

**Niko
TRATNIK**

Skripta pri predmetu

OSNOVE ANALIZE

za študente smeri
Izobraževalna matematika
na študijskem programu
Predmetni učitelj



Univerzitetna založba
Univerze v Mariboru



Univerza v Mariboru

Fakulteta za naravoslovje
in matematiko

Skripta pri predmetu

Osnove analize

za študente smeri Izobraževalna matematika na
študijskem programu
Predmetni učitelj

Avtor

Niko Tratnik

Marec 2026

Naslov <i>Title</i>	Skripta pri predmetu Osnove analize za študente smeri Izobraževalna matematika na študijskem programu Predmetni učitelj <i>Course Material for Basic Analysis for Students of the Educational Mathematics Study Field in the Subject Teacher Study Programme</i>
Avtor <i>Author</i>	Niko Tratnik (Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko)
Recenzija <i>Review</i>	Uroš Kuzman (Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko in Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko)
Jezikovni pregled <i>Language editing</i>	Alenka Fujs
Tehnična urednika <i>Technical editors</i>	Niko Tratnik (Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko) Jan Perša (Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba)
Oblikovanje ovitka <i>Cover designer</i>	Jan Perša (Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba)
Grafika na ovitku <i>Cover graphics</i>	Abstrakt, avtor: merlinlightpainting, pixabay.com, 2021
Grafične priloge <i>Graphics material</i>	Vsi viri so lastni, razen če ni navedeno drugače. Tratnik (avtor), 2026
Založnik <i>Published by</i>	Univerza v Mariboru Univerzitetna založba Slomškov trg 15, 2000 Maribor, Slovenija https://press.um.si , zalozba@um.si
Izdajatelj <i>Issued by</i>	Univerza v Mariboru Fakulteta za naravoslovje in matematiko Koroška cesta 160, 2000 Maribor, Slovenija https://fmm.um.si , dekanat.fmm@um.si
Izdaja <i>Edition</i>	Prva izdaja
Izdano <i>Published at</i>	Maribor, Slovenija, Marec 2026
Vrsta publikacije <i>Publication type</i>	E-knjiga
Dostopno na <i>Available at</i>	https://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/1101

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Univerzitetna knjižnica Maribor

517(075.8)(0.034.2)

TRATNIK, Niko

Skripta pri predmetu Osnove analize za študente smeri Izobraževalna matematika na študijskem programu Predmetni učitelj [Elektronski vir] / avtor Niko Tratnik. - 1. izd. - E-knjiga. - Maribor : Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba, 2026

Način dostopa (URL): <https://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/1101>

ISBN 978-961-299-123-4 (PDF)

doi: 10.18690/um.fnm.1.2026

COBISS.SI-ID 270719491



© Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba

/ University of Maribor, University of Maribor Press

Besedilo / *Text* © Tratnik (avtor), 2026

To delo je objavljeno pod licenco Creative Commons Priznanje avtorstva-Nekomercialno-Brez predelav 4.0 Mednarodna. / *This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercialNoDerivs 4.0 International License.*

Uporabnikom je dovoljeno reproduciranje brez predelave avtorskega dela, distribuiranje, dajanje v najem in priobčitev javnosti samega izvirnega avtorskega dela, in sicer pod pogojem, da navedejo avtorja in da ne gre za komercialno uporabo.

Vsa gradiva tretjih oseb v tej knjigi so objavljena pod licenco Creative Commons, razen če to ni navedeno drugače. Če želite ponovno uporabiti gradivo tretjih oseb, ki ni zajeto v licenci Creative Commons, boste morali pridobiti dovoljenje neposredno od imetnika avtorskih pravic.

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

ISBN 978-961-299-123-4 (pdf)

DOI <https://doi.org/10.18690/um.fnm.1.2026>

Cena
Price Brezplačni izvod

Odgovorna oseba založnika Prof. dr. Zdravko Kačič,
For publisher rektor Univerze v Mariboru

Citiranje Tratnik, N. (2026). *Skripta pri predmetu Osnove analize za študente smeri*
Attribution *Izobraževalna matematika na študijskem programu Predmetni učitelj.*
Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba. doi: 10.18690/um.fnm.1.2026

Kazalo

Predgovor	1
1 Realna in kompleksna števila	3
1.1 Ponovitev osnovnih pojmov o funkcijah	3
1.2 Številske množice $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$	6
1.3 Linearno urejene množice	8
1.4 Aksiomi za urejen komutativen obseg	9
1.5 Supremum in infimum	13
1.6 Dedekindov aksiom in realna števila	16
1.7 Intervali	17
1.8 Decimalni zapis in številska premica	18
1.9 Racionalna in iracionalna števila	21
1.10 Konstrukcija realnih števil	23
1.10.1 Realna števila kot neskončna decimalna števila	23
1.10.2 Realna števila kot Dedekindovi rezi	25
1.11 Absolutna vrednost	29
1.12 O moči številskih množic	33
1.13 Kompleksna števila: definicija in osnovne lastnosti	35
1.14 Polarni zapis kompleksnega števila	41
2 Zaporedja in vrste	47
2.1 Definicija in osnovne lastnosti zaporedij	47
2.2 Stekališča	49
2.3 Konvergentna zaporedja	51
2.4 Podzaporedja	53
2.5 Monotona zaporedja	54
2.6 Računanje z zaporedji in limitami	57
2.7 Cauchyjeva zaporedja	59

2.8	Limite in stekališča v $\overline{\mathbb{R}}$	60
2.9	Definicija potence z realnim eksponentom	62
2.9.1	Potence z naravnim eksponentom	62
2.9.2	Potence s celim eksponentom	64
2.9.3	Koreni	64
2.9.4	Potence z racionalnim eksponentom	67
2.9.5	Potence z realnim eksponentom	69
2.10	Geometrijsko zaporedje	73
2.11	Definicija števila e	75
2.12	Še nekaj posebnih limit zaporedij	77
2.13	Številske vrste	79
2.14	Vrste z nenegativnimi členi	86
2.15	Vrste s členi poljubnega predznaka	94
2.16	O preureditvi vrste	97
2.17	Produkt vrst	98
3	Zveznost in limita funkcije	103
3.1	Realne funkcije realne spremenljivke	103
3.2	Zveznost	105
3.3	Zvezne funkcije na zaprtih intervalih	112
3.4	Zveznost inverzne funkcije	115
3.5	Zveznost elementarnih funkcij	117
3.5.1	Potenčne in korenske funkcije	117
3.5.2	Eksponentne in logaritemske funkcije	119
3.5.3	Kotne in krožne funkcije	121
3.5.4	Hiperbolične funkcije	123
3.6	Enakomerna zveznost	125
3.7	Stekališča množic	127
3.8	Limita funkcije	128
3.9	Leva in desna limita	133
3.10	Limite v neskončnosti in neskončne limite	136
3.11	Nekaj posebnih limit	140
3.12	Primeri uporabe limit pri računanju odvodov	142
	Literatura	147

Predgovor

Pričujoča skripta predstavlja študijsko gradivo pri predmetu Osnove analize, ki ga v prvem letniku poslušajo študenti dvopredmetne smeri Izobraževalna matematika študijskega programa Predmetni učitelj na Fakulteti za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru. Skripta je nastala v okviru priprav na predavanja pri omenjenem predmetu in vključuje tri poglavja: Realna in kompleksna števila, Zaporedja in vrste, Zveznost in limita funkcije. Ker študenti smeri Izobraževalna matematika že pred tem predmetom obiskujejo predmet Uvod v matematiko, predpostavimo, da ima bralec osnovna znanja o logiki, množicah, naravnih, celih in racionalnih številih ter o elementarnih funkcijah, zato teh vsebin v glavnem ne ponavljamo oziroma jih obnovimo manj temeljito.

Omeniti je treba, da je področje, ki ga zajema to študijsko gradivo, seveda obravnavano že v veliko drugih učbenikih oziroma skriptah (glejte na primer vire [6, 10, 11, 14, 17, 18, 20, 22]), vendar imajo posamezni avtorji različne pristope. Posledično pričujoča skripta ne vsebuje originalnih prispevkov ali pristopov s področja analize, saj vsebino povzema iz prej omenjenih učbenikov in iz gradiv [2, 3, 4, 15] (kar je na veliko mestih v skripti tudi posebej poudarjeno), vendar se po drugi strani od vsakega od omenjenih virov na določenih mestih razlikuje. Čeprav skripta vsebuje tudi zglede, je za dobro pripravo na pisne izpite oziroma kolokvije seveda treba poseči po zbirkah nalog, kot so [1, 7, 8, 21]. Upam, da bo ta skripta koristen pripomoček predvsem pri študiju teoretičnega dela osnov analize.

Iskreno se zahvaljujem prof. dr. Iztoku Baniču in prof. dr. Urošu Milutinoviću za prijazno deljenje priprav na predavanja oziroma zapiskov predavanj [3, 4, 15], ki so mi zelo pomagali pri pripravi tega gradiva. Prav tako se zahvaljujem svoji družini – ženi Nini in hčerki Ajdi – za potrpežljivost, razumevanje in podporo v času, ko sem se posvečal pisanju skripte.

Na koncu bi se iskreno zahvalil recenzentu dr. Urošu Kuzmanu za natančen pregled dela in nasvete, ki so gradivo nedvomno precej izboljšali. Zahvaljujem se tudi Alenki Fujs za lektoriranje besedila.

Poglavje 1

Realna in kompleksna števila

Čeprav realna števila načeloma poznamo, se včasih ne zavedamo dobro njihove definicije in tistih bistvenih lastnosti (aksiomov), na katerih temeljijo vsa druga pravila. Cilj tega poglavja je zato predstaviti enega od možnih načinov za vpeljavo realnih števil in opisati osnovne zakone, ki veljajo za seštevanje in množenje ter za relacijo urejenosti. Ob koncu poglavja se nekoliko natančneje kot v srednji šoli posvetimo tudi kompleksnim številom.

1.1 Ponovitev osnovnih pojmov o funkcijah

V tej skripti se bomo ves čas srečevali s funkcijami, zato začnimo s ponovitvijo njihovih osnovnih lastnosti. Spomnimo tudi, da z $\mathbb{N}$ označujemo množico naravnih števil in z $\mathbb{Z}$ množico celih števil, torej $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ in $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Definicija 1.1 Naj bosta A in B množici. **Funkcija** (ali **preslikava**) $f : A \rightarrow B$ je predpis, ki vsakemu elementu množice A priredi natanko en element množice B . Množica A se imenuje **domena** ali **definičijsko območje** funkcije f , množica B pa **kodomena**. Če funkcija f elementu $a \in A$ priredi element $b \in B$, pišemo $b = f(a)$ ali $f : a \mapsto b$ in rečemo, da je a **original**, b pa **slika**.

Omeniti je treba, da nekateri ločijo med pojmom *funkcija* in *preslikava*, tako da funkcijo definirajo kot poseben primer preslikave, ki ima za kodomeno neko množico števil. V tej skripti med omenjenima pojmomoma ne bomo razlikovali.

Opomba 1.2 Funkcija $f : A \rightarrow B$ je celota, ki jo tvorita množici A in B ter predpis funkcije. Na primer, če je funkcija $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ podana s predpisom $f(n) = n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in če je funkcija $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ podana s predpisom $g(n) = n$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$, potem sta f in g dve različni funkciji.

Dogovorimo se, da bomo pri zapisu predpisa funkcije pogosto izpuščali **univerzalni kvantifikator**, ki ga označimo s simbolom $\forall$ in beremo kot *za vsak* oziroma *za vse*. Na primer za funkcijo $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, ki je podana s predpisom $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n$, bomo predpis včasih zapisali samo v obliki $f(n) = n$. S tem seveda mislimo, da enakost velja za vse elemente iz definičijskega območja dane funkcije.

Definicija 1.3 Naj bo $f : A \rightarrow B$ funkcija. Če je $M \subseteq A$, potem je **slika množice M s funkcijo f** definirana na naslednji način:

$$f(M) = \{f(a) \mid a \in M\}.$$

Spomnimo še, da simbol $\exists$ označuje **eksistenčni kvantifikator**, ki ga beremo kot *obstaja*, medtem ko $\exists!$ pomeni *obstaja natanko en*.

Definicija 1.4 **Zaloga vrednosti** funkcije $f : A \rightarrow B$ je množica

$$Z_f = f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} = \{b \in B \mid \exists a \in A, f(a) = b\}.$$

Definicija 1.5 Funkcija $f : A \rightarrow B$ je

(1) **injektivna**, če

$$\forall a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2),$$

kar je ekvivalentno pogoju

$$\forall a_1, a_2 \in A, f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2;$$

(2) **surjektivna**, če

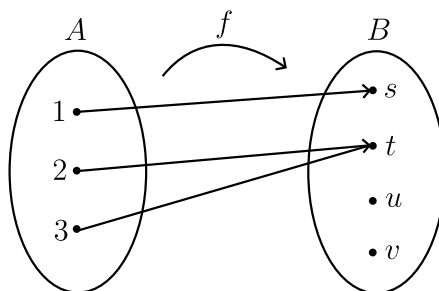
$$\forall b \in B, \exists a \in A, f(a) = b,$$

kar je ekvivalentno pogoju $Z_f = B$;

(3) **bijektivna**, če je injektivna in surjektivna.

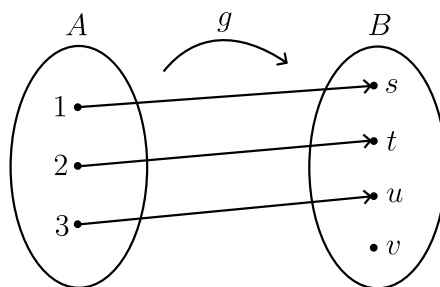
Zgled 1.6 Oglejmo si spodnje tri funkcije (pri tem predpostavimo, da so s, t, u, v neki paroma različni elementi).

(1) Naj bosta $A = \{1, 2, 3\}$ in $B = \{s, t, u, v\}$. Funkcija $f : A \rightarrow B$ naj bo podana tako, kot kaže slika 1.1. Opazimo, da f ni injektivna, saj velja $f(2) = f(3) = t$. Funkcija prav tako ni surjektivna, saj se na primer v element $u \in B$ ne preslika noben element množice A . Posledično f ni bijektivna funkcija.



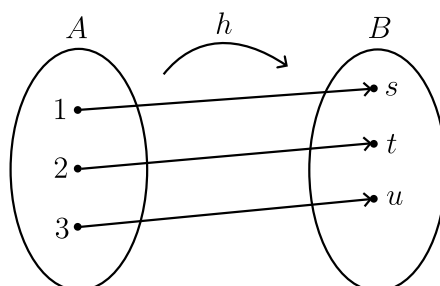
Slika 1.1: Funkcija f .

(2) Naj bosta ponovno $A = \{1, 2, 3\}$ in $B = \{s, t, u, v\}$. Funkcija $g : A \rightarrow B$ naj bo podana tako, kot kaže slika 1.2. Opazimo, da g je injektivna funkcija, saj imata poljubna različna elementa iz množice A tudi različni sliki. Funkcija g pa ni surjektivna, saj se na primer v element $v \in B$ ne preslika noben element množice A . Posledično g ni bijektivna funkcija.



Slika 1.2: Funkcija g .

(3) Naj bosta $A = \{1, 2, 3\}$ in $B = \{s, t, u\}$. Funkcija $h : A \rightarrow B$ naj bo podana tako, kot kaže slika 1.3. Opazimo, da h je injektivna funkcija, saj imata poljubna različna elementa iz množice A tudi različni sliki. Prav tako je h surjektivna, saj je vsak element množice B slika nekega elementa iz množice A . Posledično je h bijektivna funkcija.



Slika 1.3: Funkcija h .

Opomba 1.7 Opazimo, da je $f : A \rightarrow B$ bijekcija natanko tedaj, ko velja

$$\forall b \in B, \exists! a \in A, f(a) = b.$$

Torej za vsak $b \in B$ mora obstajati natanko en $a \in A$, da je $f(a) = b$.

Zgornja opomba je podlaga za definicijo inverzne funkcije.

Definicija 1.8 Naj bo $f : A \rightarrow B$ bijektivna funkcija. Funkcija $f^{-1} : B \rightarrow A$ je **inverzna funkcija** funkcije f , če velja:

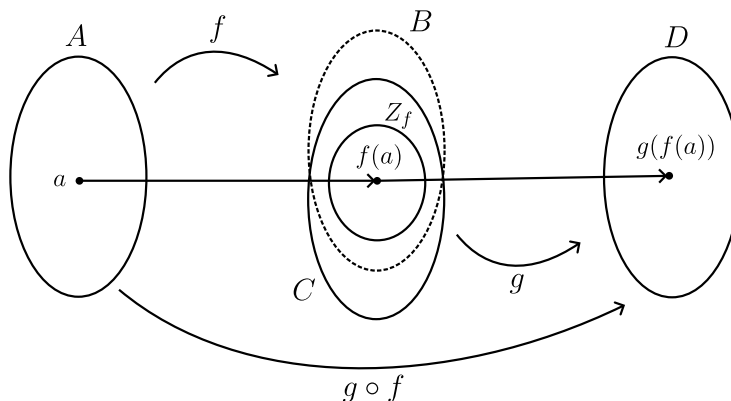
$$\forall a \in A, \forall b \in B, a = f^{-1}(b) \iff f(a) = b.$$

Opomba 1.9 Izkaže se, da za bijektivno funkcijo $f : A \rightarrow B$ obstaja natanko ena inverzna funkcija. V primeru, da f ni bijektivna, pa inverzne funkcije ne moremo definirati. Pokažemo namreč lahko, da v tem primeru ne obstaja funkcija $f^{-1} : B \rightarrow A$, ki bi zadoščala pogoju iz zgornje definicije. Če namreč funkcija f ni injektivna, potem obstajata takšna $a_1, a_2 \in A$, da velja $a_1 \neq a_2$ in $f(a_1) = f(a_2) = b_1$. V tem primeru bi funkcija f^{-1} element $b_1 \in B$ preslikala v dva različna elementa (a_1 in a_2), kar ni možno. Po drugi strani pa v primeru, ko funkcija f ni surjektivna, obstaja element $b \in B$, da za vse $a \in A$ velja $f(a) \neq b$. To pomeni, da funkcija f^{-1} elementu b ne priredi nobenega elementa iz množice A , kar ponovno vodi v protislovje.

Definicija 1.10 Naj bosta $f : A \rightarrow B$ in $g : C \rightarrow D$ funkciji, tako da velja $Z_f \subseteq C$. **Kompozitum** funkcij f in g je funkcija $(g \circ f) : A \rightarrow D$, ki je definirana s predpisom

$$\forall a \in A, (g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Slika 1.4 prikazuje kompozitum funkcij f in g .



Slika 1.4: Kompozitum $g \circ f$.

Definicija 1.11 Naj bo $f : A \rightarrow B$ funkcija in naj velja $U \subseteq A$. Funkcijo $f_U : U \rightarrow B$, podano s predpisom

$$\forall x \in U, f_U(x) = f(x),$$

imenujemo **zožitev** funkcije f na množico U .

Ob koncu razdelka ponovimo še definicijo grafa funkcije, primeri pa sledijo v kasnejših razdelkih.

Definicija 1.12 Graf funkcije $f : A \rightarrow B$ je množica

$$G_f = \{(a, f(a)) \in A \times B \mid a \in A\}.$$

1.2 Številске množice $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$

V tem razdelku na kratko ponovimo osnovna dejstva o naravnih, celih in racionalnih številih, ki so bila podrobneje obravnavana že pri predmetu Uvod v matematiko.

(1) Naravna števila: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Na množici naravnih števil, ki jih lahko vpeljemo s pomočjo Peanovih aksiomov [20], imamo definirani notranji operaciji seštevanja, $+$: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, in množenja, $\cdot$: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Z oznako $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ ponazorimo množico $\mathbb{N}$ skupaj z operacijama seštevanja in množenja. Ker je na primer operacija seštevanja definirana na množici $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, bi načeloma morali pisati recimo $+\big((3, 8)\big) = 11$, to pa običajno zapišemo kar kot $3 + 8 = 11$.

Za omenjeni operaciji veljajo nekatere izmed lastnosti, ki jih bomo omenjali v razdelku 1.4 (recimo komutativnost in asociativnost), ne obstaja pa enota za seštevanje. Na primer enačba $x + 5 = 5$ nima rešitve v množici $\mathbb{N}$.

- (2) Cela števila: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$.

Operaciji seštevanja in množenja lahko razširimo z množice $\mathbb{N}$ na množico $\mathbb{Z}$, da dobimo operaciji $+: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ in $\cdot: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. V množici $\mathbb{Z}$ obstaja enota za seštevanje, ki je seveda število 0 (to pomeni, da za vse $a \in \mathbb{Z}$ velja $a+0 = 0+a = a$), prav tako za vsako število $a \in \mathbb{Z}$ obstaja nasprotno število $-a \in \mathbb{Z}$, tako da je $a + (-a) = 0$.

Vendar pa števila v množici $\mathbb{Z}$, razen števil 1 in -1 , nimajo inverznega elementa za množenje (število a je inverzni element za množenje za število $b \neq 0$, če velja $a \cdot b = b \cdot a = 1$). Tako na primer enačba $3 \cdot x = 1$ nima rešitve v množici $\mathbb{Z}$.

- (3) Racionalna števila: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, D(m, n) = 1 \right\}$, pri čemer $D(m, n)$ označuje največji skupni delitelj celega števila m in naravnega števila n .

Množica racionalnih števil je torej množica okrajšanih ulomkov $\frac{m}{n}$, kjer je $m \in \mathbb{Z}$ in $n \in \mathbb{N}$. Pri tem upoštevamo, da lahko posamezno racionalno število zapišemo v obliki ulomka na neskončno mnogo ekvivalentnih načinov. Takšne ulomke, ki predstavljajo isto racionalno število, identificiramo tako, da za vsaka $a, c \in \mathbb{Z}$ in vsaka $b, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ velja:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \cdot d = b \cdot c.$$

Na primer $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$. Operaciji seštevanja in množenja lahko razširimo z množice $\mathbb{Z}$ na množico $\mathbb{Q}$ ter tako dobimo operaciji $+: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ in $\cdot: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$. V množici $\mathbb{Q}$ ima vsako neničelno število inverzni element za množenje.

Za poljuben $m \in \mathbb{Z}$ lahko število m identificiramo z ulomkom $\frac{m}{1}$, zato seveda velja $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. Prav tako označimo

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Kot običajno se dogovorimo, da če sta $a, b \in \mathbb{Q}$, potem $a \cdot b$ zapisujemo tudi kot ab . Definiramo še $a^2 = a \cdot a$.

Trditev 1.13 *Ne obstaja racionalno število x , za katerega je $x^2 = 2$.*

Dokaz. Pa recimo, da obstaja $x \in \mathbb{Q}$, tako da je $x^2 = 2$. Potem lahko zapišemo $x = \frac{a}{b}$, kjer je $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{N}$ in $D(a, b) = 1$. Od tod dobimo $2b^2 = a^2$. Ker je $2b^2$ sodo število, je a^2 sodo število in zato mora biti tudi a sodo število, torej $a = 2k$ za nek $k \in \mathbb{Z}$. Tako je $2b^2 = 4k^2$ in posledično $b^2 = 2k^2$. To pomeni, da mora biti tudi b sodo število, kar je v protislovju s predpostavko, da je $D(a, b) = 1$. $\square$

Opomba 1.14 *Ko enkrat vpeljemo množico realnih števil $\mathbb{R}$, zgornja trditev pove, da število $\sqrt{2}$ ni racionalno število.*

1.3 Linearno urejene množice

Vemo, da so množice naravnih, celih in racionalnih števil urejene, kar pomeni, da so na njih definirane ustrezne relacije urejenosti. Podajmo natančno definicijo.

Definicija 1.15 Naj bo S poljubna množica. **Binarna relacija** R na množici S je podmnožica kartezičnega produkta $S \times S$, torej $R \subseteq S \times S$. Če velja $(a, b) \in R$, pravimo, da je a **v relaciji** R z b in pišemo kar aRb .

Zgled 1.16 Primer relacije na množici naravnih števil je relacija $=$, ki jo v tem zgledu označimo tudi z R . V tem primeru je $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), \dots\}$ in pišemo $1 = 1$, $2 = 2$ itn.

Definicija 1.17 Urejen par $(S, \leq)$ je **linearno urejena množica**, če je $\leq$ binarna relacija na S , za katero veljajo naslednje lastnosti:

- (1) **refleksivnost**: $\forall a \in S, a \leq a$,
- (2) **antisimetričnost**: $\forall a, b \in S, (a \leq b) \wedge (b \leq a) \implies a = b$,
- (3) **tranzitivnost**: $\forall a, b, c \in S, (a \leq b) \wedge (b \leq c) \implies a \leq c$,
- (4) **sovisnost**: $\forall a, b \in S, (a \leq b) \vee (b \leq a)$.

V tem primeru rečemo tudi, da je $\leq$ **linearna ureditev** na množici S .

Opomnimo, da v zgornji definiciji točka (1) dejansko ni potrebna, saj sledi iz točke (4).

Zgled 1.18 Seveda so $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$ in $(\mathbb{Q}, \leq)$ linearno urejene množice, kjer $\leq$ označuje standardne ureditve.

Opomba 1.19 Če za relacijo $\leq$ na množici S velja refleksivnost, antisimetričnost in tranzitivnost, potem pravimo, da je $(S, \leq)$ **delno urejena množica**.

Definicija 1.20 Naj bo $(S, \leq)$ linearno urejena množica in naj velja $a, b \in S$.

- (1) Če je $a \leq b$, potem pišemo tudi $b \geq a$.
- (2) Če je $a \leq b$ in $a \neq b$, potem pišemo $a < b$ ali $b > a$.

Opomba 1.21 Opazimo, da v linearno urejeni množici $(S, \leq)$ za vsaka $a, b \in S$ velja natanko ena izmed naslednjih treh možnosti: $a = b$, $a > b$, $a < b$.

1.4 Aksiomi za urejen komutativen obseg

V nadaljevanju zapišimo vse bistvene lastnosti računanja z racionalnimi (in tudi realnimi) števili. Imenovali jih bomo **aksiomi**, saj lahko iz njih izpeljemo vsa druga običajna pravila. Pri naboru aksiomov v glavnem sledimo knjigi [14], pri obravnavi dodatnih lastnosti pa si pomagamo tudi z viroma [10, 20].

Naj bo S neka neprazna množica, na kateri sta vpeljeni notranji operaciji seštevanja, $+: S \times S \rightarrow S$, in množenja, $\cdot: S \times S \rightarrow S$, ter binarna relacija $\leq$. Ker želimo poudariti, da lahko aksiome obravnavamo na poljubni množici z ustreznima operacijama in relacijo, dano množico označujemo kot S , predstavljamo pa si lahko, da je to običajno množica racionalnih ali realnih števil. Posledično bomo elemente množice S pogosto imenovali kar *števila*.

Seznam lastnosti oziroma aksiomov (A1)–(A15) bomo razdelili na več sklopov. Pri tem bomo sproti izpeljali nekatere osnovne trditve in na posameznem mestu vedno predpostavili, da veljajo vsi do tedaj navedeni aksiomi, čeprav tega ne bomo posebej zapisovali.

Aksiomi za seštevanje:

(A1) *Komutativnost seštevanja*: $\forall a, b \in S, a + b = b + a$.

(A2) *Asociativnost seštevanja*: $\forall a, b, c \in S, (a + b) + c = a + (b + c)$.

(A3) *Obstoj nevtralnega elementa (enote) za seštevanje*: $\exists 0 \in S, \forall a \in S, a + 0 = 0 + a = a$. Takemu številu 0 pravimo **enota za seštevanje**.

(A4) *Obstoj inverznih elementov za seštevanje*: $\forall a \in S, \exists b \in S, a + b = b + a = 0$.

Takemu številu b pravimo **nasprotno število** za število a in ga označimo z $-a$.

Zaradi ustreznosti aksiomov (A3) in (A4) se moramo najprej prepričati, da je enota za seštevanje ena sama in da za dano število obstaja natanko eno nasprotno število.

Trditev 1.22 *Obstaja samo ena enota za seštevanje.*

Dokaz. Recimo, da sta 0 in $0'$ enoti za seštevanje. Potem velja $0' + 0 = 0'$ in $0 + 0' = 0$, zato po aksiomu (A1) dobimo $0' = 0' + 0 = 0 + 0' = 0$. To dokazuje, da je enota ena sama. $\square$

Trditev 1.23 *Za dano število $a \in S$ obstaja eno samo nasprotno število.*

Dokaz. Denimo, da sta $b, c \in S$ nasprotni števili za a . To pomeni, da velja $a + b = 0$ in $a + c = 0$. Potem iz aksiomov (A3), (A2) in (A1) sledi

$$b = b + 0 = b + (a + c) = (b + a) + c = (a + b) + c = 0 + c = c + 0 = c,$$

zato obstaja eno samo nasprotno število za a . $\square$

Trditev 1.24 *Velja $-0 = 0$.*

Dokaz. Opazimo, da iz (A3), (A1) in (A4) sledi $-0 = (-0) + 0 = 0 + (-0) = 0$. $\square$

Trditev 1.25 (pravilo krajšanja) Denimo, da za $a, b, c \in S$ velja $a + c = b + c$. Potem je $a = b$.

Dokaz. Ker je $a + c = b + c$, velja tudi $(a + c) + (-c) = (b + c) + (-c)$, od koder z uporabo (A2) dobimo $a + (c + (-c)) = b + (c + (-c))$. To pomeni $a + 0 = b + 0$ in zato je $a = b$. $\square$

Trditev 1.26 Za vsak $a \in S$ je $-(-a) = a$.

Dokaz. Po definiciji nasprotnega števila je $(-a) + (-(-a)) = (-(-a)) + (-a) = 0$. Po drugi strani je $a + (-a) = 0$, zato velja $(-(-a)) + (-a) = a + (-a)$. Po pravilu krajšanja sledi $-(-a) = a$. $\square$

Trditev 1.27 Za poljubna $a, b \in S$ obstaja natanko en $x \in S$, da velja $a + x = b$.

Dokaz. Če je $a + x = b$, velja tudi $(-a) + (a + x) = (-a) + b$ in posledično $((-a) + a) + x = (-a) + b$, zato dobimo $0 + x = (-a) + b$ oziroma $x = b + (-a)$. To pomeni, da je x , če obstaja, enolično določen. Seveda zlahka preverimo tudi, da za $x = b + (-a)$ velja $a + x = a + (b + (-a)) = a + ((-a) + b) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b$. $\square$

Aksiomi za množenje:

(A5) Komutativnost množenja: $\forall a, b \in S, a \cdot b = b \cdot a$.

(A6) Asociativnost množenja: $\forall a, b, c \in S, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

(A7) Obstoj nevtralnega elementa (enote) za množenje: $\exists 1 \in S, \forall a \in S, a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
Takemu številu 1 pravimo **enota za množenje**.

(A8) Obstoj inverznih elementov za množenje: $\forall a \in S \setminus \{0\}, \exists b \in S, a \cdot b = b \cdot a = 1$.
Takemu številu b pravimo **obratno število** ali **recipročno število** za število a in ga označimo kot a^{-1} ali tudi kot $\frac{1}{a}$.

Aksioma, ki povezujeta seštevanje in množenje:

(A9) 1 in 0 sta različni števili, torej $1 \neq 0$.

(A10) Distributivnost: $\forall a, b, c \in S, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Opomba 1.28 Zaradi komutativnosti množenja velja seveda tudi $\forall a, b, c \in S, (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Ponovno se zaradi ustreznosti aksiomov (A7) in (A8) najprej prepričajmo, da je enota za množenje ena sama in da za dano neničelno število obstaja samo eno obratno število.

Trditev 1.29 Obstaja samo ena enota za množenje.

Dokaz. Recimo, da sta 1 in $1'$ enoti za množenje. Potem velja $1' \cdot 1 = 1'$ in $1 \cdot 1' = 1$, zato sledi $1' = 1' \cdot 1 = 1 \cdot 1' = 1$. $\square$

Trditev 1.30 Za dano število $a \in S \setminus \{0\}$ obstaja natanko eno obratno število.

Dokaz. Recimo, da sta $b, c \in S$ obratni števili za a . To pomeni, da velja $a \cdot b = 1$ in $a \cdot c = 1$. Potem je

$$b = b \cdot 1 = b \cdot (a \cdot c) = (b \cdot a) \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = 1 \cdot c = c \cdot 1 = c,$$

zato je dokaz končan. □

Trditev 1.31 Velja $1^{-1} = 1$.

Dokaz. Seveda je $1^{-1} = 1^{-1} \cdot 1 = 1 \cdot 1^{-1} = 1$. □

Podobno kot pri seštevanju lahko dokažemo tudi naslednji trditvi.

Trditev 1.32 (pravilo krajšanja za množenje) Denimo, da za $a, b, c \in S$, pri čemer je $c \neq 0$, velja $a \cdot c = b \cdot c$. Potem je $a = b$.

Trditev 1.33 Za poljubna $a, b \in S$, kjer je $a \neq 0$, obstaja natanko en $x \in S$, da velja $a \cdot x = b$.

Trditev 1.34 Za poljuben $a \in S$ je $a \cdot 0 = 0$.

Dokaz. Zaradi aksimov (A3) in (A10) velja $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$. Po drugi strani je seveda $a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0$, zato dobimo $a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$ in po pravilu krajšanja sledi $a \cdot 0 = 0$. □

Trditev 1.35 Naj bosta $a, b \in S$. Potem je $a \cdot b = 0$ natanko tedaj, ko je $a = 0$ ali $b = 0$.

Dokaz. Če je $a = 0$ ali $b = 0$, potem je $a \cdot b = 0$ zaradi trditve 1.34.

Predpostavimo sedaj, da velja $a \cdot b = 0$. Recimo, da je $a \neq 0$ in $b \neq 0$. Potem po trditvi 1.34 velja $a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 = 0$, od koder dobimo $(a^{-1} \cdot a) \cdot b = 0$ oziroma $b = 0$. To je seveda protislovje, kar dokazuje, da mora biti $a = 0$ ali $b = 0$. □

Trditev 1.36 Za vsak $a \in S \setminus \{0\}$ je $a^{-1} \neq 0$ in velja $(a^{-1})^{-1} = a$.

Dokaz. Naj bo $a \in S$, $a \neq 0$. Ker je $a \cdot a^{-1} = 1$ in $1 \neq 0$, z uporabo trditve 1.34 dobimo $a^{-1} \neq 0$. Po definiciji obratnega števila je $(a^{-1})^{-1} \cdot a^{-1} = 1$, prav tako je $a \cdot a^{-1} = 1$. Iz tega sledi, da velja $(a^{-1})^{-1} \cdot a^{-1} = a \cdot a^{-1}$. Posledično po pravilu krajšanja za množenje dobimo $(a^{-1})^{-1} = a$. □

Trditev 1.37 Za poljubna $a, b \in S$ velja:

$$(1) \ a \cdot (-b) = -(a \cdot b),$$

$$(2) \ (-a) \cdot b = -(a \cdot b),$$

$$(3) \ (-a) \cdot (-b) = a \cdot b.$$

Dokaz.

- (1) Seveda je $0 = a \cdot 0 = a \cdot (b + (-b)) = a \cdot b + a \cdot (-b)$. Od tod vidimo, da je $a \cdot (-b)$ nasprotno število za $a \cdot b$. Ker je tudi $-(a \cdot b)$ nasprotno število za $a \cdot b$, po trditvi 1.23 dobimo $-(a \cdot b) = a \cdot (-b)$.
- (2) Podobno kot pri točki (1).
- (3) Velja $(-a) \cdot (-b) = -((-a) \cdot b) = -(-(a \cdot b)) = a \cdot b$, pri čemer smo uporabili prejšnji točki in trditve 1.26. $\square$

Aksiomi za relacijo $\leq$:

(A11) *Antisimetričnost*: $\forall a, b \in S, (a \leq b) \wedge (b \leq a) \implies a = b$.

(A12) *Tranzitivnost*: $\forall a, b, c \in S, (a \leq b) \wedge (b \leq c) \implies a \leq c$.

(A13) *Sovisnost*: $\forall a, b \in S, (a \leq b) \vee (b \leq a)$.

Aksiomi (A11), (A12) in (A13) nam povedo, da je $(S, \leq)$ linearno urejena množica.

Aksioma usklajenosti relacije $\leq$ z operacijama seštevanja in množenja:

(A14) $\forall a, b, c \in S, a \leq b \implies a + c \leq b + c$.

(A15) $\forall a, b, c \in S, (a \geq 0) \wedge (b \geq 0) \implies a \cdot b \geq 0$.

Trditev 1.38 *Naj bodo $a, b, c \in S$. Resnične so naslednje trditve:*

- (1) Če je $a \leq 0$, potem je $-a \geq 0$.
- (2) Če je $a \leq 0$ in $b \leq 0$, potem je $a \cdot b \geq 0$.
- (3) Če je $a \leq b$, potem je $-a \geq -b$.
- (4) Če je $a \leq b$ in $c \leq d$, potem je $a + c \leq b + d$.

Dokaz.

- (1) Ker je $a \leq 0$, po aksiomu (A14) velja $a + (-a) \leq 0 + (-a)$, od koder sledi $0 \leq -a$.
- (2) Ker je $a \leq 0$ in $b \leq 0$, zaradi točke (1) sledi $-a \geq 0$ in $-b \geq 0$. Po aksiomu (A15) je zato $(-a) \cdot (-b) \geq 0$. Iz enakosti $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ dobimo $a \cdot b \geq 0$.
- (3) Ker je $a \leq b$, iz aksioma (A14) dobimo

$$a + ((-a) + (-b)) \leq b + ((-a) + (-b)),$$

od koder izpeljemo $-b \leq -a$.

- (4) Po aksiomu (A14) velja $a + c \leq b + c$ in $b + c \leq b + d$, zato iz aksioma (A12) sledi $a + c \leq b + d$. $\square$

Definicija 1.39 Število $a \in S$ je **pozitivno**, če velja $a > 0$. Število $a \in S$ je **negativno**, če velja $a < 0$.

Trditev 1.40 Število 1 je pozitivno število.

Dokaz. Seveda zaradi aksioma (A9) velja $1 \neq 0$, zato iz aksioma (A13) sledi $1 > 0$ ali $1 < 0$. Recimo, da je $1 < 0$. Potem je tudi $1 \leq 0$ in po prejšnji trditvi sledi $-1 \geq 0$. Zaradi aksioma (A15) velja $(-1) \cdot (-1) \geq 0$, ker pa je $(-1) \cdot (-1) = 1 \cdot 1 = 1$, dobimo $1 \geq 0$. To je v protislovju s predpostavko $1 < 0$, zato smo s tem pokazali, da mora biti $1 > 0$. Posledično je 1 pozitivno število. $\square$

Vpeljemo lahko tudi operaciji **odštevanja** in **deljenja** na naslednji način:

- (1) Za $a, b \in S$ definiramo $a - b = a + (-b)$.
- (2) Za $a, b \in S$, $b \neq 0$, definiramo $a : b = \frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$.

Opomba 1.41 Ponovno poudarimo, da pri množenju namesto $a \cdot b$ pogosto pišemo kar ab . Prav tako za poljuben $a \in S$ uporabljamo oznake $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot a \cdot a$ itn. Induktivno lahko definiramo potenco a^n , kjer je $n \in \mathbb{N}$ (za podrobnejšo ponovitev in več informacij glejte razdelek 2.9.1).

Zgled 1.42 Naj bosta $a, b \in S$. Za vajo preverite, da veljajo še naslednje trditve:

- (1) $b^2 - a^2 = (b + a) \cdot (b - a)$,
- (2) $a \leq b \iff 0 \leq b - a$,
- (3) če je $a \geq 0$ in $b \geq 0$, potem velja: $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$,
- (4) če je $a > 0$ in $b > 0$, potem je $a \cdot b > 0$.

Definicija 1.43 **Komutativen obseg** ali **polje** $(S, +, \cdot)$ je neprazna množica S skupaj z operacijama seštevanja in množenja, tako da veljajo aksiomi (A1)–(A10). **Urejen komutativen obseg** ali **urejeno polje** $(S, +, \cdot, \leq)$ je neprazna množica S skupaj z operacijama seštevanja in množenja ter relacijo $\leq$, tako da veljajo aksiomi (A1)–(A15).

Zgled 1.44 Urejeno polje je na primer $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$, kjer sta $+$ in $\cdot$ običajni operaciji seštevanja in množenja ter $\leq$ standardna ureditev.

V tem razdelku smo zapisali več trditev, ki nakazujejo, da lahko samo iz aksiomov izpeljemo običajna računska pravila. V nadaljevanju skripte bomo zato uporabljali vsa takšna splošno znana pravila, ki jih poznamo že iz srednje šole.

1.5 Supremum in infimum

Definicija 1.45 Predpostavimo, da je $(S, \leq)$ linearno urejena množica in da je $A \subseteq S$ neprazna podmnožica.

- (1) Pravimo, da je $M \in S$ **zgornja meja** množice A , če za vse $a \in A$ velja $a \leq M$. Množica A je **navzgor omejena**, če ima kakšno zgornjo mejo.

(2) Pravimo, da je $m \in S$ **spodnja meja** množice A , če za vse $a \in A$ velja $a \geq m$. Množica A je **navzdol omejena**, če ima kakšno spodnjo mejo.

(3) Množica A je **omejena**, če je navzdol omejena in navzgor omejena.

Zgled 1.46 Množica $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\} \subseteq \mathbb{Q}$ je omejena. Njena zgornja meja je na primer število $1 \in \mathbb{Q}$. Opazimo pa, da je tudi število 2 zgornja meja množice A . Dejansko ima množica A neskončno mnogo zgornjih mej.

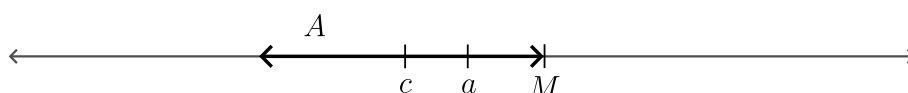
Definicija 1.47 Predpostavimo, da je $(S, \leq)$ linearno urejena množica in da je $A \subseteq S$ neprazna podmnožica. Pravimo, da je $M \in S$ **supremum** (ali **natančna zgornja meja** ali **najmanjša zgornja meja**) množice A , če velja:

(1) $\forall a \in A, a \leq M$ (torej M je zgornja meja za A) in

(2) $\forall c \in S, c < M \implies (\exists a \in A, a > c)$.

V tem primeru pišemo $M = \sup A$.

Točka (2) v zgornji definiciji nam pove, da za poljuben $c < M$ element c več ni zgornja meja množice A , saj obstaja $a \in A$, za katerega je $a > c$ (glejte sliko 1.5).



Slika 1.5: Množica A in elementi c, a, M .

Definicija 1.48 Predpostavimo, da je $(S, \leq)$ linearno urejena množica in da je $A \subseteq S$ neprazna podmnožica. Pravimo, da je $m \in S$ **infimum** (ali **natančna spodnja meja** ali **največja spodnja meja**) množice A , če velja:

(1) $\forall a \in A, a \geq m$ (torej m je spodnja meja za A) in

(2) $\forall c \in S, c > m \implies (\exists a \in A, a < c)$.

V tem primeru pišemo $m = \inf A$.

Točka (2) v zgornji definiciji nam pove, da za poljuben $c > m$ element c več ni spodnja meja množice A , saj obstaja $a \in A$, za katerega je $a < c$.

Definicija 1.49 Predpostavimo, da je $(S, \leq)$ linearno urejena množica in da je $A \subseteq S$ neprazna podmnožica. Če je M zgornja meja množice A in če velja $M \in A$, potem je M **maksimum** (ali **največji element**) množice A , kar pišemo kot $M = \max A$. Če je m spodnja meja množice A in če velja $m \in A$, potem je m **minimum** (ali **najmanjši element**) množice A , kar pišemo kot $m = \min A$.

Opomba 1.50 (1) Če je $M = \max A$, potem je seveda tudi $M = \sup A$. Podobno, če je $m = \min A$, potem je $m = \inf A$.

(2) Če je $M = \sup A$ in $M \in A$, potem je seveda $M = \max A$. Podobno, če je $m = \inf A$ in $m \in A$, potem je $m = \min A$.

Zgled 1.51 Naj bo

$$A = \left\{ 2 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{Q}.$$

Pokažimo, da je $\sup A = 2$. Takoj vidimo, da za vse $a \in A$ velja $a \leq 2$.

Naj bo sedaj $c \in \mathbb{Q}$ poljubno število, tako da je $c < 2$. Naj bo še n poljubno naravno število, za katerega velja $n > \frac{1}{2-c}$. Potem je $a = 2 - \frac{1}{n} \in A$ in hitro lahko preverimo, da velja $a > c$. S tem smo pokazali enakost $\sup A = 2$. Opazimo tudi, da $\max A$ ne obstaja, saj $2 \notin A$. Po drugi strani je očitno $\min A = \inf A = 1$.

Zgled 1.52 Oglejmo si pomemben primer, ki ga najdemo tudi recimo v virih [10, 20]. Naj bo

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid (x > 0) \wedge (x^2 < 2)\} \subseteq \mathbb{Q}.$$

Seveda je množica A neprazna (očitno je $1 \in A$) in navzgor omejena na primer z 2, saj za vsak $x \in A$ velja

$$x^2 < 2 < 4,$$

od koder sledi $x < 2$. Dokažimo, da množica A nima supremuma v $\mathbb{Q}$. Pa recimo, da je $M = \sup A \in \mathbb{Q}$. Potem seveda mora veljati $M > 0$.

Najprej se vprašajmo, ali je lahko $M^2 < 2$. Če slednje velja, naj bo

$$a = \frac{2M+2}{M+2} = \frac{M(M+2) - M^2 + 2}{M+2} = M + \frac{2-M^2}{M+2} > M.$$

Opazimo pa, da je

$$a^2 - 2 = \frac{4M^2 + 8M + 4}{(M+2)^2} - \frac{2(M+2)^2}{(M+2)^2} = \frac{2(M^2 - 2)}{(M+2)^2} < 0 \implies a^2 < 2.$$

To pomeni, da je $a \in A$ in $a > M$, zato M ne more biti supremum množice A , kar je v protislovju s predpostavko. S tem smo torej dokazali, da je $M^2 \geq 2$.

Nazadnje se vprašajmo še, ali je lahko $M^2 > 2$. V tem primeru naj bo

$$b = \frac{M^2+2}{2M} = M - \frac{M^2-2}{2M} < M.$$

Opazimo, da je

$$b^2 - 2 = \frac{M^4 + 4M^2 + 4}{4M^2} - \frac{8M^2}{4M^2} = \frac{(M^2 - 2)^2}{4M^2} > 0 \implies b^2 > 2.$$

Ker je $b^2 > 2$, je b zgornja meja za množico A , pri čemer pa je $b < M$. To je v protislovju s predpostavko, da je M supremum množice A .

S tem smo pokazali, da velja $M^2 = 2$. Vendar pa iz trditve 1.13 sledi, da v tem primeru M ne more biti racionalno število, kar je spet v protislovju s predpostavko. To dokazuje, da množica A nima supremuma v množici $\mathbb{Q}$.

1.6 Dedekindov aksiom in realna števila

V tem razdelku v glavnem sledimo pristopu iz virov [10, 14, 20]. Naj bo $(S, \leq)$ linearno urejena množica. Zapišimo še en aksiom, ki ga imenujemo **Dedekindov aksiom**:

(A16) Vsaka neprazna in navzgor omejena podmnožica $A \subseteq S$ ima natančno zgornjo mejo (supremum) v množici S .

Iz zgleda 1.52 v prejšnjem razdelku sledi, da racionalna števila ne zadoščajo Dedekindovemu aksiomu.

Definicija 1.53 *Urejeno polje realnih števil je neprazna množica $S = \mathbb{R}$ skupaj z operacijama seštevanja in množenja ter binarno relacijo $\leq$, tako da veljajo aksiomi (A1)-(A15) in še Dedekindov aksiom (A16).*

Da takšno urejeno polje $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$, ki zadošča vsem zapisanim aksiomom, zares obstaja, bomo utemeljili v razdelku 1.10, v katerem se bomo ukvarjali s konstrukcijo realnih števil.

Zaenkrat torej zgolj predpostavimo, da obstaja urejeno polje realnih števil $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$. Najprej razmislimo, kako znotraj množice $\mathbb{R}$ dobimo množice $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ oziroma kako te množice vložimo v $\mathbb{R}$. Po aksiomu (A7) v množici $\mathbb{R}$ obstaja enota za množenje, ki smo jo označili z 1. Posledično je tudi $1 + 1 \in \mathbb{R}$ in $1 + 1 > 1$ (če bi namreč veljalo $1 + 1 \leq 1$, bi dobili tudi $1 \leq 0$, kar je protislovje). Označimo $2 = 1 + 1$. Seveda je tudi $2 + 1 \in \mathbb{R}$ in $2 + 1 > 2$, zato označimo $3 = 2 + 1$. Na ta način lahko znotraj množice $\mathbb{R}$ dobimo predstavnike vseh naravnih števil, podobno pa pridemo tudi do predstavnikov celih števil. Prav tako za poljubna $a \in \mathbb{Z}$ in $b \in \mathbb{N}$ ulomek $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ identificiramo z realnim številom $a \cdot b^{-1}$, tako da lahko tudi množico $\mathbb{Q}$ obravnavamo kot podmnožico $\mathbb{R}$. Seveda bi bilo treba še preveriti, da seštevanje in množenje naravnih, celih ali racionalnih števil sovpadata z ustreznima operacijama na predstavnikih teh števil v množici $\mathbb{R}$.

Zapišimo nekaj pomembnih posledic Dedekindovega aksioma.

Trditev 1.54 *Vsaka neprazna in navzdol omejena podmnožica realnih števil ima natančno spodnjo mejo (infimum).*

Dokaz. Naj bo A neprazna in navzdol omejena podmnožica realnih števil. Definiramo

$$-A = \{-a \mid a \in A\}.$$

Zlahka preverimo, da je množica $-A$ navzgor omejena, zato ima po Dedekindovem aksiomu supremum $M = \sup(-A)$. Prav tako lahko enostavno pokažemo, da potem velja $\inf A = -M$. $\square$

Trditev 1.55 *Množica celih števil $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ ni navzgor omejena in ni navzdol omejena.*

Dokaz. Pa recimo, da je $\mathbb{Z}$ navzgor omejena. Potem ima natančno zgornjo mejo M . To pomeni, da $M - 1$ več ni zgornja meja, zato obstaja tak $n \in \mathbb{Z}$, da je $n > M - 1$ oziroma $n + 1 > M$. Ker pa je $n + 1$ spet celo število, ki je večje od M , dobimo protislovje. To dokazuje, da množica $\mathbb{Z}$ ni navzgor omejena. Podobno pokažemo, da množica $\mathbb{Z}$ ni navzdol omejena. $\square$

Trditev 1.56 Za vsak $a \in \mathbb{R}$ obstajata $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, da je $m_1 < a < m_2$.

Dokaz. Naj bo $a \in \mathbb{R}$ poljuben. Dokažimo najprej, da obstaja $m_2 \in \mathbb{Z}$, tako da je $a < m_2$. Če želeni sklep ni resničen, potem za vse $m_2 \in \mathbb{Z}$ velja $m_2 \leq a$. To bi pomenilo, da je množica $\mathbb{Z}$ navzgor omejena, kar je v protislovju s prejšnjo trditvijo. Podobno pokažemo tudi, da obstaja $m_1 \in \mathbb{Z}$, tako da je $m_1 < a$. $\square$

Trditev 1.57 (Arhimedov aksiom) Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$ poljubni pozitivni realni števili. Potem obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je $na > b$.

Dokaz. Po prejšnji trditvi obstaja tak $n \in \mathbb{Z}$, da je $n > \frac{b}{a}$, zato sledi $na > b$. Seveda je tudi $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Trditev 1.58 Naj bo $a > 0$. Potem obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je $\frac{1}{n} < a$.

Dokaz. Uporabimo prejšnjo trditev za $b = 1$. $\square$

1.7 Intervali

Pomembne podmnožice realnih števil so **intervali**. Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$, tako da je $a \leq b$. Poznamo naslednje tipe intervalov:

- (1) **odprti interval**: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$,
- (2) **zaprti interval**: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$,
- (3) **polodprta (oziroma polzaprta) intervala**:
 $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$; $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$,
- (4) **neomejena odprta intervala (odprta poltraka)**:
 $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$; $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$,
- (5) **neomejena zaprta intervala (zaprta poltraka)**:
 $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$; $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$,
- (6) $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Opomba 1.59 Če je $a = b$, potem je $(a, b) = [a, b) = (a, b] = \emptyset$. Po drugi strani je v tem primeru $[a, b] = \{a\}$, kar imenujemo tudi **izrojen zaprti interval**.

Naj bo sedaj $a < b$. Pravimo, da je a **levo krajišče** intervalov (a, b) , $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, ∞) in $[a, \infty)$. Podobno je b **desno krajišče** intervalov (a, b) , $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, b)$ in $(-\infty, b]$.

Pogosto uporabljamo še naslednje oznake:

- (1) pozitivna realna števila: $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$,
- (2) negativna realna števila: $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$,
- (3) nenegativna realna števila: $\mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)$,
- (4) nepozitivna realna števila: $\mathbb{R}_0^- = (-\infty, 0]$.

1.8 Decimalni zapis in številna premica

V tem razdelku bomo spoznali decimalni zapis realnega števila in pojasnili, kako zgradimo številsko premico. V prvem delu večinoma sledimo viroma [10, 20], v drugem delu pa gradivu [15].

Vemo, da je na primer $234 = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 4$. Na podoben način bi želeli zapisati tudi števila, ki niso cela.

Definicija 1.60 Naj bo $x \in \mathbb{R}$. **Celi del** števila x , ki ga označimo kot $[x]$, je največje celo število n , za katerega velja $n \leq x$.

Opazimo, da celi del števila x obstaja, ker po trditvi 1.56 obstajata $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, tako da je $m_1 < x < m_2$.

Predpostavimo sedaj, da je $x \in \mathbb{R}$ in $x > 0$. Naj bo $n = [x]$. To pomeni, da je $x \in [n, n+1)$. Interval $[n, n+1)$ razdelimo na deset delov in poiščemo največje število $n_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, da je

$$n + \frac{n_1}{10} \leq x.$$

Posledično x pripada intervalu $[n + \frac{n_1}{10}, n + \frac{n_1+1}{10})$. Sedaj interval $[n + \frac{n_1}{10}, n + \frac{n_1+1}{10})$ razdelimo na deset delov in določimo največje število $n_2 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, da je

$$n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} \leq x.$$

To pomeni, da x pripada intervalu $[n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2}, n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2+1}{10^2})$. S tem postopkom nadaljujemo in dobimo neskončno zaporedje števil $n, n_1, n_2, n_3, \dots$

Izrek 1.61 Naj bo $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Potem je $x = \sup \mathcal{A}$, kjer je

$$\mathcal{A} = \left\{ n, n + \frac{n_1}{10}, n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2}, n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \frac{n_3}{10^3}, \dots \right\}.$$

Dokaz. Sledimo dokazu iz vira [10]. Očitno je x zgornja meja za množico $\mathcal{A}$, saj je $n \leq x$ in za vse $i \in \mathbb{N}$ velja

$$n + \frac{n_1}{10} + \dots + \frac{n_i}{10^i} \leq x.$$

Izberimo poljuben $u < x$. Dokazati moramo, da u več ni zgornja meja za $\mathcal{A}$. Pa recimo, da u je zgornja meja za $\mathcal{A}$. Iz tega sledi $u \geq n$, zato je $n \leq u < x < n+1$ in posledično $x - u < 1$. Izberimo najmanjši tak $k \in \mathbb{N}$, da bo

$$\frac{1}{10^k} \leq x - u.$$

To pomeni, da velja

$$\frac{1}{10^k} \leq x - u < \frac{1}{10^{k-1}}.$$

Naj bo

$$a = n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \dots + \frac{n_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{n_k}{10^k} \in \mathcal{A}.$$

Ker število x pripada intervalu $[a, a + \frac{1}{10^k})$, mora biti $x - a < \frac{1}{10^k}$ in zato $a - x > -\frac{1}{10^k}$. Posledično je $a - u = (a - x) + (x - u) > -\frac{1}{10^k} + \frac{1}{10^k} = 0$. To pomeni $a - u > 0$ oziroma $a > u$. S tem smo dokazali, da u ni zgornja meja za množico $\mathcal{A}$, kar je v protislovju s predpostavko. Sledi torej, da je $x = \sup \mathcal{A}$. $\square$

Število $x > 0$ običajno zapišemo tako:

$$x = n, n_1 n_2 n_3 \dots$$

Ko bomo spoznali pojem vrste (in njene vsote), bomo videli, da velja

$$x = n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \frac{n_3}{10^3} + \dots$$

Število 0 seveda zapišemo v obliki $0 = 0,000\dots$. Predpostavimo sedaj, da je x negativno število, torej $x < 0$. Sledi $-x > 0$, zato velja $-x = n, n_1 n_2 n_3 \dots$. Potem pišemo

$$x = -n, n_1 n_2 n_3 \dots$$

Poljuben zapis $n, n_1 n_2 n_3 \dots$, kjer je $n \in \mathbb{Z}$ in $n_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ za vsak $i \in \mathbb{N}$, imenujemo **(neskončni) decimalni zapis**. Pri tem številom $n_1, n_2, n_3, \dots$ pravimo **števke**. Če obstaja tak $k \in \mathbb{N}$, da za vse $i \geq k + 1$ velja $n_i = 0$, običajno uporabimo **končni decimalni zapis**, ki je videti tako:

$$x = n, n_1 \dots n_k.$$

Na primer $x = 2,368000\dots = 2,368 = 2 + \frac{3}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{8}{10^3}$.

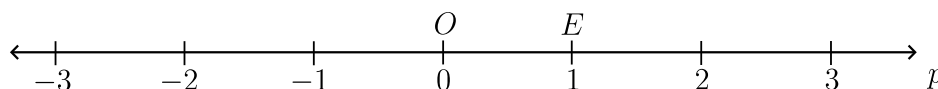
Zgled 1.62 Oglejmo si, kako dobimo celi del števila x iz njegovega decimalnega zapisa. Če je $x > 0$, potem samo odrežemo decimalke (torej števke za decimalno vejico). Na primer $[2,368] = 2$. Če pa je $x < 0$, moramo biti previdnejši, saj velja na primer $[-2,34] = -3$.

Naj bo ponovno $x = n, n_1 n_2 n_3 \dots \in \mathbb{R}$. Števila

$$\begin{aligned} x_0 &= n, \\ x_1 &= n, n_1, \\ x_2 &= n, n_1 n_2, \\ x_3 &= n, n_1 n_2 n_3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

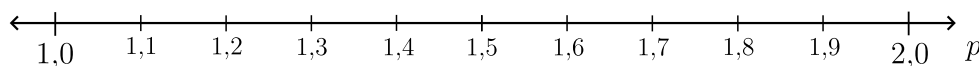
imenujemo **decimalni približki** števila x .

Če vsaki točki premice priredimo neko realno število, dobimo tako imenovano **številsko premico**. Oglejmo si podrobneje, kako lahko to naredimo (kot smo že omenili, pri tem v glavnem sledimo gradivu [15]). Vzemimo evklidsko premico p , ki je določena z aksiomi evklidske geometrije (za več informacij glejte na primer knjigo [16]). Naj tej premici si izberimo dve različni točki (označimo ju z O in E), ki jima priredimo števili 0 in 1. Nato dobljeno daljico nanašamo desno in levo na premico p . Na ta način lahko dobljenim točkam priredimo vsa cela števila, glejte sliko 1.6.



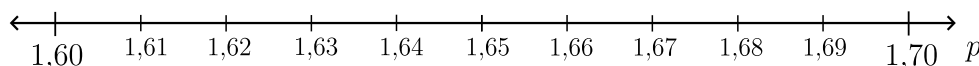
Slika 1.6: Premica p , na kateri smo nekaterim točkam priredili cela števila.

Vsako izmed daljic iz prejšnjega koraka razdelimo na 10 skladnih delov in tem točkam priredimo končna decimalna števila tako, kot kaže slika 1.7.



Slika 1.7: Interval od 1,0 do 2,0 na premici p .

Sedaj postopek deljenja na po 10 skladnih delov ponovimo z vsako daljico, dobljeno v prejšnjem koraku; glejte sliko 1.8.



Slika 1.8: Interval od 1,60 do 1,70 na premici p .

Postopek še naprej ponavljamo, tako da vsako daljico iz predhodnega koraka razdelimo na 10 delov in dobljenim točkam priredimo končna decimalna števila. Na ta način smo vsem točkam, ki smo jih dobili v nekem koraku, priredili končna decimalna števila.

Kaj pa priredimo preostalem točkam na premici p ? Če točka $T \in p$ v nobenem koraku ni delitvena, potem v vsakem koraku leži strogo med dvema zaporednima delitvenima točkama. V tem primeru dobimo tako imenovano zaporedje vloženih daljic, torej $A_0B_0 \supseteq A_1B_1 \supseteq A_2B_2 \supseteq \dots$. Za vsak $k \in \mathbb{N}_0$ naj bosta a_k in b_k števili, ki ju priredimo točkama A_k in B_k . Recimo, da je $a_0 = n$, $a_1 = n, n_1$, $a_2 = n, n_1 n_2$ itn. Potem je $b_0 = a_0 + 1$, $b_1 = a_1 + \frac{1}{10}$, $b_2 = a_2 + \frac{1}{10^2}$ itn. Zaradi Cantorjevega aksioma iz geometrije premice [16] sledi, da obstaja natanko ena točka, ki leži v vseh dobljenih daljicah – to je seveda točka T (dejansko potrebujemo še Arhimedov aksiom iz geometrije premice, ki nam pove, da z deljenjem daljic na 10 skladnih delov postajajo dobljene daljice poljubno majhne). Enolično določeni točki T tako priredimo število $n, n_1 n_2 n_3 \dots$.

Naredimo lahko tudi obratno, torej za vsak decimalni zapis poiščemo točko na premici, ki ustreza temu zapisu. Natančneje, če imamo podan nek zapis $n, n_1 n_2 n_3 \dots$, kjer je $n \in \mathbb{N}_0$ in $n_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ za vse $i \in \mathbb{N}$, obravnavamo decimalne približke $a_0 = n$, $a_1 = n, n_1$, $a_2 = n, n_1 n_2$ itn. Za vsak $k \in \mathbb{N}$ definiramo še $b_k = a_k + \frac{1}{10^k}$. Na ta način dobimo zaporedje vloženih daljic oziroma intervalov $[a_k, b_k]$, kjer je $k \in \mathbb{N}_0$. Vemo, da obstaja natanko ena točka na premici, ki leži na vseh teh daljicah (to je seveda točka, ki ustreza podanemu decimalnemu zapisu). Podoben razmislek lahko naredimo tudi v primeru, ko je n negativno celo število. S tem smo nakazali, da obstaja bijektivna preslikava med realnimi števili in točkami na premici, več podrobnosti pa lahko najdete v knjigi [16].

Razmislimo še, kateri točki na premici ustreza decimalni zapis 0,999... Glede na zgornji razmislek takoj opazimo, da se iskana točka oziroma število nahaja na daljici od 0 do 1, na daljici od 0,9 do 1,0, na daljici med 0,99 in 1,00 itn. Seveda je edina točka, ki leži

na vseh dobljenih daljicah, tista, ki ustreza številu 1. To pomeni, da je

$$1 = 1,000\dots = 0,999\dots$$

Število 1 ima torej dva različna neskončna decimalna zapisa, podobno pa velja za vse delitvene točke na številski premici. Zgornjo enakost lahko pokažemo tudi s pomočjo geometrijske vrste (glejte trditev 2.92), saj je

$$0,999\dots = 0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \dots = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 1.$$

Razmišljamo lahko še tako: če je $x = 0,999\dots$, potem je $10x = 9,999\dots$ in zato je $9x = 10x - x = 9$, kar implicira $x = 1$.

1.9 Racionalna in iracionalna števila

Definicija 1.63 Množica $U \subseteq \mathbb{R}$ je **gosta** v $\mathbb{R}$, če za vsaka $a, b \in \mathbb{R}$, za katera je $a < b$, obstaja $u \in U$, da velja $a < u < b$.

Trditev 1.64 Množica racionalnih števil je gosta v $\mathbb{R}$.

Dokaz. Dokazujemo tako kot v virih [10, 20]. Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$, tako da velja $a < b$, in naj bo $x = \frac{a+b}{2}$. Potem je $a < x < b$. Naj bodo $x_0, x_1, x_2, \dots$ zaporedni decimalni približki števila x in naj bo

$$\mathcal{A} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots\}.$$

Izrek 1.61 nam pove, da je $x = \sup \mathcal{A}$. Ker je $a < x$, obstaja tak $x_k \in \mathcal{A}$, da velja $x_k > a$. Označimo $u = x_k$. Potem je $u \in \mathbb{Q}$ racionalno število, za katerega je $a < u < b$. $\square$

Opomba 1.65 Zgornja trditev nam dejansko pove, da vsak interval (a, b) , kjer je $a < b$, vsebuje neskončno mnogo racionalnih števil.

Periodični decimalni zapis je tak decimalni zapis, v katerem se od nekega mesta naprej v neskončnost ponavlja določeno zaporedje števk. To običajno zapišemo tako, da naredimo črto nad zaporedjem števk, ki se ponavlja (seveda je periodični zapis tudi vsak končni decimalni zapis, saj se ponavlja števka 0). Na primer

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= 0,3333\dots = 0,\overline{3}, \\ \frac{1}{4} &= 0,25 = 0,25000\dots = 0,25\overline{0}. \end{aligned}$$

Preverimo lahko, da je število $x \in \mathbb{R}$ racionalno število natanko tedaj, ko ima x periodični decimalni zapis [15, 19]. Recimo, da je $q = \frac{a}{b}$ pozitivno racionalno število, tako da sta $a, b \in \mathbb{N}$. Ko delimo a z b , so možni ostanki samo iz množice $\{0, 1, \dots, b-1\}$. Ker je ostankov končno mnogo, se morajo začeti ponavljati, zato dobimo periodični decimalni

zapis. Pokažimo to na primeru $x = \frac{1}{28}$. Ko pisno delimo število 1 s številom 28, dobimo naslednje račune:

$$\begin{aligned} 1 &= 28 \cdot 0 + 1, \\ 10 &= 28 \cdot 0 + 10, \\ 100 &= 28 \cdot 3 + 16, \\ 160 &= 28 \cdot 5 + 20, \\ 200 &= 28 \cdot 7 + 4, \\ 40 &= 28 \cdot 1 + 12, \\ 120 &= 28 \cdot 4 + 8, \\ 80 &= 28 \cdot 2 + 24, \\ 240 &= 28 \cdot 8 + 16, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Opazimo torej, da se je v tem primeru ponovil ostanek 16, ki se je pojavil že v tretji vrstici. Od tod sklepamo, da je $x = \frac{1}{28} = 0,03571428$.

Pokazati je mogoče tudi obratno: če lahko število x zapišemo s periodičnim decimalnim zapisom, potem je $x \in \mathbb{Q}$. Ponovno naredimo to kar na zgledu, saj takšen postopek deluje tudi v splošnem. Na primer, če je $x = 1,142\overline{3}$, je $10x = 11,42\overline{3}$ in $10000x = 11423,42\overline{3}$. Tako dobimo $9990x = 11412$, zato je

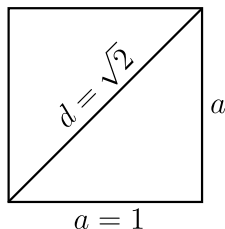
$$x = \frac{11412}{9990} \in \mathbb{Q}.$$

Po drugi strani seveda obstajajo tudi realna števila, ki niso racionalna. Imenujemo jih **iracionalna števila**. Takšna števila imajo neskončni decimalni zapis, ki ni periodičen. Množico iracionalnih števil označimo kot $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Iracionalno število je na primer število $M = \sup A$, kjer je

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid (x > 0) \wedge (x^2 < 2)\} \subseteq \mathbb{Q}.$$

Zaradi Dedekindovega aksioma to število obstaja, vendar pa smo v zgledu 1.52 pokazali, da M ni racionalno število. Ker velja $M^2 = 2$, to število označimo kot $M = \sqrt{2}$.

Iracionalna števila se pojavijo naravno pri merjenju dolžin: če na primer narišemo kvadrat s stranico $a = 1$, bo za njegovo diagonalo d po Pitagorovem izreku veljalo $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, zato je $d = \sqrt{2}$ (glejte sliko 1.9).



Slika 1.9: Kvadrat s stranico $a = 1$ in diagonalo $d = \sqrt{2}$.

Trditev 1.66 Množica iracionalnih števil je gosta v $\mathbb{R}$.

Dokaz. Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$, tako da je $a < b$. Potem je tudi $a + \sqrt{2} < b + \sqrt{2}$, zato obstaja $q \in \mathbb{Q}$, da je $a + \sqrt{2} < q < b + \sqrt{2}$, od koder sledi $a < q - \sqrt{2} < b$. Zlahka preverimo, da je $q - \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, zato je dokaz končan. $\square$

1.10 Konstrukcija realnih števil

V razdelku 1.4 smo vpeljali realna števila s pomočjo aksiomov, vendar pa nismo pokazali, da sploh obstaja kakšna množica (z ustreznima operacijama in relacijo $\leq$), ki zadošča vsem naštetim aksiomom. Obstaja več različnih pristopov za konstrukcijo realnih števil, mi pa se bomo v tem razdelku seznanili z dvema. Na podlagi tega ugotovimo, da iz predpostavke o obstoju naravnih števil (Peanovi aksiomi) sledi tudi obstoj realnih števil. Izkaže se, da obstaja samo en sistem realnih števil: namreč, poljubna urejena komutativna obsega, ki izpolnjujeta tudi aksiom (A16), sta izomorfna (za več informacij glejte knjigo [14]).

1.10.1 Realna števila kot neskončna decimalna števila

Množico realnih števil lahko definiramo kot množico vseh neskončnih decimalnih števil, pri čemer pod **neskončno decimalno število** razumemo vsak neskončni decimalni zapis (čeprav smo decimalni zapis realnega števila izpeljali iz aksiomov, je lahko to tudi način za konstrukcijo realnih števil). To pomeni, da je

$$\mathbb{R} = \{n, n_1 n_2 n_3 \dots \mid n \in \mathbb{Z} \text{ in } n_i \in \{0, 1, \dots, 9\} \text{ za vsak } i \in \mathbb{N}\},$$

pri čemer je treba upoštevati, da lahko nekatera realna števila zapišemo na dva načina kot neskončno decimalno število. Natančneje, vsako neskončno decimalno število, ki ima same števke 9 od nekega mesta naprej, predstavlja realno število, ki ga lahko zapišemo tudi kot neskončno decimalno število, ki ima same števke 0 od nekega mesta naprej. Takšna neskončna decimalna števila med seboj identificiramo, na primer

$$0,999\dots = 1,000\dots$$

in

$$28,26999\dots = 28,27000\dots$$

Zato bi lahko množico $\mathbb{R}$ definirali tudi kot množico vseh neskončnih decimalnih števil, ki nimajo samih števk 9 od nekega mesta naprej. Opomnimo še, da v tem razdelku sledimo pristopu iz vira [15], več podrobnosti pa lahko najdemo v članku [9].

Sedaj se vprašajmo, kako definiramo seštevanje za neskončna decimalna števila. Naj bosta x in y dve neskončni decimalni števili:

$$\begin{aligned} x &= a, a_1 a_2 a_3 \dots, \\ y &= b, b_1 b_2 b_3 \dots \end{aligned}$$

Vpeljimo decimalne približke, ki so seveda vsi racionalna števila:

$$\begin{aligned} x_0 &= a, \\ x_1 &= a, a_1, \\ x_2 &= a, a_1 a_2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Podobno definiramo decimalne približke y_0, y_1, y_2 itn. Opazimo, da za vse $n \in \mathbb{N}_0$ velja:

$$x_{n+1} + y_{n+1} = x_n + y_n + \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{10^{n+1}}.$$

Seveda je $a_{n+1} + b_{n+1} \in \{0, 1, \dots, 18\}$. Sledi:

- (1) Če je $a_{n+1} + b_{n+1} \in \{0, 1, \dots, 8\}$, je $a_{n+1} + b_{n+1}$ zadnja številka števila $x_{n+1} + y_{n+1}$, številke na predhodnih decimalnih mestih pa se v naslednjih korakih več ne spremenijo.
- (2) Če je $a_{n+1} + b_{n+1} = 9$, je 9 zadnja številka števila $x_{n+1} + y_{n+1}$. Številke na predhodnih decimalnih mestih se v tem koraku ne spremenijo, lahko pa se spremenijo v katerem od kasnejših korakov. Ampak ko se enkrat spremenijo, se za tem več ne spremenijo.
- (3) Če je $a_{n+1} + b_{n+1} \in \{10, 11, \dots, 18\}$, je $a_{n+1} + b_{n+1} - 10$ zadnja številka števila $x_{n+1} + y_{n+1}$. Številke na predhodnih decimalnih mestih se v tem koraku spremenijo, ampak se v naslednjih korakih več ne spremenijo.

Iz zgornjega sklepanja sledi, da se številke za dovolj velike n na vsakem mestu ustalijo, zato je mogoče definirati število $x + y$ kot neskončno decimalno število. Oglejmo si dva zgleda.

Zgled 1.67 Naj bosta $x = 17,6715653\dots$ in $y = 21,3524362\dots$. Potem je

$$\begin{aligned} x_0 + y_0 &= 38, \\ x_1 + y_1 &= 38,9, \\ x_2 + y_2 &= 39,02, \\ x_3 + y_3 &= 39,023, \\ x_4 + y_4 &= 39,0239, \\ x_5 + y_5 &= 39,02399, \\ x_6 + y_6 &= 39,024001, \\ x_7 + y_7 &= 39,0240015, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Opazimo torej, da velja $x + y = 39,024001\dots$

Zgled 1.68 Naj bosta $x = 17,2340593\dots$ in $y = 21,5259406\dots$. Potem je

$$\begin{aligned} x_0 + y_0 &= 38, \\ x_1 + y_1 &= 38,7, \\ x_2 + y_2 &= 38,75, \\ x_3 + y_3 &= 38,759, \\ x_4 + y_4 &= 38,7599, \\ x_5 + y_5 &= 38,75999, \\ x_6 + y_6 &= 38,759999, \\ x_7 + y_7 &= 38,7599999, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Če se tudi naprej pojavljajo samo številke 9, potem dobimo $x + y = 38,76$.

Pri množenju postopamo podobno, je pa sprememba iz $x_n y_n$ v $x_{n+1} y_{n+1}$ bolj zapletena. Vseeno se izkaže, da se tudi tukaj številke na vsakem mestu ustalijo (za dovolj velike n).

Lastnosti seštevanja in množenja izpeljemo iz lastnosti teh operacij na racionalnih številih. Na primer, ker za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $x_n + y_n = y_n + x_n$, mora biti $x + y = y + x$.

Tudi relacijo $\leq$ definiramo s pomočjo približkov. Najprej izberemo zapisa za x in y , ki nimata samih števk 9 od nekega mesta naprej. Potem definiramo, da velja $x \leq y$ natanko tedaj, ko za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $x_n \leq y_n$. Preverjanje aksiomov bomo tukaj izpustili, zainteresirani bralec pa lahko več informacij o takem pristopu najde na primer v članku [9].

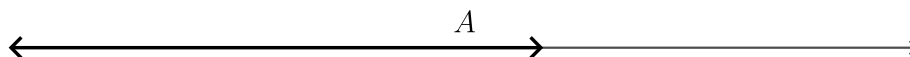
1.10.2 Realna števila kot Dedekindovi rezi

Realna števila si lahko predstavljamo tudi kot določene podmnožice racionalnih števil, ki jih imenujemo Dedekindovi rezi. Na ta način je možno iz racionalnih števil konstruirati realna števila, omenjeni pristop pa je v matematični literaturi pogosto uporabljen za konstrukcijo realnih števil; glejte na primer vire [6, 10, 13, 14, 17, 18]. V tej skripti se držimo definicije iz virov [10, 17, 18], pri dokazih pa si pomagamo tudi s knjigo [6].

Definicija 1.69 Podmnožica racionalnih števil $A \subseteq \mathbb{Q}$ je **Dedekindov rez**, če veljajo naslednji trije pogoji:

- (1) $A \neq \emptyset$ in $A \neq \mathbb{Q}$,
- (2) za vsak $p \in A$ in za vsak $q \in \mathbb{Q}$ velja: $q < p \implies q \in A$,
- (3) za vsak $p \in A$ obstaja $q \in A$, tako da je $p < q$ (torej A ne vsebuje največjega elementa oziroma maksimuma).

Dedekindov rez si predstavljamo tako, kot kaže slika 1.10. Pri tem se seveda moramo zavedati, da množica A vsebuje le racionalna števila.



Slika 1.10: Dedekindov rez A .

Hitro ugotovimo, da lahko namesto pogoja (2) preverjamo drug pogoj, ki ga označimo z (2a).

Lema 1.70 Pogoj (2) v zgornji definiciji je ekvivalenten pogoju (2a): za vsak $p \in A$ in za vsak $y \in \mathbb{Q} \setminus A$ velja $p < y$.

Dokaz. Recimo, da velja (2). Naj bosta $p \in A$ in $y \in \mathbb{Q} \setminus A$. Če je $y < p$, potem po (2) sledi $y \in A$, kar je protislovje. Ker seveda $y \neq p$, sledi $p < y$.

Sedaj predpostavimo, da velja (2a). Naj bosta $p \in A$ in $q \in \mathbb{Q}$, pri čemer je $q < p$. Če je $q \in \mathbb{Q} \setminus A$, potem velja $p < q$, kar je protislovje. Sledi torej $q \in A$. $\square$

Množico realnih števil v okviru te konstrukcije definiramo tako:

$$\mathbb{R} = \{A \subseteq \mathbb{Q} \mid A \text{ je Dedekindov rez}\}.$$

Zgled 1.71 Naj bo $r \in \mathbb{Q}$ poljubno racionalno število. Potem zlahka preverimo, da je

$$A_r = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < r\}$$

Dedekindov rez, ki nam predstavlja realno število $r \in \mathbb{Q}$.

Zgled 1.72 Kako bi z Dedekindovim rezom predstavili pozitivno realno število, katerega kvadrat je 2, torej število $\sqrt{2}$? Naj bo

$$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid (x > 0) \wedge (x^2 < 2)\}.$$

Takoj vidimo, da točki (1) in (2) iz definicije Dedekindovega reza veljata. Dokažimo še, da velja točka (3): naj bo $p \in B$ in $p > 0$, kar pomeni $p^2 < 2$. Podobno kot v zgledu 1.52 označimo

$$q = \frac{2p+2}{p+2} = p + \frac{2-p^2}{p+2} > p.$$

Seveda je $q \in B$, saj velja

$$q^2 - 2 = \frac{2(p^2 - 2)}{(p+2)^2} < 0.$$

Če je po drugi strani $p \in B$ in $p \leq 0$, potem očitno obstaja $q \in B$, da je $p < q$. To pomeni, da je B Dedekindov rez, ki nam predstavlja število $\sqrt{2}$.

V nadaljevanju razdelka si bomo ogledali, kako za Dedekindove reze definiramo operaciji seštevanja in množenja ter relacijo $\leq$, prav tako bomo preverili nekatere izmed aksiomov. Opomniti moramo, da ne bomo zapisali vseh definicij, prav tako ne bomo preverjali vseh aksiomov. Več podrobnosti o takem pristopu lahko najdemo na primer v knjigah [6, 13]. Začnimo z operacijo seštevanja.

Definicija 1.73 Naj bosta A in B poljubna Dedekindova reza. **Vsota Dedekindovih rezov** je definirana kot

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Trditev 1.74 Naj bosta A in B poljubna Dedekindova reza. Potem je vsota $A + B$ spet Dedekindov rez.

Dokaz. Preverimo vse tri točke iz definicije.

- (1) Izberimo poljubna $a \in A$ in $b \in B$. Potem je $a + b \in A + B$, zato je $A + B \neq \emptyset$.
Naj bosta $a' \in \mathbb{Q} \setminus A$ in $b' \in \mathbb{Q} \setminus B$. Potem za vsak $a \in A$ in za vsak $b \in B$ po lemi 1.70 velja $a < a'$ in $b < b'$, kar implicira $a + b < a' + b'$. To pomeni, da so vsi elementi iz $A + B$ strogo manjši od $a' + b'$. Sledi $a' + b' \notin A + B$, zato $A + B \neq \mathbb{Q}$.
- (2) Naj bosta $p \in A + B$ in $q \in \mathbb{Q}$, tako da velja $q < p$. Potem je $p = a + b$ za nek $a \in A$ in za nek $b \in B$. Opazimo, da je $b + (q - p) \in B$, saj je $q - p < 0$. Posledično dobimo

$$q = p + (q - p) = a + b + (q - p) = a + (b + (q - p)) \in A + B.$$

- (3) Naj bo $p \in A + B$. Potem je $p = a + b$, pri čemer je $a \in A$ in $b \in B$. Ker sta A in B Dedekindova reza, obstajata $a_1 \in A$ in $b_1 \in B$, da velja $a_1 > a$ in $b_1 > b$. Zato je

$$a_1 + b_1 > a + b.$$

Seveda velja tudi $a_1 + b_1 \in A + B$. □

Že iz definicije vsote Dedekindovih rezov sledi, da velja $A + B = B + A$, tako da je izpolnjen aksiom (A1). Enota za seštevanje je Dedekindov rez

$$0^* = A_0 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}.$$

Trditev 1.75 *Za vsak Dedekindov rez A velja $A + 0^* = A$.*

Dokaz. Naj bo $p \in A + A_0$ poljuben. Potem je $p = a + b$, kjer je $a \in A$ in $b < 0$. Zato je $a + b < a$, kar pomeni $p = a + b \in A$. Po drugi strani naj bo $a \in A$ poljuben. Potem obstaja tak $q \in A$, da je $a < q$. Opazimo, da velja $a = q + (a - q) \in A + A_0$. □

Naj bo A poljuben Dedekindov rez. Inverzni element za seštevanje (nasprotni Dedekindov rez) definiramo tako:

$$-A = \{-b \mid (b \in \mathbb{Q}) \wedge (b > u \text{ za nek } u \in \mathbb{Q} \setminus A)\}.$$

Lema 1.76 *Naj bo A Dedekindov rez in naj bo $\varepsilon > 0$ racionalno število. Potem obstajata tak $a \in A$ in tak $b \in \mathbb{Q} \setminus A$, da je $\varepsilon = b - a$ in $b > u$ za nek $u \in \mathbb{Q} \setminus A$.*

Dokaz. Ker je množica A neprazna, obstaja nek $a_1 \in A$. Prav tako obstaja $y \in \mathbb{Q} \setminus A$. Po lemi 1.70 je seveda $y - a_1 > 0$. Določimo tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $n_0 > \frac{y - a_1}{\varepsilon}$. To pomeni, da velja $a_1 + n_0\varepsilon > y$ in zato $a_1 + n_0\varepsilon \notin A$. Naj bo $n_1 \in \{1, \dots, n_0\}$ najmanjše število, za katerega velja $a_1 + n_1\varepsilon \notin A$. To pomeni $a_1 + (n_1 - 1)\varepsilon \in A$. Ločimo dve možnosti.

- (1) Recimo, da obstaja tak $u \in \mathbb{Q} \setminus A$, da je $a_1 + n_1\varepsilon > u$. Naj bo

$$a = a_1 + (n_1 - 1)\varepsilon \quad \text{in} \quad b = a_1 + n_1\varepsilon.$$

Očitno velja $b - a = \varepsilon$.

- (2) Recimo, da za vsak $u \in \mathbb{Q} \setminus A$ velja $a_1 + n_1\varepsilon \leq u$. Seveda je $a_1 + (n_1 - \frac{1}{2})\varepsilon < a_1 + n_1\varepsilon$, zato mora biti $a_1 + (n_1 - \frac{1}{2})\varepsilon \in A$. Po drugi strani je $a_1 + (n_1 + \frac{1}{2})\varepsilon > a_1 + n_1\varepsilon$, zato velja $a_1 + (n_1 + \frac{1}{2})\varepsilon \notin A$. Naj bo

$$a = a_1 + \left(n_1 - \frac{1}{2}\right)\varepsilon \quad \text{in} \quad b = a_1 + \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)\varepsilon.$$

Očitno je $b - a = \varepsilon$.

V obeh primerih smo našli taka $a \in A$ in $b \in \mathbb{Q} \setminus A$, da je $b - a = \varepsilon$. Dokaz je torej zaključen. □

Trditev 1.77 *Za poljuben Dedekindov rez A velja*

$$A + (-A) = 0^*.$$

Dokaz. Naj bo najprej $p \in A + (-A)$. Potem je $p = a + (-b)$, kjer je $a \in A$ in $b \in \mathbb{Q}$, $b > u$ za nek $u \in \mathbb{Q} \setminus A$. Seveda v tem primeru velja $a < b$, saj bi v nasprotnem primeru po lemi 1.70 dobili $b \in A$. Torej je $p = a - b < 0$, zato je $p \in A_0 = 0^*$.

Za drugo smer predpostavimo, da je $x \in 0^* = A_0$, torej $x < 0$. Po lemi 1.76 obstajata taka $a \in A$ in $b \in \mathbb{Q} \setminus A$, da je $-x = b - a$ in $b > u$ za nek $u \in \mathbb{Q} \setminus A$. Posledično je $x = a - b = a + (-b)$ in $-b \in (-A)$, zato dobimo $x \in A + (-A)$. $\square$

Oglejmo si še, kako vpeljemo relacijo $\leq$. Za poljubna Dedekindova reza A, B definiramo:

$$A \leq B \iff A \subseteq B.$$

Prav tako pišemo $A < B$ (oziroma $B > A$) natanko tedaj, ko je $A \subseteq B$ in $A \neq B$. Dedekindov rez A je **pozitiven**, če je $A > 0^*$. Podobno je A **negativen**, če je $A < 0^*$. Seveda takoj opazimo, da za pozitiven Dedekindov rez A obstaja $a \in A$, tako da je $a > 0$.

Razmislimo tudi, kako definiramo množenje pozitivnih Dedekindovih rezov (v primerih, ko vsaj eden izmed Dedekindovih rezov ni pozitiven, pa si pomagamo z nasprotnimi Dedekindovimi rezi). Naj bosta A, B poljubna pozitivna Dedekindova reza. Potem definiramo

$$A \cdot B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0\} \cup \{ab \mid a \in A, a > 0, b \in B, b > 0\}.$$

Zlahka ugotovimo, da je $1^* = A_1 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 1\}$ enota za množenje, saj za poljuben (pozitiven) Dedekindov rez A velja $A \cdot 1^* = A$.

Če je A pozitiven rez, potem inverzni element za množenje definiramo tako:

$$A^{-1} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0\} \cup \left\{ \frac{1}{b} \mid (b \in \mathbb{Q}) \wedge (b > u \text{ za nek } u \in \mathbb{Q} \setminus A) \right\}.$$

Preverimo lahko, da velja na primer $A \cdot A^{-1} = 1^*$. Prav tako se izkaže, da veljajo vsi aksiomi (A1)–(A15). Kot smo že omenili, več podrobnosti najdemo na primer v knjigah [6, 13].

Za konec pokažimo še, da tako definirana množica $\mathbb{R}$ z ureditvijo $\leq$ zadošča Dedekindovemu aksiomu (A16). Naj bo $\mathcal{A}$ neprazna in navzgor omejena podmnožica množice vseh Dedekindovih rezov $\mathbb{R}$. Definirajmo

$$C = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \in \mathbb{Q} \mid \exists A \in \mathcal{A}, x \in A\}.$$

Pokažimo najprej, da je C sploh Dedekindov rez:

- (1) Ker $\mathcal{A}$ ni prazna množica, obstaja $A \in \mathcal{A}$. Ker pa tudi A ni prazna množica in ker je $A \subseteq C$, sledi, da C ni prazna.
Množica $\mathcal{A}$ je navzgor omejena, zato obstaja tak Dedekindov rez B , da je $A \subseteq B$ za vse $A \in \mathcal{A}$. Seveda takoj vidimo, da je potem tudi $C \subseteq B$. Ker obstaja $y \in \mathbb{Q}$, tako da velja $y \notin B$, sledi $y \notin C$. To pomeni $C \neq \mathbb{Q}$.
- (2) Naj bo $p \in C$ in naj bo $q \in \mathbb{Q}$ tak, da je $q < p$. Potem obstaja tak $A \in \mathcal{A}$, da je $p \in A$. Sledi, da je $q \in A$, zato velja še $q \in C$.
- (3) Naj bo $p \in C$. Potem obstaja tak $A \in \mathcal{A}$, da je $p \in A$. Naj bo $q \in A$ tak, da je $p < q$. Potem je $q \in C$ in $p < q$.

Z zgornjimi točkami smo preverili, da je C Dedekindov rez. Pokažimo še, da velja $C = \sup \mathcal{A}$:

- (1) Seveda takoj vidimo, da je C zgornja meja za $\mathcal{A}$, saj iz definicije množice C sledi, da za vsak $A \in \mathcal{A}$ velja $A \subseteq C$ (kar pomeni $A \leq C$).
- (2) Naj bo D poljuben Dedekindov rez, za katerega velja $D < C$, torej $D \subseteq C$ in $D \neq C$. Potem obstaja tak $c \in C$, da c ne pripada množici D . Ker je $c \in C$, obstaja tak $A \in \mathcal{A}$, da je $c \in A$. Množici A in D sta seveda Dedekindova reza, pri čemer velja $c \in A$ in $c \notin D$, zato mora biti $D \subseteq A$. Namreč, če izberemo poljuben $x \in D$, potem iz $c \notin D$ sledi $x < c$, zato iz $c \in A$ sledi še $x \in A$. To pomeni, da je $D \subseteq A$ in $D \neq A$, kar nam da $D < A$. Posledično D več ni zgornja meja množice $\mathcal{A}$.

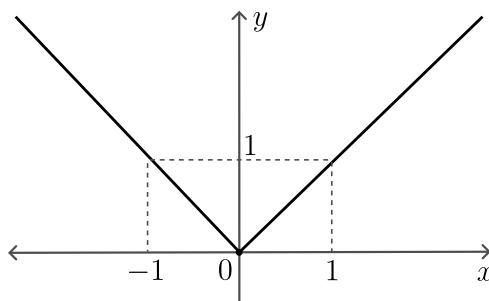
Zgornji dve točki dokazujeta, da je $C = \sup \mathcal{A}$.

1.11 Absolutna vrednost

Definicija 1.78 Naj bo $x \in \mathbb{R}$. **Absolutna vrednost** števila x je definirana kot

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}.$$

Spodnja slika 1.11 prikazuje graf funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, podane s predpisom $f(x) = |x|$.



Slika 1.11: Graf funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, podane s predpisom $f(x) = |x|$.

V nadaljevanju bomo izpeljali nekaj pomembnih lastnosti absolutne vrednosti, pri čemer si pomagamo z viroma [4, 10].

Trditev 1.79 Za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ velja:

- (1) $|x| \geq 0$,
- (2) $|x| = 0 \iff x = 0$,
- (3) $-|x| \leq x \leq |x|$,
- (4) $|xy| = |x| \cdot |y|$,

$$(5) \quad |-x| = |x|,$$

$$(6) \quad |x|^2 = x^2.$$

Dokaz.

(1) Sledi iz definicije.

(2) Sledi iz definicije.

(3) Če je $x \geq 0$, potem je zapisana neenakost ekvivalentna $-x \leq x \leq x$, kar drži. Če je $x < 0$, potem je zapisana neenakost ekvivalentna $x \leq x \leq -x$, kar očitno drži.

(4) Obravnavamo štiri možnosti in opazimo, da v vsaki situaciji formula drži:

(i) če je $x \geq 0$ in $y \geq 0$, dobimo $|xy| = xy = |x| \cdot |y|$,

(ii) če je $x \geq 0$ in $y < 0$, dobimo $|xy| = -xy = x(-y) = |x| \cdot |y|$,

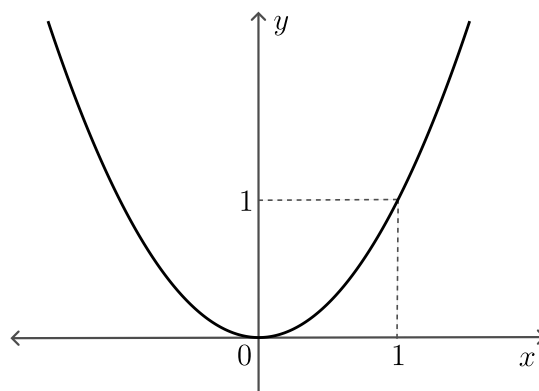
(iii) če je $x < 0$ in $y \geq 0$, dobimo $|xy| = -xy = (-x)y = |x| \cdot |y|$,

(iv) če je $x < 0$ in $y < 0$, dobimo $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x| \cdot |y|$.

(5) Uporabimo točko (4): $|-x| = |(-1)x| = |-1| \cdot |x| = |x|$.

(6) Uporabimo točko (4): $|x|^2 = |x| \cdot |x| = |x \cdot x| = |x^2| = x^2$. □

Opomba 1.80 Spomnimo se definicije korenske funkcije. Naj bo funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ podana s predpisom $f(x) = x^2$. Takoj opazimo (slika 1.12), da funkcija f ni bijektivna.



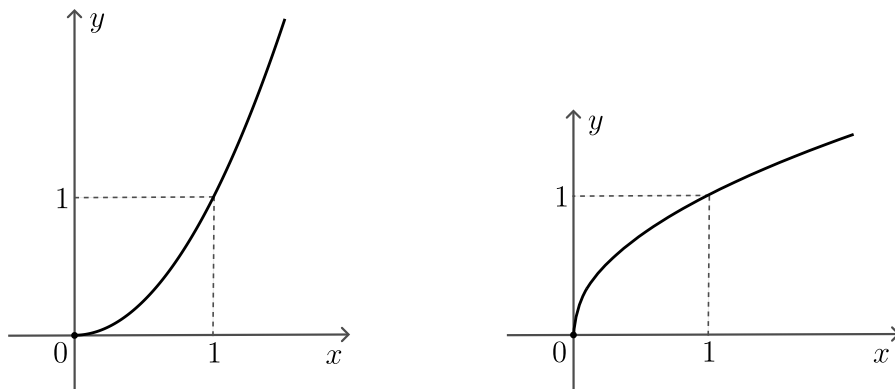
Slika 1.12: Graf funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, podane s predpisom $f(x) = x^2$.

Funkciji f zato nekoliko spremenimo domeno in kodomeno ter definiramo še funkcijo $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, podano s predpisom $g(x) = x^2$. Opazimo, da je funkcija g bijektivna (to lahko sicer razberemo iz grafa funkcije g , ki je prikazan na sliki 1.13, natančnejšo utemeljitev pa najdemo v izreku 2.62 in zgledu 3.33). Posledično je njena inverzna funkcija $g^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tudi bijektivna. Funkcija g^{-1} se imenuje funkcija **kvadratni koren**, njen graf pa prikazuje slika 1.13. Za vsak $x \in [0, \infty)$ pišemo

$$g^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

Opazimo, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $x^2 = |x|^2$ in $|x| \geq 0$, zato dobimo enakost

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$



Slika 1.13: Grafa funkcij g (levo) in g^{-1} (desno) iz opombe 1.80.

Opomba 1.81 Na številski premici je $|x|$ razdalja med številoma x in 0 . Podobno je razdalja med številoma $x, y \in \mathbb{R}$ enaka $|x - y|$.

Trditev 1.82 (trikotniška neenakost) Za vsaka $x, y \in \mathbb{R}$ velja

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Dokaz. Izračunajmo

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = |x|^2 + 2xy + |y|^2 \\ &\leq |x|^2 + 2|x| \cdot |y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2. \end{aligned}$$

Ker je $|x + y| \geq 0$ in $|x| + |y| \geq 0$, sledi

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

zato je dokaz zaključen. □

Opomba 1.83 Omenimo še tako imenovano posplošeno trikotniško neenakost, ki jo enostavno dokažemo s pomočjo matematične indukcije (in zgornjega izreka). Natančneje, naj bo $n \in \mathbb{N}$ in predpostavimo, da so $x_1, x_2, \dots, x_n$ poljubna realna števila. Potem velja

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|.$$

Posledica 1.84 Za vsaka $x, y \in \mathbb{R}$ velja:

- (1) $|x - y| \leq |x| + |y|$,
- (2) $||x| - |y|| \leq |x - y|$,
- (3) $||x| - |y|| \leq |x + y|$.

Dokaz.

- (1) Iz trikotniške neenakosti sledi $|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$.

- (2) Najprej opazimo, da je $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$, zato dobimo $|x| - |y| \leq |x - y|$. Podobno je $|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x|$, zato dobimo $|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$ in $|x| - |y| \geq -|x - y|$. Velja torej

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|,$$

od koder sledi

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

- (3) Uporabimo točko (2): $||x| - |y|| = ||x| - |-y|| \leq |x - (-y)| = |x + y|$. □

Ob koncu razdelka si oglejmo dva zgleda.

Zgled 1.85 Poiščimo vse $x \in \mathbb{R}$, za katere velja $|x - 1| + |x + 2| < 5$. Najprej opazimo, da je

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & ; x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1) & ; x - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 1 & ; x \geq 1 \\ -x + 1 & ; x < 1 \end{cases}$$

in

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2 & ; x + 2 \geq 0 \\ -(x + 2) & ; x + 2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x + 2 & ; x \geq -2 \\ -x - 2 & ; x < -2 \end{cases}.$$

Ločimo tri možnosti:

- (1) Če je $x < -2$, lahko dano neenačbo zapišemo v obliki $(-x + 1) + (-x - 2) < 5$, katere rešitev je $x > -3$. Če hkrati upoštevamo še pogoj $x < -2$, ugotovimo, da je množica rešitev za ta primer $\mathcal{R}_1 = (-3, -2)$.
- (2) Če je $-2 \leq x < 1$, lahko dano neenačbo zapišemo v obliki $(-x + 1) + x + 2 < 5$, ki jo reši vsak x . Če hkrati upoštevamo še pogoj $-2 \leq x < 1$, ugotovimo, da je množica rešitev za ta primer $\mathcal{R}_2 = [-2, 1)$.
- (3) Če je $x \geq 1$, lahko dano neenačbo zapišemo v obliki $x - 1 + x + 2 < 5$, katere rešitev je $x < 2$. Če hkrati upoštevamo še pogoj $x \geq 1$, ugotovimo, da je množica rešitev za ta primer $\mathcal{R}_3 = [1, 2)$.

Skupna množica rešitev je tako $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3 = (-3, 2)$.

Zgled 1.86 Predpis funkcije $f(x) = |x^2 - 3x|$ zapišimo brez znakov za absolutno vrednost. Opazimo, da je $x^2 - 3x = x(x - 3) \geq 0$ natanko tedaj, ko velja $x \in (-\infty, 0] \cup [3, \infty)$. Zato dobimo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & ; x \in (-\infty, 0] \cup [3, \infty) \\ -x^2 + 3x & ; x \in (0, 3) \end{cases}.$$

1.12 O moči številskih množic

V tem kratkem razdelku bomo predstavili nekaj dejstev o tem, koliko elementov imajo številske množice, ki smo jih obravnavali v prejšnjih razdelkih (za več informacij glejte na primer knjigo [5]). Pri zadnjem primeru v zgledu 1.6 opazimo, da nam bijektivna funkcija $f : A \rightarrow B$ elemente obeh množic uredi po parih. Zato je smiselna naslednja definicija.

Definicija 1.87 *Pravimo, da imata množici A in B **enako moč** (ali da sta **ekvipolentni**), če obstaja bijektivna funkcija $f : A \rightarrow B$. V tem primeru pišemo $|A| = |B|$. Če ne velja, da imata množici A in B enako moč, potem pišemo $|A| \neq |B|$.*

Definicija 1.88 *Množica A je **končna**, če je $A = \emptyset$ ali če ima A enako moč kot množica $\{1, 2, \dots, n\}$ za nek $n \in \mathbb{N}$. Po drugi strani pravimo, da je množica A **šteвно neskončna**, če velja $|A| = |\mathbb{N}|$. Množica A je **števna**, če je končna ali števno neskončna.*

Izkaže se, da sta $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ števno neskončni množici.

Trditev 1.89 *Množica celih števil je števno neskončna množica, torej $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.*

Dokaz. Definirajmo funkcijo $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, tako da za vse $m \in \mathbb{Z}$ velja

$$f(m) = \begin{cases} 2m & ; m > 0 \\ -2m + 1 & ; m \leq 0 \end{cases}.$$

Zlahka preverimo, da je f bijekcija. □

Trditev 1.90 *Množica racionalnih števil je števno neskončna množica, torej $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$.*

Dokaz. Vemo, da lahko vsako neničelno racionalno število zapišemo kot ulomek oblike $\pm \frac{m}{n}$, kjer sta $m, n \in \mathbb{N}$. Vse take ulomke pa lahko razvrstimo v seznam glede na naraščajočo vrednost izraza $m + n$:

$$\frac{1}{1}, -\frac{1}{1}; \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{2}{1}, -\frac{1}{2}; \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{3}{1}, -\frac{2}{2}, -\frac{1}{3}; \dots$$

Sedaj na začetek seznama dodamo število 0 in v seznamu prečrtamo vse ulomke, ki predstavljajo racionalna števila, ki so se že predhodno pojavila v seznamu:

$$0; \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}; \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{2}{1}, -\frac{1}{2}; \frac{3}{1}, \cancel{\frac{2}{2}}, \frac{1}{3}, -\frac{3}{1}, \cancel{-\frac{2}{2}}, -\frac{1}{3}; \dots$$

V zgornjem seznamu se torej vsako racionalno število pojavi natanko enkrat, zato lahko definiramo bijektivno funkcijo $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, tako da za poljuben $n \in \mathbb{N}$ določimo $f(n)$ kot n -ti zaporedni element seznama. □

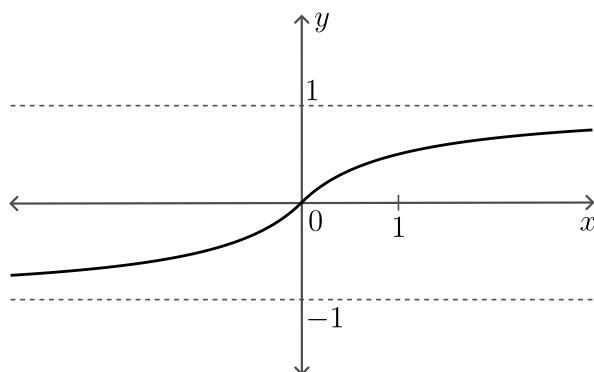
V nadaljevanju bomo pokazali, da množica $\mathbb{R}$ ni števna. Najprej opazimo naslednje.

Trditev 1.91 *Množica realnih števil ima enako moč kot interval $(0, 1)$, torej $|\mathbb{R}| = |(0, 1)|$.*

Dokaz. Sledimo ideji iz knjige [12] in najprej definiramo funkcijo $g : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ s predpisom

$$g(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

Graf funkcije g prikazuje slika 1.14.



Slika 1.14: Graf funkcije $g : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$, ki je podana s predpisom $g(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

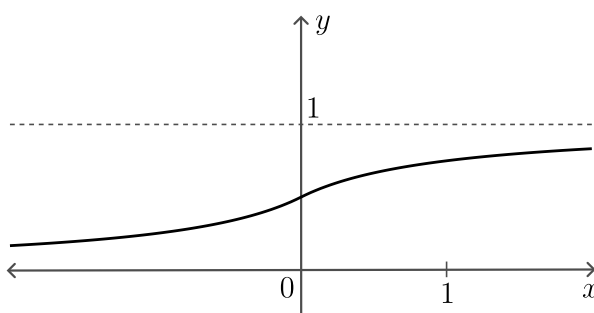
Opazimo, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja

$$|g(x)| = \frac{|x|}{1 + |x|} < \frac{1 + |x|}{1 + |x|} = 1,$$

s čimer se prepričamo, da je res $g(x) \in (-1, 1)$ za vse $x \in \mathbb{R}$. Zlahka se pokaže, da je funkcija g bijektivna. Posledično je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$, podana s predpisom

$$f(x) = \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2} = \frac{x}{2(1 + |x|)} + \frac{1}{2},$$

prav tako bijektivna (glejte sliko 1.15). □



Slika 1.15: Graf funkcije f iz dokaza trditve 1.91.

Opomba 1.92 Seveda bi v dokazu trditve 1.91 lahko uporabili tudi katero drugo funkcijo. Naj bo na primer funkcija $h : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ podana s predpisom $h(x) = \frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2}$. Če se skličemo na znano dejstvo, da je funkcija $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ bijekcija, ugotovimo, da je tudi h bijekcija.

Definicija 1.93 Za množici A in B pišemo $|A| \leq |B|$, če obstaja injektivna funkcija $f : A \rightarrow B$. Prav tako pišemo $|A| < |B|$, če velja $|A| \leq |B|$ in $|A| \neq |B|$.

Izrek 1.94 Velja $|\mathbb{N}| < |(0, 1)|$.

Dokaz. Seveda obstaja injektivna funkcija $f : \mathbb{N} \rightarrow (0, 1)$, zato je $|\mathbb{N}| \leq |(0, 1)|$. Funkcijo f lahko na primer definiramo s predpisom $f(n) = \frac{1}{n+1}$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Pa recimo, da je $|\mathbb{N}| = |(0, 1)|$. Potem obstaja bijekcija $g : \mathbb{N} \rightarrow (0, 1)$. Števila $g(1), g(2), g(3), \dots$ lahko zapišemo z neskončnim decimalnim zapisom:

$$\begin{aligned} g(1) &= 0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots, \\ g(2) &= 0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots, \\ g(3) &= 0, a_{31} a_{32} a_{33} \dots, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ izberimo $b_n \in \{1, 2, \dots, 8\} \setminus \{a_{nn}\}$ in naj bo

$$y = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$$

Seveda je $y \in (0, 1)$, vendar pa za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $y \neq g(n)$. To pomeni, da g ni bijekcija, kar je protislovje. S tem smo pokazali, da velja $|\mathbb{N}| < |(0, 1)|$. $\square$

Opomnimo, da se način dokazovanja, ki smo ga uporabili v zgornjem dokazu za ute-
meljitev dejstva, da funkcija $g : \mathbb{N} \rightarrow (0, 1)$ ni bijekcija, imenuje *Cantorjev diagonalni postopek*.

Enostavno lahko preverimo, da če sta $f : A \rightarrow B$ in $g : B \rightarrow C$ bijektivni funkciji, tedaj je tudi funkcija $(g \circ f) : A \rightarrow C$ bijektivna (podobno velja za injektivne oziroma surjektivne funkcije). Iz tega končno dobimo še naslednji izrek.

Izrek 1.95 Velja $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

Dokaz. Seveda obstaja injektivna funkcija $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, zato sledi $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$.

Recimo, da velja $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$. Potem obstaja bijektivna funkcija $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Ker po trditvi 1.91 obstaja še bijektivna funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$, je tudi funkcija $(f \circ g) : \mathbb{N} \rightarrow (0, 1)$ bijektivna. To je v protislovju s prejšnjim izrekom, zato sledi $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$. $\square$

Ugotovili smo torej, da množica $\mathbb{R}$ ni števna in da velja

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|.$$

Pravimo tudi, da ima množica $\mathbb{R}$ **moč kontinuuma**.

1.13 Kompleksna števila: definicija in osnovne lastnosti

Opazimo, da enačba $x^2 + 1 = 0$ nima rešitev v množici $\mathbb{R}$. To je eden izmed razlogov, da vpeljemo množico kompleksnih števil. Opomnimo, da pri obravnavi kompleksnih števil večinoma uporabljamo vire [4, 10, 20].

Definicija 1.96 *Kompleksno število* je urejen par realnih števil (x, y) , pri čemer sta torej $x, y \in \mathbb{R}$. *Množica kompleksnih števil* je množica

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Definicija 1.97 Na množici $\mathbb{C}$ definiramo operaciji seštevanja, $+$: $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, in množenja, $\cdot$: $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, na naslednji način: za vsaka $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ je

$$\begin{aligned} (1) \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\ (2) \quad (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2). \end{aligned}$$

Izrek 1.98 Množica kompleksnih števil z operacijama seštevanja in množenja, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, je komutativen obseg.

Dokaz. Skozi celoten dokaz naj velja $z = (a, b)$, $w = (c, d)$ in $v = (e, f)$, kjer so $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Preveriti moramo, da veljajo aksiomi (A1)–(A10).

(A1) Za vsaka $z, w \in \mathbb{C}$ je $z + w = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b) = w + z$.

(A2) Za vse $z, w, v \in \mathbb{C}$ je

$$\begin{aligned} (z + w) + v &= ((a, b) + (c, d)) + (e, f) = (a + c, b + d) + (e, f) \\ &= ((a + c) + e, (b + d) + f) = (a + (c + e), b + (d + f)) \\ &= (a, b) + ((c, d) + (e, f)) = z + (w + v). \end{aligned}$$

(A3) Enota za seštevanje je $(0, 0)$, saj za vse $z \in \mathbb{C}$ velja

$$z + (0, 0) = (a, b) + (0, 0) = (a, b) = z.$$

(A4) Za poljuben $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ je nasprotno število $-z = (-a, -b)$:

$$z + (-z) = (a, b) + (-a, -b) = (0, 0).$$

(A5) Za vsaka $z, w \in \mathbb{C}$ je

$$z \cdot w = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, cb + da) = (c, d) \cdot (a, b) = w \cdot z.$$

(A6) Za vse $z, w, v \in \mathbb{C}$ velja

$$\begin{aligned} (z \cdot w) \cdot v &= ((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f) = (ac - bd, ad + bc) \cdot (e, f) \\ &= ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e) \\ &= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) \\ &= (a(ce - df) - b(de + cf), a(cf + de) + b(ce - df)) \\ &= (a, b) \cdot (ce - df, cf + de) \\ &= (a, b) \cdot ((c, d) \cdot (e, f)) = z \cdot (w \cdot v). \end{aligned}$$

(A7) Enota za množenje je $(1, 0)$, saj za vse $z \in \mathbb{C}$ velja

$$z \cdot (1, 0) = (a, b) \cdot (1, 0) = (a - 0, 0 + b) = (a, b) = z.$$

(A8) Naj bo $z = (a, b) \neq (0, 0)$, iz česar sledi $a^2 + b^2 \neq 0$. Inverzni element za množenje (obratno število) je

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right),$$

saj velja

$$z \cdot z^{-1} = \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} - \frac{-b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab}{a^2 + b^2} + \frac{ab}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0).$$

(A9) Očitno sledi $(1, 0) \neq (0, 0)$.

(A10) Za vse $z, w, v \in \mathbb{C}$ velja

$$\begin{aligned} z \cdot (w + v) &= (a, b) \cdot ((c, d) + (e, f)) = (a, b) \cdot (c + e, d + f) \\ &= (a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)) \\ &= (ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be) \\ &= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) \\ &= (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f) \\ &= z \cdot w + z \cdot v. \end{aligned}$$

S tem smo preverili, da je $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ komutativen obseg oziroma polje. □

Opomba 1.99 Dogovorimo se, da bomo za vsak $x \in \mathbb{R}$ število $(x, 0)$ označevali kar z x , torej $x = (x, 0)$. Za vsaka $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ namreč velja:

$$(1) \quad (x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0),$$

$$(2) \quad (x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0).$$

Definicija 1.100 Število

$$i = (0, 1)$$

imenujemo **imaginarna enota**.

Trditev 1.101 Velja $i^2 = -1$.

Dokaz. Izračunamo $i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$. □

Seveda tudi pri množenju kompleksnih števil pogosto izpuščamo oznako za množenje in pišemo kar zw namesto $z \cdot w$.

Trditev 1.102 Za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ velja zveza $(x, y) = x + yi$.

Dokaz. Izračunamo $x + yi = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = (x, 0) + (0, y) = (x, y)$. □

Opomba 1.103 Dogovorimo se, da bomo kompleksno število $z = (x, y)$ zapisovali kar v obliki $z = x + yi$.

Definicija 1.104 Naj bo $z = x + yi \in \mathbb{C}$, kjer sta $x, y \in \mathbb{R}$. Teda je x **realni del** števila z , y pa **imaginarni del** števila z , kar označimo tako:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Definicija 1.105 Naj bo $z = x + yi \in \mathbb{C}$, kjer sta $x, y \in \mathbb{R}$. Kompleksnemu številu $\bar{z} = x + (-y)i = x - yi$ pravimo **konjugirano kompleksno število** števila z .

Definicija 1.106 Naj bo $z = x + yi \in \mathbb{C}$, kjer sta $x, y \in \mathbb{R}$. **Absolutna vrednost** kompleksnega števila z je definirana kot

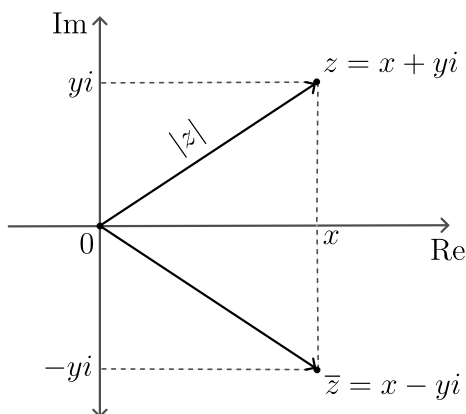
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}.$$

Opomba 1.107 Če je $z = x \in \mathbb{R}$, potem velja

$$|x| = |z| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2},$$

kar sovpada z ugotovitvijo v opombi 1.80.

Naj bo $z = (x, y) = x + yi \in \mathbb{C}$, kjer sta $x, y \in \mathbb{R}$. Število z lahko ponazorimo kot točko v kompleksni ravnini, včasih pa narišemo tudi vektor od izhodišča do ustrezne točke (glejte sliko 1.16). Pri tem se abscisna os imenuje **realna os**, ordinatna os pa **imaginarna os**. Slika 1.16 prikazuje tudi konjugirano kompleksno število $\bar{z}$ in absolutno vrednost števila z , ki predstavlja dolžino ustreznega vektorja.



Slika 1.16: Kompleksni števili $z = x + yi$ in $\bar{z} = x - yi$.

Opomba 1.108 Ugotovili smo že, da $|z|$ predstavlja razdaljo med številoma 0 in z . Podobno $|z - w|$ predstavlja razdaljo med kompleksnima številoma z in w . Namreč, za $z = x + yi$ in $w = a + bi$, kjer so $x, y, a, b \in \mathbb{R}$, velja

$$|z - w| = |(x - a) + (y - b)i| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}.$$

Trditev 1.109 Za vsaka $z, w \in \mathbb{C}$ velja:

- (1) $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ oziroma $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$,
- (2) če je $w \neq 0$, potem je $\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2}$.

Dokaz.

- (1) Naj bo $z = x + yi$, kjer sta $x, y \in \mathbb{R}$. Izračunamo lahko

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

- (2) Očitno velja $\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2}$. □

Zapišimo še nekaj lastnosti konjugiranja.

Trditev 1.110 Za vsaka $z, w \in \mathbb{C}$ velja:

- (1) $\overline{(\bar{z})} = z$,
- (2) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$,
- (3) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$,
- (4) za $w \neq 0$ je $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$,
- (5) $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.

Dokaz. Naj bosta $z = x + yi$ in $w = a + bi$ kompleksni števili, kjer so $x, y, a, b \in \mathbb{R}$.

- (1) Opazimo, da je $\overline{(\bar{z})} = \overline{x + (-y)i} = x - (-y)i = x + yi = z$.

- (2) Sklepamo tako:

$$\overline{z + w} = \overline{x + yi + a + bi} = (x + a) - (y + b)i = x - yi + a - bi = \bar{z} + \bar{w}.$$

- (3) Izračunamo $\overline{z \cdot w}$ in $\bar{z} \cdot \bar{w}$ ter opazimo, da velja enakost:

$$\begin{aligned} \overline{z \cdot w} &= \overline{(xa - yb) + (xb + ya)i} = (xa - yb) - (xb + ya)i = xa - yb - xbi - yai, \\ \bar{z} \cdot \bar{w} &= (x - yi)(a - bi) = xa - yb - xbi - yai. \end{aligned}$$

- (4) Očitno je

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(\frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2}\right)} = \overline{\left(z \cdot \bar{w} \cdot \frac{1}{|w|^2}\right)} = \bar{z} \cdot w \cdot \frac{1}{|w|^2} = \frac{\bar{z} \cdot w}{\bar{w} \cdot w} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}.$$

- (5) Opazimo, da velja $z + \bar{z} = 2x$ in $z - \bar{z} = 2yi$, od koder dobimo obe enakosti. □

Ob koncu razdelka si oglejmo lastnosti absolutne vrednosti.

Trditev 1.111 Za vsaka $z, w \in \mathbb{C}$ velja:

- (1) $|z| \geq 0$,
- (2) $|z| = 0 \iff z = 0$,
- (3) $|\bar{z}| = |z|$,
- (4) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,
- (5) za $w \neq 0$ je $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$,
- (6) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$.

Dokaz. Naj bosta $z = x + yi$ in $w = a + bi$ kompleksni števili, kjer so $x, y, a, b \in \mathbb{R}$.

- (1) Očitno je $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$.
- (2) Seveda velja $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ natanko tedaj, ko je $x^2 + y^2 = 0$, kar pa je ekvivalentno pogoju $x = y = 0$ oziroma $z = 0$.
- (3) Očitno je $|\bar{z}| = |x + (-y)i| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.
- (4) Najprej izračunajmo

$$\begin{aligned} |z \cdot w| &= |(xa - yb) + (xb + ya)i| = \sqrt{(xa - yb)^2 + (xb + ya)^2} \\ &= \sqrt{x^2a^2 - 2xayb + y^2b^2 + x^2b^2 + 2xb ya + y^2a^2} \\ &= \sqrt{x^2a^2 + y^2b^2 + x^2b^2 + y^2a^2}. \end{aligned}$$

Ker je tudi

$$|z| \cdot |w| = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{x^2a^2 + y^2b^2 + x^2b^2 + y^2a^2},$$

sledi dokazovana enakost.

- (5) Opazimo, da velja

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \left|z \cdot \bar{w} \cdot \frac{1}{|w|^2}\right| = |z| \cdot |\bar{w}| \cdot \frac{1}{|w|^2} = \frac{|z|}{|w|}.$$

- (6) Očitno je $|\operatorname{Re} z| = |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$. Podobno dobimo tudi drugo neenakost. $\square$

Izrek 1.112 (trikotniška neenakost) Za poljubna $z, w \in \mathbb{C}$ velja

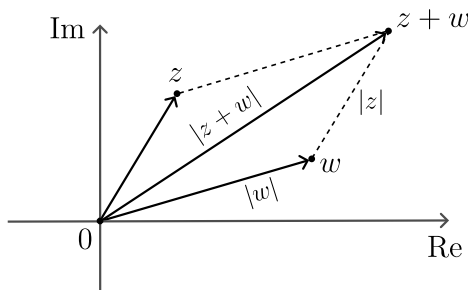
$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

Dokaz. Z uporabo že dokazanih lastnosti dobimo:

$$\begin{aligned}
 |z + w|^2 &= (z + w) \cdot \overline{(z + w)} = (z + w) \cdot (\bar{z} + \bar{w}) \\
 &= |z|^2 + z \cdot \bar{w} + \bar{z} \cdot w + |w|^2 \\
 &= |z|^2 + z \cdot \bar{w} + \overline{z \cdot \bar{w}} + |w|^2 = |z|^2 + 2 \operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) + |w|^2 \\
 &\leq |z|^2 + 2 |\operatorname{Re}(z \cdot \bar{w})| + |w|^2 \leq |z|^2 + 2 |z \cdot \bar{w}| + |w|^2 \\
 &= |z|^2 + 2 |z| \cdot |w| + |w|^2 \\
 &= (|z| + |w|)^2.
 \end{aligned}$$

Od tod sledi zelena neenakost. $\square$

Geometrijski pomen trikotniške neenakosti prikazuje slika 1.17. Opazimo, da gre za standardno lastnost trikotnika: vsota dolžin dveh stranic presega dolžino tretje stranice.



Slika 1.17: Kompleksna števila z , w in $z + w$.

Posledica 1.113 Za poljubna $z, w \in \mathbb{C}$ velja:

- (1) $|z - w| \leq |z| + |w|$,
- (2) $||z| - |w|| \leq |z - w|$,
- (3) $||z| - |w|| \leq |z + w|$.

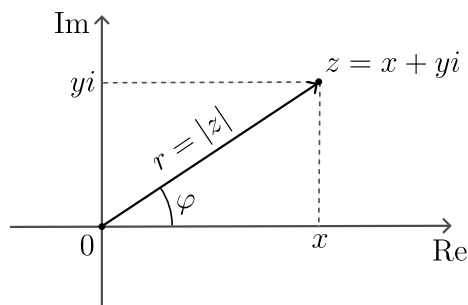
Dokaz. Dokazujemo zelo podobno kot pri posledici 1.84. $\square$

1.14 Polarni zapis kompleksnega števila

Naj bo $z = x + yi \in \mathbb{C}$, kjer sta $x, y \in \mathbb{R}$. Vemo že, da lahko število z ponazorimo kot točko v kompleksni ravnini. Naj bo $r = |z|$ absolutna vrednost števila z (oziroma oddaljenost točke z od izhodišča) in naj bo še φ usmerjeni kot, ki ga dobimo, če poltrak, določen s pozitivnim delom realne osi, zavrtimo proti poltraku z vrhom v izhodišču, ki poteka skozi točko z (slika 1.18). V primeru, ko vrtenje poteka v pozitivni smeri, je kot φ pozitiven, sicer pa negativen. Pri tem $r = |z|$ imenujemo tudi **polmer** kompleksnega števila z , kot φ pa **argument** kompleksnega števila z in označimo $\varphi = \arg z$.

Iz slike vidimo, da za $z \neq 0$ velja

$$\cos \varphi = \frac{x}{|z|} \quad \text{in} \quad \sin \varphi = \frac{y}{|z|},$$



Slika 1.18: Polmer r in argument φ za kompleksno število z .

zato dobimo

$$x = |z| \cos \varphi \quad \text{in} \quad y = |z| \sin \varphi.$$

Torej lahko zapišemo

$$z = x + yi = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

kar imenujemo **polarni zapis** kompleksnega števila z .

Opomba 1.114 Opazimo, da argument φ ni enolično določen, saj lahko na primer namesto $\frac{\pi}{4}$ vzamemo tudi $\frac{\pi}{4} + 2\pi$. Velikokrat dodatno predpostavimo, da je recimo $\varphi \in [0, 2\pi)$ ali pa $\varphi \in (-\pi, \pi]$. V tem primeru je argument φ enolično določen za vsako neničelno kompleksno število.

Kako poiščemo r in φ , če sta podana x in y ? Seveda je

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Če je $x \neq 0$, pa velja tudi

$$\tan \varphi = \frac{y}{x}.$$

Če upoštevamo, v katerem kvadrantu leži dano število, dobimo vse možne vrednosti za φ :

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2k\pi & ; x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi + 2k\pi & ; x < 0 \end{cases},$$

kjer je $k \in \mathbb{Z}$.

Razmislimo še, kako je v primeru, ko je $x = 0$. Če je $y > 0$, potem so možne vrednosti $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$. Če pa je $y < 0$, dobimo $\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$.

Kot zanimivost omenimo, da je mogoče vpeljati tudi kompleksno eksponentno funkcijo in da v tem primeru za vsak $\varphi \in \mathbb{R}$ velja

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Število $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ lahko potem zapišemo kot

$$z = re^{i\varphi},$$

kar imenujemo **Eulerjev zapis** kompleksnega števila. Opazimo še, da velja

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1,$$

zato dobimo

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Izkaže se, da lahko enostavno množimo kompleksna števila, ki so zapisana v polarni obliki.

Trditev 1.115 *Predpostavimo, da sta kompleksni števili $z, w \in \mathbb{C}$ podani v polarnem zapisu: $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $w = |w|(\cos \beta + i \sin \beta)$. Naj bo še $n \in \mathbb{N}$. Potem velja:*

$$(1) \quad z \cdot w = |z| \cdot |w|(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)),$$

$$(2) \quad z^n = |z|^n(\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)).$$

Dokaz.

(1) Ker je $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ in $w = |w|(\cos \beta + i \sin \beta)$, sledi

$$\begin{aligned} z \cdot w &= |z| \cdot |w|(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= |z| \cdot |w|((\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta)) \\ &= |z| \cdot |w|(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)), \end{aligned}$$

kjer smo pri zadnji enakosti uporabili adicijska izreka za funkciji kosinus in sinus.

(2) Enakost bomo dokazali z matematično indukcijo. Formula očitno velja za $n = 1$. Sedaj predpostavimo, da enakost velja za nek $n \in \mathbb{N}$, kar pomeni, da velja $z^n = |z|^n(\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha))$. Ker je $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, z uporabo točke (1) dobimo

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n \cdot z = |z|^n \cdot |z|(\cos(n\alpha + \alpha) + i \sin(n\alpha + \alpha)) \\ &= |z|^{n+1}(\cos((n+1)\alpha) + i \sin((n+1)\alpha)), \end{aligned}$$

zato je dokaz zaključen. □

Opomnimo, da se formula (2) iz zgornje trditve imenuje **de Moivreova formula**.

Zgled 1.116 *Naj bo $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Izračunajmo z^{2025} . Najprej število z zapišimo v polarni obliki. Izračunamo lahko*

$$r = |z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

in

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) + \pi = \arctan(-\sqrt{3}) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}.$$

Velja torej

$$z = 1 \cdot \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right)$$

in zato je

$$z^{2025} = \cos \left(2025 \cdot \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(2025 \cdot \frac{2\pi}{3} \right) = \cos(1350\pi) + i \sin(1350\pi).$$

Ker je $1350\pi = 675 \cdot 2\pi$, dobimo

$$z^{2025} = \cos 0 + i \sin 0 = 1.$$

Naj bo $n \in \mathbb{N}$ naravno število. Število $z \in \mathbb{C}$ se imenuje ***n-ti koren enote*** [10], če velja

$$z^n = 1. \quad (1.1)$$

Poiščimo vse rešitve te enačbe. Če uporabimo polarni zapis $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, seveda dobimo $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$. Po drugi strani je $1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)$, od koder sledi

$$r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0).$$

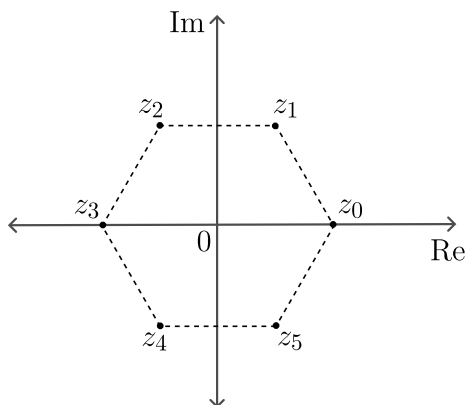
To pomeni, da mora veljati $r^n = 1$ in $n\varphi = 0 + 2k\pi$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$. Zapisano implicira

$$r = 1 \quad \text{in} \quad \varphi = \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Vidimo, da je dovolj obravnavati samo $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, saj se nato števila začnejo ponavljati. Rešitve enačbe (1.1) so zato števila

$$z_k = \cos \left(\frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{2k\pi}{n} \right),$$

kjer je $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Opazimo, da vse te točke ležijo na krožnici s središčem v točki 0 in polmerom 1 ter da tvorijo oglišča pravilnega n -kotnika. Na primer za $n = 6$ so omenjene točke prikazane na sliki 1.19.



Slika 1.19: Koreni enote za $n = 6$.

Ob koncu razdelka rešimo še splošnejši problem in poiščimo rešitve enačbe

$$z^n = w,$$

kjer je $n \in \mathbb{N}$ in $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ponovno uporabimo polarni zapis $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ in dobimo $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$. Po drugi strani lahko tudi w zapišemo v polarni obliki:

$$w = |w|(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Iz enakosti

$$r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) = |w|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

sedaj sledi $r^n = |w|$ in $n\varphi = \alpha + 2k\pi$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$. Podobno kot prej zato dobimo

$$r = \sqrt[n]{|w|} \quad \text{in} \quad \varphi = \frac{\alpha + 2k\pi}{n},$$

pri čemer je dovolj obravnavati samo situacije, ko je $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Rešitve obravnavane enačbe so zato števila

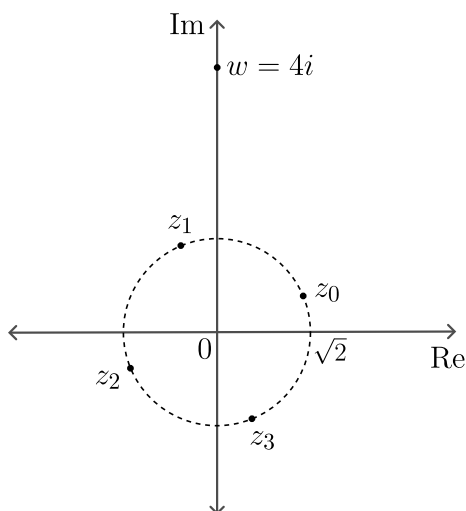
$$z_k = \sqrt[n]{|w|} \left(\cos \left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) \right),$$

kjer je $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Če je na primer $n = 4$ in $w = 4i$, velja $|w| = 4$ in $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Zgornji razmislek nam pove, da so rešitve enačbe $z^4 = 4i$ števila

$$z_k = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi + 4k\pi}{8} \right) + i \sin \left(\frac{\pi + 4k\pi}{8} \right) \right), \quad k \in \{0, 1, 2, 3\},$$

ki jih vidimo na sliki 1.20.



Slika 1.20: Rešitve enačbe $z^4 = 4i$.

Poglavje 2

Zaporedja in vrste

Cilj poglavja je spoznati osnovna dejstva o zaporedjih realnih števil in o številskih vrstah, katerih členi so prav tako realna števila. Mimogrede razložimo tudi, kako definiramo potence z realnimi eksponenti. Opomnimo še, da v tem poglavju uporabljamo predvsem vire [2, 4, 10, 20].

2.1 Definicija in osnovne lastnosti zaporedij

Definicija 2.1 *Zaporedje realnih števil (ali samo zaporedje) je funkcija $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Za poljuben $n \in \mathbb{N}$ namesto $a(n)$ običajno pišemo a_n , torej $a_1 = a(1)$, $a_2 = a(2)$ itn. Število a_n imenujemo **n -ti člen zaporedja**. Zaporedje a pogosto označimo kot $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ ali samo kot (a_n) .*

Ker je zaporedje funkcija $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, je **graf zaporedja** definiran tako:

$$G_a = \{(n, a_n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

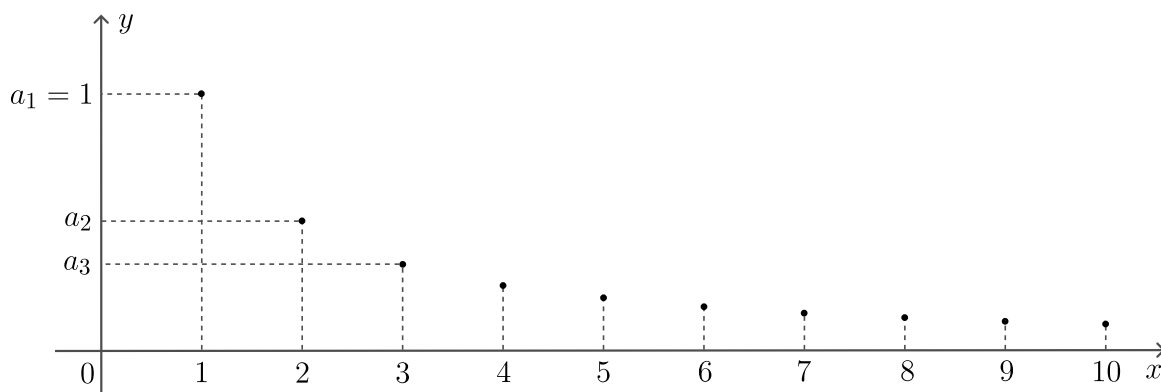
Zgled 2.2 (1) Naj bo $a_n = n$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Imamo torej zaporedje $(a_n) = (1, 2, 3, \dots)$.

(2) Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo $a_n = \frac{1}{n}$. Dobimo zaporedje $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$. Graf tega zaporedja je prikazan na sliki 2.1.

(3) Zaporedje lahko podamo tudi rekurzivno, kar pomeni, da povemo, kako se nek člen izraža s predhodnimi členi. Na primer **Fibonaccijevo zaporedje** lahko podamo na naslednji način: $a_1 = a_2 = 1$ in $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$. Potem je $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_5 = 5$ itn.

(4) Naj bo $d \in \mathbb{R}$. Zaporedje (a_n) , pri katerem za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $a_{n+1} = a_n + d$, imenujemo **aritmetično zaporedje**. V tem primeru hitro vidimo, da lahko n -ti člen zaporedja za poljuben $n \in \mathbb{N}$ izračunamo tako: $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

Opomba 2.3 Če je M poljubna neprazna množica, je funkcija $a : \mathbb{N} \rightarrow M$ **zaporedje v M** . V primeru, ko je $M = \mathbb{C}$, dobimo **zaporedje kompleksnih števil**.



Slika 2.1: Graf zaporedja (a_n) , ki je podano s splošnim členom $a_n = \frac{1}{n}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Definicija 2.4 Naj bo (a_n) zaporedje. Množica

$$Z_a = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \subseteq \mathbb{R}$$

je **zaloga vrednosti** zaporedja (a_n) . Seveda je $Z_a \neq \emptyset$.

Spomnimo se Dedekindovega aksioma, ki pove, da ima vsaka neprazna in navzgor omejena podmnožica A množice $\mathbb{R}$ tudi supremum v $\mathbb{R}$. Natančneje, število $M \in \mathbb{R}$ je supremum množice A , kar pišemo kot $M = \sup A$, če velja:

- (1) $\forall a \in A, a \leq M$,
- (2) $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, a > M - \varepsilon$.

Podobno ima vsaka neprazna in navzdol omejena podmnožica A množice $\mathbb{R}$ tudi infimum v $\mathbb{R}$. Natančneje, število $m \in \mathbb{R}$ je infimum množice A , kar pišemo kot $m = \inf A$, če velja:

- (1) $\forall a \in A, a \geq m$,
- (2) $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, a < m + \varepsilon$.

Definicija 2.5 Zaporedje (a_n) je **navzgor omejeno**, če je množica Z_a navzgor omejena (to pomeni, da obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, ki mu pravimo **zgornja meja** zaporedja, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \leq M$). V tem primeru obstaja število $\sup Z_a$, ki ga imenujemo **supremum** (ali **natančna zgornja meja**) zaporedja (a_n) in pišemo $\sup(a_n) = \sup Z_a$. Če obstaja tudi maksimum množice Z_a , potem ga imenujemo **maksimum** zaporedja (a_n) in pišemo $\max(a_n) = \max Z_a$.

Definicija 2.6 Zaporedje (a_n) je **navzdol omejeno**, če je množica Z_a navzdol omejena (to pomeni, da obstaja tak $m \in \mathbb{R}$, ki mu pravimo **spodnja meja** zaporedja, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \geq m$). V tem primeru obstaja število $\inf Z_a$, ki ga imenujemo **infimum** (ali **natančna spodnja meja**) zaporedja (a_n) in pišemo $\inf(a_n) = \inf Z_a$. Če obstaja tudi minimum množice Z_a , potem ga imenujemo **minimum** zaporedja (a_n) in pišemo $\min(a_n) = \min Z_a$.

Definicija 2.7 Zaporedje (a_n) je **omejeno**, če je navzgor in navzdol omejeno.

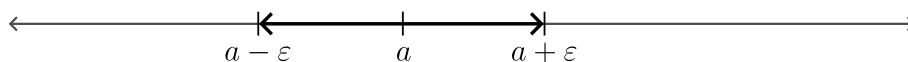
Oglejmo si dva zgleda.

Zgled 2.8 Naj bo $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{n}$. Pokažimo, da je $\inf(a_n) = 0$. Očitno za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \geq 0$. Če izberemo poljuben $\varepsilon > 0$, moramo pokazati še, da obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, za katerega je $a_{n_0} < 0 + \varepsilon = \varepsilon$. Opazimo, da za poljuben $n \in \mathbb{N}$ velja $\frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$. Seveda obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, saj lahko izberemo na primer $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Posledično je za omenjeni n_0 izpolnjen tudi pogoj $a_{n_0} = \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. S tem smo preverili, da je $\inf(a_n) = 0$. Seveda $\min(a_n)$ ne obstaja, saj 0 ni člen zaporedja. Po drugi strani hitro vidimo, da je $\sup(a_n) = \max(a_n) = 1$.

Zgled 2.9 Naj bo $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2 - \frac{1}{n}$, torej $(a_n) = (1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \dots)$. Podobno kot pri prejšnjem zgledu lahko preverimo, da je $\sup(a_n) = 2$ (glejte tudi zgled 1.51). Seveda $\max(a_n)$ ne obstaja, saj 2 ni člen zaporedja. Po drugi strani je $\inf(a_n) = \min(a_n) = 1$.

2.2 Stekališča

Definicija 2.10 Naj bosta $a \in \mathbb{R}$ in $\varepsilon > 0$. Interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ se imenuje **ε -okolica** števila a (slika 2.2).



Slika 2.2: ε -okolica števila a .

Takoj opazimo, da velja

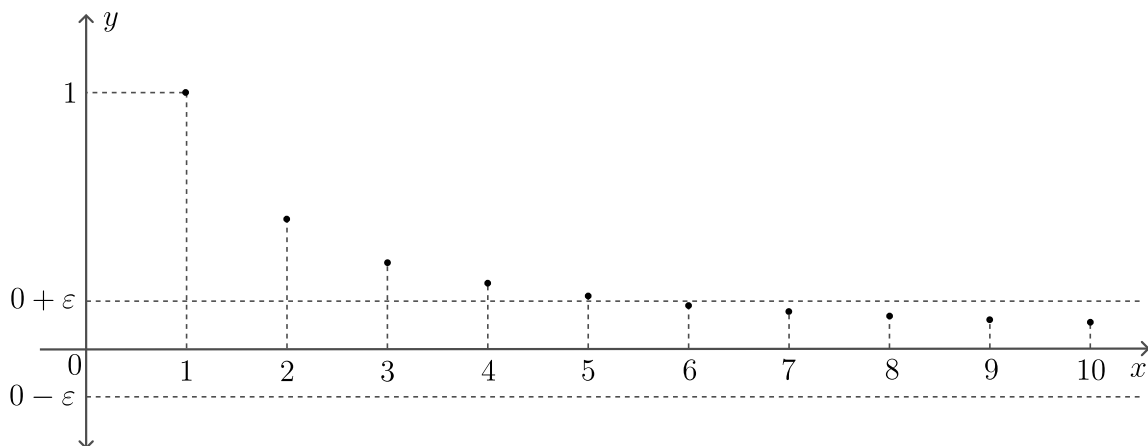
$$x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \iff a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \iff |x - a| < \varepsilon.$$

Definicija 2.11 Število $s \in \mathbb{R}$ je **stekališče** zaporedja (a_n) , če je za vsak $\varepsilon > 0$ pogoj $|a_n - s| < \varepsilon$ izpolnjen za neskončno mnogo indeksov n .

Število s je torej stekališče zaporedja (a_n) , če je v vsaki (še tako majhni) ε -okolici števila s neskončno mnogo členov zaporedja.

Zgled 2.12 Naj bo $a_n = \frac{1}{n}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Dokažimo, da je $s = 0$ stekališče zaporedja (a_n) . Izberimo poljuben $\varepsilon > 0$. Opazimo, da je $|a_n - 0| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$. Pogoj $n > \frac{1}{\varepsilon}$ je izpolnjen za vse $n \geq n_0$, kjer je $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ (slika 2.3). To pomeni, da je tudi pogoj $|a_n - 0| < \varepsilon$ izpolnjen za neskončno mnogo indeksov n , zato je $s = 0$ stekališče zaporedja (a_n) .

Zgled 2.13 Naj bo $a_n = 1 + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Dobimo torej zaporedje $(a_n) = (1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, \dots)$. Takoj vidimo, da so števila 0, 1, 2 stekališča zaporedja (a_n) , saj se vsako izmed njih pojavi neskončnokrat kot člen zaporedja.



Slika 2.3: Graf zaporedja (a_n) iz zgleda 2.12 in ε -okolica števila $s = 0$, ki vsebuje vse člene od vključno šestega člena naprej.

Zgled 2.14 Podobno kot v gradivu [4] pokažimo, da obstaja zaporedje, ki ima vsak $x \in \mathbb{R}$ za stekališče. Najprej se spomnimo, da smo v dokazu trditve 1.90 definirali bijektivno funkcijo $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$. Naj bo zaporedje (a_n) definirano tako, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n = f(n)$. To pomeni, da zaporedje (a_n) vsebuje vsa racionalna števila.

Sedaj izberimo poljuben $x \in \mathbb{R}$. Pokažimo, da je x stekališče zaporedja (a_n) . Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Iz trditve 1.64 vemo, da so racionalna števila gosta v množici $\mathbb{R}$. Posledično interval $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ vsebuje neskončno mnogo racionalnih števil in zato tudi neskončno mnogo členov zaporedja (a_n) . To pomeni, da je x stekališče zaporedja (a_n) .

Seveda nima nujno vsako zaporedje stekališča v množici $\mathbb{R}$ (primer je zaporedje, ki je podano s splošnim členom $a_n = n$ za vse $n \in \mathbb{N}$). Po drugi strani pa lahko pokažemo, da za omejeno zaporedje vedno obstaja stekališče.

Izrek 2.15 Vsako omejeno zaporedje ima vsaj eno stekališče v $\mathbb{R}$.

Dokaz. Sledimo dokazu v knjigi [20] (ali v gradivih [4, 10, 18]). Naj bo (a_n) omejeno zaporedje. Potem obstajata $m, M \in \mathbb{R}$, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$m \leq a_n \leq M.$$

Naj bo

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{neenakost } a_n < x \text{ velja za največ končno mnogo indeksov } n\}.$$

Seveda je $m \in A$, zato velja $A \neq \emptyset$. Pokažimo, da je A navzgor omejena z M . Naj bo $x \in A$ poljuben. Recimo, da je $x > M$. Potem za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \leq M < x$, kar pomeni $x \notin A$ in dobimo protislovje. S tem smo pokazali, da je $x \leq M$ za vsak $x \in A$.

Ker je množica A neprazna in navzgor omejena, ima supremum $s = \sup A \in \mathbb{R}$. Dokažimo, da je s stekališče zaporedja (a_n) . Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Pokazati želimo, da na intervalu $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ leži neskončno mnogo členov zaporedja (a_n) .

Opazimo naslednje:

- (1) Število $s + \frac{\varepsilon}{2}$ ni v množici A , zato neenakost $a_n < s + \frac{\varepsilon}{2}$ velja za neskončno mnogo indeksov n .
- (2) Ker je $s - \frac{\varepsilon}{2} < s$, obstaja nek $a \in A$, da je $a > s - \frac{\varepsilon}{2}$. To pomeni, da neenakost $a_n < a$ velja za največ končno mnogo indeksov n , zato tudi neenakost $a_n < s - \frac{\varepsilon}{2}$ velja za največ končno mnogo indeksov n (to seveda pomeni, da $s - \frac{\varepsilon}{2}$ pripada A).

Iz zgornjih dveh točk sledi, da na intervalu $[s - \frac{\varepsilon}{2}, s + \frac{\varepsilon}{2}]$ leži neskončno mnogo členov zaporedja (a_n) , zato je tudi neskončno členov na intervalu $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$. S tem smo dokazali, da je s stekališče zaporedja (a_n) . $\square$

2.3 Konvergentna zaporedja

Definicija 2.16 Število $L \in \mathbb{R}$ je **limita** zaporedja (a_n) , če

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |a_n - L| < \varepsilon.$$

V tem primeru pišemo $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ in rečemo tudi, da zaporedje (a_n) **konvergira** proti L .

Opomba 2.17 Pogoju $|a_n - L| < \varepsilon$ je seveda ekvivalenten pogoju $a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Število $L \in \mathbb{R}$ je torej limita zaporedja (a_n) , če za vsak $\varepsilon > 0$ interval $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ vsebuje vse člene zaporedja od nekega člena naprej. Zunaj intervala $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ je lahko le končno mnogo členov.

Zgled 2.18 Naj bo $a_n = \frac{1}{n}$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Dokažimo, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Že v zgledu 2.12 smo ugotovili, da je $|a_n - 0| < \varepsilon \iff n \geq n_0$, kjer je $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ (slika 2.3). Potem za vse $n \geq n_0$ velja $a_n \in (0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon)$, kar pomeni, da je 0 limita zaporedja (a_n) . Na primer, če bi izbrali $\varepsilon = \frac{1}{1000}$, potem dobimo $n_0 = 1001$.

Zgled 2.19 Naj bo $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Ker je $|a_n - 1| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$, lahko zelo podobno kot v prejšnjem zgledu pokažemo, da velja $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Definicija 2.20 Zaporedje (a_n) je **konvergentno v $\mathbb{R}$** (ali samo **konvergentno**), če ima limito v $\mathbb{R}$. Če zaporedje ni konvergentno, rečemo, da je **divergentno v $\mathbb{R}$** (ali samo **divergentno**).

Opomba 2.21 Če je zaporedje (a_n) konvergentno v $\mathbb{R}$, pravimo tudi, da **konvergira v $\mathbb{R}$** (oziroma samo, da **konvergira**). Podobno, če je zaporedje (a_n) divergentno v $\mathbb{R}$, pravimo tudi, da **divergira v $\mathbb{R}$** (oziroma samo, da **divergira**).

Zgled 2.22 Naj bo $a_n = 1 + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, torej $(a_n) = (1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, \dots)$. Že v zgledu 2.13 smo ugotovili, da so števila 0, 1, 2 stekališča zaporedja (a_n) , vendar nobeno izmed njih ni limita (prav tako nobeno drugo realno število ne more biti limita). Natančneje, če izberemo $L \in \mathbb{R}$ in recimo $\varepsilon = 1$, ugotovimo, da v ε -okolici števila L ne ležijo vsi členi od nekega naprej. To pomeni, da je zaporedje (a_n) divergentno.

Iz definicije stekališča oziroma limite takoj sledi naslednja trditev.

Trditev 2.23 Če je $L \in \mathbb{R}$ limita zaporedja (a_n) , potem je L tudi stekališče zaporedja (a_n) .

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Ker je L limita zaporedja, obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za vse $n \geq n_0$ velja $|a_n - L| < \varepsilon$. To pomeni, da je pogoj $|a_n - L| < \varepsilon$ izpolnjen za neskončno mnogo indeksov n , zato je L stekališče zaporedja (a_n) . $\square$

Seveda obrat zgornje trditve ne velja, kar dokazuje že zgled 2.22. Zaporedje iz omenjenega zgleda ima namreč tri stekališča, ampak nobeno izmed njih ni limita.

Izrek 2.24 Konvergentno zaporedje ima samo eno limito, ki je tudi edino stekališče.

Dokaz. Naj bo $L \in \mathbb{R}$ limita zaporedja (a_n) . Naj bo še $b \in \mathbb{R}$, pri čemer $b \neq L$. Določimo $\varepsilon = \frac{|b-L|}{3} > 0$. Ker je L limita zaporedja (a_n) , obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja: $n \geq n_0 \implies a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. To pomeni, da so izven intervala $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ lahko le členi $a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}$. Ker je interval $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ izven intervala $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, lahko interval $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ vsebuje samo končno mnogo členov zaporedja (a_n) . Sledi, da b ni limita in tudi ni stekališče zaporedja (a_n) . $\square$

Zgled 2.25 Dejstvo, da ima zaporedje samo eno stekališče, še ne zagotavlja, da je to edino stekališče tudi limita. Na primer, naj bo zaporedje (a_n) podano tako: $(a_n) = (1, 0, 2, 0, 3, 0, \dots)$. Takoj opazimo, da je $s = 0$ edino stekališče zaporedja (a_n) , vendar število 0 očitno ni limita. Pravzaprav zlahka preverimo, da nobeno realno število ne more biti limita tega zaporedja, zato zaporedje divergira. Ta ugotovitev pa sledi tudi iz naslednjega izreka, saj zaporedje (a_n) očitno ni omejeno.

Izrek 2.26 Vsako zaporedje, ki je konvergentno v $\mathbb{R}$, je tudi omejeno.

Dokaz. Naj bosta $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ in $\varepsilon = 1$. Po definiciji limite obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_0$ velja $a_n \in (L - 1, L + 1)$. Izven intervala $(L - 1, L + 1)$ so torej lahko samo členi $a_1, \dots, a_{n_0-1}$. Naj bosta

$$\begin{aligned} m &= \min\{L - 1, a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}\}, \\ M &= \max\{L + 1, a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}\}. \end{aligned}$$

Očitno za vse $n \in \mathbb{N}$ velja

$$m \leq a_n \leq M,$$

zato je zaporedje (a_n) omejeno. $\square$

Razdelek zaključimo s tako imenovanim pravilom sendviča, ki je lahko zelo koristno, če imamo zaporedje, katerega členi ležijo med ustreznimi členi dveh drugih zaporedij.

Izrek 2.27 (pravilo sendviča) Naj bodo (a_n) , (b_n) in (c_n) zaporedja, tako da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \leq b_n \leq c_n$. Če obstaja $L \in \mathbb{R}$, tako da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L,$$

potem je tudi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L.$$

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Potem obstaja tak $n_1 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_1$ velja $|a_n - L| < \varepsilon$. Po drugi strani obstaja tak $n_2 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_2$ velja $|c_n - L| < \varepsilon$. Naj bo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Če je $n \geq n_0$, potem je $a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ in $c_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, zato za vsak $n \geq n_0$ velja $L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon$ in posledično $b_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. $\square$

Zgled 2.28 Naj bo $b_n = \frac{1}{n^3}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Očitno za poljuben $n \in \mathbb{N}$ velja $0 \leq b_n \leq \frac{1}{n}$. Ker je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 \quad \text{in} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

po pravilu sendviča sledi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = 0.$$

Opomba 2.29 Seveda prvih nekaj (končno) členov zaporedja ne vpliva na limito zaporedja, zato lahko izrek 2.27 uporabimo tudi, če pogoj iz izreka velja za vse člene od nekega člena naprej, torej če obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_0$ velja $a_n \leq b_n \leq c_n$.

2.4 Podzaporedja

Definicija 2.30 Naj bo (a_n) poljubno zaporedje in naj bo še $(k_n) = (k_1, k_2, k_3, \dots)$ zaporedje naravnih števil, tako da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $k_n < k_{n+1}$, torej $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$. Zaporedje $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty} = (a_{k_n})$ imenujemo **podzaporedje** zaporedja (a_n) .

Zgled 2.31 Naj velja $a_n = \frac{1}{n^2}$ in $k_n = 2n - 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. To pomeni $(k_n) = (1, 3, 5, 7, \dots)$. Zaporedje

$$(a_{k_n}) = (a_1, a_3, a_5, a_7, \dots) = \left(1, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{5^2}, \frac{1}{7^2}, \dots\right)$$

je podzaporedje zaporedja (a_n) .

Trditev 2.32 Predpostavimo, da je (a_n) zaporedje in $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, kjer je $L \in \mathbb{R}$. Potem za vsako podzaporedje (a_{k_n}) zaporedja (a_n) velja $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = L$.

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Seveda obstaja $n_1 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_1$ velja $|a_n - L| < \varepsilon$. Izberimo tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $k_{n_0} \geq n_1$. Potem za vse $n \geq n_0$ velja $k_n \geq k_{n_0} \geq n_1$ in posledično $|a_{k_n} - L| < \varepsilon$. $\square$

Izrek 2.33 Število $s \in \mathbb{R}$ je stekališče zaporedja (a_n) natanko tedaj, ko obstaja podzaporedje danega zaporedja, ki konvergira k s .

Dokaz. Sledimo pristopu iz virov [4, 10, 15]. Predpostavimo najprej, da obstaja podzaporedje (a_{k_n}) , ki konvergira k s . Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Po definiciji limite obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_0$ velja $|a_{k_n} - s| < \varepsilon$. Ker je vsak člen podzaporedja tudi člen osnovnega zaporedja, sledi, da na intervalu $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ leži neskončno mnogo členov zaporedja (a_n) . Torej je s res stekališče zaporedja (a_n) .

Za drugo smer predpostavimo, da je s stekališče zaporedja (a_n) . Poiščimo tako podzaporedje (a_{k_n}) , ki konvergira k s . Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo $I_n = (s - \frac{1}{n}, s + \frac{1}{n})$. Seveda za vsako naravno število n interval I_n vsebuje neskončno mnogo členov zaporedja (a_n) . Najprej poljubno izberimo $k_1 \in \mathbb{N}$, da bo $a_{k_1} \in I_1$. Nadalje izberimo $k_2 > k_1$ tako, da bo veljalo $a_{k_2} \in I_2$. Podobno izberimo $k_3 > k_2$, da bo $a_{k_3} \in I_3$. S tem postopkom nadaljujemo in dobimo podzaporedje (a_{k_n}) , tako da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $a_{k_n} \in I_n$. Dokažimo, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = s$.

Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben in naj bo $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, da je $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Potem za vse $n \geq n_0$ velja $I_n \subseteq I_{n_0} \subseteq (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$. Posledično za vse $n \geq n_0$ sledi $a_{k_n} \in (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ oziroma $|a_{k_n} - s| < \varepsilon$, s čimer je dokaz zaključen. $\square$

Z uporabo zgornjega izreka in izreka 2.15 takoj dobimo še naslednji rezultat.

Posledica 2.34 (Bolzano-Weierstrassov izrek) *Vsako omejeno zaporedje ima konvergentno podzaporedje.*

Zaključimo razdelek s spodnjim izrekom, ki ga dokažemo s pomočjo podzaporedja.

Izrek 2.35 *Zaporedje (a_n) je konvergentno natanko tedaj, ko je omejeno in ima samo eno stekališče (to edino stekališče je tudi limita zaporedja).*

Dokaz. Če je zaporedje (a_n) konvergentno, potem je omejeno po izreku 2.26 in ima samo eno stekališče zaradi izreka 2.24.

Za drugo smer predpostavimo, da je zaporedje (a_n) omejeno in da ima eno samo stekališče $s \in \mathbb{R}$. Podobno kot v virih [15, 18, 20] dokažimo, da je s limita zaporedja (a_n) . Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Dokazati želimo, da izven intervala $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ leži največ končno mnogo členov zaporedja.

Pa recimo, da izven intervala $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ leži neskončno mnogo členov zaporedja (a_n) . Potem lahko najdemo podzaporedje (a_{k_n}) , tako da vsi členi podzaporedja ležijo zunaj intervala $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$. Ker je zaporedje (a_n) omejeno, je tudi podzaporedje (a_{k_n}) omejeno, zato ima po izreku 2.15 neko stekališče $u \in \mathbb{R}$, ki je seveda tudi stekališče zaporedja (a_n) . Ker vsi členi podzaporedja (a_{k_n}) ležijo zunaj intervala $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$, mora veljati $u \neq s$. Če namreč predpostavimo, da je $u = s$, potem ε -okolica števila u ne vsebuje nobenega člena podzaporedja (a_{k_n}) , kar je v protislovju z dejstvom, da je u stekališče podzaporedja (a_{k_n}) . To pomeni, da velja $u \neq s$ in posledično ima (a_n) dve različni stekališči, kar je v protislovju s predpostavko.

S tem smo dokazali, da za poljuben $\varepsilon > 0$ izven intervala $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ leži največ končno mnogo členov zaporedja (a_n) , kar pomeni, da morajo znotraj intervala $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ ležati vsi členi od nekega člena naprej. Torej je s limita zaporedja (a_n) . $\square$

2.5 Monotona zaporedja

Definicija 2.36 *Zaporedje (a_n) je*

- (1) **naraščajoče**, če $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} \geq a_n$,
- (2) **strogo naraščajoče**, če $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} > a_n$,

(3) **padajoče**, če $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} \leq a_n$,

(4) **strogo padajoče**, če $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} < a_n$,

(5) **monotono**, če je naraščajoče ali padajoče,

(6) **strogo monotono**, če je strogo naraščajoče ali strogo padajoče.

Zgled 2.37 Zaporedje (a_n) naj bo podano tako: $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{n}$. Očitno za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$, zato je zaporedje (a_n) strogo padajoče (slika 2.1).

Naslednji izrek nam pove, kdaj naraščajoče zaporedje konvergira.

Izrek 2.38 Naj bo (a_n) naraščajoče zaporedje. Potem je zaporedje (a_n) konvergentno natanko tedaj, ko je navzgor omejeno. V tem primeru velja $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup(a_n)$.

Dokaz. Predpostavimo, da je zaporedje (a_n) navzgor omejeno. Naj bo $M = \sup(a_n)$. Dokažimo, da je $M = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Izberimo poljuben $\varepsilon > 0$. Ker je $M = \sup(a_n)$, obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $a_{n_0} > M - \varepsilon$. Ker pa je zaporedje (a_n) naraščajoče, za vse $n \geq n_0$ dobimo $a_n \geq a_{n_0} > M - \varepsilon$. To pomeni, da za vse $n \geq n_0$ velja $a_n \in (M - \varepsilon, M + \varepsilon)$, zato je M limita zaporedja (a_n) .

Za drugo smer predpostavimo, da je (a_n) konvergentno zaporedje. Potem je zaporedje (a_n) omejeno po izreku 2.26 in zato tudi navzgor omejeno. Iz prvega dela dokaza sedaj sledi, da velja $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup(a_n)$. $\square$

Zgled 2.39 Zaporedje (a_n) naj bo podano tako: $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$. Očitno za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1} > 2 - \frac{1}{n} = a_n$, zato je zaporedje (a_n) strogo naraščajoče. Iz zgleda 2.9 vemo, da je $\sup(a_n) = 2$, zato po prejšnjem izreku velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n} = 2.$$

Podoben izrek lahko zapišemo tudi za padajoča zaporedja. Ker je dokaz analogen prejšnjemu, ga izpustimo.

Izrek 2.40 Naj bo (a_n) padajoče zaporedje. Potem je zaporedje (a_n) konvergentno natanko tedaj, ko je navzdol omejeno. V tem primeru velja $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf(a_n)$.

Opomba 2.41 Kot smo že omenili, prvih nekaj (končno) členov zaporedja ne vpliva na limito zaporedja, zato lahko navedena izreka uporabimo tudi v primeru, ko je zaporedje naraščajoče oziroma padajoče samo od nekega člena naprej.

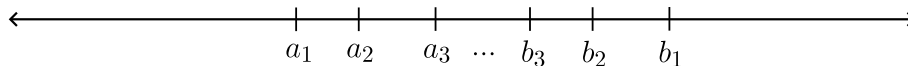
Preden zapišemo naslednji izrek, moramo pojasniti še dva koncepta.

Zaporedje zaprtih intervalov $I_1 = [a_1, b_1], I_2 = [a_2, b_2], I_3 = [a_3, b_3], \dots$, za katere velja $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$, imenujemo **zaporedje vloženih zaprtih intervalov** (slika 2.4).

Če imamo poljubno zaporedje $A_1, A_2, A_3, \dots$ podmnožic realnih števil, potem je presek teh množic definiran tako:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}, x \in A_n\}.$$

Presek množic torej vsebuje natanko tiste elemente, ki pripadajo vsem množicam v zaporedju.



Slika 2.4: Zaporedje vloženih zaprtih intervalov.

Izrek 2.42 (Cantorjev aksiom) Naj bosta (a_n) in (b_n) zaporedji, tako da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ (imamo torej zaporedje vloženih zaprtih intervalov, saj je $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \dots$). Potem sta resnični naslednji trditvi:

- (1) Obstaja tak $c \in \mathbb{R}$, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \leq c \leq b_n$; to pomeni, da je število c vsebovano v vseh intervalih, torej

$$c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

- (2) Če je $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, potem obstaja natanko eno $c \in \mathbb{R}$, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \leq c \leq b_n$; to pomeni, da obstaja natanko eno število c , ki je vsebovano v vseh intervalih, torej

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}.$$

Dokaz. Uporabljamo ideje, predstavljene v virih [4, 10, 14]. Opazimo, da je zaporedje (a_n) naraščajoče in navzgor omejeno z b_1 , zaporedje (b_n) pa padajoče in navzdol omejeno z a_1 , zato sta obe zaporedji konvergentni. Naj bo

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup(a_n).$$

Takoj opazimo, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \leq c \leq b_n$. Če bi namreč obstajal tak $n \in \mathbb{N}$, da bi veljalo $c > b_n$, potem bi po definiciji supremuma obstajal tudi tak $m \in \mathbb{N}$, da bi veljalo $a_m > b_n$, kar bi pomenilo $b_k \leq b_n < a_m \leq a_k$, kjer je $k = \max\{n, m\}$. To je v protislovju s predpostavko, zato je točka (1) dokazana.

Za dokaz točke (2) predpostavimo, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$. Naj bo $x \in \mathbb{R}$ poljuben tak, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \leq x \leq b_n$. Če je $x < c$, potem obstaja $n \in \mathbb{N}$, da je $a_n > x$, kar je protislovje. Če pa je $x > c$, potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $b_n - a_n \geq d$, kjer je $d = x - c > 0$. To pomeni, da je tudi $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) \geq d > 0$, kar je spet protislovje. S tem smo pokazali, da mora biti $x = c$. $\square$

Zgled 2.43 Naj za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n = -\frac{1}{n}$ in $b_n = \frac{2}{n}$. Potem imamo zaporedje vloženih zaprtih intervalov

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \dots$$

Ker zlahka dokažemo, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} = 0,$$

po zadnjem izreku obstaja natanko eno $c \in \mathbb{R}$, ki leži v vseh teh intervalih. Seveda je $c = 0$.

2.6 Računanje z zaporedji in limitami

Naj bosta (a_n) in (b_n) poljubni realni zaporedji. Potem lahko tvorimo nova zaporedja tako:

- (1) **vsota zaporedij** je zaporedje $(a_n + b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$,
- (2) **razlika zaporedij** je zaporedje $(a_n - b_n) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots)$,
- (3) **produkt zaporedij** je zaporedje $(a_n b_n) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots)$,
- (4) če je $\forall n \in \mathbb{N}, b_n \neq 0$, potem zaporedje $\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots\right)$ imenujemo **kvocient zaporedij**.

Izrek 2.44 Naj bosta (a_n) in (b_n) konvergentni zaporedji. Potem so konvergentna tudi zaporedja $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$ in $(a_n b_n)$, pri tem pa velja

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n\right).\end{aligned}$$

Dokaz. Skozi celoten dokaz naj bosta

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{in} \quad B = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Najprej dokažimo, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B \quad \text{in} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = A - B.$$

Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Potem obstaja $n_1 \in \mathbb{N}$, tako da za vse $n \geq n_1$ velja $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Podobno obstaja $n_2 \in \mathbb{N}$, tako da za vse $n \geq n_2$ velja $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$. Naj bo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Potem za vse $n \geq n_0$ dobimo

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

in

$$|(a_n - b_n) - (A - B)| = |(a_n - A) + (B - b_n)| \leq |a_n - A| + |B - b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

kar zaključimo dokaz prvih dveh formul.

V nadaljevanju dokažimo (na zelo podoben način kot v virih [10, 18]), da velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = AB.$$

Ker je zaporedje (a_n) konvergentno, je po izreku 2.26 tudi omejeno. Zato lahko najdemo tak $M \in \mathbb{R}^+$, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $|a_n| \leq M$. Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Potem obstaja tak $n_1 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_1$ velja

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{M + |B|}.$$

Podobno obstaja tak $n_2 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_2$ velja

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{M + |B|}.$$

Naj bo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Če je $n \geq n_0$, potem dobimo

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |a_n b_n - a_n B + a_n B - AB| = |a_n(b_n - B) + (a_n - A)B| \\ &\leq |a_n(b_n - B)| + |(a_n - A)B| = |a_n| \cdot |b_n - B| + |a_n - A| \cdot |B| \\ &< M \frac{\varepsilon}{M + |B|} + \frac{\varepsilon}{M + |B|} |B| = \frac{\varepsilon}{M + |B|} (M + |B|) = \varepsilon, \end{aligned}$$

kar zaključimo še dokaz tretje formule. $\square$

Navedimo še posledico, ki sledi neposredno iz prejšnjega izreka (natančneje iz dela, ki govori o konvergenci produkta zaporedij).

Posledica 2.45 *Naj bo (a_n) konvergentno zaporedje. Če je $\lambda \in \mathbb{R}$, potem je konvergentno tudi zaporedje (λa_n) in velja*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Izrek 2.46 *Naj bosta (a_n) in (b_n) konvergentni zaporedji. Če velja še $\forall n \in \mathbb{N}, b_n \neq 0$ in $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, potem konvergira tudi zaporedje $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ in velja*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

Dokaz. Sledimo pristopu iz vira [18]. Naj bosta

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{in} \quad B = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Vemo, da je $B \neq 0$. Najprej dokažimo, da je konvergentno zaporedje $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ in da velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}.$$

Naj bo $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, da za vse $n \geq n_1$ velja

$$|b_n - B| < \frac{|B|}{2}.$$

Intervala $\left(-\frac{|B|}{2}, \frac{|B|}{2}\right)$ ter $\left(B - \frac{|B|}{2}, B + \frac{|B|}{2}\right)$ sta očitno disjunktna, zato za vse $n \geq n_1$ sledi

$$|b_n| \geq \frac{|B|}{2}.$$

Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Ker je $B = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, gotovo obstaja tudi tak $n_2 \in \mathbb{N}$, da je pogoj

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon |B|^2}{2}$$

izpolnjen za vse $n \geq n_2$. Določimo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Posledično za vsak $n \geq n_0$ velja

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} \right| = \left| \frac{B - b_n}{Bb_n} \right| = \frac{|b_n - B|}{|B| \cdot |b_n|} \leq \frac{2|b_n - B|}{|B|^2} < \frac{2\varepsilon|B|^2}{2|B|^2} = \varepsilon.$$

Dokazali smo, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}.$$

Z uporabo prejšnjega izreka sedaj dobimo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n \cdot \frac{1}{b_n} \right) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} \right) = A \cdot \frac{1}{B} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n},$$

kar zaključimo dokaz. □

Zgled 2.47 Ker velja $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, je tudi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \right) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Zgled 2.48 Izračunajmo limito

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n + 5}{3n^2 + n + 2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}}{3 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} \right)} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{2 - 0 + 0}{3 + 0 + 0} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

2.7 Cauchyjeva zaporedja

Definicija 2.49 Zaporedje (a_n) je **Cauchyjevo**, če

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq n_0 \implies |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Trditev 2.50 Vsako Cauchyjevo zaporedje je omejeno.

Dokaz. Naj bo (a_n) poljubno Cauchyjevo zaporedje in določimo $\varepsilon = 1$. Potem obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $m, n \geq n_0$ velja $|a_m - a_n| < 1$. Sledi, da za vse $n \geq n_0$ velja $|a_n - a_{n_0}| < 1$ oziroma $a_n \in (a_{n_0} - 1, a_{n_0} + 1)$. Izven intervala $(a_{n_0} - 1, a_{n_0} + 1)$ so torej lahko samo členi $a_1, \dots, a_{n_0-1}$. Naj bosta

$$\begin{aligned} m &= \min\{a_{n_0} - 1, a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}\}, \\ M &= \max\{a_{n_0} + 1, a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}\}. \end{aligned}$$

Očitno za vse $n \in \mathbb{N}$ velja

$$m \leq a_n \leq M,$$

zato je zaporedje (a_n) omejeno. □

Izrek 2.51 *Zaporedje (a_n) je Cauchyjevo natanko tedaj, ko je konvergentno.*

Dokaz. Sledimo pristopu iz virov [4, 20]. Predpostavimo najprej, da je zaporedje (a_n) Cauchyjevo. Potem po zgornji trditvi vemo, da je omejeno in zato ima po izreku 2.15 neko stekališče $s \in \mathbb{R}$. Dokažimo, da velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s.$$

Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Ker je zaporedje Cauchyjevo, mora obstajati tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $m, n \geq n_0$ velja $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ker je s stekališče zaporedja (a_n) , je pogoj $|a_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$ izpolnjen za neskončno mnogo indeksov n . Zato obstaja tak $n_1 > n_0$, da velja $|a_{n_1} - s| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Za poljuben $n \geq n_0$ potem sledi

$$|a_n - s| = |(a_n - a_{n_1}) + (a_{n_1} - s)| \leq |a_n - a_{n_1}| + |a_{n_1} - s| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

S tem smo pokazali, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s,$$

zato je zaporedje (a_n) konvergentno.

Za drugo smer predpostavimo, da je (a_n) konvergentno zaporedje z limito L . Dokažimo, da je zaporedje (a_n) Cauchyjevo. Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Iščemo $n_0 \in \mathbb{N}$, da bo za vse $m, n \geq n_0$ veljalo $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Ker je L limita zaporedja (a_n) , za $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_0$ velja $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. Iskani n_0 je kar ta, ki smo ga dobili iz definicije limite. Namreč, za vse $m, n \geq n_0$ je

$$|a_m - a_n| = |(a_m - L) + (L - a_n)| \leq |a_m - L| + |L - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dokazali smo, da je zaporedje (a_n) Cauchyjevo. □

2.8 Limite in stekališča v $\overline{\mathbb{R}}$

Če množici realnih števil $\mathbb{R}$ dodamo dva elementa, $+\infty = \infty$ in $-\infty$, dobimo tako imenovano **razširjeno množico realnih števil** $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Pri tem je $\infty \neq -\infty$, nova elementa pa nista števili, ampak neskončnosti. Dodatno definiramo, da za poljuben $x \in \mathbb{R}$ velja $-\infty < x < \infty$. V tem razdelku bomo obravnavali limite in stekališča v množici $\overline{\mathbb{R}}$, pri čemer se zgledujemo po gradivu [15].

Definicija 2.52 *Zaporedje (a_n) **divergira proti** ∞ , če velja:*

$$\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies a_n > M.$$

V tem primeru pišemo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

in pravimo tudi, da zaporedje (a_n) v $\overline{\mathbb{R}}$ **konvergira proti** ∞ ali da ima v $\overline{\mathbb{R}}$ **limito** ∞ .

Definicija 2.53 Zaporedje (a_n) **divergira proti** $-\infty$, če velja:

$$\forall M < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies a_n < M.$$

V tem primeru pišemo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

in pravimo tudi, da zaporedje (a_n) **v $\overline{\mathbb{R}}$ konvergira proti** $-\infty$ ali da ima **v $\overline{\mathbb{R}}$ limito** $-\infty$.

Zgled 2.54 Naj bo zaporedje (a_n) podano s splošnim členom $a_n = n^2$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Preverimo, da velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty.$$

Naj bo $M > 0$ poljuben. Poglejmo, kdaj je $a_n = n^2 > M$. Seveda to velja takrat, ko je $n > \sqrt{M}$. Naj bo torej $n_0 = \lceil \sqrt{M} \rceil + 1$. Potem za vsak $n \geq n_0$ velja

$$a_n = n^2 \geq n_0^2 > (\sqrt{M})^2 = M,$$

kar zaključimo dokaz.

Zgled 2.55 Naj zaporedje (a_n) divergira proti ∞ , zaporedje (b_n) pa naj ima limito $B \in \mathbb{R}$. Za vajo lahko preverite, da velja:

- (1) Zaporedje $(a_n + b_n)$ divergira proti ∞ .
- (2) Če je $B > 0$, potem zaporedje $(a_n b_n)$ divergira proti ∞ .
- (3) Če je $B > 0$ in $\forall n \in \mathbb{N}, b_n \neq 0$, potem zaporedje $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ divergira proti ∞ .

Od tod sledi na primer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n}{2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2}{2 + \frac{1}{n}} = \infty.$$

Seveda bi lahko analogna pravila izpeljali tudi za druge podobne situacije. Več informacij o pravilih za računanje v množici $\overline{\mathbb{R}}$ najdete v zadnjem delu razdelka 3.10.

Definicija 2.56 Zaporedje (a_n) **konvergira v $\overline{\mathbb{R}}$** , če ima limito v množici $\overline{\mathbb{R}}$. V nasprotnem primeru pravimo, da zaporedje **divergira v $\overline{\mathbb{R}}$** .

Opomba 2.57 Če je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ali $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, potem zaporedje (a_n) divergira, saj divergira v $\mathbb{R}$. Seveda pa v tem primeru konvergira v $\overline{\mathbb{R}}$.

Oglejmo si še, kdaj ima zaporedje stekališče ∞ oziroma $-\infty$.

Definicija 2.58 Zaporedje (a_n) ima **v $\overline{\mathbb{R}}$ stekališče** ∞ , če ni navzgor omejeno. Podobno ima zaporedje (a_n) **v $\overline{\mathbb{R}}$ stekališče** $-\infty$, če ni navzdol omejeno.

Zgled 2.59 Naj bo $(a_n) = (1, 0, 2, 0, 3, 0, \dots)$. Očitno zaporedje (a_n) ni navzgor omejeno, zato ima v $\overline{\mathbb{R}}$ stekališče ∞ .

Izrek 2.60 Vsako zaporedje ima vsaj eno stekališče v $\overline{\mathbb{R}}$.

Dokaz. Naj bo (a_n) poljubno zaporedje. Če (a_n) ni navzgor omejeno, potem je ∞ stekališče tega zaporedja. Če (a_n) ni navzdol omejeno, potem je $-\infty$ stekališče tega zaporedja. Če pa je (a_n) navzgor in navzdol omejeno, potem po izreku 2.15 vemo, da ima vsaj eno stekališče $s \in \mathbb{R}$. V vsakem primeru ima torej zaporedje stekališče v $\overline{\mathbb{R}}$. $\square$

Še enkrat opomnimo, da če ne poudarimo, na katero množico se nanaša konvergenca oziroma stekališče zaporedja, potem se to vedno nanaša na $\mathbb{R}$, torej:

$$\begin{aligned} (a_n) \text{ konvergira} &\iff (a_n) \text{ konvergira v } \mathbb{R}, \\ (a_n) \text{ divergira} &\iff (a_n) \text{ divergira v } \mathbb{R}, \\ (a_n) \text{ ima stekališče} &\iff (a_n) \text{ ima stekališče v } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2.9 Definicija potence z realnim eksponentom

Cilj razdelka je definirati potenco a^x , kjer je $a > 0$ in $x \in \mathbb{R}$. V ta namen najprej ponovimo že znana osnovna dejstva o potencah z naravnim, celim in racionalnim eksponentom ter o korenih. Opomniti moramo, da v tem razdelku pri trditvah, izrekih in dokazih v glavnem sledimo pristopu iz virov [10, 20], kar v nadaljevanju običajno ne bomo posebej poudarjali. Nadalje, pri opisovanju lastnosti potenc in korenov uporabljamo gradivo [2], pri čemer lastnosti večinoma samo naštejemo, saj so te v veliki meri snov predhodnega študija (veliko dokazov pa sicer lahko najdemo v omenjenem viru).

2.9.1 Potence z naravnim eksponentom

Naj bo $a \in \mathbb{R}$. Potenco z naravnim eksponentom definiramo induktivno:

- (1) $a^1 = a$,
- (2) za vsak $n \in \mathbb{N}$ je $a^{n+1} = a^n \cdot a$.

To pomeni, da je $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a^2 \cdot a = a \cdot a \cdot a$ itn. Pri tem vemo, da so izpolnjene določene lastnosti. Natančneje, za vsaka $a, b \in \mathbb{R}$ ter $n, m \in \mathbb{N}$ so resnične naslednje trditve:

- (1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$,
- (2) $(a^n)^m = a^{nm}$,
- (3) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$,
- (4) če je $n > m$, velja $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$,
- (5) če je $n < m$, velja $\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}}$,
- (6) če je $b \neq 0$, velja $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Dodatno, če sta $a, b > 0$ in $n, m \in \mathbb{N}$, potem so resnične naslednje trditve:

- (1) $a^n < 1 \iff a < 1$,
- (2) $a^n > 1 \iff a > 1$,
- (3) $a^n = 1 \iff a = 1$,
- (4) $a^n < b^n \iff a < b$,
- (5) $a^n = b^n \iff a = b$,
- (6) neenakost $a^n < a^m$ velja natanko tedaj, ko je bodisi $a > 1$ in $n < m$ bodisi $a < 1$ in $n > m$,
- (7) enakost $a^n = a^m$ velja natanko tedaj, ko je $a = 1$ ali $n = m$.

Opomnimo še, da se pri potenci a^n število a imenuje **osnova**, število n pa **eksponent**.

Trditev 2.61 *Naj bo $a > 0$. Potem velja*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} 0 & ; a < 1 \\ 1 & ; a = 1 \\ \infty & ; a > 1 \end{cases}.$$

Dokaz. Recimo, da je $a \in (0, 1)$. Seveda za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a^{n+1} = a^n \cdot a < a^n$, zato je zaporedje (a^n) padajoče. Očitno je tudi navzdol omejeno z 0, zato je po izreku 2.38 konvergentno in ima limito $L \in \mathbb{R}$. Ker se zaporedji (a^n) in (a^{n+1}) razlikujeta le v prvem členu, je tudi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} = L,$$

kar implicira

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} = a \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = a \cdot L.$$

Iz zgornjega sledi $L = 0$.

Za $a = 1$ je trditev očitna, zato predpostavimo še, da je $a > 1$. V tem primeru podobno kot prej preverimo, da je zaporedje (a^n) naraščajoče. Pokažimo še, da ni navzgor omejeno. Pa recimo, da je (a^n) navzgor omejeno in da je M natančna zgornja meja tega zaporedja. Seveda mora biti $M > 0$, po izreku 2.40 pa je M tudi limita zaporedja (a^n) . Posledično velja

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} = a \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = a \cdot M,$$

kar pomeni, da je $M = 0$. Dobili smo torej protislovje, zato zaporedje (a^n) ni navzgor omejeno. Ker je tudi naraščajoče, takoj vidimo, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty.$$

Dokaz je s tem zaključen. □

2.9.2 Potence s celim eksponentom

Naj bo $a \in \mathbb{R}$. Potem definiramo $a^0 = 1$. Če je $a \neq 0$ in $n \in \mathbb{N}$, definiramo še

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Izkaže se, da za vsaka $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in vsaka $n, m \in \mathbb{Z}$ velja:

(1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$,

(2) $(a^n)^m = a^{nm}$,

(3) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$,

(4) $\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} = a^{-n}$,

(5) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$,

(6) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Nadalje, če sta $a, b > 0$ in $n, m \in \mathbb{Z}$, potem so resnične naslednje trditve:

(1) $a^n > 0$,

(2) neenakost $a^n < 1$ velja natanko tedaj, ko je bodisi $a > 1$ in $n < 0$ bodisi $a < 1$ in $n > 0$,

(3) neenakost $a^n > 1$ velja natanko tedaj, ko je bodisi $a > 1$ in $n > 0$ bodisi $a < 1$ in $n < 0$,

(4) enakost $a^n = 1$ velja natanko tedaj, ko je $a = 1$ ali $n = 0$,

(5) neenakost $a^n < b^n$ velja natanko tedaj, ko je bodisi $a < b$ in $n > 0$ bodisi $a > b$ in $n < 0$,

(6) enakost $a^n = b^n$ velja natanko tedaj, ko je $a = b$ ali $n = 0$,

(7) neenakost $a^n < a^m$ velja natanko tedaj, ko je bodisi $a > 1$ in $n < m$ bodisi $a < 1$ in $n > m$,

(8) enakost $a^n = a^m$ velja natanko tedaj, ko je $a = 1$ ali $n = m$.

2.9.3 Koreni

V opombi 1.80 smo omenili, da je funkcija $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, podana s predpisom $g(x) = x^2$ za vse $x \in [0, \infty)$, bijektivna. To pomeni, da za vsak $a \geq 0$ obstaja natanko en $x \geq 0$, da velja $x^2 = a$. Dobljeno število x imenujemo **kvadratni koren** števila a , označimo pa ga kot $x = \sqrt{a}$ ali tudi kot $x = \sqrt[2]{a}$. Obljubili smo formalni dokaz obstoja kvadratnega korena (oziroma bijektivnosti omenjene funkcije), ki pa ga bomo predstavili v splošnejši obliki.

Izrek 2.62 (o obstoju m -tega korena) Naj bo $a \geq 0$ poljubno nenegativno število in naj bo $m \in \mathbb{N}$. Potem obstaja natanko eno nenegativno število $x \geq 0$, da je $x^m = a$. V tem primeru število x imenujemo **m -ti koren** števila a in pišemo $x = \sqrt[m]{a}$.

Dokaz. Postopamo podobno kot v virih [10, 20]. Recimo, da bi obstajali dve različni takšni števili, na primer x_1 in x_2 , kjer je $x_1 < x_2$. Potem je seveda $a = x_1^m < x_2^m = a$, kar je protislovje. Torej če takšen x obstaja, je nujno en sam.

Pokažimo še, da tak x obstaja. Naj bo x_0 največje nenegativno celo število, da velja $x_0^m \leq a$. Potem je $x_0^m \leq a < (x_0 + 1)^m$. Če je slučajno $x_0^m = a$, izberemo $x = x_0$ in smo končali. Če pa je $x_0^m < a$, pa naj bo x_1 največje izmed števil v množici

$$\left\{x_0, x_0 + \frac{1}{10}, \dots, x_0 + \frac{9}{10}\right\},$$

za katero velja $x_1^m \leq a$. Potem je

$$x_1^m \leq a < \left(x_1 + \frac{1}{10}\right)^m.$$

Če je $x_1^m = a$, izberemo kar $x = x_1$, sicer pa postopek nadaljujemo. Če v nekem koraku dobimo $x = x_n$, smo zaključili, sicer pa dobimo zaporedje (x_n) , tako da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$x_n^m \leq a < \left(x_n + \frac{1}{10^n}\right)^m.$$

Očitno je zaporedje (x_n) naraščajoče in navzgor omejeno, zato je po izreku 2.38 konvergentno. Naj bo

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Po trditvi 2.61 je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10^n} = 0$, zato je tudi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_n + \frac{1}{10^n}\right) = x.$$

Od tod dobimo

$$x^m = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^m \leq a$$

in

$$x^m = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_n + \frac{1}{10^n}\right)^m \geq a,$$

kar pomeni $x^m = a$. □

Opomba 2.63 Zgornji izrek bi lahko dokazali tudi z uporabo koncepta zveznosti. Za več informacij glejte zgled 3.33.

Tudi za računanje s koreni veljajo nekatere osnovne lastnosti. Naj velja $a, b \in [0, \infty)$ in $n, m, k \in \mathbb{N}$. Potem so resnične naslednje trditve:

$$(1) \quad \sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n,$$

- (2) $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a},$
- (3) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b},$
- (4) če je $b \neq 0$, potem velja $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},$
- (5) $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m},$
- (6) $\sqrt[n]{a} < 1 \iff a < 1,$
- (7) $\sqrt[n]{a} > 1 \iff a > 1,$
- (8) $\sqrt[n]{a} = 1 \iff a = 1,$
- (9) $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \iff a < b,$
- (10) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \iff a = b,$
- (11) neenakost $\sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a}$ velja natanko tedaj, ko je bodisi $a > 1$ in $m > n$ bodisi $a < 1$ in $m < n$,
- (12) enakost $\sqrt[m]{a} = \sqrt[n]{a}$ velja natanko tedaj, ko je $a = 1$ ali $m = n$.

Dokažimo še spodnji izrek.

Izrek 2.64 Naj bo $a > 0$. Potem je $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Dokaz. Če je $a = 1$, je trditev očitna. Naj bo najprej $a > 1$. Ker za poljuben $n \in \mathbb{N}$ velja $a^n < a^{n+1}$, dobimo

$$\sqrt[n(n+1)]{a^n} < \sqrt[n(n+1)]{a^{n+1}}$$

in posledično $\sqrt[n+1]{a} < \sqrt[n]{a}$. Zaporedje $(\sqrt[n]{a})$ je torej padajoče in navzdol omejeno z 1, zato je konvergentno. Naj bo

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} \geq 1.$$

Seveda v tem primeru za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $L \leq \sqrt[n]{a}$ in posledično $L^n \leq a$. Če bi veljalo $L > 1$, bi bilo po trditvi 2.61 zaporedje (L^n) navzgor neomejeno, kar vodi v protislovje. Zato mora biti nujno $L = 1$.

Za konec predpostavimo še, da je $0 < a < 1$. Potem je $\frac{1}{a} > 1$, zato dobimo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Dokaz je torej zaključen. □

2.9.4 Potence z racionalnim eksponentom

Naj bodo $a > 0$, $m \in \mathbb{Z}$ in $n \in \mathbb{N}$. Potem definiramo

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \quad (2.1)$$

Ker pa lahko neko racionalno število na več načinov zapišemo kot ulomek, moramo preveriti, da je zgornja definicija sploh dobra. Recimo, da racionalno število p zapišemo kot

$$p = \frac{m}{n},$$

kjer sta $m \in \mathbb{Z}$ in $n \in \mathbb{N}$ ter velja $D(m, n) = 1$. Če je $p = \frac{m'}{n'}$ nek poljuben zapis števila p , kjer sta $m' \in \mathbb{Z}$ in $n' \in \mathbb{N}$, potem obstaja $k \in \mathbb{N}$, da velja $m' = mk$ in $n' = nk$. To pomeni

$$p = \frac{m'}{n'} = \frac{km}{kn}.$$

Toda v tem primeru velja

$$\sqrt[n']{a^{m'}} = \sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{(a^m)^k}} = \sqrt[n]{a^m},$$

zato je definicija (2.1) ustrezna.

Preverimo lahko, da če sta $a, b \in \mathbb{R}^+$ in $p, q \in \mathbb{Q}$, potem so resnične naslednje trditve:

- (1) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$,
- (2) $a^p > 0$,
- (3) $(a^p)^q = a^{pq}$,
- (4) $(ab)^p = a^p \cdot b^p$,
- (5) $\left(\frac{1}{a}\right)^p = \frac{1}{a^p} = a^{-p}$,
- (6) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$,
- (7) $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$,
- (8) neenakost $a^p < 1$ velja natanko tedaj, ko je bodisi $a > 1$ in $p < 0$ bodisi $a < 1$ in $p > 0$,
- (9) neenakost $a^p > 1$ velja natanko tedaj, ko je bodisi $a > 1$ in $p > 0$ bodisi $a < 1$ in $p < 0$,
- (10) enakost $a^p = 1$ velja natanko tedaj, ko je $a = 1$ ali $p = 0$,
- (11) neenakost $a^p < b^p$ velja natanko tedaj, ko je bodisi $a < b$ in $p > 0$ bodisi $a > b$ in $p < 0$,
- (12) enakost $a^p = b^p$ velja natanko tedaj, ko je $a = b$ ali $p = 0$,

(13) neenakost $a^p < a^q$ velja natanko tedaj, ko je bodisi $a > 1$ in $p < q$ bodisi $a < 1$ in $p > q$,

(14) enakost $a^p = a^q$ velja natanko tedaj, ko je $a = 1$ ali $p = q$.

V nadaljevanju bomo potrebovali tudi naslednjo trditev, ki nam pove, kako se obnaša potenca pri zelo majhnem eksponentu.

Trditev 2.65 Naj bo $a > 0$. Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vsak $h \in \mathbb{Q}$ velja

$$|h| < \delta \implies |a^h - 1| < \varepsilon.$$

Dokaz. Iz izreka 2.64 vemo, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{in} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1.$$

Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Potem obstajata $n_1 \in \mathbb{N}$ in $n_2 \in \mathbb{N}$, tako da za vse $n \geq n_1$ velja

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$$

in da za vse $n \geq n_2$ velja

$$\left| \sqrt[n]{\frac{1}{a}} - 1 \right| < \varepsilon. \quad (2.2)$$

Naj bosta $n = \max\{n_1, n_2\}$ in $\delta = \frac{1}{n}$. Izberimo poljuben $h \in \mathbb{Q}$, tako da je $|h| < \delta$. Ločimo naslednje možnosti:

(1) Predpostavimo, da je $h > 0$. Poglejmo še tri podmožnosti:

(1.1) Recimo, da je $a > 1$. V tem primeru iz $0 < h < \delta = \frac{1}{n}$ dobimo $1 < a^h < a^{\frac{1}{n}}$. Posledično je $0 < a^h - 1 < a^{\frac{1}{n}} - 1$, zato sledi $0 < |a^h - 1| < |\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$ in $|a^h - 1| < \varepsilon$.

(1.2) Recimo, da je $a = 1$. V tem primeru je očitno $|a^h - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$.

(1.3) Recimo, da je $0 < a < 1$. V tem primeru iz $0 < h < \delta = \frac{1}{n}$ dobimo $1 > a^h > a^{\frac{1}{n}}$. Posledično je $0 > a^h - 1 > a^{\frac{1}{n}} - 1$ oziroma $0 < 1 - a^h < 1 - a^{\frac{1}{n}}$, zato sledi $0 < |1 - a^h| < |1 - \sqrt[n]{a}| = |\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$ in $|a^h - 1| < \varepsilon$.

(2) Predpostavimo, da je $h = 0$. V tem primeru je očitno $|a^h - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$.

(3) Predpostavimo, da je $h < 0$. V tem primeru sklepamo podobno kot pri točki (1), le da uporabljamo neenakost (2.2). $\square$

2.9.5 Potence z realnim eksponentom

V tem razdelku končno definiramo potenco a^x , kjer je $a > 0$ in $x \in \mathbb{R}$ poljubno realno število. Ideja je, da vzamemo poljubno zaporedje (q_n) racionalnih števil, ki konvergira proti x . Takšno zaporedje vedno obstaja, saj lahko uporabimo na primer decimalne približke. Recimo za $x = \sqrt{2} = 1,41421 \dots$ vzamemo zaporedje $q_1 = 1, q_2 = 1,4, q_3 = 1,41$ itn. Potem pogledamo zaporedje (a^{q_n}) , za katerega bomo dokazali, da ima limito.

Opomnimo, da tudi v tem podrazdelku povzemamo po virih [10, 20], pri obravnavi lastnosti potenc (izrek 2.69) pa v glavnem sledimo gradivu [2].

Izrek 2.66 *Naj bo $a > 0$ in naj bo (q_n) konvergentno zaporedje racionalnih števil z limito $q \in \mathbb{R}$. Potem konvergira tudi zaporedje (a^{q_n}) , pri čemer je*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n} > 0.$$

Če je q racionalno število, potem velja še

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n} = a^q.$$

Dokaz. Predpostavimo najprej, da je $a > 1$. Ker je zaporedje (q_n) omejeno, obstajata taki racionalni števili $m, M \in \mathbb{Q}$, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $m \leq q_n \leq M$, kar pomeni tudi $a^m \leq a^{q_n} \leq a^M$. Seveda vemo, da sta $a^m, a^M > 0$.

Dokažimo, da je zaporedje (a^{q_n}) Cauchyjevo, kar bo seveda pomenilo tudi, da je konvergentno. Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Po prejšnji trditvi 2.65 obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $h \in \mathbb{Q}$, za katerega je $|h| < \delta$, velja

$$|a^h - 1| < \frac{\varepsilon}{a^M}.$$

Ker je zaporedje (q_n) po izreku 2.51 tudi Cauchyjevo, obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $m, n \geq n_0$ velja $|q_m - q_n| < \delta$. Posledično za vse $m, n \geq n_0$ velja še

$$|a^{q_m - q_n} - 1| < \frac{\varepsilon}{a^M}.$$

Končno vidimo, da za poljubna $m, n \geq n_0$ sledi

$$|a^{q_m} - a^{q_n}| = a^{q_n} |a^{q_m - q_n} - 1| < a^M \frac{\varepsilon}{a^M} = \varepsilon.$$

S tem smo pokazali, da je zaporedje (a^{q_n}) Cauchyjevo, zato je po izreku 2.51 tudi konvergentno. Ker velja $0 < a^m \leq a^{q_n}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, mora biti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n} > 0.$$

Za drugi del izreka predpostavimo, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q \in \mathbb{Q}$, in dokažimo, da v tem primeru velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n} = a^q.$$

Za poljuben $\varepsilon > 0$ določimo $\delta > 0$ enako kot prej. Ker je $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q$, obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_0$ velja $|q_n - q| = |q - q_n| < \delta$ in posledično

$$|a^{q-q_n} - 1| < \frac{\varepsilon}{a^M}.$$

Sledi, da za vse $n \geq n_0$ velja

$$|a^{q_n} - a^q| = a^{q_n} |1 - a^{q-q_n}| = a^{q_n} |a^{q-q_n} - 1| < a^M \frac{\varepsilon}{a^M} = \varepsilon,$$

kar zaključimo dokaz za $a > 1$.

Če je $a = 1$, je trditev očitna, za $a < 1$ pa dokazujemo podobno kot pri $a > 1$. □

Poglejmo še, kaj se zgodi, če imamo dve zaporedji racionalnih števil, ki konvergirata proti istemu številu.

Izrek 2.67 *Naj bo $a > 0$ in naj bosta (p_n) ter (q_n) konvergentni zaporedji racionalnih števil, ki imata isto limito. Potem je*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n}.$$

Dokaz. Iz zgornjega izreka vemo, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n} > 0.$$

Zato dobimo

$$\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{p_n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{p_n}}{a^{q_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{p_n - q_n} = a^0 = 1,$$

saj je $(p_n - q_n)$ zaporedje racionalnih števil, ki konvergira proti 0. Od tod vidimo, da velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n},$$

kar zaključimo dokaz. □

Sedaj je smiselna spodnja definicija potence z realnim eksponentom.

Definicija 2.68 *Naj velja $a > 0$ in $x \in \mathbb{R}$. Naj bo še (q_n) poljubno zaporedje racionalnih števil, ki konvergira proti x . Potem definiramo*

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n}.$$

Izkaže se, da tudi za potence z realnimi eksponenti veljajo podobne lastnosti kot pri potencah s celimi oziroma racionalnimi eksponenti.

Izrek 2.69 *Naj velja $a, b \in \mathbb{R}^+$ in $x, y \in \mathbb{R}$. Potem so resnične naslednje trditve:*

$$(1) \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y},$$

- (2) $a^x > 0$,
- (3) $(a^x)^y = a^{xy}$,
- (4) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$,
- (5) $\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x} = a^{-x}$,
- (6) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$,
- (7) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$,
- (8) neenakost $a^x < 1$ velja natanko tedaj, ko je bodisi $a > 1$ in $x < 0$ bodisi $a < 1$ in $x > 0$,
- (9) neenakost $a^x > 1$ velja natanko tedaj, ko je bodisi $a > 1$ in $x > 0$ bodisi $a < 1$ in $x < 0$,
- (10) enakost $a^x = 1$ velja natanko tedaj, ko je $a = 1$ ali $x = 0$,
- (11) neenakost $a^x < b^x$ velja natanko tedaj, ko je bodisi $a < b$ in $x > 0$ bodisi $a > b$ in $x < 0$,
- (12) enakost $a^x = b^x$ velja natanko tedaj, ko je $a = b$ ali $x = 0$,
- (13) neenakost $a^x < a^y$ velja natanko tedaj, ko je bodisi $a > 1$ in $x < y$ bodisi $a < 1$ in $x > y$,
- (14) enakost $a^x = a^y$ velja natanko tedaj, ko je $a = 1$ ali $x = y$.

Dokaz. Lastnosti dokažemo s pomočjo pravil za računanje z limitami in z uporabo lastnosti, ki veljajo za potence z racionalnimi eksponenti.

- (1) Naj bo (p_n) zaporedje racionalnih števil, ki konvergira proti x , in naj bo (q_n) zaporedje racionalnih števil, ki konvergira proti y . Seveda je $(p_n + q_n)$ zaporedje racionalnih števil, ki konvergira proti $x + y$. Zato velja

$$a^{x+y} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{p_n + q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{p_n} \cdot a^{q_n}) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a^{p_n} \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n} \right) = a^x \cdot a^y.$$

- (2) Sledi iz izreka 2.66.

- (3) Dokaz te lastnosti je nekoliko bolj zapleten. Lahko dokazujemo neposredno z uporabo dejstev, ki jih že poznamo, vendar je izpeljava elegantnejša, če uporabimo določene lastnosti zveznih funkcij, ki jih bomo spoznali šele v poglavju 3.

Naj bo $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ zaporedje racionalnih števil, ki konvergira proti x , in naj bo $(q_m)_{m=1}^{\infty}$ zaporedje racionalnih števil, ki konvergira proti y . Potem se izkaže, da velja

$$\begin{aligned} (a^x)^y &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a^{p_n} \right)^y = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a^{p_n} \right)^{q_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{p_n})^{q_m} \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a^{p_n q_m} \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} a^{x q_m} = a^{xy}. \end{aligned}$$

Razložimo natančneje, zakaj veljajo zgornje enakosti. Pri prvi enakosti smo uporabili definicijo potence a^x , pri drugi enakosti pa definicijo potence $(a^x)^y$.

Pri tretji enakosti lahko za nek $q_m \in \mathbb{Q}$ uporabimo zveznost funkcije $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, podane s predpisom $f(u) = u^{q_m}$ za vse $u \in (0, \infty)$, v točki $u = a^x$. Za več informacij glejte zgled 3.39 in opombo 3.18. Posledično za poljuben $q_m \in \mathbb{Q}$ velja

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a^{p_n} \right)^{q_m} = (a^x)^{q_m} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{p_n})^{q_m}.$$

Četrta enakost je očitna, pri peti enakosti pa smo uporabili dejstvo, da je $(p_n q_m)_{n=1}^\infty$ zaporedje racionalnih števil, ki konvergira proti številu $x q_m$.

Končno lahko pri šesti enakosti uporabimo dejstvo

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (x q_m) = x \lim_{m \rightarrow \infty} q_m = xy$$

skupaj z zveznostjo funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, podane s predpisom $f(u) = a^u$ za vse $u \in \mathbb{R}$, v točki $u = xy$. Za več informacij glejte izrek 3.40 in opombo 3.18. Zato velja

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a^{x q_m} = a^{xy}.$$

(4) Naj bo (q_n) zaporedje racionalnih števil, ki konvergira proti x . Očitno je

$$(ab)^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (ab)^{q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{q_n} \cdot b^{q_n}) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n} \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b^{q_n} \right) = a^x \cdot b^x.$$

(5) Naj bo (q_n) zaporedje racionalnih števil, ki konvergira proti x . Takoj opazimo, da iz točke (4) sledi

$$\left(\frac{1}{a} \right)^x \cdot a^x = \left(\frac{1}{a} \cdot a \right)^x = 1^x = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^{q_n} = 1,$$

zato je

$$\left(\frac{1}{a} \right)^x = \frac{1}{a^x}.$$

Podobno po točki (1) velja

$$a^x \cdot a^{-x} = a^{x+(-x)} = a^0 = 1,$$

zato je tudi

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

(6) Uporabimo točki (5) in (1).

(7) Uporabimo točki (5) in (4).

(8) Predpostavimo najprej, da je

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n} < 1,$$

kjer je (q_n) neko zaporedje racionalnih števil, ki konvergira proti x . To pomeni, da obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_0$ velja $a^{q_n} < 1$. Posledično za vse $n \geq n_0$ velja bodisi $a > 1$ in $q_n < 0$ bodisi $a < 1$ in $q_n > 0$. Če bi veljalo

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0,$$

bi dobili

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n} = a^0 = 1,$$

kar je protislovje. Zato sledi bodisi $a > 1$ in $x < 0$ bodisi $a < 1$ in $x > 0$.

Za drugo smer predpostavimo, da velja bodisi $a > 1$ in $x < 0$ bodisi $a < 1$ in $x > 0$. Recimo, da je $a < 1$ in $x > 0$. Naj bo (q_n) naraščajoče zaporedje pozitivnih racionalnih števil, ki konvergira proti $x > 0$. Vemo torej, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $q_n > 0$, zato mora za poljuben $n \in \mathbb{N}$ veljati tudi $a^{q_n} < 1$. Ker je zaporedje (q_n) naraščajoče in $a < 1$, je zaporedje (a^{q_n}) padajoče, zato mora biti

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n} < 1.$$

Podobno dokazujemo tudi v primeru, ko je $a > 1$ in $x < 0$.

(9) Dokazujemo podobno kot pri točki (8).

(10) Uporabimo točki (8) in (9).

(11) Neenakost preoblikujemo v $\frac{a^x}{b^x} < 1$, nato uporabimo točki (7) in (8).

(12) Enakost preoblikujemo v $\frac{a^x}{b^x} = 1$, nato uporabimo točki (7) in (10).

(13) Neenakost preoblikujemo v $\frac{a^x}{a^y} < 1$, nato uporabimo točki (6) in (8).

(14) Enakost preoblikujemo v $\frac{a^x}{a^y} = 1$, nato uporabimo točki (6) in (10). □

2.10 Geometrijsko zaporedje

Definicija 2.70 Zaporedje (a_n) imenujemo **geometrijsko zaporedje**, če obstaja tak $q \in \mathbb{R}$, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Številu q v tem primeru pravimo **kvocient** zaporedja (a_n) .

Opomba 2.71 Opazimo, da če je (a_n) geometrijsko zaporedje, potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Zgled 2.72 Naj bosta $a_1 = 1$ in $q = \frac{1}{2}$. S tem dobimo geometrijsko zaporedje

$$(a_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots\right).$$

Trditve 2.73 Če je $a \in (-1, 1)$, potem velja $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$.

Dokaz. Tako kot v viru [10] opazimo, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$-|a|^n \leq a^n \leq |a|^n.$$

Ker že iz trditve 2.61 vemo, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} |a|^n = 0$, po pravilu sendviča sledi tudi $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$. $\square$

Opomba 2.74 Če je $a_1 = 0$, potem geometrijsko zaporedje $(a_1 q^{n-1})$ očitno konvergira in njegova limita je 0. Zato bomo v nadaljevanju predpostavili, da je $a_1 \neq 0$.

Izrek 2.75 Naj bosta $a_1 \neq 0$ in $q \in \mathbb{R}$. Geometrijsko zaporedje $(a_1 q^{n-1})$ konvergira natanko tedaj, ko je $q \in (-1, 1]$. Velja tudi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 q^{n-1}) = \begin{cases} 0 & ; q \in (-1, 1) \\ a_1 & ; q = 1 \\ \infty & ; q > 1 \text{ in } a_1 > 0 \\ -\infty & ; q > 1 \text{ in } a_1 < 0 \end{cases}.$$

Dokaz. Naj bo najprej $q \in (-1, 1)$. Po prejšnji trditvi je $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, zato je tudi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 q^{n-1}) = a_1 \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n-1} = a_1 \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0.$$

Če je $q = 1$, potem je zaporedje konstantno, zato je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 q^{n-1}) = a_1.$$

Če je $q > 1$, potem iz trditve 2.61 vemo, da velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n-1} = \infty.$$

V primeru, ko je $a_1 > 0$, tako dobimo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 q^{n-1}) = \infty,$$

v primeru, ko je $a_1 < 0$, pa dobimo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 q^{n-1}) = -\infty.$$

To seveda pomeni, da če je $q > 1$, potem zaporedje divergira v $\mathbb{R}$, ima pa limito v $\overline{\mathbb{R}}$.

Če je $q = -1$, ima zaporedje stekališči $-a_1$ in a_1 , zato divergira, v primeru, ko je $q < -1$, pa ima v $\overline{\mathbb{R}}$ stekališči ∞ in $-\infty$, zato seveda tudi v tem primeru divergira. $\square$

Trditev 2.76 Naj bo $(a_1 q^{n-1})$ geometrijsko zaporedje. Potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\sum_{i=1}^n a_1 q^{i-1} = a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1} = \begin{cases} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} & ; q \neq 1 \\ a_1 \cdot n & ; q = 1 \end{cases}.$$

Dokaz. Če je $q = 1$, je rezultat očiten. Zato predpostavimo $q \neq 1$. Formulo dokažimo z matematično indukcijo. Očitno je, da velja za $n = 1$. Predpostavimo še, da za nek $n \in \mathbb{N}$ velja

$$a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Potem je

$$a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} + a_1 q^n = a_1 \frac{1 - q^n + q^n - q^{n+1}}{1 - q} = a_1 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q},$$

zato je induksijski korak končan, s tem pa tudi dokaz trditve. $\square$

2.11 Definicija števila e

Oglejmo si zaporedje (a_n) , podano s splošnim členom

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (2.3)$$

Opazimo, da je na primer $a_1 = 2$, $a_2 = 2,25$, $a_3 \doteq 2,37$, $a_4 \doteq 2,44$.

Opomba 2.77 Spomnimo, da je **fakulteta** naravnega števila n , ki jo označimo z $n!$, definirana kot produkt vseh naravnih števil, ki so manjša ali enaka n , torej $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. Dodatno definiramo $0! = 1$. Nadalje, če sta $n, k \in \mathbb{Z}$, tako da velja $0 \leq k \leq n$, potem je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

binomski koeficient. Sedaj lahko zapišemo še binomski izrek, ki pravi, da za vsaka $x, y \in \mathbb{R}$ in za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ velja

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{n}{0} b^n + \binom{n}{1} a b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n} a^n.$$

Zgornjo enakost lahko dokažemo na primer s pomočjo matematične indukcije.

Izrek 2.78 Zaporedje (a_n) , definirano s predpisom (2.3), je naraščajoče in navzgor omejeno, zato je tudi konvergentno.

Dokaz. Sledimo ideji iz virov [2, 10, 18]. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ poljuben. Najprej opazimo, da za vsak $k \in \mathbb{N}$, za katerega je $2 \leq k \leq n$ (če obstaja), velja

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n^k} \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \frac{(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))}{n^{k-1}} \\ &= \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Če uporabimo binomski izrek in zgornjo formulo, dobimo

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Posledično seveda velja tudi

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right). \end{aligned}$$

S primerjavo členov a_n in a_{n+1} takoj ugotovimo, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n < a_{n+1}$, zato je zaporedje (a_n) strogo naraščajoče. S pomočjo trditve 2.76 opazimo tudi, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\begin{aligned} a_n &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3, \end{aligned}$$

zato je zaporedje (a_n) navzgor omejeno s 3. Ker je zaporedje naraščajoče in navzgor omejeno, je po izreku 2.38 tudi konvergentno. $\square$

Definicija 2.79 Naj bo zaporedje (a_n) podano s predpisom (2.3). Limita tega zaporedja se imenuje **Eulerjevo število**, ki ga označimo z e , torej

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Izkaže se, da je $e \doteq 2,71828$.

Zgled 2.80 Izračunajmo $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)\right). \end{aligned}$$

V zgornjo limito sedaj vpeljimo novo spremenljivko $k = n - 1$. Seveda opazimo, da gre tudi k proti neskončno, ko gre n proti neskončno. Zato sledi

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = e \cdot 1 = e. \end{aligned}$$

Zgled 2.81 (1) Izračunajmo limito:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} = e^{-1}.$$

(2) Izračunajmo limito:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}} = \frac{1}{e} = e^{-1}.$$

2.12 Še nekaj posebnih limit zaporedij

V tem razdelku bomo izpeljali še tri tipe limit, ki lahko pridejo prav pri raznih nalogah. V vseh dokazih sledimo idejam iz vira [10].

Trditev 2.82 Če je $a > 0$, potem velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} = 0.$$

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$. Opazimo, da je

$$\left| \frac{1}{n^a} - 0 \right| < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n^a \iff n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{a}}.$$

Naj bo

$$n_0 = \left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{a}} \right] + 1.$$

Potem za vse $n \geq n_0$ velja

$$\left| \frac{1}{n^a} - 0 \right| < \varepsilon,$$

kar je bilo treba dokazati. □

Trditev 2.83 *Velja*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Dokaz. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Očitno je $a_n \geq 0$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Opazimo tudi, da za poljuben $n \in \mathbb{N}$ velja

$$n = (a_n + 1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}a_n + \binom{n}{2}a_n^2 + \cdots + \binom{n}{n}a_n^n.$$

Ker so vsi navedeni členi nenegativni, iz zapisanega sledi

$$\binom{n}{2}a_n^2 \leq n \implies \frac{n(n-1)}{2}a_n^2 \leq n \implies a_n^2 \leq \frac{2}{n-1},$$

kjer smo predpostavili, da je $n \geq 2$. To pomeni, da za vsak $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, velja

$$0 \leq a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Ker zlahka preverimo, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0,$$

pravilo sendviča (izrek 2.27) implicira

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Končno dobimo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 1 = 1,$$

kar zaključimo dokaz. □

Trditev 2.84 *Naj bosta $\alpha \in \mathbb{R}$ in $q > 1$. Potem velja*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{q^n} = 0.$$

Dokaz. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

$$a_n = \frac{n^\alpha}{q^n}.$$

Opazimo, da za poljuben $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^\alpha}{q^{n+1}}}{\frac{n^\alpha}{q^n}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \frac{1}{q}.$$

Zato za vsak $n \in \mathbb{N}$ označimo

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \frac{1}{q}.$$

Ker je

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{[\alpha]} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{[\alpha]+1}$$

in ker po pravilih za računanje z limitami očitno velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{[\alpha]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{[\alpha]+1} = 1,$$

po pravilu sendviča (izrek 2.27) dobimo še

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha = 1.$$

Iz zapisanega sledi, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{q} < 1,$$

zato obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_0$ velja $b_n < 1$. Posledično za vse $n \geq n_0$ dobimo $a_{n+1} < a_n$, zato je zaporedje (a_n) padajoče od člena n_0 naprej. Ker je tudi navzdol omejeno z 0, je po izreku 2.40 in opombi 2.41 konvergentno ter ima limito

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Potem je tudi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = L.$$

Seveda za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_{n+1} = a_n b_n$, zato dobimo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n\right),$$

od koder sledi

$$L = L \cdot \frac{1}{q} \implies L(q - 1) = 0.$$

Ker je $q > 1$, to pomeni, da mora biti $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. □

2.13 Številске vrste

Definicija 2.85 Naj bo (a_n) zaporedje. **Številska vrsta** je formalna vsota

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Številom $a_1, a_2, a_3, \dots$ pravimo **členi vrste**. Če za vsak $n \in \mathbb{N}$ definiramo

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

dobimo zaporedje (s_n) , ki mu pravimo **zaporedje delnih vsot vrste** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definicija 2.86 Pravimo, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konvergira** (ali da je **konvergentna**), če konvergira njeno zaporedje delnih vsot (s_n) . V tem primeru število $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ imenujemo **vsota vrste**, kar zapišemo tako:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Opomba 2.87 Opazimo, da isto oznako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uporabljamo tako za samo vrsto kot tudi za vsoto vrste (če obstaja).

Definicija 2.88 Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **divergira**, če divergira njeno zaporedje delnih vsot (s_n) .

Opomba 2.89 Podobno kot v razdelku 2.8 lahko tudi za vrste obravnavamo konvergenco v množici $\overline{\mathbb{R}}$ in uporabljamo analogno terminologijo. Posledično je v tej množici lahko vsota vrste tudi ∞ ali $-\infty$. Seveda pa še vedno velja, da če ne poudarimo, na katero množico se nanaša konvergenca oziroma divergenca vrste, potem vedno mislimo, da gre za konvergenco oziroma divergenco v $\mathbb{R}$.

Zgled 2.90 Oglejmo si spodnje štiri vrste (najdemo jih tudi v virih [4, 10, 20]) in za vsako premislamo, ali konvergira oziroma divergira:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0 + 0 + 0 + \dots$$

V tem primeru za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n = 0$ in posledično $s_n = 0$, zato dobimo

$$\sum_{n=1}^{\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \dots$$

V tem primeru za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n = 1$, zato za vsak $n \in \mathbb{N}$ dobimo $s_n = n$. Ker zaporedje (s_n) divergira proti ∞ , tudi vrsta divergira. Lahko zapišemo

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty,$$

kar pomeni, da v $\overline{\mathbb{R}}$ vrsta konvergira in da je njena vsota ∞ .

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

V tem primeru je $(s_n) = (1, 0, 1, 0, \dots)$. Zaporedje (s_n) ima torej dve stekališči, zato divergira. Posledično tudi vrsta divergira.

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

Opazimo, da za vsak $k \in \mathbb{N}$ velja

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

zato za poljuben $n \in \mathbb{N}$ dobimo

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Ker je očitno $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$, vrsta konvergira in njena vsota je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Definicija 2.91 Naj bosta $a_1, q \in \mathbb{R}$. Vrsta

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (a_1 q^{n-1})$$

se imenuje **geometrijska vrsta s kvocientom** q .

Trditev 2.92 Naj bosta $a_1, q \in \mathbb{R}$ in naj velja $a_1 \neq 0$. Geometrijska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 q^{n-1})$ konvergira natanko tedaj, ko je $|q| < 1$. Velja tudi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 q^{n-1}) = \begin{cases} \frac{a_1}{1-q} & ; q \in (-1, 1) \\ \infty & ; q \geq 1 \text{ in } a_1 > 0 \\ -\infty & ; q \geq 1 \text{ in } a_1 < 0 \end{cases}$$

Dokaz. Naj bo (s_n) zaporedje delnih vsot dane geometrijske vrste. Ločimo več možnosti glede na q . Če je $q = 1$, potem vidimo, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $s_n = na_1$. Ker je $a_1 \neq 0$, to zaporedje divergira: če je $a_1 > 0$, divergira proti ∞ , če je $a_1 < 0$, pa proti $-\infty$.

V nadaljevanju zato predpostavimo, da je $q \neq 1$. V tem primeru nam trditev 2.76 pove, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja

$$s_n = a_1 + a_1 q + \dots + a_1 q^{n-1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Ločimo še tri možnosti:

- (1) Če je $|q| < 1$ oziroma $q \in (-1, 1)$, potem zaporedje (q^n) po trditvi 2.73 konvergira proti 0, zato dobimo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \right) = \frac{a_1}{1 - q},$$

kar pomeni, da vrsta konvergira in njena vsota je

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1 q^{n-1}) = \frac{a_1}{1 - q}.$$

- (2) Če je $q > 1$, nam trditev 2.61 pove, da zaporedje (q^n) divergira proti ∞ . Ker je v tem primeru $q - 1 > 0$, je tudi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right) = \infty.$$

V primeru $a_1 > 0$ zaporedje (s_n) divergira proti ∞ , v primeru $a_1 < 0$ pa proti $-\infty$.

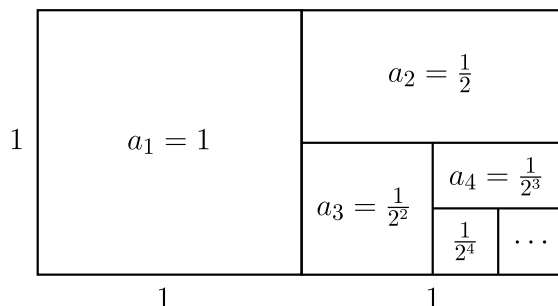
- (3) Če je $q \leq -1$, zaporedje (q^n) nima limite niti v $\overline{\mathbb{R}}$ (saj ima v tej množici dve stekališči), zato tudi (s_n) divergira. Sledi torej, da geometrijska vrsta divergira.

Obravnavali smo vse možne vrednosti, ki jih q lahko zavzame, zato je dokaz končan. $\square$

Zgled 2.93 Iz zgornjega izreka sledi na primer, da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2,$$

kar lahko lepo ponazorimo tudi s sliko 2.5. Omenjena slika prikazuje lik, sestavljen iz dveh kvadratov, ki imata stranico dolžine 1. Členi geometrijske vrste so ravno ploščine pravokotnikov, ki so vsebovani v danem liku. Opazimo, da je ploščina celotnega lika enaka 2, kar sovpada z vsoto geometrijske vrste.



Slika 2.5: Ponazoritev vsote geometrijske vrste.

Trditev 2.94 (Cauchyjev pogoj za konvergenco vrste) *Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira natančno tedaj, ko velja*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall k \in \mathbb{N}, |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Dokaz. Naj bo (s_n) zaporedje delnih vsot vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Z uporabo izreka 2.51 opazimo, da velja:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergira} &\iff \text{zaporedje } (s_n) \text{ konvergira} \\ &\iff \text{zaporedje } (s_n) \text{ je Cauchyjevo} \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq n_0, |s_m - s_n| < \varepsilon \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall k \in \mathbb{N}, |s_{n+k} - s_n| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ker za vse $n, k \in \mathbb{N}$ velja

$$|s_{n+k} - s_n| = |s_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}|,$$

je zadnja izmed zgoraj naštetih trditev ekvivalentna trditvi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall k \in \mathbb{N}, |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon,$$

zato je dokaz končan. □

Definicija 2.95 *Vrsto*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

*imenujemo **harmonična vrsta**.*

Posledica 2.96 *Harmonična vrsta divergira.*

Dokaz. Naj za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n = \frac{1}{n}$. Tako kot v knjigi [20] dokazujemo s protislovjem. Recimo torej, da harmonična vrsta konvergira. Potem iz trditve 2.94 sledi, da za $\varepsilon = \frac{1}{2}$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \geq n_0$ in vsak $k \in \mathbb{N}$ velja

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

Izberimo poljuben $n \geq n_0$ in določimo $k = n$. Glede na zgornji pogoj mora torej veljati

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}| < \frac{1}{2}.$$

Vendar po drugi strani vidimo, da je

$$\begin{aligned} |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}| &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &\geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

kar je v protislovju s prejšnjo oceno. S tem smo dokazali, da harmonična vrsta divergira. □

Posledica 2.97 (nujni pogoj za konvergenco vrste) Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, potem je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Dokaz. Predpostavimo, da dana vrsta konvergira. Potem zaradi trditve 2.94 zadošča Cauchyjevemu pogoju za konvergenco vrste. Če uporabimo ta pogoj in določimo $k = 1$, dobimo, da velja

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |a_{n+1}| < \varepsilon.$$

To dokazuje, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 0$ in posledično je tudi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. □

Opomba 2.98 Dogovorimo se, da zapis $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ pomeni bodisi da $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ obstaja in ni enaka 0 bodisi da ta limita sploh ne obstaja. Posledica 2.97 nam torej pove, da če $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Zgled 2.99 Takoj opazimo, da vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{4n+1}$$

divergira, saj je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{4n+1} = \frac{3}{4} \neq 0.$$

Zlahka ugotovimo, da obrat zgornje posledice 2.97 ne velja, saj na primer harmonična vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira, čeprav je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

V nadaljevanju navedimo nekaj trditev o vrstah, ki jih tvorimo iz konvergentnih vrst.

Trditev 2.100 Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna vrsta in naj bo $\lambda \in \mathbb{R}$. Potem konvergira tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n)$ in njena vsota je

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Dokaz. Naj bo (s_n) zaporedje delnih vsot vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in naj bo (t_n) zaporedje delnih vsot vrste $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n)$. Opazimo, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$t_n = \lambda a_1 + \lambda a_2 + \cdots + \lambda a_n = \lambda s_n,$$

zato (t_n) konvergira in za vsoto velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda s_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

S tem je trditev dokazana. $\square$

Trditev 2.101 Naj bosta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentni vrsti. Potem konvergira tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ in njena vsota je

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Dokaz. Označimo z (s_n) zaporedje delnih vsot vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, s (t_n) zaporedje delnih vsot vrste $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ in z (u_n) zaporedje delnih vsot vrste $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$. Opazimo, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$u_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) = s_n + t_n,$$

zato zaporedje (u_n) konvergira in za vsoto dobimo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n + t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n + \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

kar zaključimo dokaz. $\square$

Iz zadnjih dveh trditev takoj sledi tudi spodnja posledica.

Posledica 2.102 Naj bosta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentni vrsti. Če sta $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, potem konvergira tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ in njena vsota je

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Definicija 2.103 Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta. Za poljuben $m \in \mathbb{N}$ se vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{m+n} = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$$

imenuje **ostanek** (ali tudi **rep**) vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Na primer za $m = 4$ dobimo rep vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{4+n} = \sum_{n=5}^{\infty} a_n = a_5 + a_6 + a_7 + \cdots.$$

Trditev 2.104 Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira natanko tedaj, ko za poljuben $m \in \mathbb{N}$ konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_{m+n}$. V tem primeru sta njuni vsoti povezani z naslednjo formulo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (a_1 + \cdots + a_m) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{m+n}.$$

Dokaz. Izberimo poljuben $m \in \mathbb{N}$. Naj bo (s_n) zaporedje delnih vsot vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in naj bo še (t_n) zaporedje delnih vsot vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_{m+n}$. Opazimo, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja

$$s_{m+n} = a_1 + \cdots + a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{m+n} = (a_1 + \cdots + a_m) + t_n.$$

Sledi, da zaporedje $(s_{m+n})_{n=1}^{\infty}$ konvergira natanko tedaj, ko konvergira zaporedje (t_n) . Seveda pa zaporedje $(s_{m+n})_{n=1}^{\infty}$ konvergira natanko tedaj, ko konvergira (s_n) , saj se ti dve zaporedji razlikujeta samo v končno mnogo členih. Posledično zaporedje (s_n) konvergira natanko tedaj, ko konvergira zaporedje (t_n) . S tem smo preverili, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konver-

gira natanko tedaj, ko za poljuben $m \in \mathbb{N}$ konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_{m+n}$. Opazimo, da za vsoti velja tudi

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{m+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} ((a_1 + \cdots + a_m) + t_n) \\ &= (a_1 + \cdots + a_m) + \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = (a_1 + \cdots + a_m) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{m+n}, \end{aligned}$$

zato je trditev dokazana. □

2.14 Vrste z nenegativnimi členi

Definicija 2.105 Vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pri kateri za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \geq 0$, imenujemo **vrsta z nenegativnimi členi**.

Trditev 2.106 Vrsta z nenegativnimi členi konvergira natanko tedaj, ko je njeno zaporedje delnih vsot navzgor omejeno.

Dokaz. Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta z nenegativnimi členi in naj bo (s_n) njeno zaporedje delnih vsot. Potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$. To pomeni, da je zaporedje delnih vsot (s_n) naraščajoče. Iz izreka 2.38 vemo, da je naraščajoče zaporedje konvergentno natanko tedaj, ko je navzgor omejeno. Sledi, da zaporedje (s_n) konvergira natanko tedaj, ko je navzgor omejeno. Posledično dana vrsta konvergira natanko tedaj, ko je zaporedje delnih vsot (s_n) navzgor omejeno. $\square$

V nadaljevanju razdelka bomo spoznali več kriterijev, ki nam lahko pomagajo določiti, ali neka vrsta z nenegativnimi členi konvergira.

Izrek 2.107 (primerjalni kriterij) Naj bosta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vrsti, tako da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $0 \leq a_n \leq b_n$. Potem sta resnični naslednji trditvi:

(1) Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, potem tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

(2) Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, potem tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira.

Dokaz. Naj bo (s_n) zaporedje delnih vsot vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in naj bo še (t_n) zaporedje delnih vsot vrste $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Opazimo, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_n = t_n. \quad (2.4)$$

Predpostavimo, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira. Potem je po prejšnji trditvi zaporedje (t_n) navzgor omejeno, zato obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $t_n \leq M$. Zaradi neenakosti (2.4) sledi, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $s_n \leq t_n \leq M$ in posledično je tudi zaporedje (s_n) navzgor omejeno. Od tod z uporabo trditve 2.106 dobimo, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira. S tem smo dokazali točko (1), iz katere neposredno sledi tudi točka (2). $\square$

Opomba 2.108 Naj bosta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vrsti, tako da velja $0 \leq a_n \leq b_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Pravimo, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je **majoranta** za vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **minoranta** za vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Zgled 2.109 Preverimo, ali konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n}$. Opazimo, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\frac{1}{n5^n} \leq \frac{1}{5^n}.$$

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ je geometrijska vrsta s kvocientom $q = \frac{1}{5}$, zato po trditvi 2.92 konvergira.

Posledično po primerjalnem kriteriju konvergira tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n}$.

Izrek 2.110 Naj bo $\alpha \in \mathbb{R}$. Vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots$$

konvergira natanko tedaj, ko je $\alpha > 1$. Če je $\alpha \leq 1$, potem velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \infty.$$

Dokaz. Sledimo idejam, uporabljenim v virih [4, 10, 18]. Najprej predpostavimo, da je $\alpha \leq 1$. Opazimo, da v tem primeru za vse $n \in \mathbb{N}$ velja

$$n^\alpha \leq n \quad \text{in posledično} \quad \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}.$$

Ker iz posledice 2.96 vemo, da harmonična vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira, po primerjalnem kriteriju

tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ divergira. Naj bo (s_n) zaporedje delnih vsot te vrste. Ker smo pravkar

dokazali, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ divergira, po trditvi 2.106 zaporedje (s_n) ni navzgor omejeno.

Seveda je to zaporedje tudi naraščajoče (imamo namreč vrsto z nenegativnimi členi), zato zlahka preverimo, da (s_n) divergira proti ∞ . S tem smo pokazali, da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty.$$

Sedaj obravnavajmo še primer, ko je $\alpha > 1$. Potem lahko zapišemo $\alpha = 1 + u$, kjer je $u > 0$. Opazimo, da za vsak $m \in \mathbb{N}$ velja

$$\frac{1}{m^\alpha} + \frac{1}{(m+1)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2m-1)^\alpha} \leq \frac{m}{m^\alpha} = \frac{1}{m^{\alpha-1}} = \frac{1}{m^u}.$$

Posledično za vsak $k \in \mathbb{N}$ sledi

$$\frac{1}{(2^k)^\alpha} + \frac{1}{(2^k+1)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^{k+1}-1)^\alpha} \leq \frac{1}{(2^k)^u} = \frac{1}{(2^u)^k}. \quad (2.5)$$

Ker je $u > 0$, je $2^u > 1$ in posledično $0 < \frac{1}{2^u} < 1$. Po trditvi 2.92 zato velja

$$1 + \frac{1}{2^u} + \frac{1}{(2^u)^2} + \frac{1}{(2^u)^3} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^u}} = \frac{2^u}{2^u - 1}. \quad (2.6)$$

Naj bo (s_n) zaporedje delnih vsot vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. Z uporabo neenakosti (2.5) in enakosti (2.6) opazimo, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\begin{aligned} s_{2^n-1} &= 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^n-1)^\alpha} = 1 + \left(\frac{1}{(2^1)^\alpha} + \frac{1}{(2^2-1)^\alpha} \right) \\ &+ \left(\frac{1}{(2^2)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^3-1)^\alpha} \right) + \left(\frac{1}{(2^3)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^4-1)^\alpha} \right) \\ &= \left(\frac{1}{(2^1)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^5-1)^\alpha} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^n-1)^\alpha} \right) \\ &\leq 1 + \frac{1}{2^u} + \frac{1}{(2^u)^2} + \frac{1}{(2^u)^3} + \cdots + \frac{1}{(2^u)^{n-1}} \\ &< 1 + \frac{1}{2^u} + \frac{1}{(2^u)^2} + \frac{1}{(2^u)^3} + \cdots = \frac{2^u}{2^u - 1}. \end{aligned}$$

Ker pa je zaporedje (s_n) naraščajoče, za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$s_n \leq s_{2^n-1} < \frac{2^u}{2^u - 1}.$$

Torej je zaporedje (s_n) tudi navzgor omejeno, zato vrsta po trditvi 2.106 konvergira. $\square$

Zgled 2.111 Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ po zgornjem izreku divergira, saj gre za poseben primer vrste iz izreka, kjer določimo $\alpha = \frac{1}{2} < 1$.

Posledica 2.112 (primerjalni kriterij v limitni obliki) Recimo, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \geq 0$ in $b_n > 0$. Predpostavimo še, da obstaja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L,$$

kjer je $L \in (0, \infty)$. Tedaj velja:

$$\text{vrsta } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergira} \iff \text{vrsta } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergira}.$$

Dokaz. Postopamo tako kot v gradivu [15]. Naj bo $\varepsilon = \frac{L}{2} > 0$. Po definiciji limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_0$ sledi

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \varepsilon = \frac{L}{2} \iff \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2}.$$

Od tod dobimo, da za vse $n \geq n_0$ velja

$$a_n < \frac{3L}{2}b_n \quad \text{in} \quad b_n < \frac{2}{L}a_n.$$

Rezultat sedaj sledi po primerjalnem kriteriju. Namreč, če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, potem zaradi trditve 2.100 konvergira tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3L}{2}b_n \right)$ in zato po primerjalnem kriteriju konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Podobno, če konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, potem konvergira tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L}a_n \right)$ in zato po primerjalnem kriteriju konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. $\square$

Zgled 2.113 Preverimo, ali konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 + 2n^2 - 5}{20n^6 + n^3 + 2n}$. Iz posledice 2.96 vemo, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira. Prav tako velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^5 + 2n^2 - 5}{20n^6 + n^3 + 2n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6 + 2n^3 - 5n}{20n^6 + n^3 + 2n} = \frac{1}{20} \in (0, \infty).$$

Iz posledice 2.112 sedaj sledi, da konvergira tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 + 2n^2 - 5}{20n^6 + n^3 + 2n}$.

V preostanku razdelka bomo spoznali še nekaj splošno znanih in pomembnih kriterijev, pri čemer uporabljamo zlasti gradivo [15], pa tudi vire [10, 18, 20].

Izrek 2.114 (Cauchyjev korenski kriterij) Naj za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \geq 0$. Resnični sta naslednji trditvi:

(1) Če obstajata $q \in [0, 1)$ in $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za vse $n \geq n_0$ velja $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

(2) Če obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za vse $n \geq n_0$ velja $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Dokaz.

- (1) Opazimo, da v tem primeru za vse $n \geq n_0$ velja $a_n \leq q^n$. Vrsta $\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n$ je po trditvi 2.92 konvergentna geometrijska vrsta in zaradi zapisane neenakosti po primerjalnem kriteriju tudi vrsta $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konvergira. Posledično iz trditve 2.104 sledi, da konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- (2) Ker v tem primeru za vse $n \geq n_0$ velja $a_n \geq 1$, sledi, da zaporedje (a_n) ne konvergira proti 0, zato vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ po posledici 2.97 divergira. $\square$

V praksi Cauchyjev korenski kriterij pogosto uporabimo v limitni obliki, kot je zapisano v spodnji posledici. Zaradi lažjega zapisa vpeljimo še oznako

$$[0, \infty] = [0, \infty) \cup \{\infty\}.$$

Seveda je $[0, \infty]$ podmnožica množice $\overline{\mathbb{R}}$.

Posledica 2.115 (Cauchyjev korenski kriterij v limitni obliki) Naj za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n \geq 0$ in naj obstaja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L \in [0, \infty].$$

Velja:

- (1) Če je $L < 1$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
- (2) Če je $L > 1$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Dokaz.

- (1) Poljubno izberimo $q \in (L, 1)$. Po definiciji limite za $\varepsilon = q - L > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_0$ velja $L - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon$. Ker je $L + \varepsilon = q$, to pomeni, da za vse $n \geq n_0$ velja $\sqrt[n]{a_n} < q$. Sklep sedaj sledi iz točke (1) v zgornjem izreku.
- (2) Najprej si oglejmo situacijo, ko je $L \neq \infty$. Ker je $L > 1$, po definiciji limite za $\varepsilon = L - 1 > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_0$ velja $L - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon$. Ker je $L - \varepsilon = 1$, to pomeni, da za vse $n \geq n_0$ velja $\sqrt[n]{a_n} > 1$. Sklep sedaj sledi iz točke (2) v zgornjem izreku.

Obravnavajmo še primer, ko je $L = \infty$. Iz definicije 2.52 limite ∞ v množici $\overline{\mathbb{R}}$ sledi, da za $M = 1$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_0$ velja $\sqrt[n]{a_n} > 1$. Dokazovana trditev sedaj ponovno sledi iz točke (2) v zgornjem izreku. $\square$

Opomba 2.116 Cauchyjev korenski kriterij v limitni obliki ni uporaben, če je $L = 1$. Vemo namreč, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira. Opazimo tudi, da za njo velja (glejte trditev 2.83)

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$$

Po drugi strani iz izreka 2.110 sledi, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira, ampak tudi tokrat je

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right)^2 = 1.$$

V primeru $L = 1$ torej z uporabo tega kriterija ne moremo sklepati o konvergenci vrste.

Zgled 2.117 S pomočjo korenskega kriterija preverimo konvergenco vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n}$. Ker je

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n5^n}} = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{5} < 1,$$

iz posledice 2.115 sledi, da vrsta konvergira.

Izrek 2.118 (D'Alembertov kvocientni kriterij) Naj za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n > 0$. Resnični sta naslednji trditvi:

(1) Če obstajata $q \in (0, 1)$ in $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za vse $n \geq n_0$ velja $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

(2) Če obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za vse $n \geq n_0$ velja $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Dokaz.

(1) V tem primeru opazimo, da za vse $n \geq n_0$ velja $a_{n+1} \leq qa_n$. Torej:

$$\begin{aligned} a_{n_0+1} &\leq qa_{n_0}, \\ a_{n_0+2} &\leq qa_{n_0+1} \leq q^2 a_{n_0}, \\ a_{n_0+3} &\leq qa_{n_0+2} \leq q^3 a_{n_0}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Od tod sledi, da za vsak $k \in \mathbb{N}$ velja $a_{n_0+k} \leq q^k a_{n_0}$. Vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} (q^k a_{n_0})$ je konvergentna geometrijska vrsta (glejte trditev 2.92) in ker je $a_{n_0+k} \leq q^k a_{n_0}$ za vse $k \in \mathbb{N}$,

tudi vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k} = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ po primerjalnem kriteriju konvergira. Slednja vrsta je seveda ostanek vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, zato iz trditve 2.104 sledi konvergenca vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

- (2) V tem primeru iz pogoja sledi, da za vse $n \geq n_0$ velja $a_{n+1} \geq a_n$. Ker je $a_{n_0} > 0$ in $a_n \geq a_{n_0}$ za vse $n \geq n_0$, sklepamo, da zaporedje (a_n) ne konvergira proti 0, zato po posledici 2.97 vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira. $\square$

Tudi D'Alembertov kvocientni kriterij večinoma uporabljamo v limitni obliki.

Posledica 2.119 (D'Alembertov kvocientni kriterij v limitni obliki) *Predpostavimo, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n > 0$ in da obstaja*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in [0, \infty].$$

Velja:

- (1) Če je $L < 1$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
- (2) Če je $L > 1$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Dokaz. Postopamo zelo podobno kot v dokazu posledice 2.115.

- (1) Poljubno izberimo $q \in (L, 1)$. Po definiciji limite zagotovo obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_0$ velja $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$. Sklep sedaj sledi iz točke (1) v zgornjem izreku.
- (2) Ker je $L > 1$, po definiciji limite obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_0$ velja $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Sklep sedaj sledi iz točke (2) v zgornjem izreku. $\square$

Opomba 2.120 *Tudi D'Alembertov kvocientni kriterij v limitni obliki ni uporaben, če je*

$L = 1$. *Natančneje, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira in za njo velja*

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Po drugi strani iz izreka 2.110 sledi, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira in tudi tokrat je

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

V primeru $L = 1$ torej z uporabo tega kriterija ne moremo sklepati o konvergenci vrste.

Zgled 2.121 S pomočjo kvocientnega kriterija preverimo konvergenco vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, kjer je $a > 0$. Ker je

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n+1} = 0 < 1,$$

vrsta konvergira (za poljubno izbran $a > 0$). Od tod iz posledice 2.97 sledi tudi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Brez dokaza navedimo še Raabejev kriterij (samo v limitni obliki). Dokaz tega kriterija lahko najdemo na primer v knjigi [20].

Izrek 2.122 (Raabejev kriterij v limitni obliki) Naj za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n > 0$ in naj obstaja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \right) = L \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Velja:

(1) Če je $L > 1$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

(2) Če je $L < 1$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Zgled 2.123 Ugotovili smo že, da z uporabo korenskega in kvocientnega kriterija v limitni obliki ne moremo sklepati o konvergenci vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Pokažimo pa, da je Raabejev kriterij na tem primeru uporaben. Izračunati moramo

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \left(\frac{(n+1)^2}{n^2} - 1 \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} - 1 \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{n} = 2. \end{aligned}$$

Ker je $L = 2 > 1$, vrsta po Raabejevem kriteriju konvergira (kar seveda vemo že iz izreka 2.110).

2.15 Vrste s členi poljubnega predznaka

V tem razdelku nas bodo najprej zanimala alternirajoče vrste, pri katerih se izmenjujejo pozitivni in negativni členi.

Definicija 2.124 Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **alternirajoča**, če za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $a_n a_{n+1} < 0$.

Spoznajmo kriterij, ki je lahko uporaben pri takšnih vrstah, pri čemer se zgledujemo po viru [15] (glejte tudi vire [10, 18, 20]).

Izrek 2.125 (Leibnizev kriterij) *Naj za zaporedje (a_n) veljajo spodnji trije pogoji:*

- (1) $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq 0$,
- (2) zaporedje (a_n) je padajoče,
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Tedaj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^{n-1} a_n) = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$ konvergira.

Dokaz. Naj bo (s_n) zaporedje delnih vsot vrste $\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^{n-1} a_n)$. Dokažimo naslednje trditve:

- (1) *Podzaporedje (s_{2n}) je naraščajoče.*
Opazimo, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $s_{2n+2} = s_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \geq s_{2n}$, saj je zaporedje (a_n) padajoče. Posledično je zaporedje (s_{2n}) naraščajoče.
- (2) *Podzaporedje (s_{2n-1}) je padajoče.*
Opazimo, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $s_{2n+1} = s_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1}) \leq s_{2n-1}$, zato je zaporedje (s_{2n-1}) padajoče.
- (3) *Podzaporedje (s_{2n}) je navzgor omejeno.*
Opazimo, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $s_{2n} = s_{2n-1} - a_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_1$, zato je s_1 zgornja meja zaporedja (s_{2n}) .
- (4) *Podzaporedje (s_{2n-1}) je navzdol omejeno.*
Opazimo, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1} \geq s_{2n} \geq s_2$. Prav tako je $s_1 = a_1 \geq a_1 - a_2 = s_2$, zato je s_2 spodnja meja zaporedja (s_{2n-1}) .

Iz izrekov 2.38 in 2.40 sedaj sledi, da sta zaporedji (s_{2n}) in (s_{2n-1}) konvergentni. Označimo

$$L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} \quad \text{in} \quad L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n-1}.$$

Ker za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $s_{2n} = s_{2n-1} - a_{2n}$, dobimo še

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n-1} - \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n},$$

kar implicira $L_1 = L_2 - 0$, saj je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Posledično velja $L_1 = L_2$, kar pomeni, da je število $L_1 = L_2$ tudi limita zaporedja (s_n) , zato vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^{n-1} a_n)$ konvergira. □

Zgled 2.126 Naj bo $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{n} \geq 0$. Ker že vemo, da je zaporedje (a_n) padajoče in da konvergira proti 0, iz Leibnizevega kriterija sledi, da vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

konvergira.

Definicija 2.127 Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **absolutno konvergira**, če konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Zgled 2.128 Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ne konvergira absolutno, saj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira.

Izrek 2.129 Če vrsta absolutno konvergira, potem tudi konvergira.

Dokaz. Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta, ki absolutno konvergira. To pomeni, da konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Zaradi Cauchyjevega pogoja za konvergenco vrste (trditev 2.94) potem velja

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall k \in \mathbb{N}, ||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+k}|| < \varepsilon.$$

Dokažimo sedaj Cauchyjev pogoj za vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben in naj bo $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, da je

$$\forall n \geq n_0, \forall k \in \mathbb{N}, ||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+k}|| = |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Potem zaradi trikotniške neenakosti za vse $n \geq n_0$ in za vse $k \in \mathbb{N}$ velja

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Z uporabo trditve 2.94 sedaj vidimo, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira. □

Definicija 2.130 Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **pogojno konvergira**, če konvergira in ne konvergira absolutno.

Zgled 2.131 Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ pogojno konvergira, saj konvergira, ampak ne konvergira absolutno.

2.16 O preureditvi vrste

V tem razdelku si bomo ogledali, kaj se zgodi, ko v vrsti spremenimo vrstni red členov. Najprej opomnimo, da če je $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijekcija, potem to pomeni, da π premeša vrstni red elementov v $\mathbb{N}$.

Definicija 2.132 Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta in $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijekcija. Vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ imenujemo *preureditev dane vrste*.

Izrek 2.133 Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentna vrsta z vsoto S . Tedaj za vsako bijekcijo $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ velja, da tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ absolutno konvergira, pri tem pa za njeno vsoto velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = S.$$

Dokaz. Uporabili bomo dokaz, predstavljen v gradivu [15]. Naj bodo (s_n) , (s'_n) in (t_n) zaporedja delnih vsot vrst $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ in $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Vemo, da velja

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Naj bo še U vsota zadnje vrste, torej

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n.$$

Dokažimo, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n = S.$$

Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Izberimo $n_1 \in \mathbb{N}$ tako, da za vse $n \geq n_1$ velja

$$|U - t_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Prav tako izberimo $n_2 \in \mathbb{N}$ tako, da za vse $n \geq n_2$ velja

$$|S - s_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nazadnje izberimo še $m \in \mathbb{N}$ tako, da bodo med števili $\pi(1), \dots, \pi(m)$ vsa števila $1, \dots, n_1$. To je seveda možno narediti, ker je vsako izmed števil $1, \dots, n_1$ v zaporedju $(\pi(n))$.

Naj bo sedaj $n_0 = \max\{n_1, n_2, m\}$ in naj bo še $n \geq n_0$ poljuben. Označimo z $i_1, \dots, i_k$ tista števila iz množice $\{1, \dots, n\}$, ki niso v množici $\{1, \dots, n_1\}$, in z $j_1, \dots, j_k$ tista števila iz množice $\{\pi(1), \dots, \pi(n)\}$, ki niso v množici $\{1, \dots, n_1\}$. Potem velja

$$\begin{aligned} |s_n - s'_n| &= |(a_1 + \dots + a_n) - (a_{\pi(1)} + \dots + a_{\pi(n)})| \\ &= |(a_{i_1} + \dots + a_{i_k}) - (a_{j_1} + \dots + a_{j_k})| \\ &\leq |a_{i_1}| + \dots + |a_{i_k}| + |a_{j_1}| + \dots + |a_{j_k}| \\ &\leq 2 \sum_{n=n_1+1}^{\infty} |a_n| = 2|U - t_{n_1}| < 2\frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Sledi

$$|S - s'_n| = |(S - s_n) + (s_n - s'_n)| \leq |S - s_n| + |s_n - s'_n| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

S tem smo dokazali, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n = S,$$

kar pomeni, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ konvergira, pri čemer za njeno vsoto velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = S.$$

Ker seveda tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ absolutno konvergira, iz pravkar dokazanega sledi, da konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\pi(n)}|$. Posledično vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ celo absolutno konvergira. $\square$

Brez dokaza navedimo še naslednji zanimiv rezultat tako, kot je zapisan v gradivih [15, 18]. Za več informacij glejte na primer knjigi [17, 20].

Izrek 2.134 *Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pogojno konvergentna vrsta in naj bo $L \in \overline{\mathbb{R}}$ poljuben element. Tedaj obstaja bijekcija $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tako da velja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = L.$$

2.17 Produkt vrst

V zadnjem razdelku tega poglavja bomo omenili še, kako lahko množimo vrste. Naj bosta torej dani vrsti

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots, \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= b_1 + b_2 + b_3 + \dots. \end{aligned}$$

Vsi možni produkti dveh števil, kjer je prvo število člen prve vrste in drugo število člen druge vrste, so prikazani v spodnji neskončni tabeli:

$$\begin{array}{cccc} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \quad (2.7)$$

Obstaja torej več načinov oziroma vrstnih redov, po katerih lahko seštejemo števila iz gornje tabele. Ena možnost je, da seštevamo elemente po stranskih diagonalah kvadratnih matrik, ki jih določa ta tabela.

Definicija 2.135 *Cauchyjev produkt* vrst $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$, pri čemer za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$w_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n+1-k} = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1.$$

Samo navedimo spodnji izrek, ki podaja zadostni pogoj za konvergenco Cauchyjevega produkta vrst. Dokaz lahko najdemo na primer v knjigah [17, 20].

Izrek 2.136 *Naj bosta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentni vrsti, tako da vsaj ena izmed vrst absolutno konvergira. Potem Cauchyjev produkt $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ danih vrst konvergira in ima vsoto*

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right).$$

Zaključimo z naslednjim izrekom, ki nam pove nekaj o konvergenci vrste, katere členi so elementi tabele (2.7) v poljubnem vrstnem redu.

Izrek 2.137 *Naj bosta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolutno konvergentni vrsti. Potem je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, katere členi so produkti iz tabele (2.7) v poljubnem vrstnem redu, tudi absolutno konvergentna in njena vsota je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right).$$

Dokaz. V prvem delu sledimo dokazu iz vira [10]. Predpostavimo, da je za vsak $n \in \mathbb{N}$ člen c_n oblike $a_{i_n} b_{j_n}$, kar pomeni

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{i_n} b_{j_n}).$$

Pokazali bomo, da ta vrsta absolutno konvergira. Naj bo (s_n) zaporedje delnih vsot vrste $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{i_n} b_{j_n}|$. Prav tako vpeljimo števili $A, B \in \mathbb{R}$ tako:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|.$$

Za poljuben $n \in \mathbb{N}$ je torej

$$s_n = |a_{i_1} b_{j_1}| + |a_{i_2} b_{j_2}| + \cdots + |a_{i_n} b_{j_n}|.$$

Naj bo $k = \max\{i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_n\}$. Potem velja

$$\begin{aligned} s_n &= |a_{i_1} b_{j_1}| + |a_{i_2} b_{j_2}| + \cdots + |a_{i_n} b_{j_n}| \\ &\leq (|a_1| + \cdots + |a_k|) \cdot (|b_1| + \cdots + |b_k|) \leq AB. \end{aligned}$$

S tem smo pokazali, da je zaporedje (s_n) navzgor omejeno, zato vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{i_n} b_{j_n}|$ po trditvi 2.106 konvergira. To pomeni, da vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{i_n} b_{j_n}$$

absolutno konvergira.

Za drugi del dokaza (glede vsote) lahko sedaj uporabimo izrek 2.133, ki nam pove, da je vsota vrste $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ neodvisna od vrstnega reda členov. Če izberemo vrstni red tako, kot ga nakazuje Cauchyjev produkt vrst, nam izrek 2.136 zagotovi, da za vsoto velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right).$$

Dokaz je s tem zaključen. □

Opomba 2.138 V drugem delu dokaza zgornjega izreka (glede vsote vrste) bi lahko postopali tudi drugače, to je brez sklica na izrek 2.136, ki ga nismo dokazali. Naj bodo oznake takšne kot v dokazu izreka 2.137. Ponovno bomo sledili ideji iz vira [10]. Definiramo novo vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$, tako da je $d_1 = a_1 b_1$, za vse $n \geq 2$ pa velja

$$d_n = a_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k b_n) + \sum_{k=1}^{n-1} (a_n b_k).$$

To pomeni, da člen d_n predstavlja vsoto vseh elementov tabele (2.7), ki ležijo na desnem oziroma spodnjem robu matrike velikosti $n \times n$, ki jo določa levi zgornji del omenjene

tabele. Označimo s (t_n) , (u_n) in (v_n) zaporedja delnih vsot vrst $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Opazimo, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$t_n = d_1 + \cdots + d_n = (a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n) = u_n v_n,$$

zato je

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n v_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} v_n \right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right).$$

Če torej izberemo vrstni red členov v vrsti $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ tako, kot ga nakazuje vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$, zaradi izreka 2.133 za vsoto velja tudi

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right).$$

Opomnimo še, da lahko na ta način dokažemo tudi rezultat izreka 2.136, ampak ob dodatni predpostavki, da obe začetni vrsti absolutno konvergirata.

Poglavje 3

Zveznost in limita funkcije

Cilj poglavja je spoznati dva pomembna koncepta v matematični analizi: zveznost in limite realnih funkcij ene realne spremenljivke. Opomnimo, da pri tem črpamo predvsem iz virov [3, 10, 18].

3.1 Realne funkcije realne spremenljivke

Definicija 3.1 Naj bosta $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Funkciji $f : A \rightarrow B$ pravimo **realna funkcija realne spremenljivke**.

Opomba 3.2 V nadaljevanju poglavja bomo običajno delali kar s funkcijami $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}$. Če imamo namreč funkcijo $f : D \rightarrow B$, kjer sta $D, B \subseteq \mathbb{R}$, lahko namesto te obravnavamo funkcijo $\tilde{f} : D \rightarrow \mathbb{R}$, kjer za vse $x \in D$ velja $\tilde{f}(x) = f(x)$. Seveda je mogoče, da funkcija $\tilde{f}$ ni surjektivna, četudi je f surjektivna. Vendar se izkaže, da imata omenjeni funkciji enake tiste lastnosti, ki nas bodo še posebej zanimale v tem poglavju (recimo zveznost in limita).

Na primer, namesto funkcije $f : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, podane s predpisom $f(x) = \arcsin x$, obravnavamo funkcijo $\tilde{f} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, podano s predpisom $\tilde{f}(x) = \arcsin x$.

Za funkcijo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ torej v nadaljevanju vedno predpostavimo, da je $D \subseteq \mathbb{R}$. Spomnimo še, da se množica

$$Z_f = \{f(x) \mid x \in D\}$$

imenuje **zaloga vrednosti** funkcije f .

Včasih funkcijo f podamo zgolj z njenim predpisom. V takem primeru je njeno definicijsko območje D enako množici vseh $x \in \mathbb{R}$, za katere ima predpis smisel. Taki množici D pravimo **naravno definicijsko območje** funkcije f . Na primer, naravno definicijsko območje funkcije f , podane s predpisom

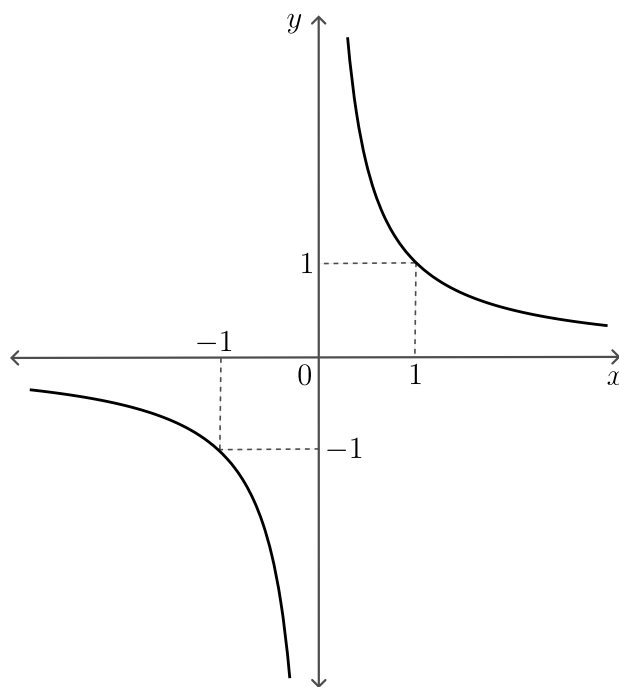
$$f(x) = \frac{x+2}{x-1},$$

je množica $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Definicija 3.3 Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$. Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ je

- (1) **naraščajoča**, če $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$,
- (2) **strogo naraščajoča**, če $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$,
- (3) **padajoča**, če $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$,
- (4) **strogo padajoča**, če $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$,
- (5) **monotona**, če je naraščajoča ali padajoča,
- (6) **strogo monotona**, če je strogo naraščajoča ali strogo padajoča.

Zgled 3.4 Tako kot v gradivu [3] opazimo, da funkcija $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, podana s predpisom $f(x) = \frac{1}{x}$, ni padajoča (kot bi morda pričakovali), saj je na primer $-1 < 1$, ampak $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$. Je pa ta funkcija padajoča na intervalu $(-\infty, 0)$ in na intervalu $(0, \infty)$; glejte sliko 3.1. Natančneje, padajoči sta funkciji $f_1 : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ in $f_2 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ki predstavljata zožitvi funkcije f na množici $(-\infty, 0)$ oziroma $(0, \infty)$.



Slika 3.1: Graf funkcije $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, ki je podana s predpisom $f(x) = \frac{1}{x}$.

Definicija 3.5 Naj bo D neprazna množica. Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ je **navzgor omejena**, če je množica Z_f navzgor omejena (to pomeni, da obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, ki mu pravimo **zgornja meja** funkcije f , da za vse $x \in D$ velja $f(x) \leq M$). V tem primeru obstaja število $\sup Z_f$, ki ga imenujemo **supremum** (ali **natančna zgornja meja**) funkcije f in pišemo $\sup f = \sup Z_f$. Če obstaja tudi maksimum množice Z_f , potem ga imenujemo **maksimum** funkcije f in pišemo $\max f = \max Z_a$.

Definicija 3.6 Naj bo D neprazna množica. Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ je **navzdol omejena**, če je množica Z_f navzdol omejena (to pomeni, da obstaja tak $m \in \mathbb{R}$, ki mu pravimo

spodnja meja funkcije f , da za vse $x \in D$ velja $f(x) \geq m$). V tem primeru obstaja število $\inf Z_f$, ki ga imenujemo **infimum** (ali **natančna spodnja meja**) funkcije f in pišemo $\inf f = \inf Z_f$. Če obstaja tudi minimum množice Z_f , potem ga imenujemo **minimum** funkcije f in pišemo $\min f = \min Z_a$.

Definicija 3.7 Naj bo D neprazna množica. Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ je **omejena**, če je omejena navzgor in navzdol.

Zgled 3.8 Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, podana s predpisom $f(x) = \sin x$ (gre torej za funkcijo sinus), je omejena, saj za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $-1 \leq f(x) = \sin x \leq 1$. Seveda je v tem primeru

$$\min f = -1 \quad \text{in} \quad \max f = 1.$$

Zapišimo še nekaj osnovnih operacij s funkcijami.

Definicija 3.9 Naj bosta $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ funkciji, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}$. Potem lahko tvorimo nove funkcije:

- (1) **vsota funkcij** je funkcija $(f + g) : D \rightarrow \mathbb{R}$, podana s predpisom $\forall x \in D, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$,
- (2) **razlika funkcij** je funkcija $(f - g) : D \rightarrow \mathbb{R}$, podana s predpisom $\forall x \in D, (f - g)(x) = f(x) - g(x)$,
- (3) **produkt funkcij** je funkcija $(fg) : D \rightarrow \mathbb{R}$, podana s predpisom $\forall x \in D, (fg)(x) = f(x)g(x)$,
- (4) če je $\forall x \in D, g(x) \neq 0$, potem definiramo **kvocient funkcij** kot funkcijo $\left(\frac{f}{g}\right) : D \rightarrow \mathbb{R}$, podano s predpisom $\forall x \in D, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

3.2 Zveznost

V tem razdelku bomo spoznali koncept zveznosti funkcij. Poudarimo, da pri tem v veliki meri sledimo gradivu [3], pa tudi viroma [10, 18]. Preprosto povedano zveznost funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ v točki $a \in D$ pomeni, da so funkcijske vrednosti $f(x)$ blizu $f(a)$, če je x blizu a . To natančno opišemo s spodnjo definicijo.

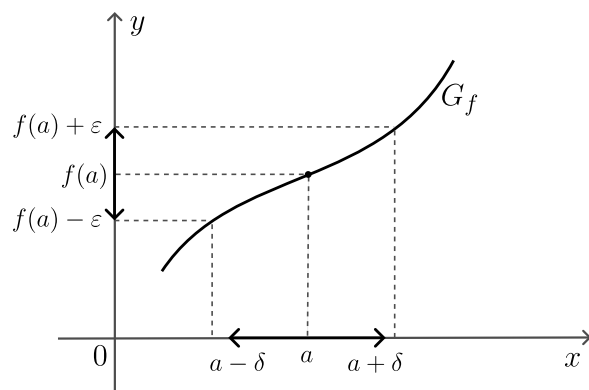
Definicija 3.10 Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$ neprazna množica. Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ je **zvezna v točki** $a \in D$, če velja:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Implikacijo v gornji definiciji lahko zapišemo tudi v naslednji obliki:

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \implies f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon).$$

Za ponazoritev definicije glejte sliko 3.2.

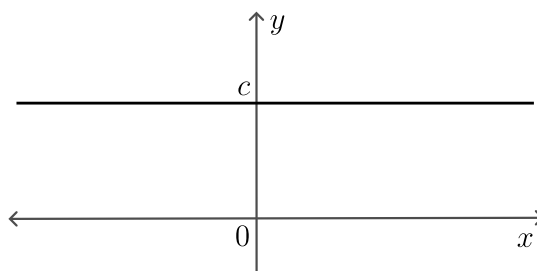


Slika 3.2: Zveznost funkcije f v točki a .

Definicija 3.11 Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$. Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ je **zvezna**, če je zvezna v vsaki točki $a \in D$.

Intuitivno si lahko predstavljamo, da ima zvezna funkcija, ki je definirana na nekem intervalu, nepretrgan graf.

Zgled 3.12 Naj bo $c \in \mathbb{R}$ in naj bo še $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija, podana s predpisom $f(x) = c$ (torej je f konstantna funkcija; glejte sliko 3.3). Pokažimo, da je f zvezna.



Slika 3.3: Graf konstantne funkcije, ki je podana s predpisom $f(x) = c$.

Naj bo $a \in \mathbb{R}$ poljuben. Dokažimo, da je f zvezna v točki a , torej:

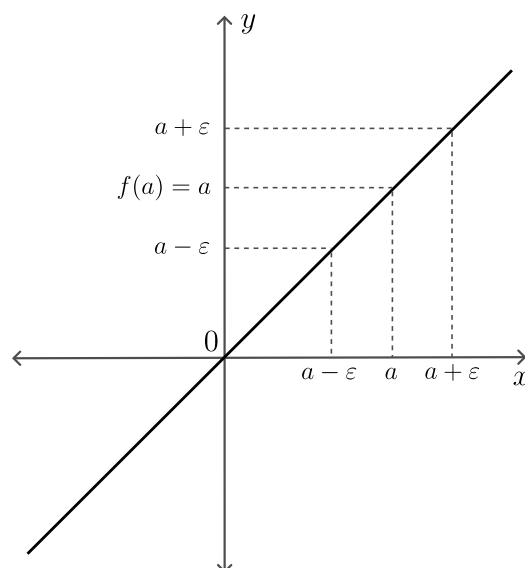
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben in izberimo $\delta = 1$. Potem za vsak $x \in (a - 1, a + 1)$ očitno velja $|f(x) - f(a)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$. Ugotovili smo, da je f res zvezna funkcija.

Zgled 3.13 Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija, podana s predpisom $f(x) = x$. Pokažimo, da je f zvezna. Naj bo $a \in \mathbb{R}$ poljuben. Dokažimo, da je f zvezna v točki a , torej:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben in izberimo $\delta = \varepsilon$. Potem za poljuben $x \in (a - \delta, a + \delta)$ velja $f(x) = x \in (a - \delta, a + \delta) = (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ oziroma $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$; glejte sliko 3.4. S tem smo preverili, da je f zvezna funkcija.



Slika 3.4: Graf funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki je podana s predpisom $f(x) = x$.

Zgled 3.14 Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ naj bo podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x \leq 0 \\ 2 & ; x > 0 \end{cases}.$$

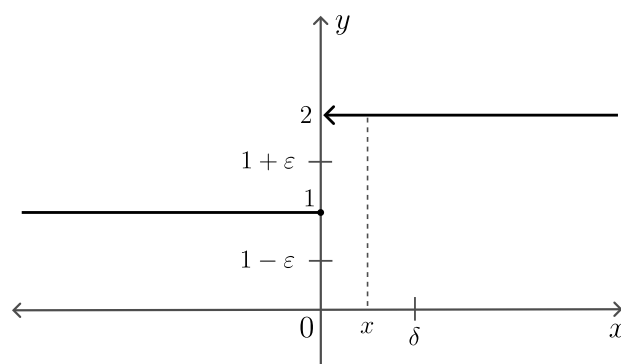
Pokažimo, da funkcija f ni zvezna v točki $a = 0$. Dokazati je potrebno:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \mathbb{R} : x \in (a - \delta, a + \delta) \text{ in } f(x) \notin (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$$

oziroma

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \mathbb{R} : x \in (-\delta, \delta) \text{ in } f(x) \notin (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon).$$

Naj bo $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Izberimo poljuben $\delta > 0$. Potem opazimo, da za vsak $x \in (0, \delta)$ velja $f(x) = 2 \notin (1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}) = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$; glejte sliko 3.5. To dokazuje, da f ni zvezna v točki $a = 0$, zato f ni zvezna funkcija.

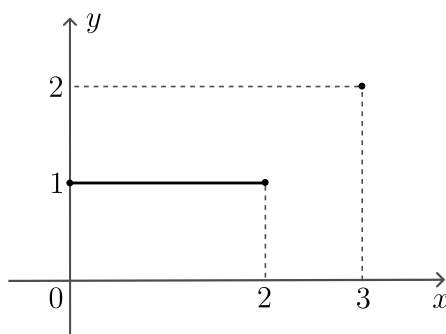


Slika 3.5: Primer funkcije, ki ni zvezna v točki $a = 0$.

Zgled 3.15 Funkcija $f : [0, 2] \cup \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$ naj bo podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq x \leq 2 \\ 2 & ; x = 3 \end{cases};$$

glejte sliko 3.6.



Slika 3.6: Primer zvezne funkcije.

Čeprav na prvi pogled morda ne deluje tako, lahko hitro preverimo, da je funkcija f zvezna. Izberimo poljuben $a \in [0, 2] \cup \{3\}$ in naj bo $\varepsilon > 0$. Določimo $\delta = \frac{1}{2}$ in predpostavimo, da za nek $x \in [0, 2] \cup \{3\}$ velja $|x - a| < \delta = \frac{1}{2}$. Če je $a \in [0, 2]$, potem mora biti tudi $x \in [0, 2]$ in zato velja $|f(x) - f(a)| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$. Če pa je $a = 3$, potem mora biti tudi $x = 3$ in spet velja $|f(x) - f(a)| = |2 - 2| = 0 < \varepsilon$. S tem smo preverili, da je f zvezna funkcija.

Zgled 3.16 Podobno kot v gradivih [3, 18] razmislimo še, ali obstaja funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki ni zvezna v nobeni točki $a \in \mathbb{R}$. Dokažimo, da takšna funkcija obstaja. Naj bo funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in \mathbb{Q}, \\ -1 & ; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Naj bo $a \in \mathbb{R}$ poljuben. Dokažimo, da f ni zvezna v točki a , torej:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \mathbb{R} : x \in (a - \delta, a + \delta) \text{ in } f(x) \notin (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon).$$

Izberimo $\varepsilon = 1$. Naj bo še $\delta > 0$ poljuben. Ločimo dve možnosti:

- (1) Če je $a \in \mathbb{Q}$, izberimo poljuben $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Takšen x obstaja, ker je množica $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gosta v $\mathbb{R}$. Potem velja $f(x) = -1 \notin (0, 2) = (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$.
- (2) Če je $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, izberimo poljuben $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap \mathbb{Q}$. Takšen x obstaja, ker je množica $\mathbb{Q}$ gosta v $\mathbb{R}$. Potem velja $f(x) = 1 \notin (-2, 0) = (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$.

S tem smo dokazali, da funkcija f ni zvezna v točki a .

Zelo uporaben je naslednji izrek, ki zveznost funkcije v točki a karakterizira s pomočjo limit zaporedij.

Izrek 3.17 Naj bo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}$ neprazna množica, in naj bo $a \in D$. Naslednji trditvi sta ekvivalentni:

- (1) Funkcija f je zvezna v točki a .

(2) Za vsako zaporedje (x_n) v D velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a).$$

Dokaz. Premislamo najprej implikacijo (1) $\implies$ (2). Vemo torej, da je f zvezna v točki a . Naj bo (x_n) poljubno zaporedje v D , za katerega velja $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Dokažimo, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a).$$

Vzemimo poljuben $\varepsilon > 0$. Glede na definicijo limite iščemo tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da bo za vse $n \geq n_0$ veljalo $f(x_n) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$.

Ker je f zvezna v točki a , obstaja tak $\delta > 0$, da je za vsak $x \in D$ resnična implikacija:

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \implies f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon).$$

Spomnimo, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Od tod sledi obstoj takega števila $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_0$ velja $x_n \in (a - \delta, a + \delta)$, pri čemer je δ določen zgoraj. Posledično to pomeni, da za poljuben $n \geq n_0$ velja $f(x_n) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$. Prvi del dokaza je s tem zaključen.

Pokažimo še implikacijo (2) $\implies$ (1). Tokrat predpostavimo, da za vsako zaporedje (x_n) v D velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a).$$

Dokažimo, da je f zvezna v točki a . Pa recimo, da to ne velja. Potem je resnična spodnja trditev:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in D : x \in (a - \delta, a + \delta) \text{ in } f(x) \notin (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon).$$

Izberimo torej tak $\varepsilon > 0$, da velja:

$$\forall \delta > 0, \exists x \in D : x \in (a - \delta, a + \delta) \text{ in } f(x) \notin (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon).$$

Za poljuben $n \in \mathbb{N}$ označimo $\delta_n = \frac{1}{n}$ in naj bo $x_n \in D$ tak, da je $x_n \in (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})$ in $f(x_n) \notin (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$. Dobili smo torej zaporedje (x_n) v D , pri katerem za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ in $f(x_n) \notin (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$. To seveda pomeni, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

in da zaporedje $(f(x_n))$ ne konvergira proti $f(a)$, kar je v protislovju z začetno predpostavko. S tem smo pokazali, da je f zvezna v točki a . $\square$

Opomba 3.18 Iz zgoraj navedenega izreka sledi, da če je funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna v $a \in D$ in je (x_n) poljubno zaporedje v D , ki konvergira k a , potem velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right).$$

Dokazan izrek nam omogoča, da na zelo preprost način dokažemo še naslednji rezultat.

Izrek 3.19 Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$ neprazna množica in naj bosta $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ funkciji, ki sta zvezni v točki $a \in D$. Potem so v točki a zvezne tudi funkcije $f + g$, $f - g$ in fg . Če velja še $g(x) \neq 0$ za vsak $x \in D$, tedaj je v točki a zvezna tudi funkcija $\frac{f}{g}$.

Dokaz. Dokažimo, da je funkcija $f + g$ zvezna v točki a . Naj bo (x_n) poljubno zaporedje v D , za katerega je $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Ker sta funkciji f in g zvezni v točki a , po izreku 3.17 velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a) \quad \text{in} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(a).$$

Iz pravil za računanje z limitami (izreka 2.44 in 2.46) potem sledi

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (f + g)(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) + g(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) \\ &= f(a) + g(a) = (f + g)(a), \end{aligned}$$

zato je po izreku 3.17 funkcija $f + g$ zvezna v točki a . Analogno seveda velja za preostale tri funkcije. $\square$

Posledica 3.20 Naj bosta $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ zvezni funkciji, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}$. Tedaj so vsota, razlika in produkt funkcij f in g zvezne funkcije. Če velja $g(x) \neq 0$ za vse $x \in D$, tedaj je tudi kvocient funkcij f in g zvezna funkcija.

Zgled 3.21 Naj bosta $k, n \in \mathbb{R}$. Vemo, da je **linearna funkcija** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ podana s predpisom $f(x) = kx + n$. Dokažimo, da je f zvezna funkcija. Naj bodo funkcije $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ podane s predpisi $f_1(x) = k$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = n$. Iz zgledov 3.12 in 3.13 sklepamo, da so f_1, f_2 in f_3 zvezne funkcije, zato je po pravkar zapisani posledici tudi funkcija $f = f_1 f_2 + f_3$ zvezna.

Rezultat za zveznost kvocienta funkcij lahko zapišemo še nekoliko natančneje. Najprej se spomnimo spodnje definicije.

Definicija 3.22 Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$ neprazna množica. Število $a \in D$ je **ničla** funkcije $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, če velja $f(a) = 0$.

Posledica 3.23 Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$ neprazna množica in naj bosta $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ funkciji, ki sta zvezni v točki $a \in D$. Če velja $g(a) \neq 0$ in če je $N = \{x \in D \mid g(x) = 0\}$ množica vseh ničel funkcije g , potem je v točki a zvezna tudi funkcija $h : D \setminus N \rightarrow \mathbb{R}$, podana s predpisom

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

za vse $x \in D \setminus N$.

Dokaz. Vpeljimo oznako $U = D \setminus N$. Naj bosta $f_U, g_U : U \rightarrow \mathbb{R}$ zožitvi funkcij f in g na množico U . Ker sta funkciji f in g zvezni v točki a , iz definicije zveznosti očitno sledi, da sta tudi funkciji f_U in g_U zvezni v točki a . Seveda je $g(x) \neq 0$ za poljuben $x \in U$. Opazimo še, da za vse $x \in U$ velja

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_U(x)}{g_U(x)}.$$

Iz izreka 3.19 sedaj sledi, da je funkcija h zvezna v točki a . □

Spomnimo se še nekaterih elementarnih funkcij. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Funkcija $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je **polinom stopnje** n , če obstajajo $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, kjer je $a_n \neq 0$, tako da za vse $x \in \mathbb{R}$ velja

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Nadalje, funkcija $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je **polinom**, če je p konstantna funkcija ali če je p polinom stopnje n za nek $n \in \mathbb{N}$.

Naj bosta $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ polinoma. Recimo, da je $N = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = 0\}$ množica vseh ničel polinoma q . Funkcijo $f : \mathbb{R} \setminus N \rightarrow \mathbb{R}$, podano s predpisom

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

za vse $x \in \mathbb{R} \setminus N$, imenujemo **racionalna funkcija**.

Trditev 3.24 *Polinomi in racionalne funkcije so zvezne funkcije.*

Dokaz. Naj bo funkcija $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ podana s predpisom $f_1(x) = x$. Tako kot pri linearni funkciji opazimo, da lahko poljuben polinom p izrazimo s pomočjo produkta in vsote funkcije f_1 ter konstantnih funkcij. Iz zgledov 3.13 in 3.12 ter posledice 3.20 zato sledi, da je p zvezna funkcija.

Naj bosta sedaj $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ poljubna polinoma, pri čemer je N množica vseh ničel polinoma q . Na podlagi pravkar dokazanega vemo, da sta p in q zvezni funkciji. Iz posledice 3.23 sedaj sledi še zveznost racionalne funkcije $f : \mathbb{R} \setminus N \rightarrow \mathbb{R}$, podane s predpisom

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

za vse $x \in \mathbb{R} \setminus N$. Dokaz je s tem zaključen. □

To pomeni, da je na primer zvezna tudi funkcija $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, podana s predpisom $f(x) = \frac{1}{x}$, katere graf prikazuje slika 3.1. Ob koncu razdelka razmislimo še o zadostnem pogoju za zveznost kompozituma funkcij.

Izrek 3.25 *Naj bosta $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ in $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ funkciji, pri čemer velja $D_f, D_g \subseteq \mathbb{R}$ in $Z_f \subseteq D_g$. Če je funkcija f zvezna v točki $a \in D_f$ in če je funkcija g zvezna v točki $f(a)$, tedaj je tudi funkcija $(g \circ f) : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna v točki a .*

Dokaz. Dokažimo, da je funkcija $g \circ f$ zvezna v točki a . Vzemimo poljubno zaporedje (x_n) v množici D_f , za katerega velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Ker je funkcija f zvezna v točki a , iz izreka 3.17 sledi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a).$$

Ker pa je funkcija g zvezna v točki $f(a) \in D_g$, iz izreka 3.17 dobimo še

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (g \circ f)(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n)) = g(f(a)) = (g \circ f)(a).$$

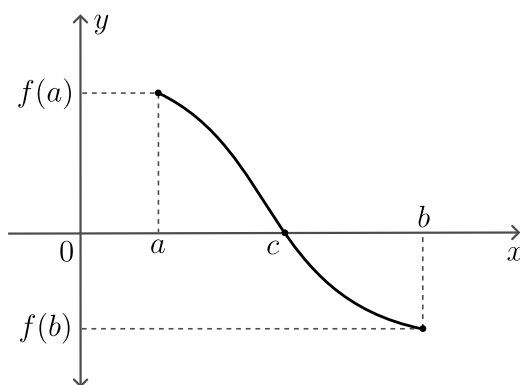
Isti izrek nam sedaj zagotovi, da je funkcija $g \circ f$ zvezna v točki a . □

Posledica 3.26 Naj bosta $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ in $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ zvezni funkciji, pri čemer velja $D_f, D_g \subseteq \mathbb{R}$ in $Z_f \subseteq D_g$. Tedaj je tudi funkcija $(g \circ f) : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna.

3.3 Zvezne funkcije na zaprtih intervalih

V tem razdelku si ogledamo nekatere osnovne lastnosti zveznih funkcij, ki so definirane na zaprtih intervalih. Pri tem sledimo virom [3, 10, 18, 20].

Izrek 3.27 Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija, kjer je $a < b$. Če je $f(a)f(b) \leq 0$, potem ima f ničlo na intervalu $[a, b]$; to pomeni, da obstaja tak $c \in [a, b]$, da velja $f(c) = 0$ (glejte sliko 3.7).



Slika 3.7: Graf zvezne funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, za katero velja $f(a)f(b) < 0$.

Dokaz. V primeru, ko je $f(a)f(b) = 0$, ima f ničlo v krajišču intervala $[a, b]$. V nadaljevanju dokaza zato predpostavimo, da je $f(a)f(b) < 0$.

Naj velja $a_1 = a$, $b_1 = b$ in $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Če je $f(c_1) = 0$, smo ničlo že našli in je dokaz končan. Če pa je $f(c_1) \neq 0$, opazimo, da mora biti $f(a_1)f(c_1) < 0$ ali $f(c_1)f(b_1) < 0$. Naj bo $[a_2, b_2]$ tisti izmed intervalov $[a_1, c_1]$ oziroma $[c_1, b_1]$, pri katerem sta funkcijski vrednosti krajišč nasprotno predznačeni. Velja torej $f(a_2)f(b_2) < 0$. Označimo $c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$.

Če je $f(c_2) = 0$, smo zaključili, sicer pa opazimo, da mora biti $f(a_2)f(c_2) < 0$ ali $f(c_2)f(b_2) < 0$. Naj bo $[a_3, b_3]$ tisti izmed intervalov $[a_2, c_2]$ oziroma $[c_2, b_2]$, pri katerem sta funkcijski vrednosti krajišč nasprotno predznačeni. Velja torej $f(a_3)f(b_3) < 0$. Sedaj označimo $c_3 = \frac{a_3+b_3}{2}$. Če je $f(c_3) = 0$, smo zaključili, sicer pa postopek ponovimo. V primeru, da za nek $n \in \mathbb{N}$ dobimo $f(c_n) = 0$, je dokaz končan. Če pa velja $f(c_n) \neq 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, dobimo zaporedje vloženih zaprtih intervalov

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \cdots,$$

pri čemer je $f(a_n)f(b_n) < 0$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Zaporedji (a_n) in (b_n) sta očitno monotoni in omejeni, zato sta po izrekih 2.38 in 2.40 konvergentni. Ker velja tudi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b - a}{2^{n-1}} = 0,$$

mora biti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Označimo s c ti dve limiti (iz izreka 2.42 vemo, da je c edina točka, ki je vsebovana v vseh navedenih intervalih). Sedaj zaradi opombe 3.18 dobimo

$$\begin{aligned}(f(c))^2 &= f(c)f(c) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n\right) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)\right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (f(a_n)f(b_n)) \leq 0,\end{aligned}$$

od koder sledi $(f(c))^2 = 0$ in posledično $f(c) = 0$. $\square$

Zgled 3.28 Naj bo $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ zvezna funkcija (za kodomeno funkcije f bi seveda lahko vzeli tudi množico $\mathbb{R}$, pri čemer bi dodatno zahtevali, da je $Z_f \subseteq [0, 1]$). Tako kot v gradivu [3] dokažimo, da ima funkcija f fiksno točko; to pomeni, da obstaja število $c \in [0, 1]$, za katerega velja $f(c) = c$.

Vpeljimo novo funkcijo $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$\forall x \in [0, 1], \quad g(x) = f(x) - x.$$

Funkcija g je razlika dveh zveznih funkcij, zato je po posledici 3.20 tudi sama zvezna funkcija. Prav tako opazimo, da velja $g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$ in $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Iz izreka 3.27 sledi, da obstaja $c \in [0, 1]$, tako da je $g(c) = 0$, kar pomeni $f(c) - c = 0$. Posledično velja $f(c) = c$, kar zaključi dokaz.

Izrek 3.29 Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija, kjer je $a < b$. Tedaj je f omejena funkcija.

Dokaz. Dokažimo najprej, da je f navzgor omejena. Pa recimo, da ni navzgor omejena. Potem za poljuben $n \in \mathbb{N}$ velja, da n ni zgornja meja za f , zato za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja $x_n \in [a, b]$, da je $f(x_n) > n$. Tako dobimo zaporedje (x_n) v $[a, b]$, ki je seveda omejeno in zato ima po izreku 2.15 neko stekališče $s \in [a, b]$. Naj bo (x_{k_n}) podzaporedje, ki konvergira k s , torej

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = s.$$

Obstoj takšnega podzaporedja nam zagotavlja izrek 2.33. Opazimo, da za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $f(x_{k_n}) > k_n \geq n$, zato je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n}) = \infty,$$

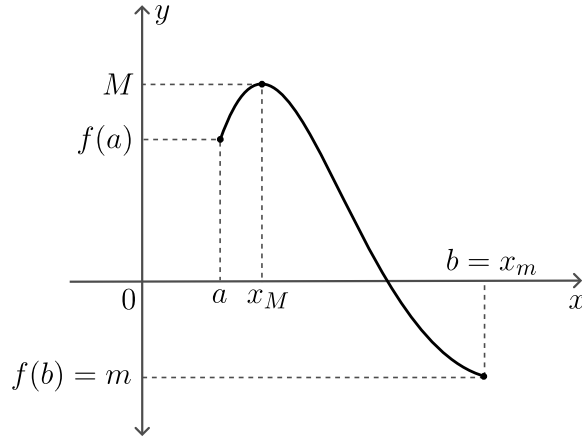
kar pomeni, da zaporedje $(f(x_{k_n}))$ divergira. Po drugi strani pa mora zaradi zveznosti funkcije f po izreku 3.17 veljati

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n}) = f(s) \in \mathbb{R}.$$

Dobili smo torej protislovje in s tem dokazali, da je f navzgor omejena. Podobno pokažemo tudi, da je f navzdol omejena. $\square$

Pravkar dokazani izrek nam zagotavlja, da za zvezno funkcijo f , definirano na zaprtem intervalu $[a, b]$, obstajata števili $M = \sup f$ in $m = \inf f$.

Izrek 3.30 Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija, kjer je $a < b$. Naj bosta še $M = \sup f$ in $m = \inf f$. Tedaj obstajata $x_M, x_m \in [a, b]$, tako da je $f(x_M) = M$ in $f(x_m) = m$ (glejte sliko 3.8); funkcija f torej doseže maksimum in minimum.



Slika 3.8: Graf funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, ki doseže maksimum M in minimum m .

Dokaz. Dokažimo, da obstaja $x_M \in [a, b]$, tako da velja $f(x_M) = M$. Pa recimo, da tak x_M ne obstaja. To bi pomenilo, da je $f(x) < M$ za vse $x \in [a, b]$. V tem primeru lahko vpeljemo funkcijo $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$\forall x \in [a, b], \quad g(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

Očitno je g zvezna po posledici 3.20, zato je po prejšnjem izreku navzgor omejena z nekim $N > 0$. To pomeni, da za vse $x \in [a, b]$ velja $g(x) \leq N$ in posledično

$$\frac{1}{M - f(x)} \leq N.$$

Od tod dobimo, da za vse $x \in [a, b]$ velja

$$f(x) \leq M - \frac{1}{N},$$

kar pa je v protislovju z dejstvom, da je M najmanjša zgornja meja (supremum) za funkcijo f . Posledično torej mora obstajati tak $x_M \in [a, b]$, da je $f(x_M) = M$, zato je $M = \max f$. Podobno pokažemo še, da je $m = \min f$. $\square$

Izrek 3.31 Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija, kjer je $a < b$. Naj bosta še $m = \min f$ in $M = \max f$. Tedaj za vsak $A \in [m, M]$ obstaja tak $c \in [a, b]$, da je $f(c) = A$; funkcija f torej zavzame vse vrednosti med m in M , kar pomeni, da velja

$$Z_f = f([a, b]) = [m, M].$$

Dokaz. Naj bosta x_m in x_M takšna, da je $f(x_m) = m = \min f$ in $f(x_M) = M = \max f$. Ker je $A \in [m, M]$, velja torej $m \leq A \leq M$.

Če je $m = M$, potem je $A = M$ in $f(x_M) = A$, zato je dokaz zaključen. V nadaljevanju dokaza torej predpostavimo, da je $m < M$, kar implicira tudi $x_m \neq x_M$. V tem primeru lahko definiramo funkcijo $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $g(x) = f(x) - A$ za vse $x \in [a, b]$. Opazimo, da je $g(x_m) = m - A \leq 0$ in $g(x_M) = M - A \geq 0$. Ločimo naslednji dve možnosti:

- (1) če je $x_m < x_M$, potem ima funkcija g po izreku 3.27 ničlo na intervalu $[x_m, x_M]$,
 (2) če je $x_m > x_M$, potem ima funkcija g po izreku 3.27 ničlo na intervalu $[x_M, x_m]$.

Ugotovili smo torej, da v vsakem primeru obstaja nek $c \in [a, b]$, da je $g(c) = 0$, kar pomeni tudi $f(c) - A = 0$ in posledično $f(c) = A$. $\square$

Dokazani izrek je lahko zelo uporaben pri določanju zaloge vrednosti nekaterih funkcij. Oglejmo si dva zgleda, ki sta povzeta oziroma prirejena po gradivu [15].

Zgled 3.32 Funkcija $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ naj bo podana s predpisom $f(x) = \sin x$. Iz izreka 3.44, ki ga bomo dokazali v razdelku 3.5, sledi, da je f zvezna funkcija. Ker f zavzame samo vrednosti na intervalu $[-1, 1]$, velja $\min f = f(-\frac{\pi}{2}) = -1$ in $\max f = f(\frac{\pi}{2}) = 1$, zato iz izreka 3.31 sledi

$$f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = Z_f = [-1, 1].$$

Zgled 3.33 Naj bo $m \in \mathbb{N}$ poljubno naravno število in naj bo funkcija $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ podana s predpisom $f(x) = x^m$. Očitno gre za zožitev polinoma, zato je f zvezna funkcija. Pokažimo, da je zaloga vrednosti funkcije f enaka

$$Z_f = f([0, \infty)) = [0, \infty),$$

kar seveda pomeni tudi, da je funkcija $\tilde{f} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, podana s predpisom $\tilde{f}(x) = x^m$, surjektivna in posledično bijektivna, saj je strogo naraščajoča (glejte tudi izrek 2.62).

Očitno je $f([0, \infty)) \subseteq [0, \infty)$. Za drugo inkluzijo izberimo poljuben $y \in [0, \infty)$. Ker je $n^m \geq n$ za vse $n \in \mathbb{N}$, seveda sledi $\lim_{n \rightarrow \infty} n^m = \infty$, zato obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je $n^m > y$.

Vemo, da je zožitev funkcije f na interval $[0, n]$ strogo naraščajoča in zvezna funkcija, kar po izreku 3.31 implicira $f([0, n]) = [f(0), f(n)] = [0, n^m]$. To pomeni, da obstaja $x \in [0, n]$, za katerega je $f(x) = y$. S tem smo pokazali, da velja $Z_f = [0, \infty)$.

Opomba 3.34 Očitno izrek 3.31 velja tudi v primeru, ko je $[a, b]$ izrojen zaprti interval, torej ko je $a = b$.

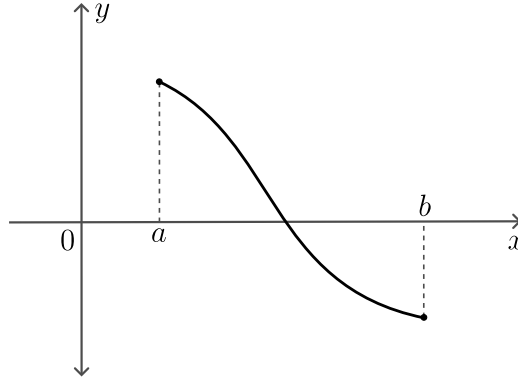
3.4 Zveznost inverzne funkcije

Naj bo $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ strogo monotona funkcija, kjer je I poljuben neprazen interval. Ker je f strogo monotona, je očitno tudi injektivna. Potem takoj opazimo, da je funkcija $\tilde{f} : I \rightarrow Z_f$, podana s predpisom $\tilde{f}(x) = f(x)$ za vsak $x \in I$, bijektivna. Posledično obstaja inverzna funkcija

$$(\tilde{f})^{-1} : Z_f \rightarrow I.$$

Spodnji izrek nam zagotovi zveznost takšne funkcije v primeru, da je I zaprti interval in da je f zvezna (glejte sliko 3.9).

Izrek 3.35 Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna in strogo monotona funkcija, kjer je $a < b$. Tedaj je funkcija $(\tilde{f})^{-1} : Z_f \rightarrow [a, b]$ zvezna.



Slika 3.9: Graf funkcije, definirane na zaprtem intervalu $[a, b]$, ki je zvezna in strogo monotona.

Dokaz. Naj bo $y_0 \in Z_f$ poljubno število. Sledimo pristopu iz gradiva [18] in dokažimo, da je funkcija $(\tilde{f})^{-1}$ zvezna v točki y_0 . Označimo

$$x_0 = (\tilde{f})^{-1}(y_0).$$

Naj bo (y_n) poljubno zaporedje v Z_f , ki konvergira proti y_0 . Za vsak $n \in \mathbb{N}$ označimo še

$$x_n = (\tilde{f})^{-1}(y_n),$$

kar pomeni, da je $f(x_n) = y_n$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Ker velja $x_n \in [a, b]$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, je zaporedje (x_n) omejeno, zato ima po izreku 2.15 vsaj eno stekališče. Naj bo s poljubno stekališče zaporedja (x_n) . Seveda mora tudi s pripadati intervalu $[a, b]$. Po izreku 2.33 obstaja podzaporedje (x_{k_n}) , ki konvergira proti s . Ker je funkcija f zvezna, z uporabo izreka 3.17 dobimo

$$\tilde{f}(s) = f(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{k_n} = y_0.$$

Iz definicije števila x_0 vemo, da je tudi $f(x_0) = y_0$. Stroga monotonost (oziroma injektivnost) funkcije f implicira še $x_0 = s$. Dokazali smo torej, da je poljubno stekališče zaporedja (x_n) enako x_0 , zato ima to zaporedje samo eno stekališče. Iz izreka 2.35 sedaj sledi, da je zaporedje (x_n) konvergentno in da velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

oziroma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((\tilde{f})^{-1}(y_n)) = (\tilde{f})^{-1}(y_0).$$

Končno nam izrek 3.17 zagotovi zveznost funkcije $(\tilde{f})^{-1}$ v točki y_0 . □

Navedimo podoben rezultat še za poljuben interval [3].

Posledica 3.36 Naj bo $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna in strogo monotona funkcija, kjer je I poljuben neprazen interval. Tedaj je funkcija $(\tilde{f})^{-1} : Z_f \rightarrow I$ zvezna.

Dokaz. V tem primeru ponovno izberimo poljubno točko $y_0 \in Z_f$. Naj bo $x_0 = (\tilde{f})^{-1}(y_0)$. Če interval I vsebuje samo eno število, je rezultat očiten. Zato predpostavimo, da I vsebuje vsaj dve različni števili. Poiščimo zaprti interval $[a, b] \subseteq I$ na naslednji način:

- (1) če x_0 ni levo krajišče in ni desno krajišče intervala I , potem določimo a in b tako, da velja $a < b$ in $x_0 \in (a, b)$;
- (2) če je x_0 levo krajišče intervala I , potem določimo $a = x_0$, za b pa izberemo poljubno število iz I , tako da je $b > a$;
- (3) če je x_0 desno krajišče intervala I , potem določimo $b = x_0$, za a pa izberemo poljubno število iz I , tako da je $a < b$.

Vpeljimo funkcijo g , ki je zožitev funkcije f na interval $[a, b]$. Brez izgube za splošnost predpostavimo, da je f strogo naraščajoča funkcija (podobno namreč dokazujemo tudi, če je f strogo padajoča). Potem je seveda zaloga vrednosti funkcije g enaka

$$Z_g = [f(a), f(b)].$$

Ker je tudi funkcija g strogo monotona (in zato injektivna), nam prejšnji izrek pove, da je funkcija $(\tilde{g})^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$ zvezna (v točki y_0). Očitno imata funkciji $(\tilde{f})^{-1}$ in $(\tilde{g})^{-1}$ enake vrednosti na neki okolici točke y_0 : natančneje, obstaja tak $\delta > 0$, da je $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \cap Z_f = (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \cap Z_g$ in da za vse $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \cap Z_g$ velja

$$(\tilde{f})^{-1}(y) = (\tilde{g})^{-1}(y).$$

Posledično mora biti tudi funkcija $(\tilde{f})^{-1}$ zvezna v točki y_0 . □

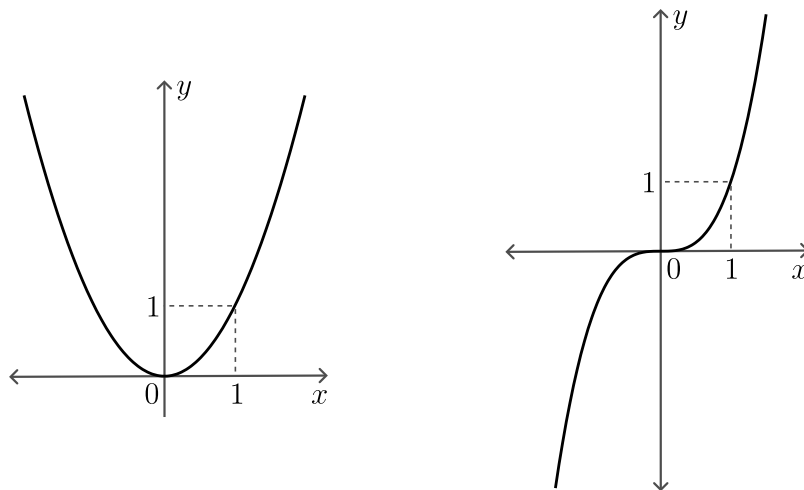
3.5 Zveznost elementarnih funkcij

V tem razdelku bomo preverili zveznost elementarnih funkcij, pri čemer sledimo zlasti viroma [3, 10].

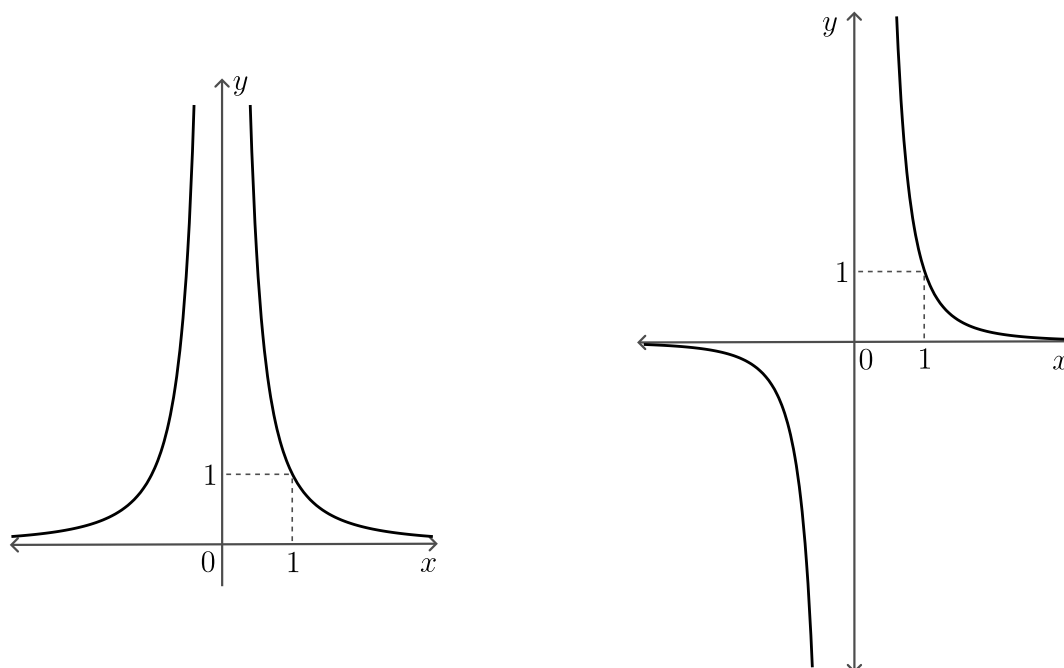
Najprej ponovimo, kdaj je funkcija soda oziroma liha. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$ takšna množica, da za vsak $x \in D$ velja tudi $-x \in D$. Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ je **soda**, če je $f(-x) = f(x)$ za vse $x \in D$. Po drugi strani je funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ **liha**, če je $f(-x) = -f(x)$ za vse $x \in D$. Spomnimo, da je graf sode funkcije simetričen glede na ordinatno os, graf lihe funkcije pa je simetričen glede na koordinatno izhodišče.

3.5.1 Potenčne in korenske funkcije

Iz trditve 3.24 vemo, da so polinomi in racionalne funkcije zvezne funkcije, zato so zvezne tudi vse **potenčne funkcije**. Natančneje, če je $n \in \mathbb{N}$, potem je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, podana s predpisom $f(x) = x^n$, zvezna (funkcija f je soda, če je n sodo število, in liha, če je n liho število; glejte sliko 3.10). Prav tako je zvezna funkcija $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, podana s predpisom $f(x) = \frac{1}{x^n}$; glejte sliko 3.11.



Slika 3.10: Grafa funkcij s predpisoma $f(x) = x^2$ (levo) in $f(x) = x^3$ (desno).

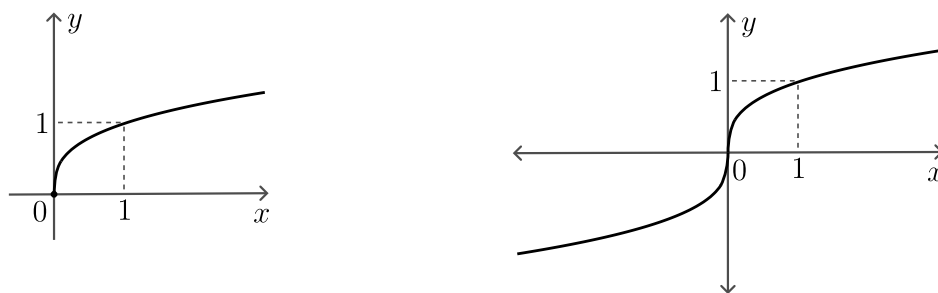


Slika 3.11: Grafa funkcij s predpisoma $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (levo) in $f(x) = \frac{1}{x^3}$ (desno).

Razmislimo še, da so zvezne vse korenske funkcije:

- (1) Če je $n \geq 3$ liho naravno število, potem je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, podana s predpisom $f(x) = x^n$, zvezna, strogo monotona in bijektivna (bijektivnost lahko dokažemo s pomočjo izreka 2.62 ali zgleda 3.33). Inverzna funkcija $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je **korenska funkcija** in je po posledici 3.36 zvezna.
- (2) Če je n sodo naravno število, je funkcija $\tilde{f} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, podana s predpisom $\tilde{f}(x) = x^n$, zvezna, strogo monotona in bijektivna (glejte izrek 2.62 in zgled 3.33). Inverzna funkcija $(\tilde{f})^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ je **korenska funkcija** in je po posledici 3.36 zvezna.

Grafa dveh korenskih funkcij prikazuje slika 3.12.



Slika 3.12: Grafa korenskih funkcij za $n = 2$ (levo) in $n = 3$ (desno).

Ugotovili smo torej, da velja spodnja trditev.

Trditev 3.37 *Potenčne in korenske funkcije so zvezne.*

Oglejmo si še dva zgleda, pri čemer sledimo viroma [18] oziroma [10].

Zgled 3.38 Ker je $|x| = \sqrt{x^2}$ za vse $x \in \mathbb{R}$, je zaradi posledice 3.26 zvezna tudi funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, podana s predpisom $f(x) = |x|$ (gre za kompozitum dveh zveznih funkcij).

Zgled 3.39 Naj bo $q \in \mathbb{Q}$ poljubno racionalno število in naj bo funkcija $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ podana s predpisom $f(x) = x^q$. Če velja $q = \frac{m}{n}$, kjer je $m \in \mathbb{Z}$ in $n \in \mathbb{N}$, potem lahko predpis funkcije f zapišemo tako:

$$f(x) = \sqrt[n]{x^m}.$$

Ker so potenčne in korenske funkcije zvezne, je po posledici 3.26 tudi funkcija f zvezna.

3.5.2 Eksponentne in logaritemske funkcije

Naj bo $a > 0$, $a \neq 1$. Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, podana s predpisom $f(x) = a^x$, je **eksponentna funkcija**. Grafa dveh eksponentnih funkcij prikazuje slika 3.13.

Izrek 3.40 Vsaka eksponentna funkcija je strogo monotona in zvezna, njena zaloga vrednosti pa je množica $(0, \infty)$.

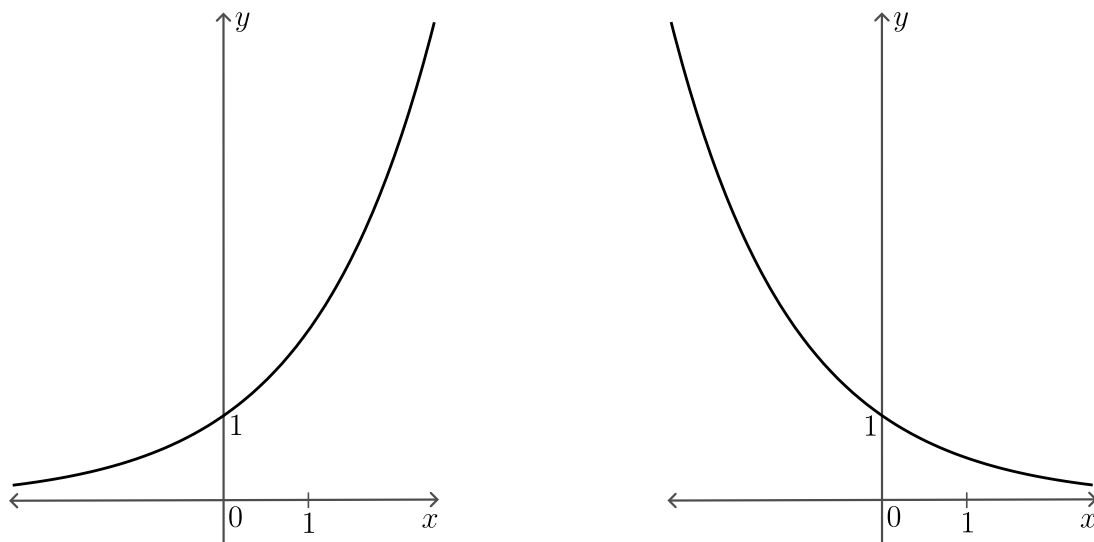
Dokaz. Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ poljubna eksponentna funkcija, podana s predpisom $f(x) = a^x$, kjer je $a > 0$ in $a \neq 1$. Iz točke (13) v izreku 2.69 sledi, da je f strogo naraščajoča v primeru $a > 1$ in strogo padajoča v primeru $a < 1$; glejte sliko 3.13.

V nadaljevanju dokazujemo podobno kot v virih [3, 10]. Recimo, da velja $a > 1$. Naj bo $x_0 \in \mathbb{R}$ poljubno število. Dokažimo, da je funkcija f zvezna v točki x_0 . Dokazujemo torej, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da za vse $x \in \mathbb{R}$ velja:

$$|x - x_0| < \delta \implies |a^x - a^{x_0}| < \varepsilon.$$

Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Iz trditve 2.65 sledi, da za $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{a^{x_0}} > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vse $h \in \mathbb{Q}$ velja:

$$|h| < \delta \implies |a^h - 1| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{a^{x_0}}. \quad (3.1)$$



Slika 3.13: Graf eksponentne funkcije v primeru $a = 2$ (levo) in v primeru $a = \frac{1}{2}$ (desno).

Naj bo $x \in \mathbb{R}$ poljuben tak, da je $|x - x_0| < \delta$. Če označimo $u = x - x_0$, potem velja $|u| < \delta$ oziroma $u \in (-\delta, \delta)$. Izberimo $h_1 \in (-\delta, u) \cap \mathbb{Q}$ in $h_2 \in (u, \delta) \cap \mathbb{Q}$. Potem sledi $-\delta < h_1 < u < h_2 < \delta$ in posledično

$$a^{h_1} < a^u < a^{h_2}.$$

Ker je $|h_1| < \delta$ in $|h_2| < \delta$, mora zaradi implikacije (3.1) veljati še $a^{h_1}, a^{h_2} \in (1 - \varepsilon', 1 + \varepsilon')$, zato je tudi $a^u \in (1 - \varepsilon', 1 + \varepsilon')$ oziroma $|a^u - 1| < \varepsilon'$. Končno dobimo

$$|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0} |a^{x-x_0} - 1| = a^{x_0} |a^u - 1| < a^{x_0} \varepsilon' = a^{x_0} \frac{\varepsilon}{a^{x_0}} = \varepsilon$$

in dokaz zveznosti je zaključen.

Premislimo še, da velja

$$Z_f = f(\mathbb{R}) = (0, \infty).$$

Že v izreku 2.69 smo zapisali, da je $a^x > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, zato očitno velja $Z_f \subseteq (0, \infty)$. Iz trditve 2.61 sledi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty \text{ in } \lim_{n \rightarrow \infty} a^{-n} = 0,$$

zato za poljuben $y \in (0, \infty)$ obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je $y \in (a^{-n}, a^n)$. Vemo, da je f strogo naraščajoča in zvezna na intervalu $[-n, n]$, zato po izreku 3.31 velja $f([-n, n]) = [a^{-n}, a^n]$. To pomeni, da obstaja $x \in [-n, n]$, tako da je $f(x) = y$. S tem smo pokazali enakost $Z_f = (0, \infty)$.

Podobno dokazujemo tudi, če je $a < 1$. □

Zaradi dokazanega izreka je funkcija $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, podana s predpisom $f(x) = a^x$, zvezna, strogo monotona in bijektivna. Njena inverzna funkcija $(\tilde{f})^{-1} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je **logaritemska funkcija**, katere predpis zapisujemo tako:

$$\forall x \in (0, \infty), (\tilde{f})^{-1}(x) = \log_a x.$$

V posebnem primeru, ko je $a = e$, pišemo $\ln x$ namesto $\log_e x$. Iz posledice 3.36 sledi spodnji rezultat.

Posledica 3.41 Vsaka logaritemska funkcija je zvezna.

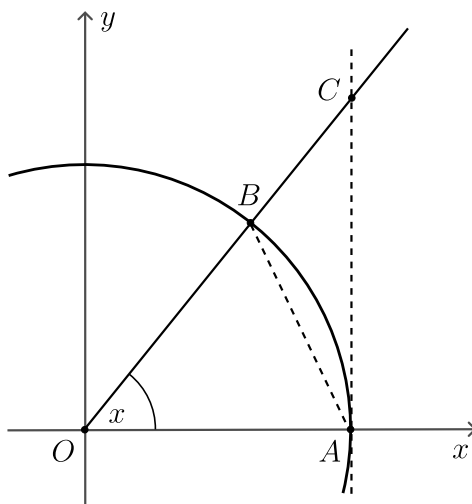
3.5.3 Kotne in krožne funkcije

Kotne funkcije so funkcije *sinus* (oznaka $\sin$), *kosinus* (oznaka $\cos$), *tangens* (oznaka $\tan$) in *kotangens* (oznaka $\cot$). Definicij na tem mestu ne bomo podali, saj ste jih spoznali že v srednji šoli in ponovili pri predmetu Uvod v matematiko. Cilj razdelka je pokazati, da so kotne funkcije zvezne, pri čemer ponovno sledimo viroma [3, 10].

Trditev 3.42 Naj bo $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$. Tedaj velja

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Dokaz. Najprej predpostavimo, da je $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Oglejmo si enotsko krožnico (s polmerom $r = 1$) v koordinatnem sistemu z izhodiščem O in v njem kot x , katerega krak določa točko B na krožnici. Naj bo A točka $(1, 0)$. Označimo s C točko, v kateri vzporednica ordinatni osi skozi točko A seka poltrak OB (glejte sliko 3.14).



Slika 3.14: Enotska krožnica ter točke O , A , B in C .

Naj bo S_1 ploščina trikotnika $\triangle OAB$, S_3 ploščina trikotnika $\triangle OAC$ in S_2 ploščina krožnega izseka AOB . Opazimo, da je $S_1 < S_2 < S_3$. Prav tako velja

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\sin x}{2}, \\ S_2 &= \pi r^2 \frac{x}{2\pi} = \frac{x}{2}, \\ S_3 &= \frac{\tan x}{2}, \end{aligned}$$

od koder dobimo

$$\sin x < x < \tan x.$$

Pravkar zapisano neenakost lahko preoblikujemo v

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Sedaj predpostavimo še, da je $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, kar pomeni $-x \in (0, \frac{\pi}{2})$ in zato

$$\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1.$$

Ker je sinus liha funkcija, kosinus pa soda funkcija, iz tega očitno sledi

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

kar zaključimo dokaz. □

Posledica 3.43 Za vsak $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ velja $|\sin x| \leq |x|$.

Dokaz. Posledica očitno velja za $x = 0$, pri katerem je dosežena enakost. Nadalje predpostavimo, da je $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Potem iz predhodne trditve sledi:

$$\frac{\sin x}{x} < 1 \implies \sin x < x \implies |\sin x| < |x|.$$

Nazadnje si oglejmo še primer, ko je $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$. Tudi tokrat po prejšnji trditvi velja $\frac{\sin x}{x} < 1$, ker pa je očitno tudi $\frac{\sin x}{x} > 0$, dobimo:

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| < 1 \implies \frac{|\sin x|}{|x|} < 1 \implies |\sin x| < |x|.$$

Dokaz je s tem zaključen. □

Izrek 3.44 Funkcija sinus je zvezna.

Dokaz. Naj bo $a \in \mathbb{R}$ poljubna točka. Podobno kot v virih [3, 10] dokažimo, da je funkcija $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna v točki a . Dokazujemo torej:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \delta \implies |\sin x - \sin a| < \varepsilon.$$

Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Določimo $\delta = \min\{\varepsilon, \pi\}$ in vzemimo poljuben $x \in \mathbb{R}$, za katerega velja $|x - a| < \delta$. Potem je seveda $|x - a| < \pi$ in zato $\frac{|x-a|}{2} < \frac{\pi}{2}$, kar pomeni

$$\frac{x - a}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Z uporabo znane formule za razliko $\sin x - \sin a$ in posledice 3.43 dobimo

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin a| &= \left| 2 \sin\left(\frac{x-a}{2}\right) \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \right| \\ &= 2 \left| \sin\left(\frac{x-a}{2}\right) \right| \cdot \left| \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \right| \\ &\leq 2 \left| \sin\left(\frac{x-a}{2}\right) \right| \leq 2 \cdot \left| \frac{x-a}{2} \right| = |x-a| < \delta \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

kar pomeni, da je dokaz končan. □

Posledica 3.45 *Funkcije kosinus, tangens in kotangens so zvezne.*

Dokaz. Ker za vse $x \in \mathbb{R}$ velja

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2} = \cos x,$$

zveznost linearne funkcije in funkcije sinus ter posledica 3.26 implicirajo zveznost funkcije kosinus.

Nadalje velja

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

in

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

kar pomeni, da sta zaradi posledice 3.23 zvezni tudi funkciji tangens in kotangens. $\square$

Spomnimo, da z zmanjšanjem domen oziroma kodomen funkcij sinus, kosinus, tangens in kotangens iz navedenih funkcij dobimo bijektivne funkcije (ki so tudi zvezne in strogo monotone). Njihove inverzne funkcije imenujemo **ciklometrične funkcije** (ali tudi **krožne funkcije**). To so funkcije *arkus sinus*, *arkus kosinus*, *arkus tangens* in *arkus kotangens*.

Posledica 3.46 *Krožne funkcije arkus sinus, arkus kosinus, arkus tangens in arkus kotangens so zvezne.*

Dokaz. Sledi neposredno iz posledice 3.36. $\square$

3.5.4 Hiperbolične funkcije

Spoznajmo še hiperbolične funkcije.

Definicija 3.47 *Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, podana s predpisom*

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

*se imenuje **hiperbolični sinus**. Označimo jo kot $f = \sinh$ ali $f = \text{sh}$.*

Definicija 3.48 *Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, podana s predpisom*

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

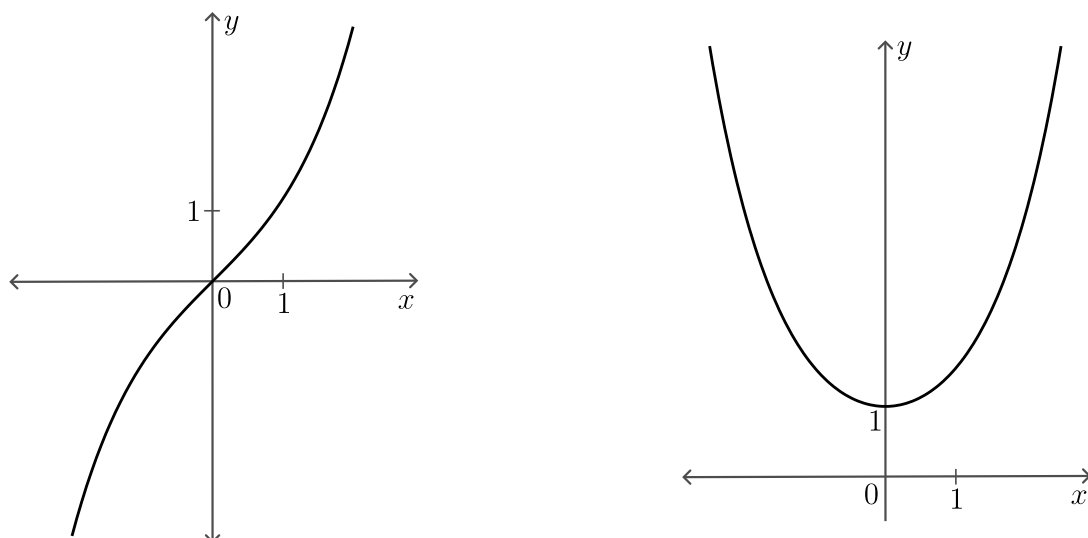
*se imenuje **hiperbolični kosinus**. Označimo jo kot $f = \cosh$ ali $f = \text{ch}$.*

Opazimo, da je hiperbolični sinus liha funkcija, hiperbolični kosinus pa soda funkcija; glejte sliko 3.15.

Opomnimo še, da se graf funkcije hiperbolični kosinus imenuje **verižnica**. Enostavno lahko preverimo, da za vse $x \in \mathbb{R}$ velja zveza

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1.$$

Vpeljimo še dve funkciji, katerih grafa prikazuje slika 3.16.



Slika 3.15: Grafa funkcij hiperbolični sinus (levo) in hiperbolični kosinus (desno).

Definicija 3.49 Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, podana s predpisom

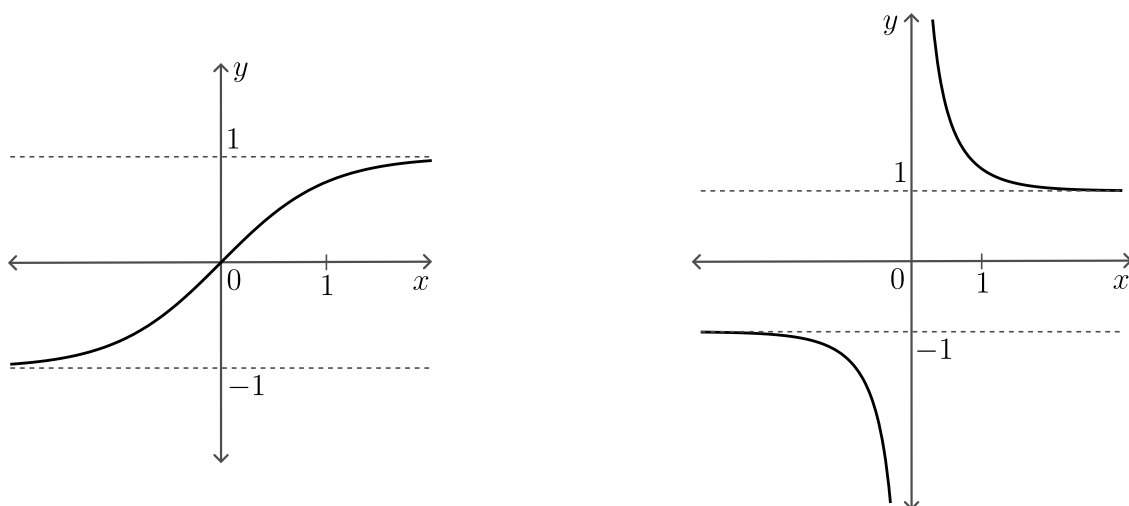
$$f(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

se imenuje **hiperbolični tangens**. Označimo jo kot $f = \tanh$ ali $f = \text{th}$.

Definicija 3.50 Funkcija $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, podana s predpisom

$$f(x) = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

se imenuje **hiperbolični kotangens**. Označimo jo kot $f = \coth$ ali $f = \text{cth}$.



Slika 3.16: Grafa funkcij hiperbolični tangens (levo) in hiperbolični kotangens (desno).

Ponovno lahko s spremembo domen oziroma kodomen iz navedenih hiperboličnih funkcij dobimo bijektivne funkcije. Njihove inverzne funkcije se imenujejo **area funkcije**:

area hiperbolični sinus, area hiperbolični kosinus, area hiperbolični tangens in area hiperbolični kotangens.

Posledica 3.51 *Hiperbolične funkcije in area funkcije so zvezne.*

Dokaz. Zveznost hiperboličnih funkcij sledi iz izreka 3.40, posledice 3.20 in posledice 3.23. Zveznost area funkcij dobimo z uporabo posledice 3.36. $\square$

3.6 Enakomerna zveznost

V tem razdelku spoznamo pojem enakomerne zveznosti, pri čemer uporabljamo vire [3, 11, 18].

Najprej spomnimo, da je funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna v točki $a \in D$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}$, če velja:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Vemo tudi, da je funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna, če je zvezna v vsaki točki $a \in D$, kar pomeni:

$$\forall a \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Zadnja trditev pa ni vedno ekvivalentna (kot bomo videli) spodnji trditvi:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall a, x \in D, |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Na podlagi tega pridemo do naslednje definicije.

Definicija 3.52 *Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$. Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ je **enakomerno zvezna**, če velja:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall u, v \in D, |u - v| < \delta \implies |f(u) - f(v)| < \varepsilon.$$

Neposredno iz definicij zveznosti in enakomerne zveznosti sledi spodnja trditev.

Trditev 3.53 *Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$. Če je funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ enakomerno zvezna, potem je tudi zvezna.*

Zgled 3.54 *Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ naj bo podana s predpisom $f(x) = 2x + 3$. Opazimo, da je f enakomerno zvezna, saj lahko za poljuben $\varepsilon > 0$ izberemo kar $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ in potem bo za vse $u, v \in \mathbb{R}$ veljalo:*

$$|u - v| < \delta \implies |f(u) - f(v)| = |(2u + 3) - (2v + 3)| = 2|u - v| < 2\delta = \varepsilon.$$

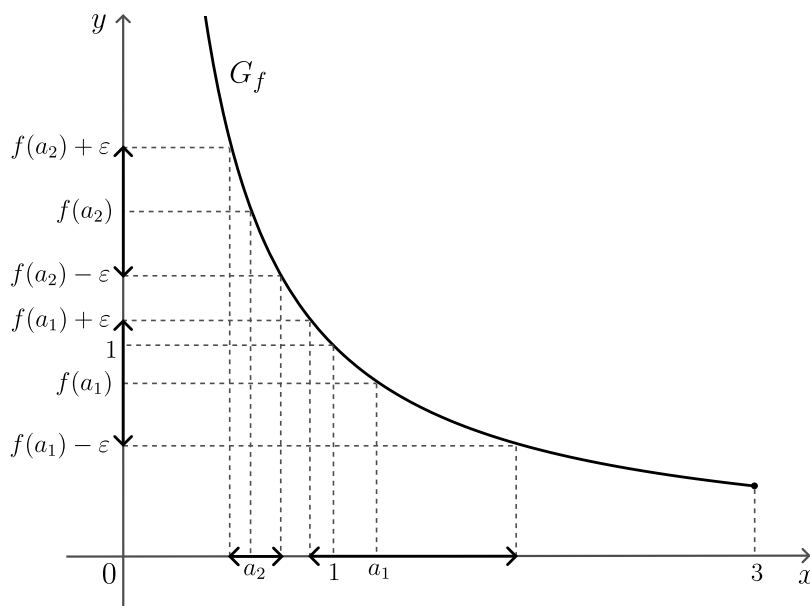
Zgled 3.55 *Funkcija $f : (0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ naj bo podana s predpisom $f(x) = \frac{1}{x}$. Vemo, da je f zvezna, saj gre za zožitev racionalne funkcije na interval $(0, 3]$. Iz slike 3.17 pa lahko domnevamo, da funkcija f ni enakomerno zvezna, saj pri danem $\varepsilon > 0$ potrebujemo manjši $\delta > 0$, če je točka a_2 bližje izhodišču kot točka a_1 .*

Podobno kot v viru [11] dokažimo, da funkcija f res ni enakomerno zvezna. Dokazujemo torej:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists u, v \in (0, 3] : |u - v| < \delta \text{ in } |f(u) - f(v)| \geq \varepsilon.$$

Naj bo $\varepsilon = 2$. Izberimo še poljuben $\delta > 0$ ter določimo $u = \min\{\frac{\delta}{2}, \frac{1}{4}\}$ in $v = 2u$. Očitno je $u \leq \frac{\delta}{2}$ in $u \leq \frac{1}{4}$, zato velja še $|u - v| = |-u| = u \leq \frac{\delta}{2} < \delta$ in

$$|f(u) - f(v)| = \left| \frac{1}{u} - \frac{1}{2u} \right| = \frac{1}{2u} \geq \frac{4}{2} = 2 = \varepsilon.$$



Slika 3.17: Graf funkcije f iz zgleda 3.55.

Razdelek zaključimo z izrekom, ki nam pove, da je zvezna funkcija na zaprtem intervalu tudi enakomerno zvezna.

Izrek 3.56 *Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija, kjer je $a \leq b$. Tedaj je f enakomerno zvezna.*

Dokaz. Izrek očitno velja v primeru, ko je $a = b$, zato v nadaljevanju predpostavimo, da velja $a < b$. Tako kot v virih [3, 11] dokazujemo s protislovjem. Recimo, da f ni enakomerno zvezna. Potem obstaja tak $\varepsilon > 0$, da velja:

$$\forall \delta > 0, \exists u, v \in [a, b] : |u - v| < \delta \text{ in } |f(u) - f(v)| \geq \varepsilon.$$

Za poljuben $n \in \mathbb{N}$ izberimo $\delta_n = \frac{1}{n} > 0$. Posledično za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstajata taka $u_n, v_n \in [a, b]$, da je $|u_n - v_n| < \frac{1}{n}$ in $|f(u_n) - f(v_n)| \geq \varepsilon$. Ker je zaporedje (u_n) omejeno, ima po izreku 2.15 neko stekališče $s \in [a, b]$. Potem zaradi izreka 2.33 obstaja podzaporedje (u_{k_n}) , tako da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{k_n} = s.$$

Seveda za vse $n \in \mathbb{N}$ velja tudi

$$0 \leq |v_{k_n} - s| \leq |v_{k_n} - u_{k_n}| + |u_{k_n} - s| \leq \frac{1}{k_n} + |u_{k_n} - s|.$$

Ker gre desna stran proti 0, ko gre n proti neskončno, je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |v_{k_n} - s| = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} v_{k_n} = s.$$

Vemo, da je funkcija f zvezna v točki s , zato po izreku 3.17 velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_{k_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(v_{k_n}) = f(s),$$

od koder sledi tudi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((f(u_{k_n}) - f(v_{k_n})) = 0.$$

Po definiciji te limite potem obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da velja $|f(u_{k_n}) - f(v_{k_n})| < \varepsilon$ za vse $n \geq n_0$, kar pa je v protislovju z dejstvom, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $|f(u_{k_n}) - f(v_{k_n})| \geq \varepsilon$. S tem smo pokazali, da je funkcija f enakomerno zvezna. $\square$

3.7 Stekališča množic

Pri definiciji limite funkcije bomo potrebovali še pojem stekališča množice (pri tem moramo paziti, da tega pojma ne zamešamo s stekališčem zaporedja). Takšen pristop pri vpeljavi limite funkcije najdemo na primer v virih [3, 11, 15, 17].

Definicija 3.57 Naj velja $D \subseteq \mathbb{R}$ in $a \in \mathbb{R}$. Pravimo, da je a **stekališče** množice D , če za vsak $r > 0$ množica $(a - r, a + r) \setminus \{a\} = (a - r, a) \cup (a, a + r)$ vsebuje vsaj en element iz D .

Zgled 3.58 Naj bo

$$D = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}.$$

Opazimo, da je število $a = 0$ stekališče množice D , saj je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

in zato za poljuben $r > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_0$ velja $-r < \frac{1}{n} < r$ oziroma $\frac{1}{n} \in (0, r)$. Hitro vidimo tudi, da je $a = 0$ edino stekališče množice D .

Zgled 3.59 Naj bo $D = [0, 2)$. Takoj opazimo, da če je $a \in [0, 2]$, potem je a stekališče množice D . Po drugi strani za $a \in \mathbb{R} \setminus [0, 2]$ velja, da a ni stekališče množice D .

Vpeljimo še oznako za množico vseh stekališč množice D [3].

Definicija 3.60 Če je $D \subseteq \mathbb{R}$, potem z D' označimo množico vseh stekališč množice D , torej

$$D' = \{a \in \mathbb{R} \mid a \text{ je stekališče množice } D\}.$$

Zgled 3.61 Oglejmo si spodnje tri primere.

- (1) Naj bo $D = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$. Glede na ugotovitev v zgledu 3.58 sledi $D' = \{0\}$.
- (2) Naj bo $D = [0, 2)$. Glede na ugotovitev v zgledu 3.59 sledi $D' = [0, 2]$.
- (3) Naj bo $D = \mathbb{Q}$. Podobno kot v virih [3, 11] pokažimo, da velja $D' = \mathbb{R}$. Naj bo $a \in \mathbb{R}$ poljubno realno število in izberimo še poljuben $r > 0$. Ker so racionalna števila gosta v množici $\mathbb{R}$ (glejte trditev 1.64), gotovo obstaja tak $q \in \mathbb{Q}$, da velja $q \in (a, a + r)$. To pomeni, da množica $(a - r, a) \cup (a, a + r)$ vsebuje vsaj en element iz $D = \mathbb{Q}$, zato je a stekališče množice D . S tem smo pokazali enakost $D' = \mathbb{R}$.

Definicija 3.62 Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$. Če je $a \in D$ in če a ni stekališče množice D , potem pravimo, da je a **izolirana točka** množice D .

Zgled 3.63 Naj bo $D = [0, 2) \cup \{3\}$ in $a = 3$. Potem je $a \in D$, vendar takoj vidimo, da a ni stekališče množice D (obstaja namreč tak $r > 0$, da množica $(a - r, a) \cup (a, a + r)$ ne vsebuje nobenega elementa iz D). To pomeni, da je $a = 3$ izolirana točka množice D . Hitro vidimo še, da velja $D' = [0, 2]$.

Ob koncu razdelka opomnimo, da direktno iz definicije zveznosti sledi: če je $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}$, in če je $a \in D$ izolirana točka množice D , potem je funkcija f zvezna v točki a (glejte na primer zgled 3.15).

3.8 Limita funkcije

V tem razdelku spoznamo pojem limite funkcije in si ogledamo nekaj bistvenih lastnosti, ki veljajo za limite. Opomnimo, da sledimo predvsem gradivu [3], pa tudi viroma [10, 15].

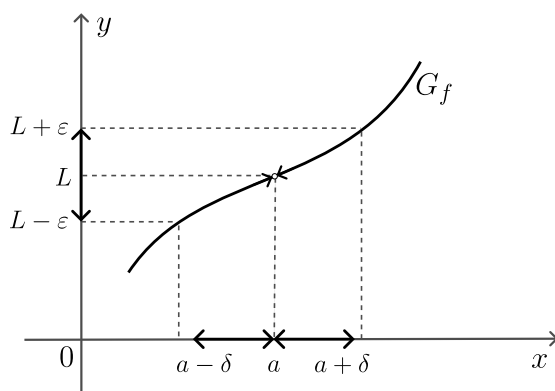
Definicija 3.64 Naj bo $a \in D'$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}$ (to pomeni, da je a stekališče množice D). Število $L \in \mathbb{R}$ je **limita funkcije** $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, **ko gre x proti a** , če velja:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

V tem primeru pišemo

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Za grafično ponazoritev gornje definicije glejte sliko 3.18. Opazimo, da pogoj v tej definiciji pove, da so funkcijske vrednosti $f(x)$ blizu števila L , če je x blizu a . Pri tem se moramo zavedati, da točka a ni nujno vsebovana v definicijskem območju D , mora pa biti funkcija f definirana v točkah, ki so poljubno blizu točke a .



Slika 3.18: Ponazoritev limite funkcije f , ko gre x proti a .

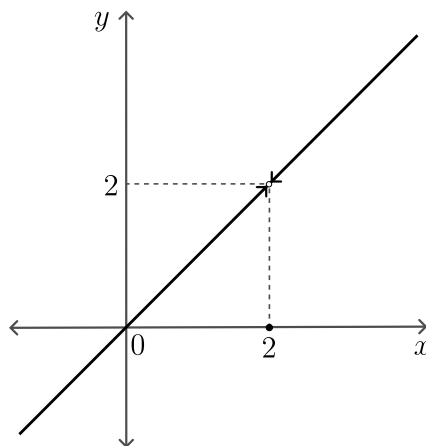
Opomba 3.65 Pogoj $0 < |x - a| < \delta$ v definiciji limite pomeni, da velja $x \in (a - \delta, a + \delta)$ in $x \neq a$, torej $x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$.

S pomočjo spodnjega zgleda pojasnimo, zakaj v definiciji zahtevamo, da je $x \neq a$.

Zgled 3.66 Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ naj bo podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} x & ; x \neq 2 \\ 0 & ; x = 2 \end{cases}.$$

Graf funkcije f prikazuje slika 3.19.



Slika 3.19: Graf funkcije f iz zgleda 3.66.

Opazimo, da je $f(2) = 0$, hkrati pa bi bilo smiselno, da je

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2.$$

Pokažimo, da res velja zapisana enakost, torej:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, 0 < |x - 2| < \delta \implies |f(x) - 2| < \varepsilon.$$

Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben in izberimo $\delta = \varepsilon$. Potem za vsak $x \in (2 - \delta, 2) \cup (2, 2 + \delta)$ velja $f(x) = x \in (2 - \delta, 2 + \delta) = (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$ oziroma $|f(x) - 2| < \varepsilon$. S tem smo preverili, da je $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$. Opazimo torej, da je vrednost limite določena samo s tem, kakšne so funkcijske vrednosti v točkah blizu $a = 2$, ni pa pomembno, kaj se dogaja v sami točki a .

Spomnimo, da je funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna v točki $a \in D$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}$, če velja:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Od tod takoj opazimo, da je resničen naslednji izrek.

Izrek 3.67 Naj bo $a \in D \cap D'$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}$. Potem je funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna v točki a natanko tedaj, ko velja

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Zgornji izrek nam omogoča enostavno računanje številnih limit. Vemo na primer, da je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, podana s predpisom $f(x) = x^2 + 1$, zvezna. Zato velja

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = f(2) = 2^2 + 1 = 5.$$

Podobno kot zveznost lahko tudi limite funkcij karakteriziramo s pomočjo limit zaporedij.

Izrek 3.68 Naj bo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}$, in naj bo $L \in \mathbb{R}$. Če je $a \in D'$, potem sta naslednji trditvi ekvivalentni:

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

(2) Za vsako zaporedje (x_n) v $D \setminus \{a\}$ velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L.$$

Dokaz. Premislimo najprej implikacijo (1) $\implies$ (2). Vemo torej, da je L limita funkcije f , ko gre x proti a . Naj bo (x_n) poljubno zaporedje v $D \setminus \{a\}$, za katerega je $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Dokažimo, da velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L.$$

Vzemimo poljuben $\varepsilon > 0$. Glede na definicijo limite iščemo tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da bo za vse $n \geq n_0$ veljalo $f(x_n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Ker je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, obstaja tak $\delta > 0$, da je za vsak $x \in D$ resnična implikacija:

$$x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) \implies f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

Spomnimo, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Od tod sledi obstoj takega števila $n_0 \in \mathbb{N}$, da velja $x_n \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ za vse $n \geq n_0$, pri čemer je δ določen zgoraj. Posledično to pomeni, da za poljuben $n \geq n_0$ velja $f(x_n) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Pokažimo še implikacijo (2) $\implies$ (1). Tokrat predpostavimo, da za vsako zaporedje (x_n) v $D \setminus \{a\}$ velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L.$$

Dokažimo, da je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Pa recimo, da to ne velja. Potem je resnična spodnja trditev:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in D : x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) \text{ in } f(x) \notin (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

Izberimo torej tak $\varepsilon > 0$, da velja:

$$\forall \delta > 0, \exists x \in D : x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) \text{ in } f(x) \notin (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

Za poljuben $n \in \mathbb{N}$ označimo $\delta_n = \frac{1}{n}$ in naj bo $x_n \in D \setminus \{a\}$ tak, da je $x_n \in (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})$ in $f(x_n) \notin (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Dobili smo torej zaporedje (x_n) v $D \setminus \{a\}$, pri katerem za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ ter $f(x_n) \notin (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. To seveda pomeni, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

in da zaporedje $(f(x_n))$ ne konvergira proti L , kar je v protislovju z začetno predpostavko. S tem smo pokazali, da velja $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. $\square$

Sedaj lahko enostavno izpeljemo vsa osnovna pravila za računanje z limitami.

Izrek 3.69 Naj bosta $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ funkciji, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}$. Če je $a \in D'$ in če obstajata limiti $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ in $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, tedaj obstajajo tudi limite $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$, $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x))$ in $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x))$, pri tem pa velja

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x), \\ \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x), \\ \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) &= \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right).\end{aligned}$$

Če velja še $\forall x \in D, g(x) \neq 0$ in $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$, potem obstaja tudi $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ in velja

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

Dokaz. Izrek bomo dokazali le za funkcijo $f + g$, saj preostale tri formule dokažemo podobno. Označimo

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \text{in} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B.$$

Izberimo poljubno zaporedje (x_n) v množici $D \setminus \{a\}$, ki konvergira proti a . Dokažimo, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f + g)(x_n) = A + B.$$

Po izreku 3.68 vemo, da velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \quad \text{in} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = B,$$

zato z uporabo izreka 2.44 dobimo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f + g)(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) + g(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = A + B.$$

Izrek 3.68 sedaj implicira

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

kar zaključimo dokaz za vsoto. □

Podobno (z uporabo zaporedij) bomo dokazali še dva izreka.

Izrek 3.70 (pravilo sendviča za limite funkcij) Naj bodo $f, g, h : D \rightarrow \mathbb{R}$ funkcije, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}$, in naj za vsak $x \in D$ velja $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Če je $a \in D'$ in če obstaja tak $L \in \mathbb{R}$, da velja

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L,$$

tedaj je tudi

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$

Dokaz. Izberimo poljubno zaporedje (x_n) v množici $D \setminus \{a\}$, ki konvergira proti a . Po izreku 3.68 vemo, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow \infty} h(x_n) = L.$$

Ker za vse $n \in \mathbb{N}$ velja $f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)$, z uporabo pravila sendviča za zaporedja (izrek 2.27) dobimo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = L.$$

Izrek 3.68 sedaj implicira

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L,$$

kar pomeni, da je dokaz končan. □

Posledica 3.71 *Velja*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Dokaz. Iz trditve 3.42 vemo, da za vsak $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ velja

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Ker je kosinus zvezna funkcija, sledi

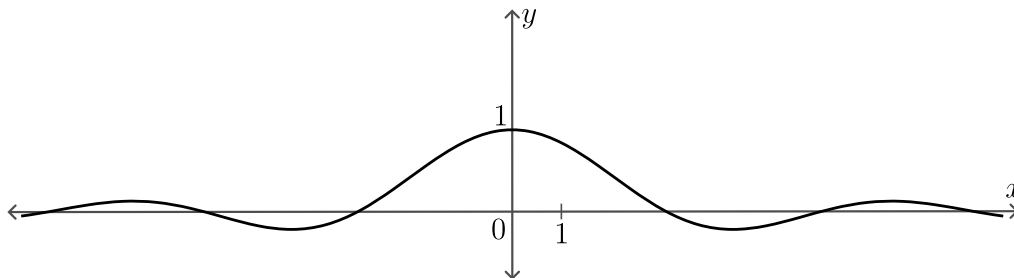
$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1,$$

zato pravilo sendviča za limite funkcij implicira želeni rezultat. □

Zgled 3.72 *Če je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ podana s predpisom*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases},$$

potem nam zgornja posledica in izrek 3.67 povesta, da je funkcija f zvezna v točki $a = 0$. Posledično je f zvezna funkcija; glejte sliko 3.20.



Slika 3.20: Graf funkcije f , za katero velja $f(0) = 1$ in $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ za $x \neq 0$.

Izrek 3.73 Naj bosta $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ in $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ funkciji, pri čemer velja $D_f, D_g \subseteq \mathbb{R}$ in $Z_f \subseteq D_g$. Recimo, da je $a \in \mathbb{R}$ stekališče množice D_f in da obstaja $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, tako da je $L \in D_g$. Če je funkcija g zvezna v točki L , tedaj obstaja tudi $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x)$ in velja

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = g(L) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right).$$

Dokaz. Vzemimo poljubno zaporedje (x_n) v množici $D_f \setminus \{a\}$, za katerega velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Ker je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, iz izreka 3.68 sledi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L.$$

Ker pa je funkcija g zvezna v točki $L \in D_g$, iz izreka 3.17 dobimo še

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (g \circ f)(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n)) = g(L).$$

Izrek 3.68 nam sedaj pove, da je

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = g(L) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right),$$

kar zaključimo dokaz. □

3.9 Leva in desna limita

Včasih nas zanima, kaj se dogaja s funkcijskimi vrednostmi, ko se x samo z ene strani (leve ali desne) bliža točki a . Najprej si oglejmo definiciji levega in desnega stekališča množice.

Definicija 3.74 Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$. Število $a \in \mathbb{R}$ je

- (1) **levo stekališče** množice D , če za vsak $r > 0$ interval $(a - r, a)$ vsebuje vsaj en element iz množice D ;
- (2) **desno stekališče** množice D , če za vsak $r > 0$ interval $(a, a + r)$ vsebuje vsaj en element iz množice D .

Definicija 3.75 Naj bo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}$.

- (1) Recimo, da je $a \in \mathbb{R}$ levo stekališče množice D . Pravimo, da je število $L \in \mathbb{R}$ **leva limita funkcije f , ko gre x proti a** , kar označimo kot

$$\lim_{x \uparrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L,$$

če velja:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, x \in (a - \delta, a) \implies f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

(2) Recimo, da je $a \in \mathbb{R}$ desno stekališče množice D . Pravimo, da je število $L \in \mathbb{R}$ **desna limita funkcije f , ko gre x proti a** , kar označimo kot

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L,$$

če velja:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, x \in (a, a + \delta) \implies f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

Oglejmo si nekaj zgledov.

Zgled 3.76 Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ naj bo podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} x & ; x \neq 2 \\ 0 & ; x = 2 \end{cases};$$

glejte zgled 3.66 in sliko 3.19. Že v omenjenem zgledu smo pokazali, da je

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2,$$

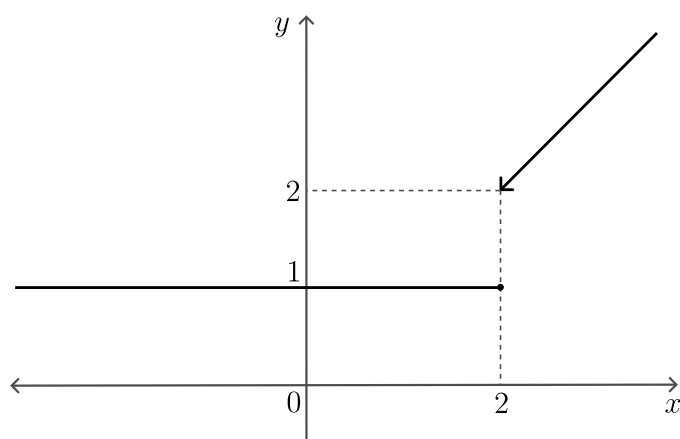
zlahka pa preverimo tudi, da velja

$$\lim_{x \uparrow 2} f(x) = \lim_{x \downarrow 2} f(x) = 2.$$

Zgled 3.77 Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ naj bo podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x \leq 2 \\ x & ; x > 2 \end{cases}.$$

Graf funkcije f je prikazan na sliki 3.21.



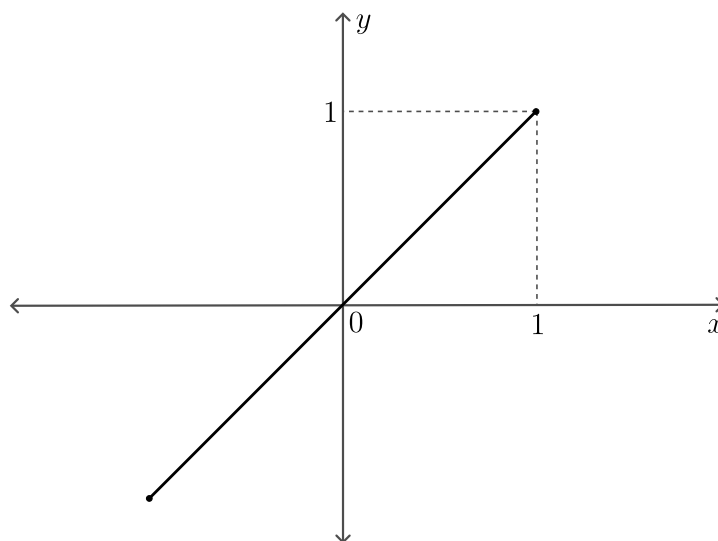
Slika 3.21: Graf funkcije f iz zgleda 3.77.

Opazimo, da velja

$$\lim_{x \uparrow 2} f(x) = 1 \quad \text{in} \quad \lim_{x \downarrow 2} f(x) = 2,$$

medtem ko $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ne obstaja. Posledično zaradi izreka 3.67 funkcija f ni zvezna v točki $a = 2$.

Zgled 3.78 Naj bo funkcija $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ podana s predpisom $f(x) = x$; glejte sliko 3.22.



Slika 3.22: Graf funkcije f iz zgleda 3.78.

Potem očitno velja

$$\lim_{x \uparrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1,$$

medtem ko $\lim_{x \downarrow 1} f(x)$ ni definirana in zato ne obstaja. Funkcija f je seveda zvezna (v točki $a = 1$).

Na podlagi definicij takoj opazimo, da velja spodnji rezultat.

Trditev 3.79 Naj bo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}$, in naj bo $L \in \mathbb{R}$. Če je $a \in \mathbb{R}$ levo in desno stekališče množice D , tedaj velja:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \uparrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} f(x) = L.$$

Iz navedene trditve in izreka 3.67 posledično dobimo še naslednjo trditev.

Trditev 3.80 Naj bo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}$. Če je $a \in D$ levo in desno stekališče množice D , tedaj je funkcija f zvezna v točki a natanko tedaj, ko velja

$$\lim_{x \uparrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} f(x) = f(a).$$

Opomba 3.81 Pokažemo lahko, da za računanje z levimi oziroma desnimi limitami veljajo podobna pravila kot za računanje z običajnimi limitami (glejte izreke 3.69, 3.70 in 3.73).

3.10 Limite v neskončnosti in neskončne limite

Pri zaporedjih smo obravnavali tudi limite v množici $\overline{\mathbb{R}}$ in v okviru tega definirali, kdaj je limita ∞ ali $-\infty$. Pri limitah funkcij je možnosti za take posplošitve še več, saj je lahko vrednost limite v množici $\overline{\mathbb{R}}$, lahko pa gre x proti ∞ oziroma $-\infty$. Spoznajmo torej še nekaj definicij in sproti navedimo tudi zglede, ki pa jih ne bomo dokazovali.

- (1) Naj bo množica $D \subseteq \mathbb{R}$ navzgor neomejena in naj bo $L \in \mathbb{R}$. Za funkcijo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiramo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in D, x > B \implies |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Zgled 3.82 *Velja*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0,$$

kar je lepo razvidno tudi iz slike 3.1.

V primeru, ko je $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ zaporedje, je zgornja definicija ekvivalentna definiciji limite zaporedja.

- (2) Naj bo množica $D \subseteq \mathbb{R}$ navzdol neomejena in naj bo $L \in \mathbb{R}$. Za funkcijo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiramo:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists B < 0, \forall x \in D, x < B \implies |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Zgled 3.83 *Preverimo lahko, da je*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

kar je ponovno razvidno iz slike 3.1.

- (3) Naj bo $a \in \mathbb{R}$ stekališče množice $D \subseteq \mathbb{R}$. Za funkcijo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiramo:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \iff (\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > M).$$

Zgled 3.84 *Velja*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty,$$

kar vidimo iz slike 3.11.

- (4) Naj bo $a \in \mathbb{R}$ levo stekališče množice $D \subseteq \mathbb{R}$. Za funkcijo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiramo:

$$\lim_{x \uparrow a} f(x) = \infty \iff (\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, x \in (a - \delta, a) \implies f(x) > M).$$

Zgled 3.85 Iz prejšnjega zgleda sledi tudi

$$\lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

(5) Naj bo $a \in \mathbb{R}$ desno stekališče množice $D \subseteq \mathbb{R}$. Za funkcijo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiramo:

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) = \infty \iff (\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, x \in (a, a + \delta) \implies f(x) > M).$$

Zgled 3.86 Preverimo lahko, da velja

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} = \infty,$$

kar je razvidno iz slike 3.1.

(6) Naj bo $a \in \mathbb{R}$ stekališče množice $D \subseteq \mathbb{R}$. Za funkcijo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiramo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty &\iff \\ (\forall M < 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) < M). \end{aligned}$$

Zgled 3.87 Podobno kot v zgledu 3.84 vidimo, da velja

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty.$$

(7) Naj bo $a \in \mathbb{R}$ levo stekališče množice $D \subseteq \mathbb{R}$. Za funkcijo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiramo:

$$\lim_{x \uparrow a} f(x) = -\infty \iff (\forall M < 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, x \in (a - \delta, a) \implies f(x) < M).$$

Zgled 3.88 Izkazuje se, da je

$$\lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty,$$

kar ponovno prikazuje slika 3.1.

(8) Naj bo $a \in \mathbb{R}$ desno stekališče množice $D \subseteq \mathbb{R}$. Za funkcijo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiramo:

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) = -\infty \iff (\forall M < 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, x \in (a, a + \delta) \implies f(x) < M).$$

Zgled 3.89 Iz zgleda 3.87 sledi

$$\lim_{x \downarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty.$$

(9) Naj bo množica $D \subseteq \mathbb{R}$ navzgor neomejena. Za funkcijo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiramo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \iff (\forall M > 0, \exists B > 0, \forall x \in D, x > B \implies f(x) > M).$$

Zgled 3.90 Preverimo lahko, da je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{ch} x = \infty,$$

kar je razvidno tudi iz slike 3.15.

(10) Naj bo množica $D \subseteq \mathbb{R}$ navzdol neomejena. Za funkcijo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiramo:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \iff (\forall M > 0, \exists B < 0, \forall x \in D, x < B \implies f(x) > M).$$

Zgled 3.91 Seveda je

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{ch} x = \infty,$$

kar se ponovno ujema s sliko 3.15.

(11) Naj bo množica $D \subseteq \mathbb{R}$ navzgor neomejena. Za funkcijo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiramo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \iff (\forall M < 0, \exists B > 0, \forall x \in D, x > B \implies f(x) < M).$$

Zgled 3.92 Očitno je, da velja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-x^2) = -\infty.$$

(12) Naj bo množica $D \subseteq \mathbb{R}$ navzdol neomejena. Za funkcijo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiramo:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \iff (\forall M < 0, \exists B < 0, \forall x \in D, x < B \implies f(x) < M).$$

Zgled 3.93 Izkaže se, da je

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sh} x = -\infty,$$

kar je razvidno iz slike 3.15.

Opomba 3.94 Pokažemo lahko, da za računanje limit iz točk (1) oziroma (2) funkcij $f + g$, $f - g$, fg , $\frac{f}{g}$ in $g \circ f$ veljajo podobna pravila kot za računanje z običajnimi limitami (glejte izreka 3.69 in 3.73). Prav tako se izkaže, da pravilo sendviča velja za vse zgoraj naštetih tipe limit (glejte izrek 3.70).

Zgled 3.95 Z uporabo navedenih pravil za računanje z limitami lahko izračunamo na primer

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{2 - 0}{1 + 0} = 2.$$

Za limito

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3}{x + 2}$$

iz zgornjega zgleda pravimo, da je tipa $\frac{\infty}{\infty}$, saj imata izraza v števcu in imenovalcu limito ∞ , ko gre x proti ∞ . Podobno je limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

iz posledice 3.71 tipa $\frac{0}{0}$, saj se izraza v števcu in imenovalcu bližata 0, ko gre x proti 0, enako pa velja tudi za limite, ki jih bomo obravnavali v trditvah 3.97 in 3.98. Po drugi strani so limite iz trditve 3.96 tipa 1^∞ oziroma $1^{-\infty}$. Izrazi, kot so $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ , v kontekstu računanja limit sodijo med tako imenovane **nedoločene izraze**, saj vrednosti limit takšnih tipov ni možno vnaprej določiti (vrednost je odvisna od posameznega primera). Velja recimo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3}{x + 2} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x} = 3, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \infty,$$

čeprav so vse štiri limite tipa $\frac{\infty}{\infty}$. Pri nadaljnjem študiju analize boste spoznali koristna orodja, ki omogočajo enostavno računanje nekaterih limit omenjenih tipov.

Izkaže pa se, da lahko za številne tipe limit, ki vključujejo ∞ ali $-\infty$, v splošnem določimo rezultat [15], zato so na primer smiselna naslednja pravila za računanje v množici $\overline{\mathbb{R}}$:

- (1) $\infty + \infty = \infty$, $-\infty + (-\infty) = -\infty$,
- (2) $\infty \cdot \infty = \infty$, $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$, $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$, $(-\infty) \cdot \infty = -\infty$,
- (3) če je $c \in \mathbb{R}$, potem velja $c + \infty = \infty + c = \infty$, $c + (-\infty) = -\infty + c = -\infty$, $\frac{c}{\infty} = 0$, $\frac{c}{-\infty} = 0$,
- (4) če je $c \in \mathbb{R}^+$, potem velja $c \cdot \infty = \infty \cdot c = \infty$, $c \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot c = -\infty$, $\frac{\infty}{c} = \infty$, $\frac{-\infty}{c} = -\infty$,
- (5) če je $c \in \mathbb{R}^-$, potem velja $c \cdot \infty = \infty \cdot c = -\infty$, $c \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot c = \infty$, $\frac{\infty}{c} = -\infty$, $\frac{-\infty}{c} = \infty$.

Pojasnimo nekoliko natančneje, kaj pomeni pravilo $\infty + \infty = \infty$. Naj bo $a \in \mathbb{R}$ stekališče množice $D \subseteq \mathbb{R}$. Recimo, da za funkciji $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ velja

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty.$$

Potem zlahka preverimo, da velja tudi

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \infty,$$

zato je smiselno pisati $\infty + \infty = \infty$. Analogna situacija je v primerih, ko imamo levo limito, desno limito, ali pa ko gre x proti ∞ oziroma $-\infty$ (glejte tudi zgled 2.55). Na podoben način lahko utemeljimo vsa ostala pravila aritmetike v množici $\overline{\mathbb{R}}$, ki so navedena zgoraj.

3.11 Nekaj posebnih limit

V tem razdelku bomo spoznali še nekaj pomembnih limit, pri čemer v dokazih trditev sledimo pristopu iz virov [3, 22].

Trditev 3.96 *Velja*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x} = e$$

in

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Dokaz. Iz definicije 2.79 vemo, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Za poljuben $x > 1$ določimo $n = [x]$, kar pomeni, da je $n \in \mathbb{N}$ in da velja $n \leq x < n + 1$. Potem je očitno

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Ker je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = \frac{e}{1} = e$$

in

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) = e \cdot 1 = e,$$

po pravilu sendviča za limite funkcij dobimo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (3.2)$$

Podobno lahko pokažemo, da iz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e$$

sledi tudi

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x} = e. \quad (3.3)$$

Z uporabo nove spremenljivke $t = \frac{1}{x}$ iz enakosti (3.2) dobimo

$$\lim_{t \downarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e,$$

iz enakosti (3.3) pa

$$\lim_{t \uparrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e.$$

Zadnji dve formuli končno implicirata še

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

kar zaključimo dokaz. □

Trditev 3.97 Če je $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, potem velja

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}.$$

V posebnem primeru je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Dokaz. Z uporabo prejšnje trditve lahko izpeljemo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \log_a(1+x) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} \right) \\ &= \log_a \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right) = \log_a e = \frac{1}{\ln a}, \end{aligned}$$

kjer smo pri tretji enakosti uporabili izrek 3.73 in seveda tudi zveznost logaritemske funkcije (v točki e). □

Trditev 3.98 Če je $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, potem velja

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

V posebnem primeru je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Dokaz. V dano limito vpeljimo novo spremenljivko $t = a^x - 1$, kar seveda pomeni, da velja $x = \log_a(1+t)$. Opazimo, da gre tudi t proti 0, ko gre x proti 0, zato dobimo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+t)}{t}} = \frac{1}{\frac{1}{\ln a}} = \ln a,$$

pri čemer smo uporabili prejšnjo trditev. □

Razdelek zaključimo s primerom funkcije, ki je definirana na množici $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, vendar pa za njo ne obstajata niti leva niti desna limita, ko gre x proti 0.

Zgled 3.99 V tem zgledu pokažimo (na podoben način kot v gradivu [15]), da ne obstaja limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}.$$

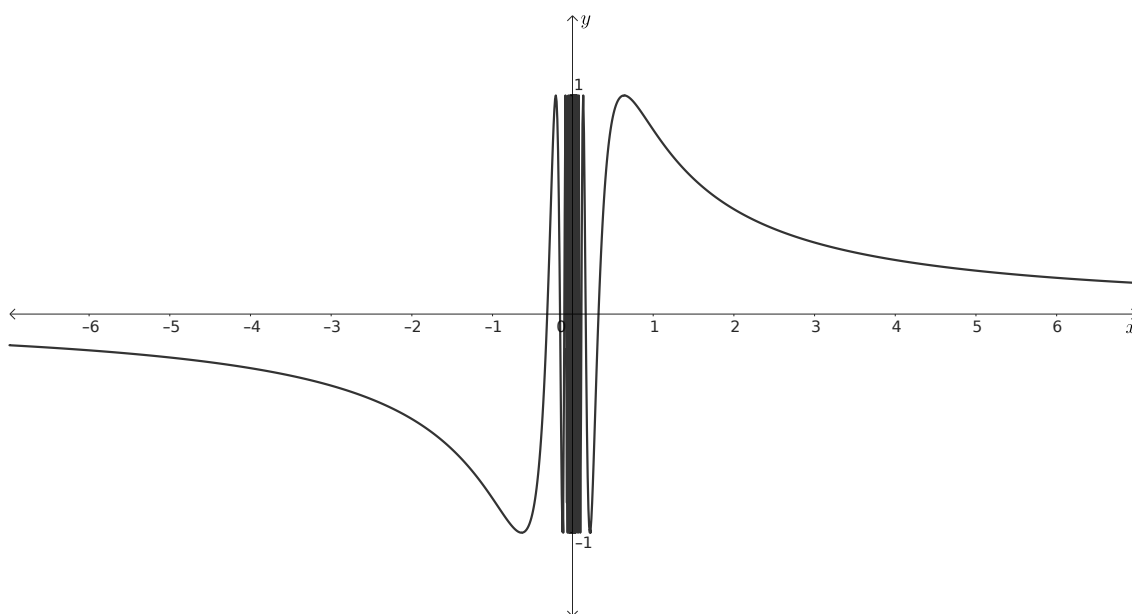
Razmislimo, kdaj obravnavana funkcija zavzame vrednosti 1 oziroma -1 . Opazimo, da je

$$\sin \frac{1}{x} = 1 \iff \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff x = \frac{2}{\pi + 4k\pi},$$

kjer je $k \in \mathbb{Z}$. Podobno je

$$\sin \frac{1}{x} = -1 \iff \frac{1}{x} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \iff x = \frac{2}{3\pi + 4k\pi},$$

kjer je $k \in \mathbb{Z}$. Iz tega vidimo, da funkcija doseže vrednost 1 v točkah, ki so poljubno blizu številu 0, prav tako pa doseže vrednost -1 v točkah, ki so poljubno blizu številu 0 (glejte sliko 3.23). Rečemo lahko tudi, da funkcija oscilira med 1 in -1 , ko se x bliža 0, zato limita ne obstaja. Na podoben način utemeljimo, da ne obstajata niti leva niti desna limita, ko gre x proti 0.



Slika 3.23: Graf funkcije f , ki je podana s predpisom $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ za vse $x \neq 0$.

3.12 Primeri uporabe limit pri računanju odvodov

Odvide funkcij boste sicer obravnavali v nadaljevanju študija, vendar si bomo na tem mestu vseeno ogledali nekaj osnovnih rezultatov na to temo, saj so odvodi definirani s pomočjo limit (pri tem bomo sledili zlasti viroma [3, 10]). Opomnimo, da imajo odvodi široko uporabo, saj lahko na primer z njihovo pomočjo ugotovimo, kje funkcija pada oziroma narašča, poiščemo ekstreme funkcije, določimo tangento na graf funkcije v neki točki itn.

Definicija 3.100 Naj bo $a \in D \cap D'$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}$. Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ je **odvedljiva v točki** a , če obstaja limita

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

V tem primeru to limito imenujemo **odvod funkcije f v točki a** in pišemo

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Opomba 3.101 Naj bo funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva v točki $a \in D \cap D'$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}$, in naj bo $h \in \mathbb{R}$ tak, da je $x = a + h \in D$. Opazimo, da število

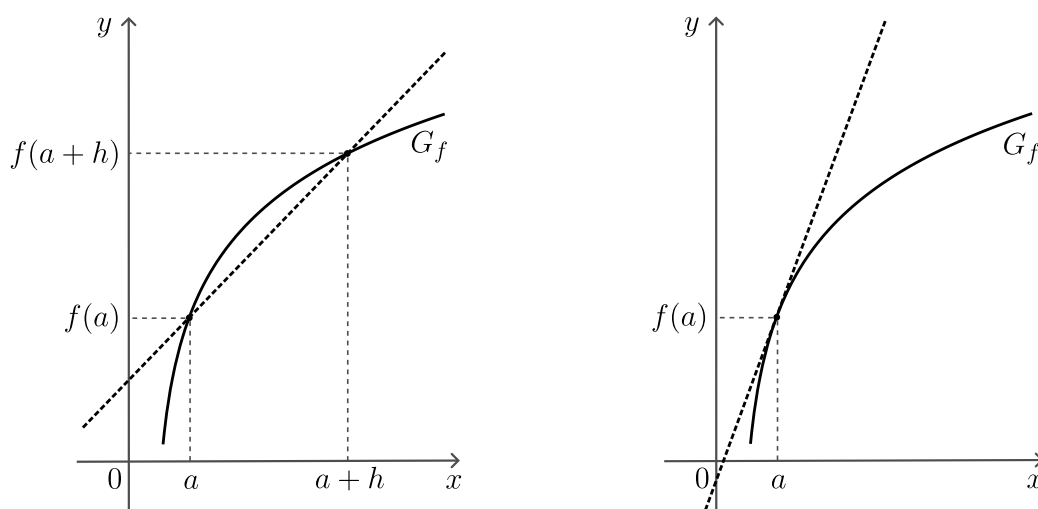
$$k_s = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

predstavlja smerni koeficient premice, ki poteka skozi točki $(a, f(a))$ in $(a+h, f(a+h))$. To premico imenujemo tudi **sekanta**. Posledično je

$$k_t = f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

smerni koeficient tangente na graf funkcije f v točki a (glejte sliko 3.24). Omenjena **tangenta** je namreč definirana kot premica, podana z enačbo

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$



Slika 3.24: Graf funkcije f s sekanto (levo) in graf funkcije f s tangento (desno).

Definicija 3.102 Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$. Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ je **odvedljiva**, če je odvedljiva v vsaki točki $a \in D$. V tem primeru dobimo novo funkcijo $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$, imenovano **odvod funkcije f** , ki vsakemu $a \in D$ priredi odvod funkcije f v točki a .

Omenimo še pomembno povezavo med odvedljivostjo in zveznostjo.

Trditev 3.103 Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}$. Če je funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva v točki $a \in D \cap D'$, potem je v točki a tudi zvezna.

Dokaz. Predpostavimo, da je funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva v točki $a \in D \cap D'$. Opazimo, da velja

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) + f(a) \right) \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow a} (x - a) \right) + \lim_{x \rightarrow a} f(a) \\ &= f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a),\end{aligned}$$

pri čemer smo lahko delili z $x - a$, ker pri obravnavi limite ni pomembno, kaj se z izrazom dogaja v točki a . Iz izreka 3.67 sedaj sledi, da je funkcija f zvezna v točki a . $\square$

V naslednjem zgledu pokažimo, da obrat zapisane trditve ne velja.

Zgled 3.104 Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ naj bo podana s predpisom $f(x) = |x|$. V zgledu 3.38 smo pokazali, da je f zvezna funkcija. Sedaj preverimo, da funkcija f ni odvedljiva v točki $a = 0$. Opazimo, da je

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Ker smo obravnavali desno limito, ko gre x proti 0, je bilo v zgornjem računu dovoljeno pisati kar x namesto $|x|$, saj lahko predpostavimo, da je x pozitivno število. Seveda pa zadnja enakost velja, ker je $\frac{x}{x} = 1$ za vse $x \neq 0$, pri računanju limite pa ni pomembno, kaj se z izrazom dogaja v točki 0. Podobno je

$$\lim_{x \uparrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \uparrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \uparrow 0} \frac{-x}{x} = -1,$$

s čimer smo pokazali, da limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

ne obstaja (glejte trditev 3.79), zato funkcija f ni odvedljiva v točki $a = 0$.

V nadaljevanju izpeljimo odvode nekaterih elementarnih funkcij.

- (1) Izberimo poljubno število $c \in \mathbb{R}$. Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ naj bo podana s predpisom $f(x) = c$ (f je torej konstantna funkcija). Izračunajmo odvod funkcije f v poljubni točki $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

- (2) Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija, podana s predpisom $f(x) = x$. Izračunajmo odvod funkcije f v poljubni točki $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1.$$

- (3) Naj bo funkcija $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ podana s predpisom $f(x) = \frac{1}{x}$. Potem za vse $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ velja

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x(x+0)} = -\frac{1}{x^2}.$$

- (4) Naj bo f funkcija sinus. Izračunajmo najprej spodnjo limito, pri čemer uporabimo tudi posledico 3.71:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos h)^2 - 1}{h(\cos h + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(\sin h)^2}{h(\cos h + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h(\sin h)^2}{h^2(\cos h + 1)} \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \right) \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \right) \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{\cos h + 1} \right) = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Z uporabo adicijskega izreka in pravkar izračunane limite ugotovimo, da za poljuben $x \in \mathbb{R}$ velja

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \sin x \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \right) = (\sin x) \cdot 0 + (\cos x) \cdot 1 = \cos x. \end{aligned}$$

- (5) Predpostavimo, da je $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$. Naj bo funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ podana s predpisom $f(x) = a^x$. Za poljuben $x \in \mathbb{R}$ je

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x (a^h - 1)}{h} = a^x \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} \right) = a^x \ln a,$$

kjer smo pri zadnji enakosti uporabili trditev 3.98.

- (6) Spet predpostavimo, da je $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$. Naj bo funkcija $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ podana s predpisom $f(x) = \log_a x$. Za poljuben $x \in (0, \infty)$ je

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}.$$

V dobljeno limito vpeljimo novo spremenljivko $u = \frac{h}{x}$. Seveda gre tudi u proti 0, če gre h proti 0, zato dobimo

$$f'(x) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+u)}{xu} = \frac{1}{x} \left(\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+u)}{u} \right) = \frac{1}{x \ln a},$$

kjer smo pri zadnji enakosti uporabili trditev 3.97.

Pokazali smo torej nekaj primerov, kako lahko limite, izpeljane v predhodnih razdelkih, uporabimo pri računanju odvodov. Kot že omenjeno, pa boste veliko več o odvodih spoznali pri naslednjem predmetu s področja matematične analize.

Literatura

- [1] F. Ayres, E. Mendelson, *Schaum's Outline of Calculus*, 4th ed., McGraw-Hill, New York [etc.], 1999.
- [2] I. Banič, *Analiza I (potence in koreni)*, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Maribor, 2019. Dostopno 12. 8. 2025 na povezavi: <https://omr.fnm.um.si/index.php/2019/03/20/analiza-i-3/>
- [3] I. Banič, *Predavanja iz Analize I (gradivo v spletni učilnici Moodle)*, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Maribor, 2021.
- [4] I. Banič, *Analiza realne osi (interno neobjavljeno gradivo)*, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Maribor, 2023.
- [5] E. D. Bloch, *Proofs and Fundamentals: A First Course in Abstract Mathematics*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 2010.
- [6] E. D. Bloch, *The Real Numbers and Real Analysis*, Springer, New York, 2011.
- [7] M. Dobovišek, M. Hladnik, M. Omladič, *Rešene naloge iz analize I*, DMFA, Ljubljana, 1992.
- [8] B. Drinovec-Drnovšek, S. Strle, *Naloge iz analize 1: z odgovori, nasveti in rešitvami*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2021.
- [9] N. Fardin, L. Li, Liangpan, Real numbers as infinite decimals, *The Mathematics Enthusiast* 18 (2021), članek 4.
- [10] J. Globevnik, M. Brojan, *Analiza I*, Ljubljana, 2012. Dostopno 3. 9. 2025 na povezavi: <https://users.fmf.uni-lj.si/globevnik/skripta.pdf>
- [11] B. Lafferriere, G. Lafferriere, M. N. Nguyen, *Introduction to Mathematical Analysis I*, 3rd ed., Portland State University Library, Portland, 2022.
- [12] S. Lipschutz, *Schaum's Outline of Theory and Problems of Set Theory and Related Topics*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York [etc.], 1998.
- [13] E. Landau, *Foundations of Analysis: The Arithmetic of Whole, Rational, Irrational and Complex Numbers. A Supplement to Text-books on the Differential and Integral Calculus*, 3rd ed., Chelsea Publishing Company, New York, 1966.

- [14] S. Mardešić, *Matematička analiza: u n -dimenzionalnom realnom prostoru. Dio 1, Brojevi, konvergencija, neprekidnost*, Školska knjiga, Zagreb, 1979.
- [15] U. Milutinović, *Zapiski predavanj pri predmetu Osnove analize v študijskem letu 2019/20 (interno neobjavljeno gradivo)*, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Maribor, 2020.
- [16] D. Pagon, *Osnove evklidske geometrije*, DZS, Ljubljana, 1995.
- [17] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York [etc.], 1976.
- [18] M. Slapar, *Zapiski predavanj iz osnov matematične analize*, Ljubljana, 2012. Dostopno 12. 8. 2025 na povezavi: <https://users.fmf.uni-lj.si/slapar/OMA.pdf>
- [19] P. Šemrl, *Osnove višje matematike I*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2009.
- [20] I. Vidav, *Višja matematika I*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 1994.
- [21] R. C. Wrede, M. R. Spiegel, *Schaum's Outlines Advanced Calculus*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York [etc.], 2010.
- [22] P. Žigert Pleteršek, M. Črepnjak, *Matematika A: za študente FKKT UM*, 1. izd., Univerzitetna založba Univerze v Mariboru, Maribor, 2022.

SKRIPTA PRI PREDMETU

OSNOVE ANALIZE

ZA ŠTUDENTE SMERI

IZOBRAŽEVALNA MATEMATIKA

NA ŠTUDIJSKEM PROGRAMU

PREDMETNI UČITELJ

NIKO TRATNIK

Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Maribor, Slovenija
niko.tratnik@um.si

Pričujoča skripta predstavlja študijsko gradivo pri predmetu Osnove analize, ki ga v prvem letniku poslušajo študenti smeri Izobraževalna matematika v okviru enovitega magistrskega študijskega programa Predmetni učitelj na Fakulteti za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru. Skripta je nastala v okviru priprav na predavanja pri omenjenem predmetu in je namenjena sistematični obravnavi temeljnih pojmov matematične analize. V prvem poglavju je podan eden izmed možnih načinov vpeljave realnih števil, pri čemer so obravnavani aksiomi urejenega komutativnega obsega (urejenega polja), supremum in infimum, Dedekindov aksiom ter konstrukcija realnih števil (vključno z Dedekindovimi rezi), poglavje pa se zaključí s kompleksnimi števili. Drugo poglavje obravnava številska zaporedja in vrste, posebna pozornost pa je namenjena tudi vpeljavi potence z realnim eksponentom. Tretje poglavje je posvečeno zveznosti in limitam realnih funkcij ene realne spremenljivke, pri čemer so obravnavana tudi stekališča množic, leve in desne limite ter limite v neskončnosti in neskončne limite.

DOI

[https://doi.org/
10.18690/um.fnm.1.2026](https://doi.org/10.18690/um.fnm.1.2026)

ISBN

978-961-299-XXX-X

Ključne besede:

matematična analiza,
realna števila,
kompleksna števila,
zaporedja,
vrste,
realne funkcije realne
spremenljivke,
zveznost,
limite



Univerzitetna založba
Univerze v Mariboru

DOI

[https://doi.org/
10.18690/um.fnm.1.2026](https://doi.org/10.18690/um.fnm.1.2026)

ISBN

978-961-299-XXX-X

COURSE MATERIAL FOR BASIC ANALYSIS FOR STUDENTS OF THE EDUCATIONAL MATHEMATICS STUDY FIELD IN THE SUBJECT TEACHER STUDY PROGRAMME

NIKO TRATNIK

University of Maribor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Maribor, Slovenia
niko.tratnik@um.si

Keywords:

mathematical analysis,
real numbers,
complex numbers,
sequences,
series,
real-valued functions of a
real variable,
continuity,
limits

This course material is intended for the Basic Analysis course, taken in the first year by students of the Educational Mathematics study field in the Subject Teacher integrated master's study programme at the Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Maribor. The material was developed in preparation for the lectures and provides a systematic treatment of the fundamental concepts of mathematical analysis. The first chapter presents one possible introduction to real numbers, covering the axioms of an ordered field, supremum and infimum, the Dedekind axiom, and the construction of real numbers (including Dedekind cuts), and concludes with complex numbers. The second chapter discusses sequences and series of real numbers, with particular emphasis on the definition of powers with real exponents. The third chapter is devoted to continuity and limits of real-valued functions of one real variable, including accumulation points of sets, one-sided limits, infinite limits, and limits at infinity.



University of Maribor Press

Iz recenzije

Sklepno lahko ocenimo, da skripta predstavlja kakovostno, strokovno in didaktično premišljeno študijsko gradivo, ki učinkovito podpira razumevanje temeljnih pojmov matematične analize. Njena največja vrednost je v jasni teoretični zasnovi in logični povezanosti vsebine, kar omogoča poglobljeno razumevanje snovi, hkrati pa spodbuja samostojno učenje.

**Uroš
KUZMAN**

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko



Univerza v Mariboru

Fakulteta za naravoslovje
in matematiko