F_3\} = [T_3] \cdot \{f_3\} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \\ -6666.666666666667 \\ -10000 \\ 0 \\ -6666.666666666667 \end{Bmatrix}$$

Globalna togostna matrika konstrukcije je:

$$[K] = \begin{bmatrix} 738.75 & 0 & 37.5 & -720 & 0 & 0 \\ 0 & 1204.05 & 16.2 & 0 & -4.05 & 16.2 \\ 37.5 & 16.2 & 186.4 & 0 & -16.2 & 43.2 \\ -720 & 0 & 0 & 738.75 & 0 & 37.5 \\ 0 & -4.05 & -16.2 & 0 & 1204.05 & -16.2 \\ 0 & 16.2 & 43.2 & 37.5 & -16.2 & 186.4 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

Globalni obtežni vektor konstrukcije pa je:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -120000 \\ -160000 \\ 0 - 10000 \\ -120000 + 0 \\ 160000 - 6666.666666666667 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -120000 \\ -160000 \\ -10000 \\ -120000 \\ 153333.333333333334 \end{Bmatrix}$$

Kot nebitveni prostostni stopnji bomo izbrali horizontalna pomika  $X_2$  in  $X_3$ , s čimer po ureditvi dobi togostna matrika naslednjo obliko:

$$[K] = \begin{bmatrix} 1204.05 & 16.2 & -4.05 & 16.2 & 0 & 0 \\ 16.2 & 186.4 & -16.2 & 43.2 & 37.5 & 0 \\ -4.05 & -16.2 & 1204.05 & -16.2 & 0 & 0 \\ 16.2 & 43.2 & -16.2 & 738.75 & 0 & 37.5 \\ \hline 0 & 37.5 & 0 & 0 & 738.75 & -16.2 \\ 0 & 0 & 0 & 37.5 & -16.2 & 738.75 \end{bmatrix} \cdot 10^6 = \begin{bmatrix} [K_{bb}] & [K_{bn}] \\ [K_{nb}] & [K_{nn}] \end{bmatrix}$$

kjer so podmatrke naslednje:

$$\begin{aligned}
 [K_{bb}] &= \begin{bmatrix} 1204.05 & 16.2 & -4.05 & 16.2 \\ 16.2 & 186.4 & -16.2 & 43.2 \\ -4.05 & -16.2 & 1204.05 & -16.2 \\ 16.2 & 43.2 & -16.2 & 738.75 \end{bmatrix} \cdot 10^6 & [K_{nn}] &= \begin{bmatrix} 738.75 & -16.2 \\ -16.2 & 738.75 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \\
 [K_{bn}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 37.5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 37.5 \end{bmatrix} \cdot 10^6 & [K_{nb}] &= \begin{bmatrix} 0 & 37.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 37.5 \end{bmatrix} \cdot 10^6 = [K_{bn}]^T
 \end{aligned}$$

Kondenzirana togostna matrika konstrukcije je tako:

$$\begin{aligned}
 [K_c] &= [K_{bb}] - [K_{bn}] \cdot [K_{nn}]^{-1} \cdot [K_{nb}] \\
 &= \begin{bmatrix} 1204.05 & 16.2 & -4.05 & 16.2 \\ 16.2 & 186.4 & -16.2 & 43.2 \\ -4.05 & -16.2 & 1204.05 & -16.2 \\ 16.2 & 43.2 & -16.2 & 738.75 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \\
 &- \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 37.5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 37.5 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{bmatrix} 738.75 & -16.2 \\ -16.2 & 738.75 \end{bmatrix}^{-1} \cdot 10^{-6} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 37.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 37.5 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \\
 &= \begin{bmatrix} 1204.05 & 16.2 & -4.05 & 16.2 \\ 16.2 & 148.41799485861182 & -16.2 & 6.182005141388193 \\ -4.05 & -16.2 & 1204.05 & -16.2 \\ 16.2 & 6.182005141388193 & -16.2 & 148.41799485861185 \end{bmatrix} \cdot 10^6
 \end{aligned}$$

Globalni obtežni vektor konstrukcije pa preuredimo v obliko:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} -120000 \\ -160000 \\ -120000 \\ \hline 153333.33333333334 \\ 0 \\ -10000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_b\} \\ \{F_n\} \end{Bmatrix} \rightarrow \{F_b\} = \begin{Bmatrix} -120000 \\ -160000 \\ -120000 \\ 153333.33333333334 \end{Bmatrix} \quad \{F_n\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -10000 \end{Bmatrix}$$

Tako urejeni togostni matriki in obtežnemu vektorju pripada enako urejen vektor neznank:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \\ \dots \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \left\{ \begin{Bmatrix} U_b \end{Bmatrix} \right\} \rightarrow \{U_b\} = \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} \quad \{U_n\} = \begin{Bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}$$

Kondenzirani obtežni vektor konstrukcije pa je:

$$\begin{aligned} \{F_c\} &= \{F_b\} - [K_{bn}] \cdot [K_{mn}]^{-1} \cdot \{F_n\} = \\ & \begin{Bmatrix} -120000 \\ -160000 \\ -120000 \\ 153333.33333333334 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 37.5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 37.5 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{bmatrix} 738.75 & -16.2 \\ -16.2 & 738.75 \end{bmatrix}^{-1} \cdot 10^{-6} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -10000 \end{Bmatrix} \\ & = \begin{Bmatrix} -120000 \\ -150128.5347043702 \\ -120000 \\ 163461.8680377035 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Tako smo iskanje (delnih oz »bistvenih«) rešitev sistema  $6 \times 6 \{F\} = [K] \cdot \{U\}$  prevedli v reševanje sistema  $4 \times 4$ :

$$\begin{aligned} \{F_c\} &= [K_c] \cdot \{U_c\} = [K_c] \cdot \{U_b\} \\ & \begin{Bmatrix} -120000 \\ -150128.5347043702 \\ -120000 \\ 163461.8680377035 \end{Bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} 1204.05 & 16.2 & -4.05 & 16.2 \\ 16.2 & 148.41799485861182 & -16.2 & 6.182005141388193 \\ -4.05 & -16.2 & 1204.05 & -16.2 \\ 16.2 & 6.182005141388193 & -16.2 & 148.41799485861185 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Rešitve sistema so:

$$\{U_b\} = \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.0116302548156523 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ -1.05899377405417 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -9.883697451843477 \cdot 10^{-5} \text{ m} \\ 1.1457253224664513 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Vrednosti »manjkajočih« nebitvenih prostostnih stopenj (= horizontalnih pomikov) izračunamo kot:

$$\{U_n\} = [K_{nn}]^{-1} \cdot (\{F_n\} - [K_{nb}] \cdot \{U_b\}) =$$

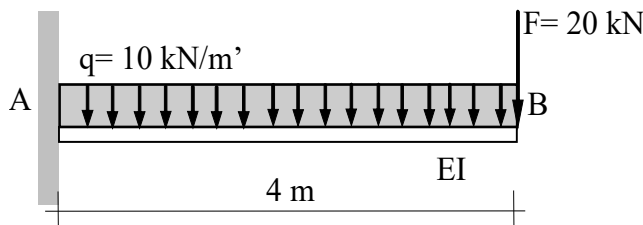
$$\begin{bmatrix} 738.75 & -16.2 \\ -16.2 & 738.75 \end{bmatrix}^{-1} \cdot 10^{-6} \cdot \left( \begin{Bmatrix} 0 \\ -10000 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 37.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 37.5 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} -1.0116302548156523 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ -1.05899377405417 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -9.88369745184348 \cdot 10^{-5} \text{ m} \\ 1.1457253224664513 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix} \right)$$

$$\{U_n\} = \begin{Bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3.216323312333531 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ -3.8516409892454294 \cdot 10^{-4} \text{ m} \end{Bmatrix}$$

Ko so vse vrednosti primarnih spremenljivk znane, je faza poprocesiranja enaka kot pri klasični analizi.

### Primer 20.a – Levo vpeta konzola – analiza z uporabo podkonstrukcij I

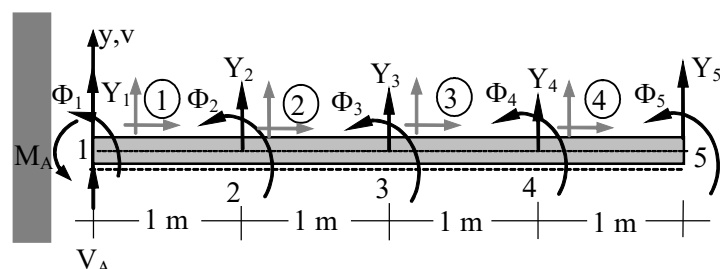
Za dani konzolni nosilec ( $b/h = 0.2 \text{ m}/0.4 \text{ m}$ ) iz betona C20/25 ( $E = 30 \text{ GPa}$ ) določi pomik in zasuk desnega konca nosilca, funkcijo prečnega pomika vzdolž konstrukcije, funkciji notranjih statičnih količin ter reakcije v podpori.



Slika 246: Obravnavana konzola

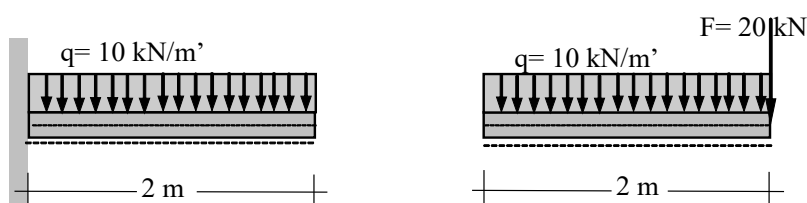
## Rešitev

Izberemo npr. diskretizacijo s štirimi enako dolgimi končnimi elementi:



Slika 247: Izbrana diskretizacija s štirimi enako dolgimi končnimi elementi

Pri reševanju z metodo podkonstrukcij konstrukcijo razdelimo na dve (lahko tudi več) izbrani podkonstrukciji, npr.:

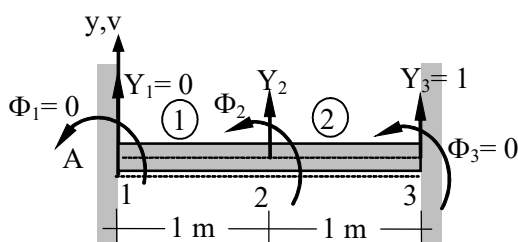


Slika 248: Izbrani podkonstrukciji

pri čemer vsako podkonstrukcijo sestavljata dva enako dolga končna elementa. Za vsako izmed podkonstrukcij moramo izračunati togostno matriko mejnih vozlišč (v obravnavanem primeru nastopa eno samo mejno vozlišče). Vsako podkonstrukcijo tako najprej ločeno obremenjujemo izključno z enotskimi pomiki oz. zasuki v mejnih podporah (na podkonstrukcijah *ne* upoštevamo morebitnih »zunanjih« obtežb) ter odčitujemo reakcije v mejnih podporah.

*Iskanje togostne matrike mejnega vozlišča prve oz. leve podkonstrukcije*

Najprej izvedemo pozitivni enotski pomik desnega konca prve podkonstrukcije:



Slika 249: Obremenitev mejnega vozlišča z enotskim prečnim pomikom

Togostne matrice vseh elementov obeh podkonstrukcij, ki so (slučajno) medsebojno enake, so:

$$[K_1] = [K_2] = [K_3] = [K_4] = \begin{bmatrix} 3.84 & 1.92 & -3.84 & 1.92 \\ 1.92 & 1.28 & -1.92 & 0.64 \\ -3.84 & -1.92 & 3.84 & -1.92 \\ 1.92 & 0.64 & -1.92 & 1.28 \end{bmatrix} \cdot 10^8 \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix}$$

Prvi dve matrici združimo v togostno matrico prve podkonstrukcije (zaradi vpetega levega konca nas dejansko zanimata samo prvi dve vrstici):

$$\begin{bmatrix} 768 & 0 & -384 & 192 \\ 0 & 256 & -192 & 64 \\ -384 & -192 & 384 & -192 \\ 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

in zapišemo splošni sistem enačb:

$$\begin{bmatrix} 7.68 \cdot 10^8 & 0 & -3.84 \cdot 10^8 & 1.92 \cdot 10^8 \\ 0 & 2.56 \cdot 10^8 & -1.92 \cdot 10^8 & 0.64 \cdot 10^8 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ki po upoštevanju enotskega pomika in ničelnega zasuka desnega konca dobi obliko:

$$\begin{bmatrix} 7.68 \cdot 10^8 & 0 & -3.84 \cdot 10^8 \\ 0 & 2.56 \cdot 10^8 & -1.92 \cdot 10^8 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 7.68 \cdot 10^8 & 0 \\ 0 & 2.56 \cdot 10^8 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.84 \cdot 10^8 \\ 1.92 \cdot 10^8 \end{Bmatrix}$$

ki ima rešitvi:

$$\begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0.75 \end{Bmatrix}$$

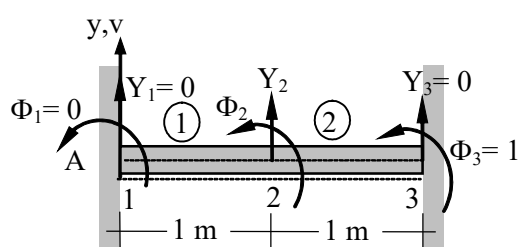
Opomba: enaki vrednosti pomika in zasuka sledita tudi z uporabo interpolacijskih funkcij H1 ob upoštevanju znanih vozliščnih pomikov in zasukov za nosilec dolžine 2 m.

Nato izračunamo pripadajoči reakciji v vozlišču 3:

$$\begin{aligned} \{Q_2\} &= [K_2] \cdot \{U_2\} = \begin{bmatrix} 3.84 & 1.92 & -3.84 & 1.92 \\ 1.92 & 1.28 & -1.92 & 0.64 \\ -3.84 & -1.92 & 3.84 & -1.92 \\ 1.92 & 0.64 & -1.92 & 1.28 \end{bmatrix} \cdot 10^8 \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3.84 & 1.92 & -3.84 & 1.92 \\ 1.92 & 1.28 & -1.92 & 0.64 \\ -3.84 & -1.92 & 3.84 & -1.92 \\ 1.92 & 0.64 & -1.92 & 1.28 \end{bmatrix} \cdot 10^8 \cdot \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0.75 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -48 \cdot 10^6 \text{ N} \\ 0 \text{ Nm} \\ 48 \cdot 10^6 \text{ N} \\ -48 \cdot 10^6 \text{ Nm} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

V vozlišču 3 nastopi vertikalna reakcija velikosti 48 MN (usmerjena navzgor) in sourni upogibni moment velikosti 48 MNm.

Sedaj izvedemo še pozitivni enotski zasuk desnega konca prve oz. leve podkonstrukcije



Slika 250: Obremenitev mejnega vozlišča z enotskim zasukom

in ob upoštevanju enotskega zasuka in ničelnega pomika desnega konca zapišemo nov pripadajoči sistem enačb:

$$\begin{bmatrix} 7.68 \cdot 10^8 & 0 & 1.92 \cdot 10^8 \\ 0 & 2.56 \cdot 10^8 & 0.64 \cdot 10^8 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 7.68 \cdot 10^8 & 0 \\ 0 & 2.56 \cdot 10^8 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.92 \cdot 10^8 \\ -0.64 \cdot 10^8 \end{Bmatrix}$$

ki ima rešitvi:

$$\begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.25 \\ -0.25 \end{Bmatrix}$$

Opomba: tudi sedaj enaki vrednosti sledita z uporabo interpolacijskih funkcij H1 ob upoštevanju znanih vozliščnih pomikov in zasukov za nosilec dolžine 2 m.

Nato izračunamo še pripadajoči reakciji v vozlišču 3:

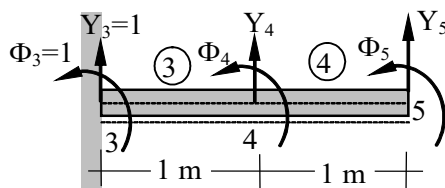
$$\{Q_2\} = [K_2] \cdot \{U_2\} = \begin{bmatrix} 3.84 & 1.92 & -3.84 & 1.92 \\ 1.92 & 1.28 & -1.92 & 0.64 \\ -3.84 & -1.92 & 3.84 & -1.92 \\ 1.92 & 0.64 & -1.92 & 1.28 \end{bmatrix} \cdot 10^8 \cdot \begin{Bmatrix} -0.25 \\ -0.25 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 48 \cdot 10^6 \text{ N} \\ -16 \cdot 10^6 \text{ Nm} \\ -48 \cdot 10^6 \text{ N} \\ 64 \cdot 10^6 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

V vozlišču 3 tako nastopi vertikalna reakcija velikosti 48 MN (usmerjena navzdol) in protiurni upogibni moment velikosti 64 MNm.

Za prvo podkonstrukcijo tako sledi togostna matrika mejnega vozlišča:

$$[K_m^I] = \begin{bmatrix} 48 & -48 \\ -48 & 64 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

*Iskanje togostne matrike mejnega vozlišča druge oz. desne podkonstrukcije*



Slika 251: Obremenitev mejnega vozlišča z enotskim prečnim pomikom in zasukom

Ker pa je druga konstrukcija statično določena, zanjo sledi:

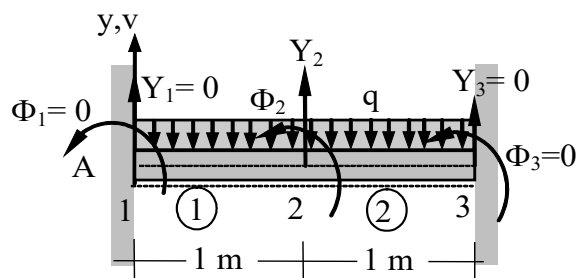
$$[K_m^{II}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

Mejna togostna matrika konstrukcije je tako:

$$[K_m] = [K_m^I] + [K_m^{II}] = \begin{bmatrix} 48 & -48 \\ -48 & 64 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

Sedaj poiščemo reakcije v mejnih vozliščih zaradi dejanskih obtežb na posamezni podkonstrukciji.

Reakcije v mejnem vozlišču prve oz. leve podkonstrukcije



Slika 252: Obremenitev prve podkonstrukcije z dejansko obtežbo

Za prvo podkonstrukcijo tako zapišemo sistem enačb:

$$\begin{bmatrix} 7.68 \cdot 10^8 & 0 \\ 0 & 2.56 \cdot 10^8 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ki ima rešitvi:

$$\begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.30208333333333 \cdot 10^{-5} \text{ m} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

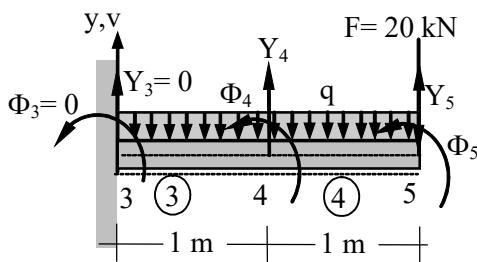
Nato izračunamo pripadajoči reakciji v vozlišču 3:

$$\begin{aligned} \{Q_2\} &= [K_2] \cdot \{U_2\} - \{F_2\} = \\ &= \begin{bmatrix} 3.84 & 1.92 & -3.84 & 1.92 \\ 1.92 & 1.28 & -1.92 & 0.64 \\ -3.84 & -1.92 & 3.84 & -1.92 \\ 1.92 & 0.64 & -1.92 & 1.28 \end{bmatrix} \cdot 10^8 \cdot \begin{Bmatrix} -1.30208333333333 \cdot 10^{-5} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -5000 \\ -833.333333333333 \\ -5000 \\ 833.333333333333 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 0 \text{ N} \\ -1666.6666666667 \text{ Nm} \\ 10000 \text{ N} \\ -3333.3333333333 \text{ Nm} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

V vozlišču 3 torej nastopita vertikalna reakcija velikosti 10 kN (usmerjena navgor) in sourni upogibni moment velikosti 3.333333 kNm. Tako sledi vektor reakcij v mejnem vozlišču prve podkonstrukcije:

$$\{R_m^I\} = \begin{Bmatrix} 10000 \text{ N} \\ -3333.3333333333 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Reakcije v mejnem vozlišču druge oz. desne podkonstrukcije



Slika 253: Obremenitev druge oz. desne podkonstrukcije z dejansko obtežbo

Ker je druga podkonstrukcija konzola, in je torej statično določena, lahko reakciji izračunamo kar z ravnotežnima enačbama. V vozlišču 3 nastopi tako vertikalna reakcija velikosti 40 kN (usmerjena navgor) in protiurni upogibni moment velikosti 60 kNm. Tako sledi vektor reakcij v mejnem vozlišču druge podkonstrukcije:

$$\{\mathbf{R}_m^{\text{II}}\} = \begin{Bmatrix} 40000 \text{ N} \\ 60000 \text{ Nm} \end{Bmatrix}$$

Rezultirajoči vektor obtežb mejnega vozlišča  $\{S_m\}$  je tako (v vozlišču ne deluje nobena neposredna koncentrirana obtežba):

$$\{S_m\} = \{F_m\} - \{R_m^{\text{I}}\} - \{R_m^{\text{II}}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 10000 \\ -3333.3333333333 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 40000 \\ 60000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -50000 \\ -56666.6666666667 \end{Bmatrix}$$

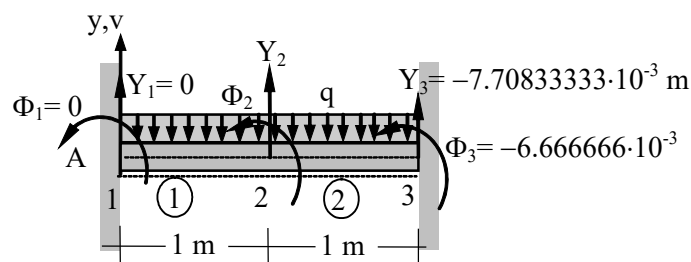
Vektor končnih pomikov mejnih vozlišč konstrukcije  $\{S_m\}$  je tako:

$$\{U_m\} = [K_m]^{-1} \cdot \{S_m\} = \begin{Bmatrix} Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7.708333333333354 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -6.666666666666687 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

ki je točen.

*Analiza pomikov in zasukov prve oz. leve podkonstrukcije*

Prvo podkonstrukcijo sedaj hkrati obremenimo z njenimi dejanskimi obtežbami in pravkar izračunanimi pomiki  $\{U_m\}$  mejnih vozlišč, kar pripelje do končnih pomikov vseh vozlišč in notranjih statičnih količin prve podkonstrukcije.



Slika 254: Obremenitev prve podkonstrukcije z dejansko obtežbo in mejnima pomikoma

Za prvo podkonstrukcijo tako zapišemo sistem enačb:

$$\begin{bmatrix} 7.68 \cdot 10^8 & 0 & -3.84 \cdot 10^8 & 1.92 \cdot 10^8 \\ 0 & 2.56 \cdot 10^8 & -1.92 \cdot 10^8 & 0.64 \cdot 10^8 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

oziroma

$$\begin{bmatrix} 7.68 \cdot 10^8 & 0 & -3.84 \cdot 10^8 & 1.92 \cdot 10^8 \\ 0 & 2.56 \cdot 10^8 & -1.92 \cdot 10^8 & 0.64 \cdot 10^8 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ -7.7083333333333354 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -6.6666666666666687 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

kar po ureditvi vodi do:

$$\begin{bmatrix} 7.68 \cdot 10^8 & 0 & -3.84 \cdot 10^8 & 1.92 \cdot 10^8 \\ 0 & 2.56 \cdot 10^8 & -1.92 \cdot 10^8 & 0.64 \cdot 10^8 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ -7.7083333333333354 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -6.6666666666666687 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

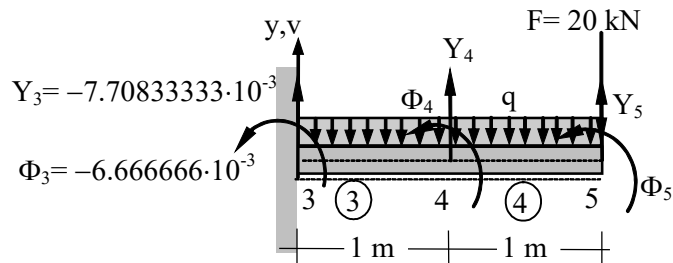
$$\begin{bmatrix} 7.68 \cdot 10^8 & 0 \\ 0 & 2.56 \cdot 10^8 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -3.84 \cdot 10^8 \\ -1.92 \cdot 10^8 \end{bmatrix} \cdot (-7.7083333333333354 \cdot 10^{-3} \text{ m}) - \begin{bmatrix} 1.92 \cdot 10^8 \\ 0.64 \cdot 10^8 \end{bmatrix} \cdot (-6.6666666666666687 \cdot 10^{-3} \text{ rad}) = \begin{Bmatrix} -1.69 \cdot 10^6 \\ -1.05333333333333 \cdot 10^6 \end{Bmatrix}$$

ki ima rešitvi:

$$\begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.20052083333333 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -4.11458333333333 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

*Analiza pomikov in zasukov druge oz. desne podkonstrukcije*

Nato še drugo podkonstrukcijo obremenimo z njenimi dejanskimi obtežbami in izračunanimi pomiki  $\{U_m\}$  mejnih vozlišč:



Slika 255: Obremenitev druge podkonstrukcije z dejansko obtežbo in mejnima pomikoma

Za drugo podkonstrukcijo tako zapišemo sistem enačb:

$$\begin{bmatrix} -3.84 \cdot 10^8 & -1.92 \cdot 10^8 & 7.68 \cdot 10^8 & 0 & -3.84 \cdot 10^8 & 1.92 \cdot 10^8 \\ 1.92 \cdot 10^8 & 0.64 \cdot 10^8 & 0 & 2.56 \cdot 10^8 & -1.92 \cdot 10^8 & 0.64 \cdot 10^8 \\ 0 & 0 & -3.84 \cdot 10^8 & -1.92 \cdot 10^8 & 3.84 \cdot 10^8 & -1.92 \cdot 10^8 \\ 0 & 0 & 1.92 \cdot 10^8 & 0.64 \cdot 10^8 & -1.92 \cdot 10^8 & 1.28 \cdot 10^8 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y_3 \\ \Phi_3 \\ Y_4 \\ \Phi_4 \\ Y_5 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \\ -25000 \\ 833.3333333339542 \end{Bmatrix}$$

oziroma

$$\begin{bmatrix} -3.84 & -1.92 & 7.68 & 0 & -3.84 & 1.92 \\ 1.92 & 0.64 & 0 & 2.56 & -1.92 & 0.64 \\ 0 & 0 & -3.84 & -1.92 & 3.84 & -1.92 \\ 0 & 0 & 1.92 & 0.64 & -1.92 & 1.28 \end{bmatrix} \cdot 10^8 \cdot \begin{Bmatrix} -7.7083333333333354 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -6.6666666666666687 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ Y_4 \\ \Phi_4 \\ Y_5 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \\ -25000 \\ 833.3333333339542 \end{Bmatrix}$$

kar dalje vodi do sistema:

$$\begin{bmatrix} 7.68 & 0 & -3.84 & 1.92 \\ 0 & 2.56 & -1.92 & 0.64 \\ -3.84 & -1.92 & 3.84 & -1.92 \\ 1.92 & 0.64 & -1.92 & 1.28 \end{bmatrix} \cdot 10^8 \cdot \begin{Bmatrix} Y_4 \\ \Phi_4 \\ Y_5 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \\ -25000 \\ 833.3333333339542 \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{Bmatrix} -3.84 \\ 1.92 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^8 \cdot (-7.708333333333354 \cdot 10^{-3} \text{ m}) - \begin{Bmatrix} -1.92 \\ 0.64 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot 10^8 \cdot (-6.666666666666687 \cdot 10^{-3} \text{ rad})$$

$$= \begin{Bmatrix} -4.25 \cdot 10^6 \\ 1.90666666667 \cdot 10^6 \\ -2.5 \cdot 10^4 \\ 8.333 \cdot 10^2 \end{Bmatrix}$$

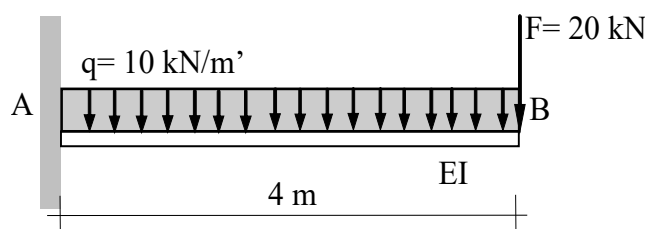
ki ima rešitve:

$$\begin{Bmatrix} Y_4 \\ \Phi_4 \\ Y_5 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15.1171875 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -7.96875 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -23.3333333333332 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -8.33333333333324 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Tako so znani končni pomiki oz. primarne spremenljivke vseh vozlišč, faza poprocesiranja v nadaljevanju pa je enaka kot pri klasični analizi (glej 4. računski model s 4 končnimi elementi Primera 6.a).

### Primer 20.b – Levo vpeta konzola – analiza podkonstrukcij s statično kondenzacijo – II

Za konzolo iz Primera 20.a, modelirano s štirimi končnimi elementi enakih dolžin, bo ponovno narejena analiza s podkonstrukcijami, za katere pa bodo togostne matrike in obtežni vektorji tokrat dobljeni s kondenzacijo. Uporabljena bosta dva računski modela.

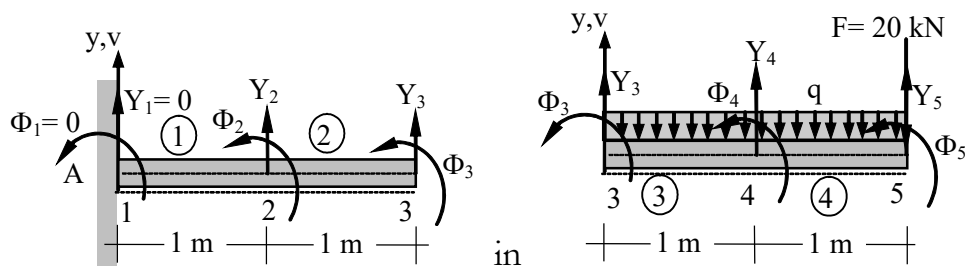


Slika 256: Obravnavana konzola

## Rešitev

### I. računski model - uporaba ene podkonstrukcije

Pri tem računskem modelu konstrukcijo razdelimo na izbrano podkonstrukcijo in preostanek konstrukcije, npr.:



Slika 257: Podkonstrukcija in preostanek konstrukcije

### Podkonstrukcija

Togostni matriki elementov podkonstrukcije sta:

$$[k_1] = \begin{bmatrix} -384 & -192 & -384 & -192 \\ -192 & 128 & -192 & 64 \\ -384 & -192 & 384 & -192 \\ 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \quad \text{in} \quad [k_2] = \begin{bmatrix} 384 & 192 & -384 & 192 \\ 192 & 128 & -192 & 64 \\ -384 & -192 & 384 & -192 \\ 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

Združimo jo v togostno matriko podkonstrukcije (ob upoštevanju ničelnih vrednosti pomika  $Y_1$  in zasuka  $\Phi_1$  v levi podpori):

$$[\bar{k}_1] = \begin{bmatrix} 768 & 0 & -384 & 192 \\ 0 & 256 & -192 & 64 \\ -384 & -192 & 384 & -192 \\ 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

Obtežna vektorja elementov sta enaka:

$$\{F_1\} = \{F_2\} = \begin{Bmatrix} -5000 \\ -833.3333333333334 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

in tudi njiju združimo v obtežni vektor podkonstrukcije:

$$\{\bar{F}_1\} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

Matrične enačbe podkonstrukcije imajo sedaj obliko:

$$\begin{bmatrix} 768 & 0 & -384 & 192 \\ 0 & 256 & -192 & 64 \\ -384 & -192 & 384 & -192 \\ 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

Togostno matriko mejnih vozlišč podkonstrukcije izračunamo s *statično kondenzacijo*, kjer kot bistveni prostostni stopnji upoštevamo prostostni stopnji mejnega vozlišča, torej  $Y_3$  in  $\Phi_3$ , kot nebitveni prostostni stopnji pa upoštevamo prostostni stopnji notranjega vozlišča, torej  $Y_2$  in  $\Phi_2$ . Zato moramo iz matrične enačbe podkonstrukcije s kondenzacijo odstraniti prostostni stopnji notranjega vozlišča ( $Y_2$  in  $\Phi_2$ ). Tako sistem naprej zapišemo v obliko, kjer ustrezno zamenjamo vrstni red vrstic:

$$\begin{bmatrix} -384 & -192 & 384 & -192 \\ 192 & 64 & -192 & 128 \\ \hline 768 & 0 & -384 & 192 \\ 0 & 256 & -192 & 64 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5000 \\ 833.3333333333334 \\ -10000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ter nato še v obliko, kjer ustrezno zamenjamo vrstni red stolpcev:

$$\begin{bmatrix} 384 & -192 & -384 & -192 \\ -192 & 128 & 192 & 64 \\ \hline -384 & 192 & 768 & 0 \\ -192 & 64 & 0 & 256 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_3 \\ \Phi_3 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5000 \\ 833.3333333333334 \\ -10000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Oziroma

$$\begin{aligned} [K_{bb,1}] &= \begin{bmatrix} 384 & -192 \\ -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6 & [K_{bn,1}] &= \begin{bmatrix} -384 & -192 \\ 192 & 64 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \\ [K_{nb,1}] &= \begin{bmatrix} -384 & 192 \\ -192 & 64 \end{bmatrix} \cdot 10^6 = [K_{bn,1}]^T & [K_{nn,1}] &= \begin{bmatrix} 768 & 0 \\ 0 & 256 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \end{aligned}$$

ter

$$\{F_{b,1}\} = \begin{Bmatrix} -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix} \quad \{F_{n,1}\} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Z že znanim postopkom statične kondenzacije tako sledita kondenzirana togostna matrika in obtežni vektor podkonstrukcije:

$$[\bar{k}_1] = [K_{bb,1}] - [K_{bn,1}] \cdot [K_{nn,1}]^{-1} \cdot [K_{nb,1}] = \begin{bmatrix} 48 & -48 \\ -48 & 64 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

in

$$\{\bar{F}_1\} = \{F_{b,1}\} - [K_{bn,1}] \cdot [K_{nn,1}]^{-1} \cdot \{F_{n,1}\} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ 3333.3333333333335 \end{Bmatrix}$$

Kondenzirana togostna matrika je enaka kot v Primeru 20.a, sedaj dobljeni obtežni vektor podkonstrukcije pa je enak negativnemu vektorju reakcij prve podkonstrukcije iz Primera 20.a.

*Preostanek konstrukcije*

Togostni matriki elementov sta (slučajno enaki kot za prvo oz. edino podkonstrukcijo):

$$[k_3] = [k_4] = \begin{bmatrix} 384 & 192 & -384 & 192 \\ 192 & 128 & -192 & 64 \\ -384 & -192 & 384 & -192 \\ 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

Združimo jo v togostno matriko celotnega preostanka konstrukcije:

$$[\bar{k}_2] = \begin{bmatrix} 384 & 192 & -384 & 192 & 0 & 0 \\ 192 & 128 & -192 & 64 & 0 & 0 \\ -384 & -192 & 768 & 0 & -384 & 192 \\ 192 & 64 & 0 & 256 & -192 & 64 \\ 0 & 0 & -384 & -192 & 384 & -192 \\ 0 & 0 & 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

Obtežna vektorja elementov sta (slučajno enaka kot za podkonstrukcijo):

$$\{F_3\} = \{F_4\} = \begin{Bmatrix} -5000 \\ -833.3333333333334 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

in tudi njiju združimo v obtežni vektor preostanka konstrukcije:

$$\{\bar{F}_2\} = \begin{Bmatrix} -5000 \\ -833.3333333333334 \\ -10000 \\ 0 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

Matrične enačbe konstrukcije imajo sedaj obliko:

$$= \begin{Bmatrix} \boxed{384+48} & \boxed{192-48} & -384 & 192 & 0 & 0 \\ \boxed{192-48} & \boxed{128+48} & -192 & 64 & 0 & 0 \\ -384 & -192 & 768 & 0 & -384 & 192 \\ 192 & 64 & 0 & 256 & -192 & 64 \\ 0 & 0 & -384 & -192 & 384 & -192 \\ 0 & 0 & 192 & 64 & -192 & 128 \end{Bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_3 \\ \Phi_3 \\ Y_4 \\ \Phi_4 \\ Y_5 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \boxed{-5000-10000} \\ \boxed{-833.3333333333334+3333.3333333333335} \\ -10000 \\ 0 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

oziroma:

$$\begin{bmatrix} 432 & 144 & -384 & 192 & 0 & 0 \\ 144 & 192 & -192 & 64 & 0 & 0 \\ -384 & -192 & 768 & 0 & -384 & 192 \\ 192 & 64 & 0 & 256 & -192 & 64 \\ 0 & 0 & -384 & -192 & 384 & -192 \\ 0 & 0 & 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_3 \\ \Phi_3 \\ Y_4 \\ \Phi_4 \\ Y_5 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15000 \\ 2500 \\ -10000 \\ 0 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

ki ima rešitve:

$$\begin{Bmatrix} Y_3 \\ \Phi_3 \\ Y_4 \\ \Phi_4 \\ Y_5 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7.708333333333237 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -6.666666666666585 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -15.117187499999811 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -7.96875 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -23.333333333333046 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -8.333333333333238 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7.708333333333237 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -6.666666666666585 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -15.1171875 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -7.96875 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -23.333333333333046 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ -8.333333333333238 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Manjkajoče pomike in zasuke notranjih vozlišč (= nebitvene prostostne stopnje) edine podkonstrukcije izračunamo kot:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} &= [\mathbf{K}_{nn,1}]^{-1} \cdot (\{F_{n,1}\} - [\mathbf{K}_{nb,1}] \cdot \{\bar{U}_1\}) \\ &= \begin{bmatrix} 768 & 0 \\ 0 & 256 \end{bmatrix}^{-1} \cdot 10^{-6} \cdot \left( \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -384 & 192 \\ -192 & 64 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} -0.7708333333 \cdot 10^{-2} \\ -6.6666666667 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix} \right) \\ &= \begin{Bmatrix} -2.200520833333333 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -4.114583333333333 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Tako so znani končni pomiki oz. primarne spremenljivke vseh vozlišč, faza poprocesiranja v nadaljevanju pa je enaka kot pri klasični analizi, prikazani v četrti diskretizaciji Primera 6.a.

## II. računski model - uporaba dveh podkonstrukcij

V tem modelu ohranimo (prvo) podkonstrukcijo (in pripadajočo kondenzirano togostno matriko ter obtežni vektor) iz prvega pristopa, preostanek konstrukcije pa modeliramo kot drugo podkonstrukcijo, s čimer bomo končno število enačb konstrukcije še zmanjšali.

Togostni matriki elementov druge podkonstrukcije sta (slučajno enaki kot za prvo podkonstrukcijo):

$$[k_3] = [k_4] = \begin{bmatrix} 384 & 192 & -384 & 192 \\ 192 & 128 & -192 & 64 \\ -384 & -192 & 384 & -192 \\ 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

Združimo jo v togostno matriko druge podkonstrukcije:

$$[\bar{k}_2] = \begin{bmatrix} 384 & 192 & -384 & 192 & 0 & 0 \\ 192 & 128 & -192 & 64 & 0 & 0 \\ -384 & -192 & 768 & 0 & -384 & 192 \\ 192 & 64 & 0 & 256 & -192 & 64 \\ 0 & 0 & -384 & -192 & 384 & -192 \\ 0 & 0 & 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

Obtežna vektorja elementov sta (slučajno enaka kot za prvo podkonstrukcijo):

$$\{F_3\} = \{F_4\} = \begin{Bmatrix} -5000 \\ -833.3333333333334 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

in tudi njiju združimo v obtežni vektor druge podkonstrukcije, ki mu dodamo še koncentrirano silo F:

$$\{\bar{F}_2\} = \begin{Bmatrix} -5000 \\ -833.3333333333334 \\ -10000 \\ 0 \\ -25000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

Matrične enačbe druge podkonstrukcije imajo sedaj obliko iz katere s kondenzacijo odstranimo nebitvene prostostne stopnje notranjih vozlišč ( $Y_4$  in  $\Phi_4$  ter  $Y_5$  in  $\Phi_5$ ), pri čemer preurejanje sistema, torej zamenjava vrstnega reda vrstic in stolpcev (slučajno) ni potrebna:

$$\begin{bmatrix} 384 & 192 & -384 & 192 & 0 & 0 \\ 192 & 128 & -192 & 64 & 0 & 0 \\ -384 & -192 & 768 & 0 & -384 & 192 \\ 192 & 64 & 0 & 256 & -192 & 64 \\ 0 & 0 & -384 & -192 & 384 & -192 \\ 0 & 0 & 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_3 \\ \Phi_3 \\ Y_4 \\ \Phi_4 \\ Y_5 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5000 \\ -833.3333333333334 \\ -10000 \\ 0 \\ -25000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

kar vodi do:

$$\begin{aligned} [K_{bb,2}] &= \begin{bmatrix} 384 & 192 \\ 192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6 & [K_{nn,2}] &= \begin{bmatrix} 768 & 0 & -384 & 192 \\ 0 & 256 & -192 & 64 \\ -384 & -192 & -384 & -192 \\ 192 & 64 & 192 & 64 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \\ [K_{nb,2}] &= \begin{bmatrix} -384 & 192 \\ 192 & 64 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^6 & [K_{bn,2}] &= \begin{bmatrix} -384 & -192 & 0 & 0 \\ 192 & 64 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^6 = [K_{bn}]^T \end{aligned}$$

ter

$$\{F_{b,2}\} = \begin{Bmatrix} -5000 \\ -833.3333333333334 \end{Bmatrix} \quad \{F_{n,2}\} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \\ -25000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

S postopkom statične kondenzacije tako sledita kondenzirana togostna matrika in obtežni vektor druge podkonstrukcije:

$$[\bar{k}_2] = [K_{bb,2}] - [K_{bn,2}] \cdot [K_{nn,2}]^{-1} \cdot [K_{nb,2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

in

$$\{\bar{F}_2\} = \{F_{b,2}\} - [K_{bn,2}] \cdot [K_{nn,2}]^{-1} \cdot \{F_{n,2}\} = \begin{Bmatrix} -40000 \\ -60000 \end{Bmatrix}$$

Enačbe obeh podkonstrukcij sedaj združimo v matrično enačbo bistvenih prostostnih stopenj:

$$\begin{bmatrix} 48 & -48 \\ -48 & 64 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ 3333.3333333333335 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -40000 \\ -60000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -50000 \\ -56666.666666666674 \end{Bmatrix}$$

ki ima rešitvi:

$$\begin{Bmatrix} Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.77083333333333589 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -6.6666666666666881 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

ki so enake rešitvam iz klasične analize (manjša odstopanja so zgolj posledica zaokroževanj).

Pomike v nebstvenih prostostnih stopnjah prve podkonstrukcije izračunamo enako kot v I. pristopu, za drugo podkonstrukcijo pa manjkajoče pomike in zasuke notranjih vozlišč podkonstrukcije izračunamo kot:

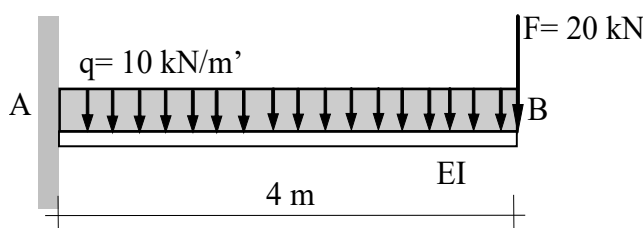
$$\begin{Bmatrix} Y_4 \\ \Phi_5 \\ Y_5 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = [K_{nn,2}]^{-1} \cdot (\{F_{n,2}\} - [K_{nb,2}] \cdot \{\bar{U}_2\}) = \begin{bmatrix} 768 & 0 & -384 & 192 \\ 0 & 256 & -192 & 64 \\ -384 & -192 & -384 & -192 \\ 192 & 64 & 192 & 64 \end{bmatrix}^{-1} \cdot 10^{-6} \cdot \left( \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \\ -25000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -384 & 192 \\ 192 & 64 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} -0.7708333333 \cdot 10^{-2} \\ -6.6666666667 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix} \right) = \begin{Bmatrix} -1.51171875 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -7.96875 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -2.33333333333334042 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -8.333333333333357 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Tudi te vrednosti so enake rešitvam iz klasične analize (manjša odstopanja so zgolj posledica zaokroževanj).

Tako so znani končni pomiki oz. primarne spremenljivke vseh vozlišč, faza poprocesiranja v nadaljevanju pa je enaka kot pri klasični analizi, prikazani v četrti diskretizaciji Primera 6.a.

## Primer 21 – Levo vpeta konzola – uporaba superkonstrukcij

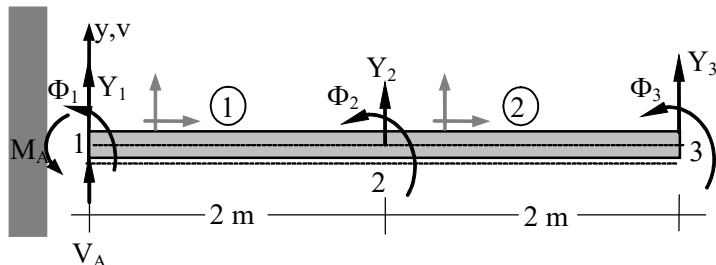
Za dani betonski konzolni nosilec pravkotnega prereza ( $b/h = 0.2 \text{ m}/0.4 \text{ m}$ ) iz betona C20/25 ( $E = 30 \text{ GPa}$ ) določi pomik in zasuk desnega konca nosilca, funkcijo prečnega pomika vzdolž konstrukcije, funkciji notranjih statičnih količin ter reakcije v podpori.



Slika 258: Obravnavana konzola

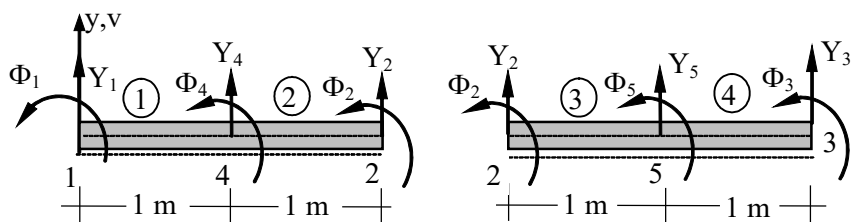
### Rešitev

Analizirali bomo računski model z dvema superkonstrukcijama enakih dolžin (nivo diskretizacije ena):



Slika 259: Izbrana diskretizacija z dvema superkonstrukcijama in »master« prostostnimi stopnjami

Vsako superkonstrukcijo bomo ločeno modelirali z dvema končnima elementoma enakih dolžin (nivo diskretizacije dva), kar bo v analizo vpeljalo dodatne nove notranje prostostne stopnje:



Slika 260: Izbrani superkonstrukciji z enako dolgimi končnimi elementi

Prva superkonstrukcija

Togostni matriki elementov, ki tvorita prvo superkonstrukcijo, sta (medsebojno enaki):

$$[k_1] = \begin{bmatrix} 384 & 192 & -384 & 192 \\ -192 & 128 & -192 & 64 \\ -384 & -192 & 384 & -192 \\ 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \quad \text{in} \quad [k_2] = \begin{bmatrix} 384 & 192 & -384 & 192 \\ 192 & 128 & -192 & 64 \\ -384 & -192 & 384 & -192 \\ 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

Združimo jo v togostno matriko prve superkonstrukcije (ob upoštevanju ničelnih vrednosti pomika in zasuka v levi podpori):

$$[\bar{k}_1] = \begin{bmatrix} 768 & 0 & -384 & 192 \\ 0 & 256 & -192 & 64 \\ -384 & -192 & 384 & -192 \\ 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

Obtežna vektorja obeh elementov sta enaka:

$$\{F_1\} = \{F_2\} = \begin{Bmatrix} -5000 \\ -833.3333333333334 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

in tudi njiju združimo v obtežni vektor prve superkonstrukcije:

$$\{\bar{F}_1\} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

Matrične enačbe prve superkonstrukcije imajo sedaj obliko:

$$\begin{bmatrix} 768 & 0 & -384 & 192 \\ 0 & 256 & -192 & 64 \\ -384 & -192 & 384 & -192 \\ 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_4 \\ \Phi_4 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

in iz njih moramo s kondenzacijo odstraniti prostostni stopnji notranjega vozlišča ( $Y_4$  in  $\Phi_4$ ), in zato sistem naprej zapišemo v obliko, kjer ustrezno zamenjamo vrstni red vrstic:

$$\begin{bmatrix} -384 & -192 & 384 & -192 \\ 192 & 64 & -192 & 128 \\ \hline 768 & 0 & -384 & 192 \\ 0 & 256 & -192 & 64 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_4 \\ \Phi_4 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5000 \\ 833.3333333333334 \\ \hline -10000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ter nato še v obliko, kjer ustrezno zamenjamo vrstni red stolpcev:

$$\begin{bmatrix} 384 & -192 & -384 & -192 \\ -192 & 128 & 192 & 64 \\ \hline -384 & 192 & 768 & 0 \\ -192 & 64 & 0 & 256 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_4 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5000 \\ 833.3333333333334 \\ \hline -10000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

in matrika razpade na štiri podmatrike:

$$\begin{aligned} [K_{bb1}] &= \begin{bmatrix} 384 & -192 \\ -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6 & [K_{bn1}] &= \begin{bmatrix} -384 & -192 \\ 192 & 64 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \\ [K_{nb1}] &= \begin{bmatrix} -384 & 192 \\ -192 & 64 \end{bmatrix} \cdot 10^6 = [K_{bn1}]^T & [K_{nn1}] &= \begin{bmatrix} 768 & 0 \\ 0 & 256 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \end{aligned}$$

obtežni vektor pa na dva dela:

$$\{F_{b1}\} = \begin{Bmatrix} -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix} \quad \{F_{n1}\} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Z že znanim postopkom statične kondenzacije tako sledita kondenzirana togostna matrika in obtežni vektor prve superkonstrukcije:

$$[\bar{K}_1] = [K_{bb1}] - [K_{bn1}] \cdot [K_{nn1}]^{-1} \cdot [K_{nb1}] = \begin{bmatrix} 48 & -48 \\ -48 & 64 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

in

$$\{\bar{F}_1\} = \{F_{b1}\} - [K_{bn1}] \cdot [K_{nn1}]^{-1} \cdot \{F_{n1}\} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ 3333.3333333333335 \end{Bmatrix}$$

*Druga superkonstrukcija*

Togostni matriki elementov sta (zaradi izbrane diskretizacije slučajno enaki kot za prvo superkonstrukcijo):

$$[k_3] = [k_4] = \begin{bmatrix} 384 & 192 & -384 & 192 \\ 192 & 128 & -192 & 64 \\ -384 & -192 & 384 & -192 \\ 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

Združimo jo v togostno matriko druge superkonstrukcije:

$$[\bar{k}_2] = \begin{bmatrix} 384 & 192 & -384 & 192 & 0 & 0 \\ 192 & 128 & -192 & 64 & 0 & 0 \\ -384 & -192 & 768 & 0 & -384 & 192 \\ 192 & 64 & 0 & 256 & -192 & 64 \\ 0 & 0 & -384 & -192 & 384 & -192 \\ 0 & 0 & 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

Obtežna vektorja elementov sta (slučajno enaka kot za prvo superkonstrukcijo):

$$\{F_3\} = \{F_4\} = \begin{Bmatrix} -5000 \\ -833.3333333333334 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

in tudi njiju združimo v obtežni vektor druge superkonstrukcije:

$$\{\bar{F}_2\} = \begin{Bmatrix} -5000 \\ -833.3333333333334 \\ -10000 \\ 0 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

Matrične enačbe druge superkonstrukcije imajo sedaj obliko:

$$\begin{bmatrix} 384 & 192 & -384 & 192 & 0 & 0 \\ 192 & 128 & -192 & 64 & 0 & 0 \\ -384 & -192 & 768 & 0 & -384 & 192 \\ 192 & 64 & 0 & 256 & -192 & 64 \\ 0 & 0 & -384 & -192 & 384 & -192 \\ 0 & 0 & 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_5 \\ \Phi_5 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5000 \\ -833.3333333333334 \\ -10000 \\ 0 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

in iz njega s kondenzacijo odstranimo prostostni stopnji notranjega vozlišča ( $Y_5$  in  $\Phi_5$ ), in zato sistem naprej zapišemo v obliko, kjer ustrezno zamenjamo vrstni red vrstic:

$$\begin{bmatrix} 384 & 192 & -384 & 192 & 0 & 0 \\ 192 & 128 & -192 & 64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -384 & -192 & 384 & -192 \\ 0 & 0 & 192 & 64 & -192 & 128 \\ \hline -384 & -192 & 768 & 0 & -384 & 192 \\ 192 & 64 & 0 & 256 & -192 & 64 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_5 \\ \Phi_5 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5000 \\ -833.3333333333334 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \\ \hline -10000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ter nato še v obliko, kjer ustrezno zamenjamo vrstni red stolpcev:

$$\begin{bmatrix} 384 & 192 & 0 & 0 & -384 & 192 \\ 192 & 128 & 0 & 0 & -192 & 64 \\ 0 & 0 & 384 & -192 & -384 & -192 \\ 0 & 0 & -192 & 128 & 192 & 64 \\ \hline -384 & -192 & -384 & 192 & 768 & 0 \\ 192 & 64 & -192 & 64 & 0 & 256 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \\ Y_5 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5000 \\ -833.3333333333334 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \\ \hline -10000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

in matrika razpade na štiri podmatrike:

$$[K_{bb2}] = \begin{bmatrix} 384 & 192 & 0 & 0 \\ 192 & 128 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 384 & -192 \\ 0 & 0 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \quad [K_{mn2}] = \begin{bmatrix} 768 & 0 \\ 0 & 256 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

$$[K_{nb2}] = \begin{bmatrix} -384 & -192 & -384 & 192 \\ 192 & 64 & -192 & 64 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \quad [K_{bn2}] = \begin{bmatrix} -384 & 192 \\ -192 & 64 \\ -384 & -192 \\ 192 & 64 \end{bmatrix} \cdot 10^6 = [K_{bn}]^T$$

obtežni vektor pa na dva dela:

$$\{F_{b2}\} = \begin{Bmatrix} -5000 \\ -833.3333333333334 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix} \quad \{F_{n2}\} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

S postopkom statične kondenzacije tako sledita kondenzirana togostna matrika in obtežni vektor druge superkonstrukcije:

$$[\bar{k}_2] = [K_{bb2}] - [K_{bn2}] \cdot [K_{nn2}]^{-1} \cdot [K_{nb2}] = \begin{bmatrix} 48 & 48 & -48 & 48 \\ 48 & 64 & -48 & 32 \\ -48 & -48 & 48 & -48 \\ 48 & 32 & -48 & 64 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

in

$$\{\bar{F}_2\} = \{F_{b2}\} - [K_{bn2}] \cdot [K_{nn2}]^{-1} \cdot \{F_{n2}\} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ -3333.3333333333335 \\ -10000 \\ 3333.3333333333335 \end{Bmatrix}$$

Opomba: ker sta obe superkonstrukciji pravzaprav enaki (razlika je samo v robnih pogojih), bi za sestavo matrične enačbe cele konstrukcije zadoščalo že poznavanje samo togostne matrike druge superkonstrukcije in pripadajočega obtežnega vektorja.

Opomba: ker gre za enostavni *demonstracijski* primer metode, je vsaka izmed superkonstrukcij pravzaprav enaka končnemu elementu dolžine 2 m.

Enačbe obeh superkonstrukcij združimo v matrične enačbe cele konstrukcije ter v obtežnem vektorju konstrukcije upoštevamo še koncentrirano silo  $F$ :

$$\begin{bmatrix} 96 & 0 & -48 & 48 \\ 0 & 128 & -48 & 32 \\ -48 & -48 & 48 & -48 \\ 48 & 32 & -48 & 64 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -20000 \\ 0 \\ -10000 \\ 3333.3333333333335 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -20000 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -20000 \\ 0 \\ -30000 \\ 3333.333333333333 \end{Bmatrix}$$

ki imajo rešitve:

$$\begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.7708333333333325 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -6.666666666666666 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -2.3333333333333327 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -8.333333333333331 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

ki so enake točnim rešitvam iz klasične analize.

Manjkajoče pomike in zasuke notranjih vozlišč posamezne superkonstrukcije izračunamo ločeno za vsako superkonstrukcijo, kar za prvo superkonstrukcijo vodi do:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} Y_4 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} &= [\mathbf{K}_{nn1}]^{-1} \cdot (\{F_{n1}\} - [\mathbf{K}_{nb1}] \cdot \{\bar{U}_1\}) \\ &= \begin{bmatrix} 768 & 0 \\ 0 & 256 \end{bmatrix}^{-1} \cdot 10^{-6} \cdot \left( \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -384 & 192 \\ -192 & 64 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} -0.7708333333 \cdot 10^{-2} \\ -6.6666666667 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix} \right) \\ &= \begin{Bmatrix} -2.2005208333333333 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -4.1145833333333333 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

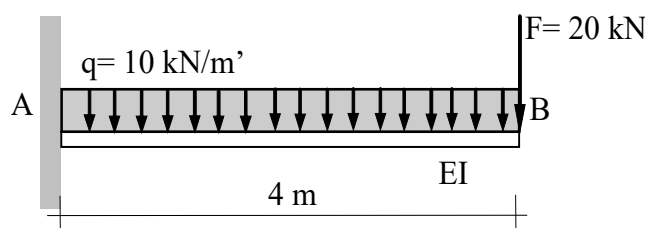
Za drugo superkonstrukcijo pa sledi:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} Y_5 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} &= [\mathbf{K}_{nn2}]^{-1} \cdot (\{F_{n2}\} - [\mathbf{K}_{nb2}] \cdot \{\bar{U}_2\}) \\ &= \begin{bmatrix} 768 & 0 \\ 0 & 256 \end{bmatrix}^{-1} \cdot 10^{-6} \\ &\cdot \left( \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -384 & -192 & -384 & 192 \\ 192 & 64 & -192 & 64 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} -0.7708333333333325 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -6.666666666666666 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -2.3333333333333327 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -8.333333333333331 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix} \right) \\ &= \begin{Bmatrix} -1.51171875 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -7.96875 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Ko so vrednosti primarnih spremenljivk znane, je faza poprocesiranja enaka kot pri klasični analizi (glej 4. računski model s 4 končnimi elementi primera 6.a).

### Primer 22\* – Levo vpeta konzola – analiza s frontalno metodo

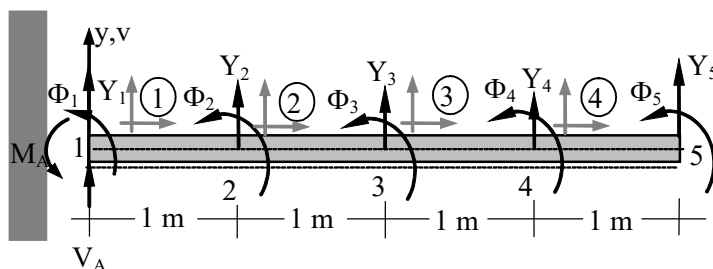
Za dani betonski konzolni nosilec ( $b/b = 0.2 \text{ m}/0.4 \text{ m}$ ) iz betona C20/25 ( $E = 30 \text{ GPa}$ ) določi pomik in zasuk desnega konca nosilca, funkcijo prečnega pomika vzdolž konstrukcije, funkciji notranjih statičnih količin ter reakcije v podpori.



Slika 261: Obravnavana konzola

### Rešitev

Za demonstracijo analize konstrukcije s pomočjo frontalne metode je izbran računski model s štirimi končnimi elementi enakih dolžin, ki so oštevilčeni od leve proti desni:



Slika 262: Izbrana diskretizacija s štirimi enako dolgimi končnimi elementi

Matrične enačbe za prvi končni element (brez vektorja sekundarnih spremenljivk) so:

$$[K_1] \cdot \{U_1\} = \{F_1\}$$

$$\begin{bmatrix} 384 & 192 & -384 & 192 \\ 192 & 128 & -192 & 64 \\ -384 & -192 & 384 & -192 \\ 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \Phi_1 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5000 \\ -833.3333333333334 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

Ker sta pomik  $Y_1$  in zasuk  $\Phi_1$  znana in enaka nič, iz zadnjih dveh enačb sledi:

$$\begin{bmatrix} 384 & -192 \\ -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

Opozoriti je potrebno, da dobljeni enačbi, ki sta formalno rešljivi, ne vodita do korektnih rezultatov, temveč samo predstavljata ekvivalent "originalnim" enačbam v matričnem zapisu.

Matrične enačbe za drugi končni element (brez vektorja sekundarnih spremenljivk) so:

$$[K_2] \cdot \{U_2\} = \{F_2\}$$

$$\begin{bmatrix} 384 & 192 & -384 & 192 \\ 192 & 128 & -192 & 64 \\ -384 & -192 & 384 & -192 \\ 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5000 \\ -833.3333333333334 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

Združitev ustreznih členov enačb prvega in drugega končnega elementa vodi do:

$$\begin{bmatrix} 384+384 & 192-192 & -384 & 192 \\ 192-192 & 128+128 & -192 & 64 \\ -384 & -192 & 384 & -192 \\ 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5000-5000 \\ -833.3333333333334+833.3333333333334 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

oziroma

$$\begin{bmatrix} 768 & 0 & -384 & 192 \\ 0 & 256 & -192 & 64 \\ -384 & -192 & 384 & -192 \\ 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

Tudi ta sistem je sicer formalno rešljiv, vendar ne vodi do pravih rezultatov konstrukcije.

V enačbah nastopata pomik  $Y_2$  in zasuk  $\Phi_2$ , ki pa ne nastopata več v nobeni izmed enačb preostalih končnih elementov. Zato je potrebno te enačbe preurediti tako, da nastaneta dve skupini enačb. V prvi skupini bodo ostale vse neznanke, enačb pa je toliko, kot je spremenljivk, ki ne nastopajo v enačbah preostalih končnih elementov (v obravnavanem

primeru torej 2). To skupino enačb, v kateri nastopajo vse neznanke, uredimo tako, da v prvi enačbi nastopajo vse neznanke, v vsaki naslednji pa ena manj.

V drugi skupini enačb pa nastopajo samo tiste neznanke, ki nastopajo še v preostalih končnih elementih oz. vsaj enem izmed njih (torej pomik  $Y_3$  in zasuk  $\Phi_3$ ). V obravnavanem primeru bosta tudi v tej skupini dve enačbi.

Končni cilj za obravnavani primer je torej oblika sistema:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ 0 & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ 0 & 0 & k_{33} & k_{34} \\ 0 & 0 & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_2 \\ \Phi_2 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix}$$

ali s stališča programiranja ugodnejša enakovredna oblika:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 & 0 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & 0 \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_3 \\ \Phi_3 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix}$$

kjer v prvih dveh vrsticah nastopata samo neznanke, ki se pojavita še v preostalih končnih elementih.

Zato enačbe (npr. z medsebojno zamenjavo 1. in 4. stolpca ter 2. in 3. stolpca matrike) preuredimo tako, da pomik  $Y_2$  in zasuk  $\Phi_2$  (v poljubnem vrstnem redu) nastopata v zadnjih dveh členih vektorja neznanke (vektor na desni strani se zaradi tega ne spremeni):

$$\begin{bmatrix} 192 & -384 & 0 & 768 \\ 64 & -192 & 256 & 0 \\ -192 & 384 & -192 & -384 \\ 128 & -192 & 64 & 192 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_3 \\ Y_3 \\ \Phi_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

Opomba: enakovreden sistem bi lahko dobili tudi z zamenjavo 1. in 3. stolpca ter 2. in 4. stolpca matrike.

Čeprav je sistem že korekten, je, zaradi prednosti, ki jih prinaša Gaussova eliminacija simetrične matrike, smiselno enačbe dalje preurediti tako, da se ohrani simetrija matrike. Tako npr. medsebojno zamenjamo 1. in 4. vrstico matrike ter 1. in 4. člen vektorja na desni strani, nato pa še medsebojno zamenjamo 2. in 3. vrstico matrike ter 2. in 3. člen vektorja na desni strani (možne so tudi druge zamenjave):

$$\begin{bmatrix} 128 & -192 & 64 & 192 \\ -192 & 384 & -192 & -384 \\ 64 & -192 & 256 & 0 \\ 192 & -384 & 0 & 768 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_3 \\ Y_3 \\ \Phi_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 833.3333333333334 \\ -5000 \\ 0 \\ -10000 \end{Bmatrix}$$

Opomba: dobljeno obliko bi dobili direktno, če bi izvedli transponiranje matrike preko sekundarne diagonale, ter medsebojno obrnili vrstni red členov obtežnega vektorja na desni.

Iz prvih dveh enačb moramo sedaj eliminirati ne več zanimivi oz. že nepotrebni prostostni stopnji (pomik  $Y_2$  in zasuk  $\Phi_2$ ), ki ne nastopata v preostalih elementih. Sistem moramo spremeniti na delno spodnjo levo trikotno obliko, za kar formalno potrebujemo pet eliminacij, saj moramo formalno eliminirati pet členov (ker pa je eden izmed členov že slučajno nič, tega člena seveda ni potrebno eliminirati):

$$\begin{bmatrix} 128 & -192 & \boxed{64} & \boxed{192} \\ -192 & 384 & \boxed{-192} & \boxed{-384} \\ 64 & -192 & 256 & 0 \\ 192 & -384 & 0 & 768 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_3 \\ Y_3 \\ \Phi_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 833.3333333333334 \\ -5000 \\ 0 \\ -10000 \end{Bmatrix}$$

Za eliminacijo 4. člena prve vrstice zato izračunamo pomožni faktor kot razmerje med členom, ki ga želimo eliminirati in (neničelnim) istoležnim členom neke druge vrstice, npr. četrte:

$$w = \frac{k_{14}}{k_{44}} = \frac{192 \cdot 10^6}{768 \cdot 10^6} = 0.25$$

S faktorjem  $w$ , imenovanim tudi pivot, sedaj pomnožimo člene od 1 do 4 četrte vrstice (in tudi pripadajoči člen obtežnega vektorja) in jih odštejemo od členov prve vrstice, kamor zapišemo tudi posamezne rezultate:

$$\begin{bmatrix} 128 - 0.25 \cdot 192 & -192 - 0.25 \cdot (-384) & 64 - 0.25 \cdot 0 & 192 - 0.25 \cdot 768 \\ -192 & 384 & -192 & -384 \\ 64 & -192 & 256 & 0 \\ 192 & -384 & 0 & 768 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_3 \\ Y_3 \\ \Phi_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 833.3333333333334 - 0.25 \cdot (-10000) \\ -5000 \\ 0 \\ -10000 \end{Bmatrix}$$

kar vodi do nove oblike sistema:

$$\begin{bmatrix} 80 & -96 & 64 & 0 \\ -192 & 384 & -192 & -384 \\ 64 & -192 & 256 & 0 \\ 192 & -384 & 0 & 768 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_3 \\ Y_3 \\ \Phi_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3333.333333333333 \\ -5000 \\ 0 \\ -10000 \end{Bmatrix}$$

Za eliminacijo 4. člena druge vrstice izračunamo nov faktor

$$w = \frac{k_{24}}{k_{44}} = \frac{-384 \cdot 10^6}{768 \cdot 10^6} = -0.5$$

S faktorjem  $w$  sedaj pomnožimo člene četrte vrstice (in tudi pripadajoči člen obtežnega vektorja) in jih odštejemo od členov druge vrstice, kamor zapišemo tudi posamezne rezultate:

$$\begin{bmatrix} 80 & -96 & 64 & 0 \\ -192 - (-0.5) \cdot 192 & 384 - (-0.5) \cdot (-384) & -192 - (-0.5) \cdot 0 & -384 - (-0.5) \cdot 768 \\ 64 & -192 & 256 & 0 \\ 192 & -384 & 0 & 768 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_3 \\ Y_3 \\ \Phi_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3333.333333333333 \\ -5000 - (-0.5) \cdot (-10000) \\ 0 \\ -10000 \end{Bmatrix}$$

kar vodi do:

$$\begin{bmatrix} 80 & -96 & 64 & 0 \\ -96 & 192 & -192 & 0 \\ 64 & -192 & 256 & 0 \\ 192 & -384 & 0 & 768 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_3 \\ Y_3 \\ \Phi_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3333.3333333333 \\ -10000 \\ 0 \\ -10000 \end{Bmatrix}$$

Naslednji korak bi bila eliminacija 4. člena tretje vrstice. Ker pa velja:

$$w = \frac{k_{34}}{k_{44}} = \frac{0}{768 \cdot 10^6} = 0$$

in je tako (slučajno) četrti člen 3. vrstice že enak 0, nadaljujemo z eliminacijo 3. člena prve vrstice. Tako poiščemo naslednji faktor:

$$w = \frac{k_{13}}{k_{33}} = \frac{64 \cdot 10^6}{256 \cdot 10^6} = 0.25$$

in izvedemo eliminacijo in s faktorjem  $w$  pomnožimo člene od 1 do 3 tretje vrstice (in tudi pripadajoči člen obtežnega vektorja) in jih odštejemo od členov prve vrstice, kamor zapišemo tudi posamezne rezultate:

$$\begin{bmatrix} 80 - 0.25 \cdot 64 & -96 - 0.25 \cdot (-192) & 64 - 0.25 \cdot 256 & 0 \\ -96 & 192 & -192 & 0 \\ 64 & -192 & 256 & 0 \\ 192 & -384 & 0 & 768 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_3 \\ Y_3 \\ \Phi_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3333.3333333333 - 0.25 \cdot 0 \\ -10000 \\ 0 \\ -10000 \end{Bmatrix}$$

kar vodi do:

$$\begin{bmatrix} 64 & -48 & 0 & 0 \\ -96 & 192 & -192 & 0 \\ 64 & -192 & 256 & 0 \\ 192 & -384 & 0 & 768 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_3 \\ Y_3 \\ \Phi_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3333.3333333333 \\ -10000 \\ 0 \\ -10000 \end{Bmatrix}$$

Poiščemo še naslednji pivot, ki bo eliminiral 3. člen druge vrstice:

$$w = \frac{k_{23}}{k_{33}} = \frac{-192 \cdot 10^6}{256 \cdot 10^6} = -0.75$$

Nato izvedemo eliminacijo edinega preostalega člena prve vrstice in s faktorjem  $w$  sedaj pomnožimo člena od 2 do 3 tretje vrstice (in tudi pripadajoči člen obtežnega vektorja) in jih odštejemo od členov druge vrstice, kamor tudi zapišemo posamezne rezultate:

$$\begin{bmatrix} 64 & -48 & 0 & 0 \\ -96 - (-0.75) \cdot 64 & 192 - (-0.75) \cdot (-192) & -192 - (-0.75) \cdot 256 & 0 \\ 64 & -192 & 256 & 0 \\ 192 & -384 & 0 & 768 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_3 \\ Y_3 \\ \Phi_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3333.3333333333 \\ -10000 - (-0.75) \cdot 0 \\ 0 \\ -10000 \end{Bmatrix}$$

in po izračunu sledi:

$$\begin{bmatrix} 64 & -48 & 0 & 0 \\ -48 & 48 & 0 & 0 \\ 64 & -192 & 256 & 0 \\ 192 & -384 & 0 & 768 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_3 \\ Y_3 \\ \Phi_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3333.3333333333 \\ -10000 \\ 0 \\ -10000 \end{Bmatrix}$$

Sistem je sicer formalno rešljiv, rešitve pa nimajo inženirske in uporabne vrednosti.

Razdelimo ga na dva sistema:

$$\begin{bmatrix} 64 & -48 & 0 & 0 \\ -48 & 48 & 0 & 0 \\ \hline 64 & -192 & 256 & 0 \\ 192 & -384 & 0 & 768 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_3 \\ Y_3 \\ \Phi_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3333.3333333333 \\ -10000 \\ \hline 0 \\ -10000 \end{Bmatrix}$$

Spodnji dve enačbi, v katerih še nastopata  $Y_2$  in  $\Phi_2$ , sta v prvi fazi nadaljevanja analize nezanimivi:

$$\begin{bmatrix} 64 & -192 & 256 & 0 \\ 192 & -384 & 0 & 768 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_3 \\ Y_3 \\ \Phi_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -10000 \end{Bmatrix} \quad (I)$$

V nadaljevanju analize uporabimo prvi oz. zgornji dve enačbi, v katerih prostostni stopnji  $Y_2$  in  $\Phi_2$  ne nastopata več (temveč samo še  $Y_3$  in  $\Phi_3$ ):

$$\begin{bmatrix} 64 & -48 \\ -48 & 48 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_3 \\ Y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3333.333333333333 \\ -10000 \end{Bmatrix}$$

Enačbe za tretji končni element (brez vektorja sekundarnih spremenljivk) so:

$$[K_3] \cdot \{U_3\} = \{F_3\}$$

$$\begin{bmatrix} 384 & 192 & -384 & 192 \\ 192 & 128 & -192 & 64 \\ -384 & -192 & 384 & -192 \\ 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_3 \\ \Phi_3 \\ Y_4 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5000 \\ -833.3333333333334 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

Ustrezna združitve členov »preostalih« enačb drugega in vseh enačb tretjega končnega elementa vodi do:

$$\begin{bmatrix} 384+48 & 192-48 & -384 & 192 \\ 192-48 & 128+64 & -192 & 64 \\ -384 & -192 & 384 & -192 \\ 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_3 \\ \Phi_3 \\ Y_4 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5000-10000 \\ -833.3333333333334+3333.333333333333 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

oziroma

$$\begin{bmatrix} 432 & 144 & -384 & 192 \\ 144 & 192 & -192 & 64 \\ -384 & -192 & 384 & -192 \\ 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_3 \\ \Phi_3 \\ Y_4 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15000 \\ 2500 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

V enačbah nastopata pomik  $Y_3$  in zasuk  $\Phi_3$ , ki pa ne nastopata več v nobeni izmed enačb preostalih končnih elementov. Zato enačbe preuredimo tako, da pomik  $Y_3$  in zasuk  $\Phi_3$  nastopata kot zadnja dva člena vektorja neznank (njun medsebojni vrstni red ni pomemben). Če npr. medsebojno zamenjamo prvi in tretji stolpec ter drugi in četrti stolpec, sledi (vektor na desni strani se ne spremeni):

$$\begin{bmatrix} -384 & 192 & 432 & 144 \\ -192 & 64 & 144 & 192 \\ 384 & -192 & -384 & -192 \\ -192 & 128 & 192 & 64 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_4 \\ \Phi_4 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15000 \\ 2500 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

Če zamenjamo še prvi in drugi stolpec, sledi (vektor na desni strani se ne spremeni):

$$\begin{bmatrix} 192 & -384 & 432 & 144 \\ 64 & -192 & 144 & 192 \\ -192 & 384 & -384 & -192 \\ 128 & -192 & 192 & 64 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_4 \\ Y_4 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15000 \\ 2500 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

Čeprav je sistem že korekten, je, zaradi prednosti, ki jih prinaša Gaussova eliminacija simetrične matrike, smiselno enačbe dalje preurediti tako, da se ohrani simetrija matrike. Da pridobimo simetričen zapis matrike, medsebojno zamenjamo prvo in četrto vrstico matrike in pripadajoča člena vektorja desne strani, kot tudi drugo in tretjo vrstico matrike in pripadajoča člena vektorja desne strani:

$$\begin{bmatrix} 128 & -192 & 192 & 64 \\ -192 & 384 & -384 & -192 \\ 64 & -192 & 144 & 192 \\ 192 & -384 & 432 & 144 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_4 \\ Y_4 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 833.3333333333334 \\ -5000 \\ 2500 \\ -15000 \end{Bmatrix}$$

nato pa medsebojno zamenjamo še tretjo in četrto vrstico matrike in pripadajoča člena vektorja desne strani:

$$\begin{bmatrix} 128 & -192 & 192 & 64 \\ -192 & 384 & -384 & -192 \\ 192 & -384 & 432 & 144 \\ 64 & -192 & 144 & 192 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_4 \\ Y_4 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 833.3333333333334 \\ -5000 \\ -15000 \\ 2500 \end{Bmatrix}$$

Iz prvih dveh enačb moramo sedaj eliminirati (trenutno) ne več potrebni prostostni stopnji (pomik  $Y_3$  in zasuk  $\Phi_3$ ). Sistem moramo spremeniti na delno spodnjo trikotno obliko, za kar potrebujemo 5 eliminacij.

Za eliminacijo 4. člena prve vrstice zato izračunamo faktor oz. pivot  $w$ :

$$w = \frac{k_{14}}{k_{44}} = \frac{64 \cdot 10^6}{192 \cdot 10^6} = \frac{1}{3}$$

S faktorjem  $w$  sedaj pomnožimo člene od 1 do 4 četrte vrstice matrice (in tudi obtežnega vektorja) in jih odštejemo od členov prve vrstice, kamor zapišemo tudi posamezne rezultate:

$$\begin{bmatrix} 128 - \frac{1}{3} \cdot 64 & -192 - \frac{1}{3} \cdot (-192) & 192 - \frac{1}{3} \cdot 144 & 64 - \frac{1}{3} \cdot 192 \\ -192 & 384 & -384 & -192 \\ 192 & -384 & 432 & 144 \\ 64 & -192 & 144 & 192 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_4 \\ Y_4 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 833.3333333 - \frac{1}{3} \cdot 2500 \\ -5000 \\ -15000 \\ 2500 \end{Bmatrix}$$

kar vodi do:

$$\begin{bmatrix} \frac{320}{3} & -128 & 144 & 0 \\ -192 & 384 & -384 & -192 \\ 192 & -384 & 432 & 144 \\ 64 & -192 & 144 & 192 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_4 \\ Y_4 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -5000 \\ -15000 \\ 2500 \end{Bmatrix}$$

Za eliminacijo 4. člena druge vrstice izračunamo faktor  $w$ :

$$w = \frac{k_{24}}{k_{44}} = \frac{-192 \cdot 10^6}{-192 \cdot 10^6} = -1$$

S faktorjem  $w$  sedaj pomnožimo vse člene četrte vrstice in jih odštejemo od členov vrstice 2, kamor zapišemo tudi rezultat:

$$\begin{bmatrix} \frac{320}{3} & -128 & 144 & 0 \\ -192 - (-1) \cdot 64 & 384 - (-1) \cdot (-192) & -384 - (-1) \cdot 144 & -192 - (-1) \cdot 192 \\ 192 & -384 & 432 & 144 \\ 64 & -192 & 144 & 192 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_4 \\ Y_4 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -5000 - (-1) \cdot 2500 \\ -15000 \\ 2500 \end{Bmatrix}$$

kar vodi do:

$$\begin{bmatrix} \frac{320}{3} & -128 & 144 & 0 \\ -128 & 192 & -240 & 0 \\ 192 & -384 & 432 & 144 \\ 64 & -192 & 144 & 192 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_4 \\ Y_4 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2500 \\ -15000 \\ 2500 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{320}{3} & -128 & 144 & 0 \\ -128 & 192 & -240 & 0 \\ 192 & -384 & 432 & 144 \\ 64 & -192 & 144 & 192 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_4 \\ Y_4 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2500 \\ -15000 \\ 2500 \end{Bmatrix}$$

Naslednji pivot je namenjen eliminaciji 4. člena tretje vrstice in znaša:

$$w = \frac{k_{34}}{k_{44}} = \frac{144 \cdot 10^6}{192 \cdot 10^6} = 0.75$$

in z njim pomnožimo vse člene četrte vrstice matrike (in tudi obtežnega vektorja) in jih odštejemo od členov vrstice 3, kamor tudi zapišemo posamezne rezultate:

$$\begin{bmatrix} \frac{320}{3} & -128 & 144 & 0 \\ -128 & 192 & -240 & 0 \\ 192 - 0.75 \cdot 64 & -384 - 0.75 \cdot (-192) & 432 - 0.75 \cdot 144 & 144 - 0.75 \cdot 192 \\ 64 & -192 & 144 & 192 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_4 \\ Y_4 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2500 \\ -15000 - 0.75 \cdot 2500 \\ 2500 \end{Bmatrix}$$

kar vodi do sistema:

$$\begin{bmatrix} \frac{320}{3} & -128 & 144 & 0 \\ -128 & 192 & -240 & 0 \\ 144 & -240 & 324 & 0 \\ 64 & -192 & 144 & 192 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_4 \\ Y_4 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2500 \\ -16875 \\ 2500 \end{Bmatrix}$$

Četrti oz. predzadnji pivot je namenjen 3. členu prve vrstice in znaša:

$$w = \frac{k_{13}}{k_{33}} = \frac{144 \cdot 10^6}{324 \cdot 10^6} = \frac{4}{9}$$

Z njim izvedemo eliminacijo tako, da s faktorjem  $w$  pomnožimo člene od 1 do 3 tretje vrstice matrike (in tudi obtežnega vektorja) in jih odštejemo od členov prve vrstice, kamor zapišemo tudi posamezne rezultate:

$$\begin{bmatrix} \frac{320}{3} - \frac{4}{9} \cdot 144 & -128 - \frac{4}{9} \cdot (-240) & 144 - \frac{4}{9} \cdot 324 & 0 \\ -128 & 192 & -240 & 0 \\ 144 & -240 & 324 & 0 \\ 64 & -192 & 144 & 192 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_4 \\ Y_4 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 - \frac{4}{9} \cdot (-16875) \\ -2500 \\ -16875 \\ 2500 \end{Bmatrix}$$

kar vodi do:

$$\begin{bmatrix} \frac{128}{3} & -\frac{64}{3} & 0 & 0 \\ -128 & 192 & -240 & 0 \\ 144 & -240 & 324 & 0 \\ 64 & -192 & 144 & 192 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_4 \\ Y_4 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7500 \\ -2500 \\ -16875 \\ 2500 \end{Bmatrix}$$

Poiščemo še zadnji pivot, namenjen eliminaciji 3. člena druge vrstice:

$$w = \frac{k_{23}}{k_{33}} = \frac{-240 \cdot 10^6}{324 \cdot 10^6} = -0.740740740740741$$

in izvedemo eliminacijo edinega preostalega člana in s faktorjem  $w$  sedaj pomnožimo člene tretje vrstice matrike (in tudi obtežnega vektorja) in jih odštejemo od členov vrstice 2, kamor tudi zapišemo posamezne rezultate:

$$\begin{bmatrix} \frac{128}{3} & -\frac{64}{3} & 0 & 0 \\ -128 - w \cdot 144 & 192 - w \cdot (-240) & -240 - w \cdot 324 & 0 \\ 144 & -240 & 324 & 0 \\ 64 & -192 & 144 & 192 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_4 \\ Y_4 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7500 \\ -2500 - w \cdot (-16875) \\ -16875 \\ 2500 \end{Bmatrix}$$

in po izračunu sledi:

$$\begin{bmatrix} \frac{128}{3} & -\frac{64}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{64}{3} & \frac{128}{9} & 0 & 0 \\ 144 & -240 & 324 & 0 \\ 64 & -192 & 144 & 192 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_4 \\ Y_4 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7500 \\ -15000 \\ -16875 \\ 2500 \end{Bmatrix}$$

Sistem enačb razdelimo na dva sistema. V prvem sistemu zajamemo spodnji dve enačbi, v katerih še nastopata (trenutno ne več zanimivi) prostostni stopnji  $Y_3$  in  $\Phi_3$ :

$$\begin{bmatrix} 144 & -240 & 324 & 0 \\ 64 & -192 & 144 & 192 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_4 \\ Y_4 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -16875 \\ 2500 \end{Bmatrix} \quad (\text{II})$$

V drugem sistemu nastopata enačbi, v katerih nastopata samo še za nadaljevanje analize zanimivi prostostni stopnji  $Y_4$  in  $\Phi_4$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{128}{3} & -\frac{64}{3} \\ -\frac{64}{3} & \frac{128}{9} \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_4 \\ Y_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7500 \\ -15000 \end{Bmatrix}$$

Zadnji sistem je sicer formalno rešljiv, rešitvi pa nimata inženirske in uporabne vrednosti.

Enačbe za četrti končni element (brez vektorja sekundarnih spremenljivk) so:

$$[K_4] \cdot \{U_4\} = \{F_4\}$$

$$\begin{bmatrix} 384 & 192 & -384 & 192 \\ 192 & 128 & -192 & 64 \\ -384 & -192 & 384 & -192 \\ 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_4 \\ \Phi_4 \\ Y_5 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5000 \\ -833.3333333333334 \\ -5000 - 20000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

Ustrezna združitve členov enačb tretjega in četrtega končnega elementa vodi do:

$$\begin{bmatrix} 384 + \frac{128}{9} & 192 - \frac{64}{3} & -384 & 192 \\ 192 - \frac{64}{3} & 128 + \frac{128}{3} & -192 & 64 \\ -384 & -192 & 384 & -192 \\ 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_4 \\ \Phi_4 \\ Y_5 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5000 - 15000 \\ -833.3333333333333 + 7500 \\ -5000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

oziroma

$$\begin{bmatrix} \frac{3584}{9} & \frac{512}{3} & -384 & 192 \\ \frac{512}{3} & \frac{512}{3} & -192 & 64 \\ -384 & -192 & 384 & -192 \\ 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_4 \\ \Phi_4 \\ Y_5 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -20000 \\ 6666.66666666667 \\ -25000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

oziroma:

$$\begin{bmatrix} 398.22222222222223 & 170.66666666666666 & -384 & 192 \\ 170.66666666666666 & 170.66666666666666 & -192 & 64 \\ -384 & -192 & 384 & -192 \\ 192 & 64 & -192 & 128 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} Y_4 \\ \Phi_4 \\ Y_5 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -20000 \\ 6666.66666666667 \\ -25000 \\ 833.3333333333334 \end{Bmatrix}$$

Ker smo v analizi zajeli že vse končne elemente, vse nastopajoče neznanke nastopajo »zadnjič«. Sistem ima rešitve (način reševanja sistema je sedaj poljuben, najhitrejši način je verjetno Gaussova eliminacija ob upoštevanju simetrije matrike):

$$\begin{Bmatrix} Y_4 \\ \Phi_4 \\ Y_5 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.51171875 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -7.96875 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -2.3333333333333327 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ -8.333333333333331 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Iz enačb (II) za tretji element:

$$\begin{bmatrix} 144 & -240 & 324 & 0 \\ 64 & -192 & 144 & 192 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_4 \\ Y_4 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -16875 \\ 2500 \end{Bmatrix}$$

najprej iz prve enačbe (v njej nastopa samo ena neznanka) sledi:

$$Y_3 = -0.7708333333333352 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

nato pa še iz druge enačbe (tudi v njej nastopa samo ena neznanka):

$$\Phi_3 = -6.666666666666668 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Iz enačb (I)

$$\begin{bmatrix} 64 & -192 & 256 & 0 \\ 192 & -384 & 0 & 768 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_3 \\ Y_3 \\ \Phi_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -10000 \end{Bmatrix}$$

iz prve enačbe (v njej nastopa samo ena neznanka) najprej sledi:

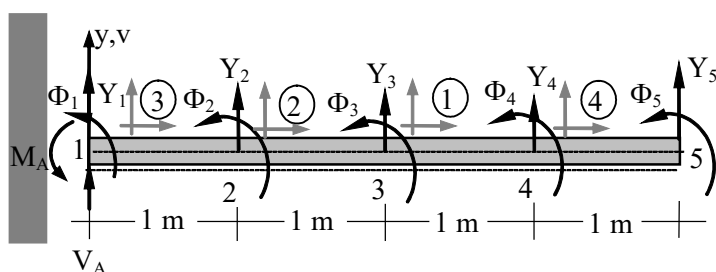
$$\Phi_2 = -4.1145833333333426 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

ter nato še iz druge enačbe (tudi v njej nastopa samo ena neznanka):

$$Y_2 = -0.22005208333333376 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Dobljene vrednosti se popolnoma ujemajo z vrednostmi, prej dobljenimi s klasičnim združevanjem enačb konstrukcije. Čeprav prikazani postopek izgleda zamuden, se pri velikih sistemih enačb ob primernem številčenju elementov dejansko izkaze kot izredno (časovno) učinkovit v primerjavi s tvorbo togostne matrike konstrukcije in reševanjem celotnega sistema bistvenih enačb. Prikazani postopek lahko še celo nekoliko pospešimo, če upoštevamo, da mora biti po zaključenih eliminacijah po vključitvi posameznega končnega elementa podmatrika, ki pripada prostostnim stopnjam, potrebnim za nadaljevanje, simetrična.

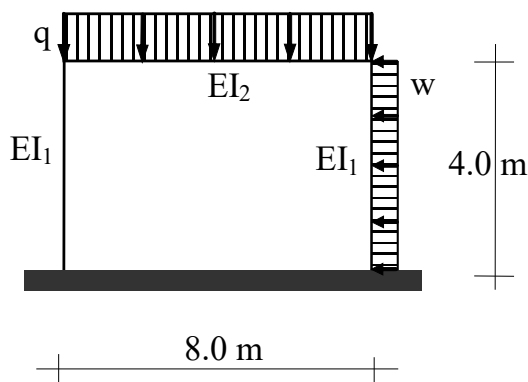
Učinkovitost metode je odvisna od oštevičenja oz. vrstnega reda elementov, ki vplivajo na širino fronte oz. število enačb, ki jih rešujemo v posameznih korakih.



Slika 263: Manj primerna diskretizacija s štirimi enako dolgimi končnimi elementi

### Primer 23\* – Ravninska okvirna konstrukcija – analiza s frontalno metodo

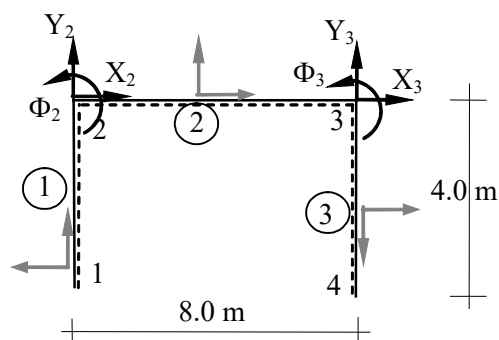
Za betonski okvir s skice določi vrednosti pomikov in zasukov na koncu grede. Stebra imata prerez dimenzij  $b/h = 0.3/0.5$  m, greda pa  $b/h = 0.3/0.6$  m. Modul elastičnosti znaša  $E = 32$  GPa. Konstrukcija je obremenjena z enakomerno zvezno obtežbo  $q = 30$  kN/m' na gredi in vetrom  $w = 5$  kN/m' na desnem stebri.



Slika 264: Obravnavani okvir

## Rešitev

Uporabimo minimalno diskretizacijo konstrukcije s tremi končnimi elementi.



Slika 265: Izbrana diskretizacija

Pri analizi s frontalno metodo na obseg dela bistveno vpliva vrstni red upoštevanja končnih elementov. Med analizo element običajno upoštevamo v vrstnem redu, ki se ujema z izbranim oštevilčenjem elementov pri diskretizaciji, vendar to ni nujno. Elemente je zato med samo analizo smiselno upoštevati v takšnem vrstnem redu, da v procesu čim hitreje obdelamo vse informacije o prostostnih stopnjah vsakega posameznega vozlišča.

Analizo bomo začeli v levem stebru oziroma prvem končnem elementu, njegova globalna togostna matrika pa je že znana iz primera 19:

$$[K_1] = \begin{bmatrix} 18.75 & 0 & -37.5 & -18.75 & 0 & -37.5 \\ 0 & 1200 & 0 & 0 & -1200 & 0 \\ -37.5 & 0 & 100 & 37.5 & 0 & 50 \\ -18.75 & 0 & 37.5 & 18.75 & 0 & 37.5 \\ 0 & -1200 & 0 & 0 & 1200 & 0 \\ -37.5 & 0 & 50 & 37.5 & 0 & 100 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

medtem ko sta vektor neznank in obtežni vektor enaka:

$$\{U_1\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ \Phi_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} \quad \{F_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ker sta pomika in zasuk v vozlišču 1 preprečeni, iz zadnjih treh enačb sledi sistem:

$$\begin{bmatrix} 18.75 & 0 & 37.5 \\ 0 & 1200 & 0 \\ 37.5 & 0 & 100 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Analizo je najprimernejše nadaljevati z drugim končnim elementom oziroma gredo. Njegova lokalna in globalna togostna matrika sta enaki:

$$[K_2] = \begin{bmatrix} 720 & 0 & 0 & -720 & 0 & 0 \\ 0 & 4.05 & 16.2 & 0 & -4.05 & 16.2 \\ 0 & 16.2 & 86.4 & 0 & -16.2 & 43.2 \\ -720 & 0 & 0 & 720 & 0 & 0 \\ 0 & -4.05 & -16.2 & 0 & 4.05 & -16.2 \\ 0 & 16.2 & 43.2 & 0 & -16.2 & 86.4 \end{bmatrix} \cdot 10^6$$

medtem ko sta vektor neznank in globalni/lokalni obtežni vektor enaka:

$$\{U_2\} = \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} \quad \{F_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -120000 \\ -160000 \\ 0 \\ -120000 \\ 160000 \end{Bmatrix}$$

Po združitvi členov obeh togostnih matrik in obtežnih vektorjev sledi sistem:

$$\begin{bmatrix} 738.75 & 0 & 37.5 & -720 & 0 & 0 \\ 0 & 1204.05 & 16.2 & 0 & -4.05 & 16.2 \\ 37.5 & 16.2 & 186.4 & 0 & -16.2 & 43.2 \\ -720 & 0 & 0 & 720 & 0 & 0 \\ 0 & -4.05 & -16.2 & 0 & 4.05 & -16.2 \\ 0 & 16.2 & 43.2 & 0 & -16.2 & 86.4 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -120000 \\ -160000 \\ 0 \\ -120000 \\ 160000 \end{Bmatrix}$$

Ker v matrični enačbi tretjega elementa ne nastopajo več prostostne stopnje  $X_2$ ,  $Y_2$  in  $\Phi_2$ , enačbe preuredimo tako, da te prostostne stopnje (v poljubnem vrstnem redu) združimo na koncu vektorja primarnih spremenljivk. To storimo npr. tako, da najprej zamenjamo

prvo in šesto vrstico, drugo in peto vrstico ter še tretjo in četrto vrstico enačb (možne so tudi drugačne razporeditve prostostnih stopenj), nato pa po istem redu zamenjamo še stolpce v matriki, kar vodi do zapisa sistema:

$$\begin{bmatrix} 86.4 & -16.2 & 0 & 43.2 & 16.2 & 0 \\ -16.2 & 4.05 & 0 & -16.2 & -4.05 & 0 \\ 0 & 0 & 720 & 0 & 0 & -720 \\ 43.2 & -16.2 & 0 & 186.4 & 16.2 & 37.5 \\ 16.2 & -4.05 & 0 & 16.2 & 1204.05 & 0 \\ 0 & 0 & -720 & 37.5 & 0 & 738.75 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_3 \\ Y_3 \\ X_3 \\ \Phi_2 \\ Y_2 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 160000 \\ -120000 \\ 0 \\ -160000 \\ -120000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Tako preurejen zapis enačb je popolnoma enakovreden prvotnem zapisu. Po izvedbi delne Gaussove eliminacije sistem prevedemo v obliko:

$$\begin{bmatrix} 76.1566904917 & -12.3796495931 & -8.5246905574 & 0 & 0 & 0 \\ -12.3796495931 & 2.6217928729 & 3.2021626084 & 0 & 0 & 0 \\ -8.5246905574 & 3.20216260849 & 11.0254486019 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 42.9820356297 & -16.1455089074 & 36.5482233503 & 184.2784823303 & 0 & 0 \\ 16.2 & -4.05 & 0 & 16.2 & 1204.05 & 0 \\ 0 & 0 & -720 & 37.5 & 0 & 738.75 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\begin{Bmatrix} \Phi_3 \\ Y_3 \\ X_3 \\ \Phi_2 \\ Y_2 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 198557.165843733 \\ -134280.535595217 \\ 31412.8198597872 \\ \hline -158385.449109256 \\ -120000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Zadnje tri vrstice predstavljajo enačbe, ki vsebujejo prostostne stopnje  $X_2$ ,  $Y_2$  in  $\Phi_2$ :

$$42.9820356297496 \cdot 10^7 \cdot \Phi_3 - 16.1455089074374 \cdot Y_3 + 36.5482233502538 \cdot X_3 + 184.278482330257 \cdot \Phi_2 = -158385.449109256 \quad (\text{I})$$

$$16.2 \cdot 10^7 \cdot \Phi_3 - 4.05 \cdot Y_3 + 16.2 \cdot \Phi_2 + 1204.05 \cdot Y_2 = -120000 \quad (\text{II})$$

$$-720 \cdot X_3 + 37.5 \cdot \Phi_2 + 738.75 \cdot X_2 = 0 \quad (\text{III})$$

prve tri pa sistem:

$$\begin{bmatrix} 76.156690491 & -12.3796495931 & -8.5246905574 \\ -12.3796495931 & 2.6217928729 & 3.2021626084 \\ -8.5246905574 & 3.2021626084 & 11.0254486019 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_3 \\ Y_3 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 198557.165843733 \\ -134280.535595217 \\ 31412.8198597872 \end{Bmatrix}$$

V analizo je potrebno vključiti še desni steber oz. tretji končni element. Tudi njegova globalna togostna matrika in obtežni vektor sta že znana iz primera 19:

$$[K_3] = \begin{bmatrix} 18.75 & 0 & 37.5 & -18.75 & 0 & 37.5 \\ 0 & 1200 & 0 & 0 & -1200 & 0 \\ 37.5 & 0 & 100 & -37.5 & 0 & 50 \\ -18.75 & 0 & -37.5 & 18.75 & 0 & -37.5 \\ 0 & -1200 & 0 & 0 & 1200 & 0 \\ 37.5 & 0 & 50 & -37.5 & 0 & 100 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \quad \{F_3\} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \\ -6666.666666666667 \\ -10000 \\ 0 \\ 6666.666666666667 \end{Bmatrix}$$

medtem ko je vektor neznank enak:

$$\{U_3\} = \begin{Bmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \\ X_4 \\ Y_4 \\ \Phi_4 \end{Bmatrix}$$

Po upoštevanju ničelnosti pomikov in zasuka v vozlišču 4, sledi:

$$\begin{bmatrix} 18.75 & 0 & 37.5 \\ 0 & 1200 & 0 \\ 37.5 & 0 & 100 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \\ -6666.666666666667 \end{Bmatrix}$$

Po združitvi členov togostne matrike in obtežnega vektorja tako sledi sistem:

$$\begin{bmatrix} 176.156690491 & -12.3796495931 & 28.9753094426 \\ -12.3796495931 & 1202.6217928729 & 3.2021626084 \\ 28.9753094426 & 3.2021626084 & 29.7754486019 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_3 \\ Y_3 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 191890.499177066 \\ -134280.535595217 \\ 21412.8198597872 \end{Bmatrix}$$

Ker smo upoštevali že vse končne elemente, sistem rešimo (lahko tudi s kompletno Gaussovo eliminacijo) in njegove rešitve so:

$$\begin{Bmatrix} \Phi_3 \\ Y_3 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.14572532246645 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ -9.88369745184348 \cdot 10^{-5} \text{ m} \\ -3.85164098924544 \cdot 10^{-4} \text{ m} \end{Bmatrix}$$

Nato iz enačb za 2. končni element postopoma poiščemo še preostale rešitve. Iz enačbe (I), v kateri upoštevamo že izračunane vrednosti primarnih spremenljivk:

$$42.9820356297496 \cdot 10^7 \cdot 1.14572532246645 \cdot 10^{-3} \text{ rad} - 16.1455089074374 \cdot (-9.88369745184348 \cdot 10^{-5}) + 36.5482233502538 \cdot (-3.85164098924544 \cdot 10^{-4}) + 184.278482330257 \cdot \Phi_2 = -158385.449109256$$

najprej sledi:

$$\Phi_2 = -1.05899377405417 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Iz enačbe (II):

$$16.2 \cdot 10^7 \cdot 1.14572532246645 \cdot 10^{-3} - 4.05 \cdot (-9.88369745184348 \cdot 10^{-5}) + 16.2 \cdot (-1.05899377405417 \cdot 10^{-3}) + 1204.05 \cdot Y_2 = -120000$$

nato sledi:

$$Y_2 = -1.01163025481565 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Iz enačbe (III) pa dobimo še:

$$-720 \cdot (-3.85164098924544 \cdot 10^{-4}) + 37.5 \cdot (-1.05899377405417 \cdot 10^{-3}) + 738.75 \cdot X_2 = 0$$

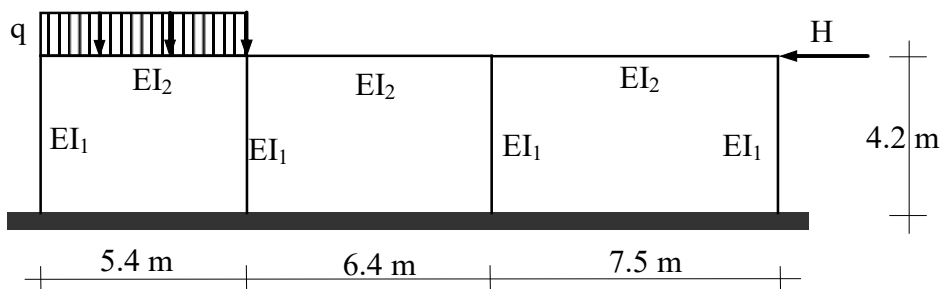
zadnjo neznano primarno spremenljivko:

$$X_2 = -3.21632331233354 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Ko so vrednosti primarnih spremenljivk znane, je faza poprocesiranja enaka kot pri klasični metodi analize.

**Primer 24\* – Ravninska okvirna konstrukcija – analiza s frontalno metodo**

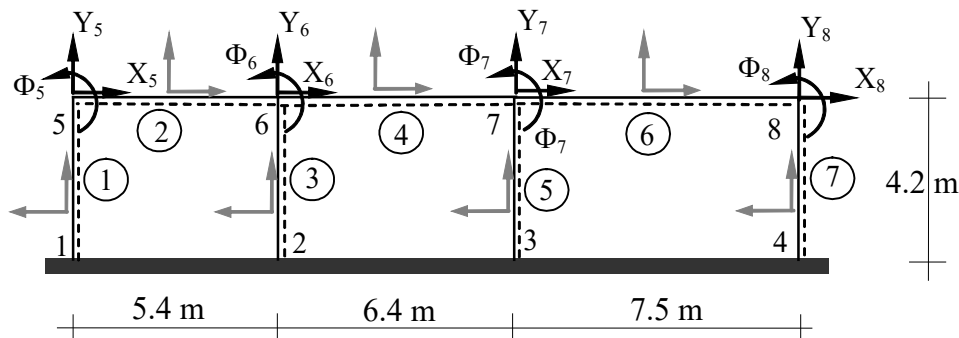
Za okvir s slike določi vozliščne vrednosti pomikov in zasukov. Stebri imajo prerez dimenzij  $b/b=0.3/0.3$  m, grede pa  $b/b=0.3/0.45$  m. Modul elastičnosti znaša  $E = 33$  GPa. Konstrukcija je obremenjena z enakomerno zvezno obtežbo  $q = 20$  kN/m' v prvem polju in s silo  $H = 10$  kN na vrhu desnega stebra.



Slika 266: Obravnavana konstrukcija

**Rešitev**

Ker je potrebno izračunati samo vozliščne vrednosti pomikov, lahko uporabimo kar minimalni računski model s sedmimi končnimi elementi.



Slika 267: Izbrana diskretizacija

Pri frontalni metodi vrstni red upoštevanja končnih elementov v analizi močno vpliva na obseg dela. Elemente je zato smiselno upoštevati v takšnem vrstnem redu, da v postopku analize čim hitreje obdelamo vse informacije o prostostnih stopnjah vsakega posameznega vozlišča (kar je že bilo upoštevano pri oštevilčenju elementov v izbrani diskretizaciji, vendar to ni nujno). Zato bomo analizo začeli v levem stebri oziroma prvem končnem elementu.

Njegova lokalna togostna matrika je:

$$[k_i] = \begin{bmatrix} 70.7142857143 & 0 & 0 & -70.7142857143 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3607873324 & 0.7576533980 & 0 & -0.3607873324 & 0.7576533980 \\ 0 & 0.7576533980 & 2.1214295143 & 0 & -0.7576533980 & 1.0607147571 \\ -70.7142857143 & 0 & 0 & 70.7142857143 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3607873324 & -0.7576533980 & 0 & 0.3607873324 & -0.7576533980 \\ 0 & 0.7576533980 & 1.0607147571 & 0 & -0.7576533980 & 2.1214295143 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Njegova globalna togostna matrika pa je

$$[K_i] = \begin{bmatrix} 0.36078733236 & 0 & -0.75765339796 & -0.36078733236 & 0 & -0.75765339796 \\ 0 & 70.71428571429 & 0 & 0 & -70.71428571429 & 0 \\ -0.75765339796 & 0 & 2.12142951429 & -0.75765339796 & 0 & 1.06071475714 \\ -0.36078733236 & 0 & -0.75765339796 & 0.36078733236 & 0 & 0.75765339796 \\ 0 & -70.71428571429 & 0 & 0 & 70.71428571429 & 0 \\ -0.75765339796 & 0 & 1.06071475714 & 0.75765339796 & 0 & 2.12142951429 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

medtem ko sta vektor neznank in obtežni vektor enaka:

$$\{U_i\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ \Phi_1 \\ X_5 \\ Y_5 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} \quad \{F_i\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ker sta pomika in zasuk v vozlišču 1 preprečeni, iz zadnjih treh enačb sledi sistem:

$$\begin{bmatrix} 0.36078733236 & 0 & 0.75765339796 \\ 0 & 70.71428571429 & 0 \\ 0.75765339796 & 0 & 2.12142951429 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} X_5 \\ Y_5 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Analizo bomo nadaljevali v levi gredi oz. drugem končnem elementu. Njena lokalna in globalna togostna matrika sta enaki:

$$[K_2] = \begin{bmatrix} 82.5 & 0 & 0 & -82.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.57291666667 & 1.546875 & 0 & -0.57291666667 & 1.546875 \\ 0 & 1.546875 & 5.56875 & 0 & -1.546875 & 2.784375 \\ -82.5 & 0 & 0 & 82.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.57291666667 & -1.546875 & 0 & 0.57291666667 & -1.546875 \\ 0 & 1.546875 & 2.784375 & 0 & -1.546875 & 5.56875 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

medtem ko sta vektor neznank in globalni/lokalni obtežni vektor enaka:

$$\{U_2\} = \begin{Bmatrix} X_5 \\ Y_5 \\ \Phi_5 \\ X_6 \\ Y_6 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix} \quad \{F_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -54000 \\ -48600 \\ 0 \\ -54000 \\ 48600 \end{Bmatrix}$$

Po združitvi členov obeh togostnih matrik in obtežnih vektorjev sledi sistem:

$$\begin{bmatrix} 82.36078733236 & 0 & -0.75765339796 & -82.5 & 0 & 0 \\ 0 & 71.2872023809524 & 1.546875 & 0 & -0.57291666667 & 1.546875 \\ -0.75765339796 & 1.546875 & 7.69017951428571 & 0 & -1.546875 & 2.784375 \\ -82.5 & 0 & 0 & 82.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.57291666667 & -1.546875 & 0 & 0.57291666667 & -1.546875 \\ 0 & 1.546875 & 2.784375 & 0 & -1.546875 & 5.56875 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} X_5 \\ Y_5 \\ \Phi_5 \\ X_6 \\ Y_6 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ -54000 \\ -48600 \\ 0 \\ -54000 \\ 48600 \end{Bmatrix}$$

Če pregledamo preostale še neupoštevane končne elemente, se lahko prepričamo, da v njihovih matričnih enačbah elementov prostostne stopnje  $X_5$ ,  $Y_5$  in  $\Phi_5$  ne nastopajo več.

Sedaj zgornje enačbe torej preuredimo tako, da te prostostne stopnje (v poljubnem vrstnem redu) združimo na koncu vektorja primarnih spremenljivk. To storimo npr. tako, da najprej zamenjamo prvo in šesto vrstico, drugo in peto vrstico ter tretjo in četrto vrstico enačb (možne so tudi drugačne razporeditve prostostnih stopenj).

$$\begin{bmatrix} 0 & 1.546875 & 2.784375 & 0 & -1.546875 & 5.56875 \\ 0 & -0.57291666667 & -1.546875 & 0 & 0.57291666667 & -1.546875 \\ -82.5 & 0 & 0 & 82.5 & 0 & 0 \\ -0.75765339796 & 1.546875 & 7.69017951428571 & 0 & -1.546875 & 2.784375 \\ 0 & 71.2872023809524 & 1.546875 & 0 & -0.57291666667 & 1.546875 \\ 82.36078733236 & 0 & -0.75765339796 & -82.5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} X_5 \\ Y_5 \\ \Phi_5 \\ X_6 \\ Y_6 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 48600 \\ -54000 \\ 0 \\ -48600 \\ -54000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Sedaj po istem redu zamenjamo še stolpce v matriki, kar vodi do:

$$\begin{bmatrix} 5.56875 & -1.546875 & 0 & 2.784375 & 1.546875 & 0 \\ -1.546875 & 0.57291666667 & 0 & -1.546875 & -0.57291666667 & 0 \\ 0 & 0 & 82.5 & 0 & 0 & -82.5 \\ 2.784375 & -1.546875 & 0 & 7.69017951428571 & 1.546875 & -0.75765339796 \\ 1.546875 & -0.57291666667 & 0 & 1.546875 & 71.2872023809524 & 0 \\ 0 & 0 & -82.5 & -0.75765339796 & 0 & 82.36078733236 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_6 \\ Y_6 \\ X_6 \\ \Phi_5 \\ Y_5 \\ X_5 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 48600 \\ -54000 \\ 0 \\ -48600 \\ -54000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Tako preurejen zapis enačb je popolnoma enakovreden prvotnem zapisu. Po izvedbi delne Gaussove eliminacije sistem prevedemo v obliko:

$$\begin{bmatrix} 4.5459994586 & -0.9826609415 & -0.2712640090 & 0 & 0 & 0 \\ -0.9826609415 & 0.2605197582 & 0.1513151939 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2712640090 & 0.1513151939 & 0.2848275490 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2.7508090557 & -1.5344431688 & 0.7543541364 & 7.6496848850 & 0 & 0 \\ 1.546875 & -0.5729166667 & 0 & 1.546875 & 71.2872023810 & 0 \\ 0 & 0 & -82.5 & -0.7576530612 & 0 & 82.8607871720 \end{bmatrix}$$

$$\cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_6 \\ Y_6 \\ X_6 \\ \Phi_5 \\ Y_5 \\ X_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 66826.8436275506 \\ -63947.5711112427 \\ 4677.01508347415 \\ -47428.2433983927 \\ -54000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

in po odstranitvi zadnjih treh vrstic, ki predstavljajo enačbe:

$$2.75080905568312 \cdot 10^7 \cdot \Phi_6 - 1.53444316877153 \cdot 10^7 \cdot Y_6 + 0.754354136429608 \cdot 10^7 \cdot X_6 + 7.64968488504244 \cdot 10^7 \cdot \Phi_5 = -47428.2433983927 \quad (\text{I})$$

$$1.546875 \cdot 10^7 \cdot \Phi_6 - 0.57291666667 \cdot 10^7 \cdot Y_6 + 0 \cdot 10^7 \cdot X_6 + 1.5468754 \cdot 10^7 \cdot \Phi_5 + 71.2872023809524 \cdot 10^7 \cdot Y_5 = -54000 \quad (\text{II})$$

$$-82.5 \cdot 10^7 \cdot X_6 - 0.75765306122449 \cdot 10^7 \cdot \Phi_5 + 82.8607871720117 \cdot 10^7 \cdot X_5 = 0 \quad (\text{III})$$

tako ostane sistem:

$$\begin{bmatrix} 4.5459994586 & -0.9826609415 & -0.2712640090 \\ -0.9826609415 & 0.2605197582 & 0.1513151939 \\ -0.2712640090 & 0.1513151939 & 0.2848275490 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_6 \\ Y_6 \\ X_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 66826.8436275506 \\ -63947.5711112427 \\ 4677.01508347415 \end{Bmatrix}$$

Naslednjega analiziramo drugi steber z leve oz. tretji končni element. Njegova globalna togostna matrika je enaka kot togostna matrika za prvi steber:

$$[\mathbf{K}_3] = [\mathbf{K}_1]$$

medtem ko sta vektor neznank in obtežni vektor enaka:

$$\{U_3\} = \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ \Phi_2 \\ X_6 \\ Y_6 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix} \quad \{F_3\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Po upoštevanju ničelnosti pomikov in zasuka v vozlišču 2, sledi:

$$\begin{bmatrix} 0.36078733236 & 0 & 0.75765339796 \\ 0 & 70.71428571429 & 0 \\ 0.75765339796 & 0 & 2.12142951429 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} X_6 \\ Y_6 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Po združitvi členov togostne matrike in obtežnega vektorja tako sledi sistem:

$$\begin{bmatrix} 6.6674280300 & -0.9826609415 & -0.4863890522 \\ -0.9826609415 & 70.9748054725 & 0.1513151939 \\ -0.4863890522 & 0.1513151939 & 0.6456147210 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_6 \\ Y_6 \\ X_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 66826.8436275506 \\ -63947.5711112427 \\ 4677.01508347415 \end{Bmatrix}$$

Za sredinsko gredo oz. četrti končni element sta njena lokalna in globalna togostna matrika enaki:

$$[K_4] = \begin{bmatrix} 69.609375 & 0 & 0 & -69.609375 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3441381455 & 1.1012420654 & 0 & -0.3441381455 & 1.1012420654 \\ 0 & 1.1012420654 & 4.6986328125 & 0 & -1.1012420654 & 2.3493164063 \\ -69.609375 & 0 & 0 & 69.609375 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3441381455 & -1.1012420654 & 0 & 0.3441381455 & -1.1012420654 \\ 0 & 1.1012420654 & 2.3493164063 & 0 & -1.1012420654 & 4.6986328125 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

medtem ko sta vektor neznank in obtežni vektor enaka:

$$\{U_4\} = \begin{Bmatrix} X_6 \\ Y_6 \\ \Phi_6 \\ X_7 \\ Y_7 \\ \Phi_7 \end{Bmatrix} \quad \{F_4\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Po združitvi členov togostne matrike in obtežnega vektorja tako sledi sistem:

$$\begin{bmatrix} 11.3660608425 & 0.1185811240 & 0.4863890522 & 0 & -1.1012420654 & 2.3493164063 \\ 0.1185811240 & 71.3189436179 & 0.1513151939 & 0 & -0.3441381455 & 1.1012420654 \\ 0.4863890522 & 0.1513151939 & 70.2549897210 & -69.609375 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -69.609375 & 69.609375 & 0 & 0 \\ -1.1012420654 & -0.3441381455 & 0 & 0 & 0.3441381455 & -1.1012420654 \\ 2.3493164063 & 1.1012420654 & 0 & 0 & -1.1012420654 & 4.6986328125 \end{bmatrix}$$

$$\cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_6 \\ Y_6 \\ X_6 \\ X_7 \\ Y_7 \\ \Phi_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 66826.8436275506 \\ -63947.5711112427 \\ 4677.01508347415 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ker vozlišče 6 ni povezano z nobenim izmed preostalih končnih elementov, lahko sedaj prostostne stopnje  $X_6$ ,  $Y_6$  in  $\Phi_6$ , ki pripadajo temu vozlišču, eliminiramo. Po izvedbi delne Gaussove eliminacije sistem tako prevedemo v obliko:

$$\begin{bmatrix} 4.1966326591 & -0.8685278534 & -0.1018288848 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8685278534 & 0.2358561848 & 0.0473825903 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1018288848 & 0.0473825903 & 0.6189478553 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -0.1027424430 & 0.0478076834 & -69.609375 & 70.2338757482 & 0 & 0 \\ 1.0767318517 & -0.3326489828 & 0 & 0.1462407392 & 71.3177064713 & 0 \\ 2.3493164063 & -1.1012420654 & 0 & 0.4863890522 & 11.3660608425 & 4.6986328125 \end{bmatrix}$$

$$\cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_7 \\ Y_7 \\ X_7 \\ X_6 \\ Y_6 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -12833.9858399741 \\ 6171.90985750001 \\ 1932.50688301176 \\ \hline 1949.84437518428 \\ -64644.7697571398 \\ 66826.8436275506 \end{Bmatrix}$$

in po odstranitvi zadnjih treh vrstic, ki vsebujejo tri enačbe:

$$-0.102742442954435 \cdot 10^7 \cdot \Phi_7 + 4.78076833761791 \cdot 10^{-2} \cdot Y_7 - 69.609375 \cdot 10^7 \cdot X_7 + 70.2338757481246 \cdot 10^7 \cdot X_6 = 1949.84437518428 \quad (\text{IV})$$

$$1.07673185174445 \cdot 10^7 \cdot \Phi_7 - 0.332648982781821 \cdot 10^{-2} \cdot Y_7 + 0.146240739209401 \cdot 10^7 \cdot X_6 + 71.3177064713479 \cdot 10^7 \cdot Y_6 = -64644.7697571398 \quad (\text{V})$$

$$2.34931640625 \cdot 10^7 \cdot \Phi_7 - 1.10124206542969 \cdot 10^{-2} \cdot Y_7 + 0.486389052201055 \cdot 10^7 \cdot X_6 + 11.366060842528 \cdot 10^7 \cdot Y_6 + 4.6986328125 \cdot 10^7 \cdot \Phi_6 = 66826.8436275506 \quad (\text{VI})$$

tako ostane sistem:

$$\begin{bmatrix} 4.1966326591 & -0.8685278534 & -0.1018288848 \\ -0.8685278534 & 0.235856184 & 4.7382590304 \cdot 10^{-2} \\ -0.1018288848 & 4.7382590304 \cdot 10^{-2} & 0.6189478553 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_7 \\ Y_7 \\ X_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -12833.9858399741 \\ 6171.90985750001 \\ 1932.50688301176 \end{Bmatrix}$$

Kot naslednjega analiziramo peti končni element oz. drugi steber z desne oz. tretji steber z leve. Njegova globalna togostna matrika je enaka kot togostna matrika za prvi steber:

$$[K_5] = [K_1]$$

medtem ko sta vektor neznank in obtežni vektor enaka:

$$\{U_5\} = \begin{Bmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ \Phi_3 \\ X_7 \\ Y_7 \\ \Phi_7 \end{Bmatrix} \quad \{F_5\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Po upoštevanju ničelnosti pomikov in zasuka v vozlišču 3, sledi:

$$\begin{bmatrix} 0.36078733236 & 0 & 0.75765339796 \\ 0 & 70.71428571429 & 0 \\ 0.75765339796 & 0 & 2.12142951429 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} X_7 \\ Y_7 \\ \Phi_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Po združitvi členov togostne matrike in obtežnega vektorja tako sledi sistem:

$$\begin{bmatrix} 6.3180612306 & -0.8685278534 & 0.6558241765 \\ -0.8685278534 & 70.9501418991 & 4.7382590304 \cdot 10^{-2} \\ 0.6558241765 & 4.7382590304 \cdot 10^{-2} & 0.9797350273 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_7 \\ Y_7 \\ X_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -12833.9858399741 \\ 6171.90985750001 \\ 1932.50688301176 \end{Bmatrix}$$

Za desno gredo oziroma šesti končni element sta njena lokalna in globalna togostna matrika enaki:

$$[K_6] = \begin{bmatrix} 59.4 & 0 & 0 & -59.45 & 0 & 0 \\ 0 & 0.21384 & 0.8019 & 0 & -0.213845 & 0.8019 \\ 0 & 0.8019 & 4.0095 & 0 & -0.8019 & 2.00475 \\ -59.4 & 0 & 0 & 59.4 & 0 & 0 \\ 0 & -0.21384 & -0.8019 & 0 & 0.21384 & -0.8019 \\ 0 & 0.8019 & 2.00475 & 0 & -0.8019 & 4.0095 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

medtem ko sta vektor neznank in obtežni vektor enaka:

$$\{U_6\} = \begin{Bmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ \Phi_4 \\ X_8 \\ Y_8 \\ \Phi_8 \end{Bmatrix} \quad \{F_6\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10000 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Po združitvi členov togostne matrike in obtežnega vektorja tako sledi sistem:

$$\begin{bmatrix} 10.3275612306 & -0.0666278534 & 0.6558241765 & 0 & -0.8019 & 2.00475 \\ -0.0666278534 & 71.1639818991 & 0.0473825903 & 0 & -0.21384 & 0.8019 \\ 0.6558241765 & 0.0473825903 & 60.3797350273 & -59.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -59.4 & 69.609375 & 0 & 0 \\ -0.8019 & -0.21384 & 0 & 0 & 0.21384 & -0.8019 \\ 2.00475 & 0.8019 & 0 & 0 & -0.8019 & 4.0095 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$\begin{cases} \Phi_7 \\ Y_7 \\ X_7 \\ X_8 \\ Y_8 \\ \Phi_8 \end{cases} = \begin{cases} -12833.9858399741 \\ 6171.90985750001 \\ 1932.50688301176 \\ -10000 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

Ker vozlišče 7 ni povezano z nobenim izmed preostalih končnih elementov, lahko sedaj prostostne stopnje  $X_7$ ,  $Y_7$  in  $\Phi_7$ , ki pripadajo temu vozlišču, eliminiramo. Po izvedbi delne Gaussove eliminacije sistem tako prevedemo v obliko:

$$\begin{bmatrix} 3.6107438841 & -0.6436219684 & -0.1259089079 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6436219684 & 71.1639818991 & 0.0502872217 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1259089079 & 0.0502872217 & 0.9234677289 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -0.1278972750 & 0.0510813629 & -59.4 & 60.3380512312 & 0 & 0 \\ 0.8148335654 & -0.2190134262 & 0 & 0.05161361407 & 71.1635520522 & 0 \\ 2.00475 & -0.8019 & 0 & 0.6558241765 & -0.0666278534 & 10.3275612306 \end{bmatrix}$$

$$\cdot 10^7 \cdot \begin{cases} \Phi_8 \\ Y_8 \\ X_8 \\ X_7 \\ Y_7 \\ \Phi_7 \end{cases} = \begin{cases} 2427.38154440941 \\ -980.097705996425 \\ -7299.56699504728 \\ 2743.07853534187 \\ 6089.11190478044 \\ -12833.9858399741 \end{cases}$$

in po odstranitvi zadnjih treh vrstic, ki predstavljajo tri enačbe:

$$\begin{aligned} & -0.127897275017074 \cdot 10^7 \cdot \Phi_8 + 5.10813628993898 \cdot 10^5 \cdot Y_8 - 59.4 \cdot 10^7 \cdot X_8 \\ & + 60.3380512312171 \cdot 10^7 \cdot X_7 = 2743.07853534187 \end{aligned} \quad (\text{VII})$$

$$\begin{aligned} & 0.814833565439784 \cdot 10^7 \cdot \Phi_8 + -0.219013426175913 \cdot 10^7 \cdot Y_8 \\ & + 5.16136140738636 \cdot 10^5 \cdot X_7 + 71.1635520521603 \cdot 10^7 \cdot Y_7 = 6089.11190478044 \end{aligned} \quad (\text{VIII})$$

$$\begin{aligned} & 2.00475 \cdot 10^7 \cdot \Phi_8 - 0.8019 \cdot 10^7 \cdot Y_8 + 0.655824176461252 \cdot 10^7 \cdot X_7 \\ & - 6.66278533528011 \cdot 10^5 \cdot Y_7 + 10.327561230576 \cdot 10^7 \cdot \Phi_7 = -12833.9858399741 \end{aligned} \quad (\text{IX})$$

tako ostane sistem:

$$\begin{bmatrix} 3.6107438841 & -0.64362196846 & -0.1259089080 \\ -0.64362196846 & 0.1508579107 & 5.0287221651 \cdot 10^{-2} \\ -0.1259089080 & 5.0287221651 \cdot 10^{-2} & 0.9234677289 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_8 \\ Y_8 \\ X_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2427.38154440941 \\ -980.097705996425 \\ -7299.56699504728 \end{Bmatrix}$$

Kot zadnjega analiziramo krajni desni steber oziroma sedmi končni element. Njegova globalna togostna matrika je enaka kot togostna matrika za prvi steber:

$$[K_6] = [K_1]$$

medtem ko sta vektor neznank in obtežni vektor enaka:

$$\{U_7\} = \begin{Bmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ \Phi_4 \\ X_8 \\ Y_8 \\ \Phi_8 \end{Bmatrix} \quad \{F_7\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Po upoštevanju ničelnosti pomikov in zasuka v vozlišču 4, sledi:

$$\begin{bmatrix} 0.36078733236 & 0 & 0.75765339796 \\ 0 & 70.71428571429 & 0 \\ 0.75765339796 & 0 & 2.12142951429 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} X_8 \\ Y_8 \\ \Phi_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

po združitvi členov togostne matrike in obtežnega vektorja tako sledi sistem

$$\begin{bmatrix} 5.7321724556 & -0.6436219684 & 0.6317441533 \\ -0.6436219684 & 70.8651436250 & 5.0287221651 \cdot 10^{-2} \\ 0.6317441533 & 5.0287221651 \cdot 10^{-2} & 1.2842549009 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} \Phi_8 \\ Y_8 \\ X_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2427.38154440941 \\ -980.097705996425 \\ -7299.56699504728 \end{Bmatrix}$$

Ker smo upoštevali že vse končne elemente, sistem rešimo in njegove rešitve so:

$$\begin{Bmatrix} \Phi_8 \\ Y_8 \\ X_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.11015393103143 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ 6.73281133448474 \cdot 10^{-8} \text{ m} \\ -6.23002030380811 \cdot 10^{-4} \text{ m} \end{Bmatrix}$$

Preostale neznane primarne spremenljivke eno po eno izračunamo iz enačb (IX) od (I), ki smo jih iz analize izpuščali pri posameznih gredah. Tako sledijo:

$$X_7 = -6.0853502681635 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$Y_7 = 7.72692683017539 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$$

$$\Phi_7 = -1.07120729361948 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$X_6 = -6.00509842969889 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$Y_6 = -8.77586734965154 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\Phi_6 = 6.3745409270972 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

ter

$$\Phi_5 = -8.07615285665366 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

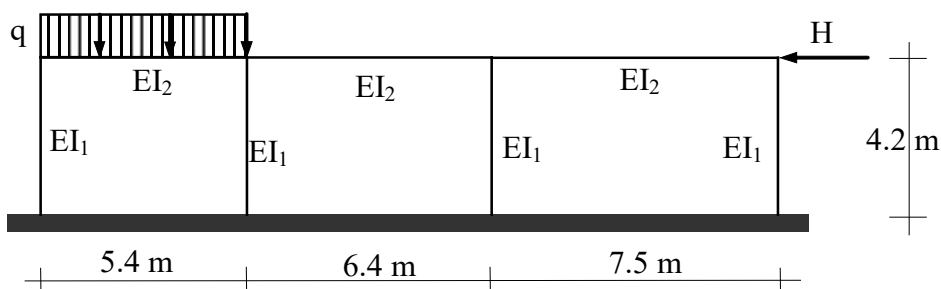
$$Y_5 = -7.27628541742776 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$X_5 = -5.90510560199785 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Ko so vrednosti vseh primarnih spremenljivk znane, je faza poprocesiranja enaka kot pri klasični analizi.

### Primer 25\* – Ravninska okvirna konstrukcija – analiza s tremi podkonstrukcijami

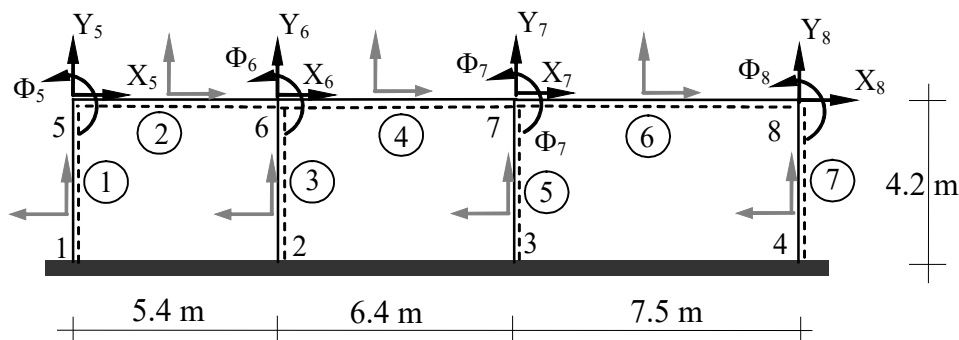
Za okvir s slike določi vozliščne vrednosti pomikov in zasukov. Stebri imajo prerez dimenzij  $b/b=0.3/0.3$  m, grede pa  $b/b=0.3/0.45$  m. Modul elastičnosti znaša  $E = 33$  GPa. Konstrukcija je obremenjena z enakomerno zvezno obtežbo  $q = 20$  kN/m' v prvem polju in s silo  $H = 10$  kN na vrhu desnega stebra.



Slika 268: Obravnavana konstrukcija

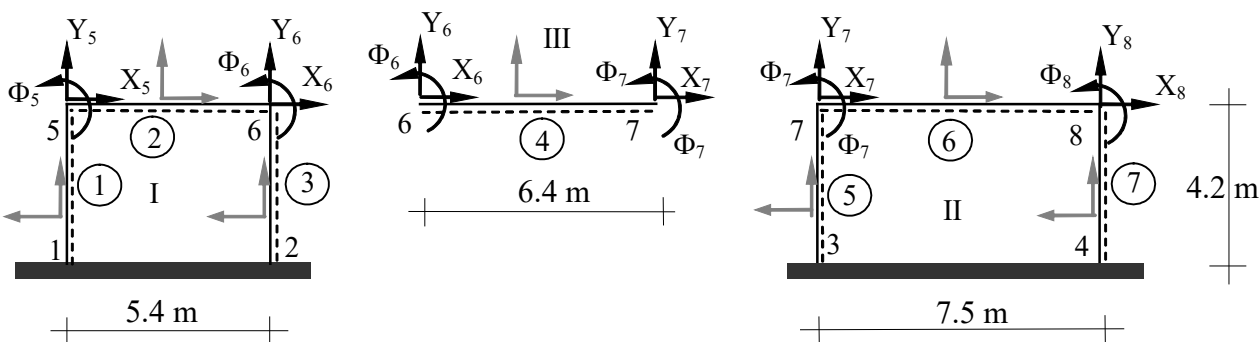
## Rešitev

Ker je potrebno izračunati samo vozliščne vrednosti pomikov, lahko uporabimo kar minimalni računski model s sedmimi končnimi elementi.



Slika 269: Izbrana diskretizacija

Analizo bomo izvedli s podkonstrukcijami, ki jih bomo izbrali in analizirali tako, da bomo z reševanjem večjega števila manjših sistemov enačb za celotno analizo porabili manj računskega napora kot z analizo celotne konstrukcije. Te podkonstrukcije bodo levi (I) in desni okvir (II) ter greda na sredini (III) med obema stranskima okvirjema:



Slika 270: Izbrane podkonstrukcije

### *Analiza prve podkonstrukcije – levega okvirja*

Globalne togostne matrike vseh treh elementov so podane že v primeru 24. Ob upoštevanju ničelnih zasukov v vozliščih 1 in 2, lahko zapišemo globalno togostno matriko prve podkonstrukcije kot:

$$[K_I] = 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 82.86078717 & 0 & 0.757653061 & -82.5 & 0 & 0 \\ 0 & 71.287202381 & 1.546875 & 0 & -0.572916667 & 1.546875 \\ 0.757653061 & 1.546875 & 7.690178571 & 0 & -1.546875 & 2.784375 \\ -82.5 & 0 & 0 & 82.86078717 & 0 & 0.757653061 \\ 0 & -0.572916667 & -1.546875 & 0 & 71.287202381 & -1.546875 \\ 0 & 1.546875 & 2.784375 & 0.757653061 & -1.546875 & 7.690178571 \end{bmatrix}$$

medtem ko sta vektor neznank in obtežni vektor enaka:

$$\{U_I\} = \begin{Bmatrix} X_5 \\ Y_5 \\ \Phi_5 \\ X_6 \\ Y_6 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix} \quad \{F_I\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -54000 \\ -48600 \\ 0 \\ -54000 \\ 48600 \end{Bmatrix}$$

Sedaj iz enačb kondenziramo prostostne stopnje, ki pripadajo vozlišču 5, in sistem razdelimo na štiri podmatrike:

$$\begin{bmatrix} 82.8608 & 0 & 0.7577 & -82.5 & 0 & 0 \\ 0 & 71.2872 & 1.5469 & 0 & -0.5729 & 1.5469 \\ 0.7577 & 1.5469 & 7.6902 & 0 & -1.5469 & 2.7844 \\ -82.5 & 0 & 0 & 82.8608 & 0 & 0.7577 \\ 0 & -0.5729 & -1.5469 & 0 & 71.2872 & -1.5469 \\ 0 & 1.5469 & 2.7844 & 0.7577 & -1.5469 & 7.6902 \end{bmatrix} \cdot 10^7 = \begin{bmatrix} [K_{nn,I}] & [K_{nb,I}] \\ [K_{bn,I}] & [K_{bb,I}] \end{bmatrix}$$

ter enako urejena vektor neznank

$$\{U_I\} = \begin{Bmatrix} X_5 \\ Y_5 \\ \Phi_5 \\ X_6 \\ Y_6 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{U_{n,I}\} \\ \{U_{b,I}\} \end{Bmatrix} \rightarrow \{U_{b,I}\} = \begin{Bmatrix} X_6 \\ Y_6 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix} \quad \{U_{n,I}\} = \begin{Bmatrix} X_5 \\ Y_5 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix}$$

in obtežni vektor:

$$\{F_I\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -54000 \\ -48600 \\ 0 \\ -54000 \\ 48600 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_{n,I}\} \\ \{F_{b,I}\} \end{Bmatrix} \rightarrow \{F_{b,I}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -54000 \\ 48600 \end{Bmatrix} \quad \{F_{n,I}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -54000 \\ -48600 \end{Bmatrix}$$

Tako sledijo še podmatrike (ki so v obravnavanem primeru slučajno vse enakega reda [3\*3]):

$$[K_{bb,I}] = \begin{bmatrix} 82.86078717 & 0 & 0.757653061 \\ 0 & 71.287202381 & -1.546875 \\ 0.757653061 & -1.546875 & 7.690178571 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$[K_{bn,I}] = \begin{bmatrix} -82.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.572916667 & -1.546875 \\ 0 & 1.546875 & 2.784375 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$[K_{nb,I}] = \begin{bmatrix} -82.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.572916667 & 1.546875 \\ 0 & -1.546875 & 2.784375 \end{bmatrix} \cdot 10^7 = [K_{bn,I}]^T$$

$$[K_{nn,I}] = \begin{bmatrix} 82.86078717 & 0 & 0.757653061 \\ 0 & 71.287202381 & 1.546875 \\ 0.757653061 & 1.546875 & 7.690178571 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Kondenzirano togostno matriko prve podkonstrukcije, ki mora biti simetrična, lahko izračunamo kar s *statično kondenzacijo*:

$$[K_{c,I}] = [K_{bb,I}] - [K_{bn,I}] \cdot [K_{nn,I}]^{-1} \cdot [K_{nb,I}]$$

$$= \begin{bmatrix} 0.6456147210304857 & 0.15131519387710496 & 0.4863890522010547 \\ 0.15131519387710496 & 70.97480547245138 & -0.982660941461597 \\ 0.4863890522010547 & -0.982660941461597 & 6.667428030027955 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Pripadajoči kondenzirani obtežni vektor prve konstrukcije pa je:

$$\{F_{c,I}\} = \{F_{b,I}\} - [K_{bn,I}] \cdot [K_{nn,I}]^{-1} \cdot \{F_{n,I}\} = \begin{Bmatrix} 4677.0150834741535 \\ -63947.57111124265 \\ 66826.84362755064 \end{Bmatrix}$$

*Analiza druge podkonstrukcije – desnega okvirja*

Tudi za desni okvir so globalne togostne matrike elementov 5, 6 in 7 že podane v primeru 24. Ob upoštevanju ničelnih zasukov v vozliščih 3 in 4, lahko zapišemo globalno togostno matriko druge podkonstrukcije kot:

$$[K_{II}] = 10^7 \cdot \begin{bmatrix} 59.760787172 & 0 & 0.7576530612 & -59.4 & 0 & 0 \\ 0 & 70.9281257143 & 0.8019 & 0 & -0.21384 & 0.8019 \\ 0.7576530612 & 0.8019 & 6.1309285714 & 0 & -0.8019 & 2.00475 \\ -59.4 & 0 & 0 & 59.760787172 & 0 & 0.7576530612 \\ 0 & -0.21384 & -0.8019 & 0 & 70.9281257143 & -0.8019 \\ 0 & 0.8019 & 2.00475 & 0.7576530612 & -0.8019 & 6.1309285714 \end{bmatrix}$$

medtem ko sta vektor neznank in obtežni vektor enaka:

$$\{U_{II}\} = \begin{Bmatrix} X_7 \\ Y_7 \\ \Phi_7 \\ X_8 \\ Y_8 \\ \Phi_8 \end{Bmatrix} \quad \{F_{II}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10000 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Sedaj iz enačb kondenziramo prostostne stopnje, ki pripadajo vozlišču 8, in sistem razdelimo na:

$$\begin{bmatrix} 59.7608 & 0 & 0.7577 & -59.4 & 0 & 0 \\ 0 & 70.9281 & 0.8019 & 0 & -0.2138 & 0.8019 \\ 0.7577 & 0.8019 & 6.1309 & 0 & -0.8019 & 2.0048 \\ -59.4 & 0 & 0 & 59.7608 & 0 & 0.7577 \\ 0 & -0.2138 & -0.8019 & 0 & 70.9281 & -0.8019 \\ 0 & 0.8019 & 2.0048 & 0.7577 & -0.8019 & 6.1309 \end{bmatrix} \cdot 10^7 = \begin{bmatrix} [K_{bb,II}] & [K_{bn,II}] \\ [K_{nb,II}] & [K_{nn,II}] \end{bmatrix}$$

ter enako urejena vektor neznank

$$\{U_{II}\} = \begin{Bmatrix} X_7 \\ Y_7 \\ \Phi_7 \\ X_8 \\ Y_8 \\ \Phi_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{U_{b,II}\} \\ \{U_{n,II}\} \end{Bmatrix} \rightarrow \{U_{b,II}\} = \begin{Bmatrix} X_7 \\ Y_7 \\ \Phi_7 \end{Bmatrix} \quad \{U_{n,II}\} = \begin{Bmatrix} X_8 \\ Y_8 \\ \Phi_8 \end{Bmatrix}$$

in obtežni vektor:

$$\{F_{II}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10000 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_{b,I}\} \\ \{F_{n,I}\} \end{Bmatrix} \rightarrow \{F_{b,II}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{F_{n,II}\} = \begin{Bmatrix} -10000 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Tako sledijo še naslednje podmatrice (ki so v obravnavanem primeru slučajno vse enakega reda [3\*3]):

$$[K_{bb,II}] = \begin{bmatrix} 59.760787172 & 0 & 0.7576530612 \\ 0 & 70.9281257143 & 0.8019 \\ 0.7576530612 & 0.8019 & 6.1309285714 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$[K_{bn,II}] = \begin{bmatrix} -59.4 & 0 & 0 \\ 0 & -0.21384 & 0.8019 \\ 0 & -0.8019 & 2.00475 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

$$[K_{nb,II}] = \begin{bmatrix} -59.4 & 0 & 0 \\ 0 & -0.21384 & -0.8019 \\ 0 & 0.8019 & 2.00475 \end{bmatrix} \cdot 10^7 = [K_{bn,II}]^T$$

$$[K_{nn,II}] = \begin{bmatrix} 59.760787172 & 0 & 0.7576530612 \\ 0 & 70.9281257143 & -0.8019 \\ 0.7576530612 & -0.8019 & 6.1309285714 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Tudi kondenzirano togostno matriko druge podkonstrukcije lahko izračunamo kar s *statično kondenzacijo*:

$$\begin{aligned}
 [K_{c,II}] &= [K_{bb,II}] - [K_{bn,II}] \cdot [K_{nn,II}]^{-1} \cdot [K_{nb,II}] \\
 &= \begin{bmatrix} 0.626610847220556 & -0.0985026265897784 & 0.511768834678554 \\ -0.0985026265897784 & 70.8229088268401 & 0.538447186019751 \\ 0.511768834678554 & 0.538447186019751 & 5.4702612061148 \end{bmatrix} \cdot 10^7
 \end{aligned}$$

Pripadajoči kondenzirani obtežni vektor druge konstrukcije pa je:

$$\{F_{c,II}\} = \{F_{b,II}\} - [K_{bn,II}] \cdot [K_{nn,II}]^{-1} \cdot \{F_{n,II}\} = \begin{Bmatrix} -9955.24853952713 \\ -16.582933769323 \\ -41.3946509336601 \end{Bmatrix}$$

*Tretja podkonstrukcija – vezna greda med okvirjema*

Tudi za končni element (4) je globalna togostna matrika že podana v primeru 24, obtežni vektor pa je enak 0. Ko upoštevamo še togostni matriki podkonstrukcij, dobimo sistem enačb:

$$\begin{bmatrix} 70.254989721 & 0.1513151939 & 0.4863890522 & -69.609375 & 0 & 0 \\ 0.1513151939 & 71.3189436179 & 0.1185811240 & 0 & -0.3441381454 & 1.1012420654 \\ 0.4863890522 & 0.1185811240 & 11.3660608425 & 0 & -1.1012420654 & 2.3493164063 \\ -69.609375 & 0 & 0 & 70.2359858472 & -0.0985026266 & 0.5117688347 \\ 0 & -0.3441381454 & -1.1012420654 & -0.0985026266 & 71.1670469723 & -0.5627948794 \\ 0 & 1.1012420654 & 2.3493164063 & 0.5117688347 & -0.5627948794 & 10.1688940186 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \cdot \begin{Bmatrix} X_6 \\ Y_6 \\ \Phi_6 \\ X_7 \\ Y_7 \\ \Phi_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4677.0150834741535 \\ -63947.57111124265 \\ 66826.84362755064 \\ -9955.248539527125 \\ -16.58293376932292 \\ -41.394650933659264 \end{Bmatrix}$$

Ta sistem je že rešljiv in njegove rešitve so točne. Če pa želimo še zmanjšati računski napor, s kondenzacijo odstranimo npr. še prostostne stopnje, ki pripadajo vozlišču 7, kar vodi do naslednjih podmatrik:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{K}_{bb,III}] &= \begin{bmatrix} 70.25498972103048 & 0.15131519387710496 & 0.4863890522010547 \\ 0.15131519387710496 & 71.31894361789816 & 0.1185811239680903 \\ 0.4863890522010547 & 0.1185811239680903 & 11.366060842527956 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \\
[\mathbf{K}_{bn,III}] &= \begin{bmatrix} -69.609375 & 0 & 0 \\ 0 & -0.34413814544677723 & 1.1012420654296873 \\ 0 & -1.1012420654296873 & 2.34931640625 \end{bmatrix} \cdot 10^7 \\
[\mathbf{K}_{nb,III}] &= \begin{bmatrix} -69.609375 & 0 & 0 \\ 0 & -0.34413814544677723 & -1.1012420654296873 \\ 0 & 1.1012420654296873 & 2.34931640625 \end{bmatrix} \cdot 10^7 = [\mathbf{K}_{bn,III}]^T \\
[\mathbf{K}_{nn,III}] &= \begin{bmatrix} 70.23598584722053 & -0.09850262658977815 & 0.5117688346785537 \\ -0.09850262658977815 & 71.16704697228657 & -0.5627948794099393 \\ 0.5117688346785537 & -0.5627948794099393 & 10.168894018614786 \end{bmatrix} \cdot 10^7
\end{aligned}$$

in obtežnih vektorjev:

$$\{\mathbf{F}_{b,III}\} = \begin{Bmatrix} 4677.0150834741535 \\ -63947.57111124265 \\ 66826.84362755064 \end{Bmatrix} \quad \{\mathbf{F}_{n,III}\} = \begin{Bmatrix} -9955.248539527125 \\ -16.58293376932292 \\ -41.394650933659264 \end{Bmatrix}$$

Kondenzirana togostna matrika je sedaj:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{K}_{c,III}] &= [\mathbf{K}_{bb,III}] - [\mathbf{K}_{bn,III}] \cdot [\mathbf{K}_{nn,III}]^{-1} \cdot [\mathbf{K}_{nb,III}] \\
&= \begin{bmatrix} 1.2412596947787762 & 0.09609035809253302 & 0.3682170256747383 \\ 0.09609035809253302 & 71.19851286189491 & -0.13979944823456691 \\ 0.3682170256747383 & -0.13979944823456691 & 10.80983658098275 \end{bmatrix} \cdot 10^7
\end{aligned}$$

Pripadajoči kondenzirani obtežni vektor pa je:

$$\{\mathbf{F}_{c,III}\} = \{\mathbf{F}_{b,III}\} - [\mathbf{K}_{bn,III}] \cdot [\mathbf{K}_{nn,III}]^{-1} \cdot \{\mathbf{F}_{n,III}\} = \begin{Bmatrix} -5190.999767366812 \\ -63951.05979969245 \\ 66819.25235936535 \end{Bmatrix}$$

Rešitve sistema

$$[\mathbf{K}_{c,III}] \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_6 \\ \mathbf{Y}_6 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix} = \{\mathbf{F}_{c,III}\} \rightarrow \{\mathbf{U}_{b,III}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_6 \\ \mathbf{Y}_6 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix} = [\mathbf{K}_{c,III}]^{-1} \cdot \{\mathbf{F}_{c,III}\}$$

so:

$$\{U_{b,III}\} = \begin{Bmatrix} X_6 \\ Y_6 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6.005098429698744 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ -8.77586734965155 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \\ 6.374540927097195 \cdot 10^{-4} \text{ m} \end{Bmatrix} = \{U_{b,I}\}$$

Vrednosti obeh pomikov ter zasuka v vozlišču 7 sedaj izračunamo kot

$$\{U_{n,III}\} = [K_{nn,III}]^{-1} \cdot (\{F_{n,III}\} - [K_{nb,III}] \cdot \{U_{b,III}\}) = \begin{Bmatrix} X_7 \\ Y_7 \\ \Phi_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6.085350268163351 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ 7.726926830175399 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \\ -1.0712072936194835 \cdot 10^{-4} \text{ m} \end{Bmatrix} = \{U_{n,II}\}$$

Vrednosti obeh pomikov ter zasuka v vozlišču 5 sedaj izračunamo kot

$$\{U_{n,I}\} = [K_{nn,I}]^{-1} \cdot (\{F_{n,I}\} - [K_{nb,I}] \cdot \{U_{b,I}\}) = \begin{Bmatrix} X_5 \\ Y_5 \\ \Phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5.905105601997706 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ -7.276285417427748 \cdot 10^{-5} \text{ m} \\ -8.076152856653669 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Vrednosti obeh pomikov ter zasuka v vozlišču 8 sedaj izračunamo kot

$$\{U_{n,II}\} = [K_{nn,II}]^{-1} \cdot (\{F_{n,II}\} - [K_{nb,II}] \cdot \{U_{b,II}\}) = \begin{Bmatrix} X_8 \\ Y_8 \\ \Phi_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6.230020303807967 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ 6.732811334482234 \cdot 10^{-8} \text{ m} \\ 1.1101539310314119 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \end{Bmatrix}$$

Kljub temu, da smo formalno invertirali 4 (manjše) matrike, je bilo skupno število računskih operacij bistveno manjše, kot če bi invertirali klasično sestavljeno (večjo) togostno matriko celotne konstrukcije (ki ima 12 prostostnih stopenj), za katero bi potrebovali  $2 \cdot 12^3 / 3 = 1152$  operacij. Za inverzijo 4 matrik tretjega reda pa potrebujemo  $4 \cdot (2 \cdot 3^3 / 3) = 72$  operacij (plus še nekaj operacij za množenje in seštevanje matrik).

Ko so vrednosti vseh primarnih spremenljivk znane, je faza poprosesanja enaka kot pri klasični analizi.



# METODA KONČNIH ELEMENTOV V ANALIZI STATIČNEGA ODZIVA RAVNINSKIH LINIJSKIH KONSTRUKCIJ: ZBIRKA REŠENIH PRIMEROV

MATJAŽ SKRINAR

Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo,  
Maribor, Slovenija  
matjaz.skrinar@um.si

Metoda končnih elementov (FEM) je zagotovo najbolj razširjena sodobna metoda za mehansko analizo konstrukcij v gradbeništvu. Pričujoče delo predstavlja znatno nadgradnjo gradiva s podobnim naslovom, katerega vsi izvodi so bili že leta 2022 nepričakovano razprodani v tujino. Delo je še vedno namenjeno predvsem študentom magistrskih programov Gradbeništva in Gospodarskega inženirstva smer Gradbeništvo Fakultete za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo Univerze v Mariboru kot študijsko gradivo za pisni izpit pri predmetih Metoda končnih elementov oz. Osnove metode končnih elementov, nekateri novi primeri pa služijo tudi kot delno študijsko gradivo za izpit pri predmetu Izbrana poglavja iz metode končnih elementov. Primeri so narejeni tako, da služijo predvsem kot komplement oz. dopolnitev predavanjem in ne kot popolnoma samostojno uporabno delo.

DOI

[https://doi.org/  
10.18690/um.fgpa.1.2026](https://doi.org/10.18690/um.fgpa.1.2026)

ISBN

978-961-299-163-0

**Ključne besede:**

metoda končnih  
elementov,  
ravninske linijske  
konstrukcije,  
numerično reševanje  
diferencialnih enačb,  
analiza statičnega odziva,  
analize pomikov ter  
notranjih statičnih količin



Univerzitetna založba  
Univerze v Mariboru

DOI  
[https://doi.org/  
10.18690/um.fgpa.1.2026](https://doi.org/10.18690/um.fgpa.1.2026)

ISBN  
978-961-299-163-0

**Keywords:**

finite element method,  
plane line structures,  
numerical solution of  
differential equations,  
static response analysis,  
analyses of displacements  
and inner forces

# FINITE ELEMENT METHOD IN THE ANALYSIS OF STATIC RESPONSE OF PLANAR ONE-DIMENSIONAL STRUCTURES: A COLLECTION OF SOLVED EXAMPLES

MATJAŽ SKRINAR

University of Maribor, Faculty of Civil Engineering, Transport Engineering and Architecture,  
Maribor, Slovenia  
[matjaz.skrinar@um.si](mailto:matjaz.skrinar@um.si)

The finite element method (FEM) is certainly the most widely used modern method for solving mechanical problems of structural analysis in civil engineering. The present work represents a significant upgrade of the material with a similar title, all copies of which were unexpectedly sold out abroad in 2022. The work is still intended primarily for students of the master's programs in Civil Engineering and Industrial Engineering at Faculty of Civil Engineering, Traffic Engineering and Architecture, University of Maribor, as study material for the written exam in the courses Finite Element Method and Fundamentals of the Finite Element Method, where some new examples also serve as partial study material for the exam in the course Selected Chapters in the Finite Element Method. The examples are designed primarily to complement the lectures, not as a completely independent work.





Celotna snov je predstavljena v pregledni in poenostavljeni obliki, ki ustreza zahtevanemu in potrebnemu nivoju znanja študentov na študijskem programu Gradbeništvo na 2. stopnji. Še več, zadnja poglavja celo presegajo zahtevani nivo in kot takšna omogočajo nadgradnjo znanja najboljšim študentom. Domača in tuja strokovna literatura za obravnavano področje sicer vsebuje nekaj naslovov, pričujoče gradivo pa obstoječo literaturo nadgrajuje, saj obravnava tematiko na način, ki odlično povezuje zahtevne matematične principe in numerično reševanje konstrukcijskih problemov na področju gradbeništva.

#### Iztok **PERUŠ**

Univerza v Mariboru  
Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo

Čeprav zbirka obravnava uporabo metode končnih elementov v analizi gradbenih konstrukcij, predstavlja zaradi narave in kakovosti podajanja tematike, kot tudi prikaza uporabe različnih načinov reševanja in njihovih primerjav, koristen pripomoček pri razumevanju področja tudi študentom ostalih fakultet kjer obravnavajo sorodne vsebine.

#### Mojmir **URANJEK**

Univerza v Mariboru  
Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo

Na osnovu detaljnog pregleda rokopisa pod nazivom "Metoda končnih elementov v analizi statičnega odziva ravninskih linijskih konstrukcij -Zbirka rešenih primerov", autora izr.prof.dr. Matjaž Skrinara, zaključujem da ce izloženi material biti izuzetno koristan kao pomocni udžbenik kako studentima Univerzitetu u Mariboru tako i široj akademskoj i stručnoj zajednici u cilju usvajanja znanja iz oblasti Metode konačnih elemenata.

#### Marina **TRAJKOVIC-MILENKOVIC**

Univerzitet u Nišu  
Gradjevinsko arhitektonski fakultet



Univerza v Mariboru

---

Fakulteta za gradbeništvo,  
prometno inženirstvo in arhitekturo

