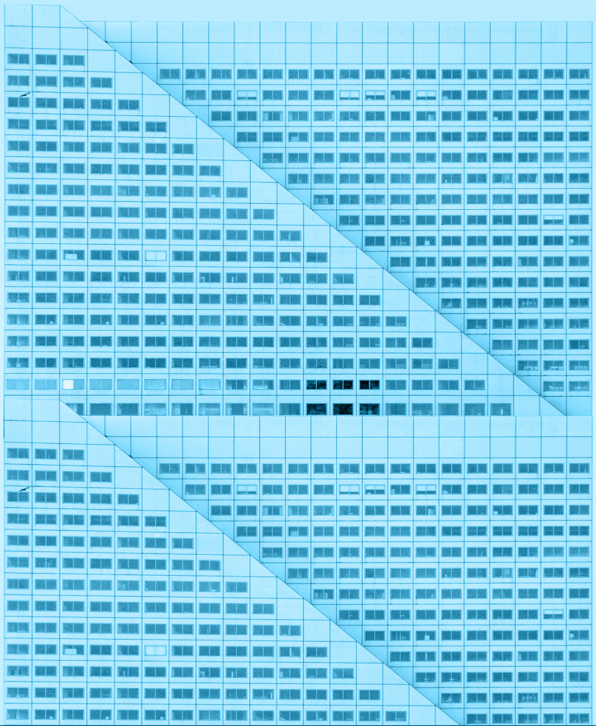
Aleksander Kelenc



Zbirka rešenih izpitnih nalog pri predmetu

# VERJETNOST

Univerzitetna založba
Univerze v Mariboru

Univerza v Mariboru

Fakulteta za elektrotehniko,
računalništvo in informatiko

# Zbirka rešenih izpitnih nalog pri predmetu Verjetnost

Avtor
**Aleksander Kelenc**

April 2025

| | |
|---|---|
| **Naslov**<br>*Title* | **Zbirka rešenih izpitnih nalog pri predmetu Verjetnost**<br>*Collection of Solved Exam Problems in Probability* |
| **Avtor**<br>*Author* | Aleksander Kelenc<br>(Univerza v Mariboru, Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko) |
| **Recenzija**<br>*Review* | Gordana Radić<br>(Univerza v Mariboru, Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko) |
| **Lektoriranje**<br>*Language editing* | Aleksandra Tepeh<br>(Univerza v Mariboru, Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko) |
| **Tehnična urednika**<br>*Technical editors* | Aleksander Kelenc<br>(Univerza v Mariboru, Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko)<br><br>Jan Perša<br>(Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba) |
| **Oblikovanje ovitka**<br>*Cover designer* | Jan Perša<br>(Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba) |
| **Grafike na ovitku**<br>*Cover graphics* | Trikotniki, avtor: DavidZdd, pixabay.com, 2017<br>Bela zgradba, avtorica: Simone Hutsch, unsplach.com, 2018 |
| **Grafične priloge**<br>*Graphic material* | Viri so lastni, razen če ni navedeno drugače.<br>Kelenc (avtor), 2025 |
| **Založnik**<br>*Published by* | **Univerza v Mariboru**<br>**Univerzitetna založba**<br>Slomškov trg 15, 2000 Maribor, Slovenija<br>https://press.um.si, zalozba@um.si |
| **Izdajatelj**<br>*Issued by* | **Univerza v Mariboru**<br>**Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko**<br>Koroška cesta 46, 2000 Maribor, Slovenija<br>https://feri.um.si, feri@um.si |
| **Izdaja**<br>*Edition* | Prva izdaja |
| **Vrsta publikacije**<br>*Publication type* | E-knjiga |
| **Izdano**<br>*Published at* | Maribor, Slovenija, april 2025 |
| **Dostopno na**<br>*Available at* | https://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/966 |
| **Ime projekta**<br>*Project name* | NOO, Razvoj prožnih učnih pristopov z mikrodokazili za digitalno in zeleno preobrazbo izobraževanja za prehod v Družbo 5.0 – Univerza v Mariboru, Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko |

NAČRT ZA OKREVANJE IN ODPORNOST

Univerza v Mariboru

REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA VISOKO ŠOLSTVO, ZNANOST IN INOVACIJE

Financira Evropska unija
NextGenerationEU

**Izdajo sofinancirata Evropska unija – NextGenerationEU in Republika Slovenija, Ministrstvo za visoko šolstvo, znanost in inovacije.**

```
CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Univerzitetna knjižnica Maribor

519.2(0.034.2)(076)

KELENC, Aleksander
    Zbirka rešenih izpitnih nalog pri predmetu Verjetnost [Elektronski
vir] / avtor Aleksander Kelenc. - 1. izd. - Maribor : Univerza v
Mariboru, Univerzitetna založba, 2025

Način dostopa (URL): https://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/966

ISBN 978-961-286-978-6 (PDF)
doi: 10.18690/um.feri.3.2025
COBISS.SI-ID 233021443
```



**ISBN** 978-961-286-978-6 (pdf)

**DOI** https://doi.org/10.18690/um.feri.3.2025

**Cena** Brezplačni izvod

**Odgovorna oseba založnika** / *For publisher* Prof. dr. Zdravko Kačič
rektor Univerze v Mariboru

**Citiranje** / *Attribution* Kelenc, A. (2025). *Zbirka rešenih izpitnih nalog pri predmetu Verjetnost.* Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba doi: 10.18690/um.feri.3.2025

# KAZALO

# PREDGOVOR

Pričujoča zbirka rešenih nalog je učni pripomoček, namenjen predvsem študentom 3. letnika univerzitetnih študijskih programov *Elektrotehnika* ter *Računalništvo in informacijske tehnologije* na UM FERI. Na omenjenih programih se predmet *Verjetnost* pojavlja kot izbirni, vendar bo zbirka koristna tudi drugim študentom, ki v okviru študija poslušajo predmete s področja verjetnosti.

Zbirka je strukturno razdeljena na dve poglavji. Prvo poglavje vsebuje pretekle izpitne naloge, drugo pa njihove rešitve ter nekatere postopke, ki vodijo do teh rešitev. Vsako poglavje je nadalje razdeljeno na podpoglavja, ki večinoma sovpadajo s poglavji pri omenjenem predmetu *Verjetnost*. Večina zbranih nalog je bila del izpitov ali delnih testov v letih 2021–2023.

Za uspešno reševanje nalog iz te zbirke je potrebno osnovno znanje kombinatorike in verjetnosti. Zato naj bo zbirka v pomoč pri zaključni pripravi na izpit, ne pa kot glavno ali edino študijsko gradivo.

Kljub skrbnemu pregledu se lahko v besedilu pojavi kakšna tipkarska napaka. V takšnem primeru me lahko kontaktirate na elektronski naslov aleksander.kelenc@um.si.

# 1

# RAČUNSKE NALOGE

## 1.1 POGOJNA VERJETNOST IN POPOLNA VERJETNOST

**Naloga 1.** Hkrati mečemo dve pošteni igralni kocki.

(a) Kolikšna je verjetnost, da je pri metu vsota pik na obeh kockah enaka 7, če vemo, da je produkt pik na obeh kockah lih?

(b) Kolikšna je verjetnost, da je pri metu vsota pik na obeh kockah enaka 7, če vemo, da je produkt pik na obeh kockah sod?

(c) Met obeh kock ponovimo štirikrat. Kolikšna je verjetnost, da je vsota pik na obeh kockah vsaj enkrat deljiva s 5?

**Naloga 2.** Dva igralca mečeta pošteno igralno kocko. Prvi vrže igralno kocko enkrat, drugi pa tolikokrat, kot je bilo število pik pri metu prvega. Kolikšna je verjetnost, da je prvi vrgel tri pike, če je vsota pik vseh metov drugega enaka pet.

**Naloga 3.** V škatli imamo na voljo 20 baterij, od tega jih je 5 z napako. Za delovanje stenske ure moramo vstaviti dve bateriji, ki ju naključno izberemo iz škatle. Če vstavimo v uro dve brezhibni bateriji, potem bo ura gotovo delovala. Če vstavimo v uro eno brezhibno baterijo in eno baterijo z napako, potem je verjetnost za delujočo uro enaka 0.7. Če pa vstavimo dve bateriji z napako, potem je verjetnost za delujočo uro enaka 0.3.

(a) Kolikšna je verjetnost, da bo ura delovala?

(b) Kolikšna je verjetnost, da smo izbrali dve bateriji z napako, če ura deluje?

**Naloga 4.** Iz intervala $[0, 1]$ naključno in neodvisno izberemo dve točki $x$ in $y$.

(a) Izračunaj verjetnost, da je razdalja med obema točkama manjša od $\frac{1}{2}$.

(b) Izračunaj verjetnost, da je vsota vrednosti obeh točk manjša od ena.

(c) Izračunaj verjetnost dogodkov iz točk (a) in (b), če vemo, da je vrednost točke $x$ večja od $\frac{1}{4}$.

**Naloga 5.** V nagradni igri naključno izberemo točko $T(x,y)$ iz območja $D = [-2,3] \times [-1,2]$. Glede na to, v katerem kvadrantu se nahaja točka $T$, potem iz bobna z 10 srečkami (4 dobitne in 6 praznih) izžrebamo različno število srečk:

- če se točka $T$ nahaja v $I$. kvadrantu ($x \geq 0 \wedge y \geq 0$), potem izžrebamo 1 srečko;
- če se točka $T$ nahaja v $II$. kvadrantu ($x < 0 \wedge y \geq 0$), potem izžrebamo 2 srečki;
- če se točka $T$ nahaja v $III$. kvadrantu ($x < 0 \wedge y < 0$), potem izžrebamo 3 srečke;
- če se točka $T$ nahaja v $IV$. kvadrantu ($x \geq 0 \wedge y < 0$), potem izžrebamo 4 srečke.

Kolikšna je verjetnost, da smo izžrebali vsaj eno dobitno srečko? Kolikšna je verjetnost, da je bila točka $T$ iz prvega kvadranta, če vemo, da smo izžrebali vsaj eno dobitno srečko?

**Naloga 6.** Dva igralca igrata igro metanja igralne kocke. Če eden izmed igralcev vrže 6, potem meče še enkrat, sicer je na vrsti nasprotnik. Igralec, ki igro začne, naj bo igralec $A$, njegov nasprotnik pa igralec $B$. Kolikšna je verjetnost, da bo četrti met po vrsti izvedel igralec $A$? Kolikšna je verjetnost, da je tretji met po vrsti izvedel igralec $B$, če vemo, da je četrti met izvedel igralec $A$?

**Naloga 7.** V poskusu, ki poteka v dveh fazah, najprej vržemo dve pošteni igralni kocki. Če padeta dve sodi števili, potem bomo v drugi fazi vrgli eno pošteno igralno kocko, če padeta sodo in liho število, potem bomo v drugi fazi vrgli dve pošteni igralni kocki, in če padeta dve lihi števili, potem bomo v drugi fazi vrgli tri poštene igralne kocke.

(a) Kolikšna je verjetnost, da je v drugi fazi vsota vseh padlih pik enaka 6?

(b) Kolikšna je verjetnost, da sta v prvi fazi padli dve sodi števili, če je v drugi fazi vsota vseh padlih pik enaka 6?

**Naloga 8.** Iz intervala $[0,3]$ naključno in neodvisno izberemo dve točki $x$ in $y$. Če je vsota vrednosti obeh točk manjša od dva, vržemo en pošten kovanec. Če je vsota vrednosti obeh točk večja ali enaka od dva in hkrati manjša od 3, potem vržemo dva poštena kovanca. Če je vsota vrednosti obeh točk večja ali enaka od tri, vržemo tri poštene kovance.

(a) Kolikšna je verjetnost, da sta padla natanko dva grba?

(b) Kolikšna je verjetnost, da je vsota obeh točk večja ali enaka od tri, če vemo, da sta padla natanko dva grba?

**Naloga 9.** Na voljo imamo štiri enake posode, v katerih je različno število črnih, belih in rdečih kroglic. V prvi posodi sta dve črni, dve beli in dve rdeči kroglici. V drugi posodi so tri črne, tri bele in tri rdeče kroglice. V tretji posodi so štiri črne, štiri bele in nič rdečih kroglic. V četrti posodi so tri črne, dve beli in ena rdeča kroglica. Naključno izberemo posodo in nato iz nje izvlečemo dve kroglici.

(a) Kolikšna je verjetnost, da sta izvlečeni kroglici različne barve?

(b) Kolikšna je verjetnost, da smo izbrali prvo posodo, če vemo, da sta izvlečeni kroglici različne barve?

## 1.2 diskretne naključne spremenljivke

**Naloga 10.** Biatlonec na zasledovalni tekmi strelja štirikrat po pet tarč. Dvakrat po pet tarč strelja leže in dvakrat po pet tarč strelja stoje. Predpostavimo, da so posamezni streli med seboj neodvisni in da naš biatlonec pri streljanju leže zadene tarčo z verjetnostjo 0.95, pri streljanju stoje pa z verjetnostjo 0.9. Izračunaj kolikšna je verjetnost, da bo naš biatlonec na zasledovalni tekmi zadel vsaj 18 strelov.

**Naloga 11.** Eno za drugo naključno izbiramo točko $T(x,y)$ iz območja $D = [-1,3] \times [-1,3]$, dokler ne izberemo točke iz prvega kvadranta ($x > 0 \wedge y > 0$). Naključna spremenljivka $X$ meri število vseh izbir točke $T$.

(a) Določi zalogo vrednosti in zapiši verjetnostno funkcijo spremenljivke $X$.

(b) Izračunaj verjetnost, da bo v drugi ali tretji izbiri točke $T$ izbrana točka iz prvega kvadranta.

(c) Izračunaj verjetnost, da v prvih štirih izbirah točke $T$ ne bo izbrana točka iz prvega kvadranta.

**Naloga 12.** V posodi imamo 3 poštene igralne kocke in 2 igralni kocki, ki imata na vseh šestih ploskvah po eno piko. Na slepo iz posode izvlečemo tri igralne kocke in jih vržemo. Število padlih enic je slučajna spremenljivka $X$. Zapiši verjetnostno shemo slučajne spremenljivke $X$.

**Naloga 13.** Janez je zaposlen v skladišču spletne trgovine z oblačili. Dobil je pet naročil za majico istega modela in velikosti. Dve majici morata biti rdeče barve, dve modre barve in ena črne barve. Janez pripravi pet identičnih paketov (v vsakem je ena majica), vendar jih pozabi označiti in sedaj ne ve, v katerem paketu je kakšna barva majice. Odloči se, da bo vseh pet naslovov napisal naključno na pakete - vsak naslov na en paket. Naključna spremenljivka $X$ naj meri število pravih barv majic na pravem naslovu.

(a) Zapiši verjetnostno shemo naključne spremenljivke $X$.

(b) Kolikšno je pričakovano število pravih barv majic na pravem naslovu?

**Naloga 14.** V posodi imamo 5 rdečih in 3 bele kroglice. Iz posode naenkrat vlečemo po dve kroglici tako dolgo, dokler ne izvlečemo dveh rdečih (kroglic ne vračamo v posodo). Naključna spremenljivka $X$ naj meri kolikokrat smo morali seči v posodo (vključno z zadnjim poskusom, ko izvlečemo dve rdeči). Zapišite verjetnostno shemo za naključno spremenljivko $X$.

**Naloga 15.** Igralec hkrati meče dva poštena kovanca tako dolgo, dokler ne padeta dva grba. Naključna spremenljivka $X$ meri število metov, ki so za to potrebni.

(a) Določi zalogo vrednosti naključne spremenljivke $X$ in zapiši njeno verjetnostno funkcijo.

(b) Izračunaj verjetnost dogodka, da bosta dva grba padla pri petem metu.

(c) Izračunaj verjetnost dogodka, da bosta dva grba padla prej kot je pričakovana vrednost.

(d) Izračunaj verjetnost dogodka, da bosta dva grba padla pri lihem metu.

**Naloga 16.** V posodi imamo dve pošteni igralni kocki, eno nepošteno igralno kocko s samimi enicami in eno nepošteno igralno kocko z eno enico, dvema dvojkama in tremi trojkami. Iz posode naključno izvlečemo dve igralni kocki in ju vržemo. Naključna spremenljivka $X$ meri največje število padlih pik na eni izmed obeh izvlečenih kock. Zapiši verjetnostno shemo naključne spremenljivke $X$.

**Naloga 17.** Dva igralca igrata igro metanja igralne kocke. Če igralec, ki je na potezi, vrže 1, potem izgubi igro. Če igralec, ki je na potezi, vrže 6, potem zmaga igro. Če igralec, ki je na potezi, vrže 2 ali 3, potem je na vrsti nasprotnik. Če igralec, ki je na potezi, vrže 4 ali 5, potem je še enkrat na vrsti sam. Naj bo $X$ naključna spremenljivka, ki meri kolikorat vržeta kocko, preden se igra zaključi.

(a) Določi zalogo vrednosti za $X$ in zapiši verjetnostno funkcijo.

(b) Kolikšno je pričakovano število metov, preden se igra zaključi?

(c) Kolikšna je verjetnost, da se igra konča po treh metih in zmaga pripada igralcu $A$, ki je igro začel?

## 1.3 ZVEZNE NAKLJUČNE SPREMENLJIVKE

**Naloga 18.** Točko $A$ izberemo naključno iz kroga s polmerom 2. Slučajna spremenljivka $X$ naj meri razdaljo točke $A$ do krožnice, ki omejuje ta krog.

(a) Zapiši porazdelitveno funkcijo naključne spremenljivke $X$ in skiciraj njen graf.

(b) Zapiši gostoto porazdelitve naključne spremenljivke $X$.

(c) Izračunaj povprečno oddaljenost točke $A$ do krožnice.

**Naloga 19.** Naj bo zvezna slučajna spremenljivka $X$ podana z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} a \sin x & ; \ 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & ; \ \text{sicer} \end{cases} .$$

(a) Določi konstanto $a$.

(b) Izračunaj porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$.

(c) Izračunaj $E(X)$.

(d) Izračunaj $P\left(X < \frac{\pi}{3}\right)$ in določi $x_0$, da bo $P\left(X < x_0\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$.

**Naloga 20.** Točko $T$ iz ravnine izberemo slučajno na trikotniku z oglišči $A(0,0)$, $B(4,0)$ in $C(0,4)$.

(a) Kolikšna je verjetnost, da je razdalja točke $T$ do najbližje stranice tega trikotnika manjša od 1?

(b) Slučajna spremenljivka $X$ naj meri razdaljo točke $T$ do najbližje stranice tega trikotnika. Zapiši porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke $X$.

**Naloga 21.** Naj bo zvezna slučajna spremenljivka $X$ podana z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^3} & ; \ x \geq 1 \\ 0 & ; \ \text{sicer} \end{cases} .$$

(a) Določi konstanto $a$.

(b) Izračunaj porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$.

(c) Izračunaj $E(X)$.

(d) Izračunaj $P\left(X < 3\right)$ in določi $x_0$, da bo $P\left(X < x_0\right) = \frac{1}{2}$.

**Naloga 22.** Točko $T$ iz ravnine izberemo slučajno na kvadratu z oglišči $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,2)$ in $D(0,2)$.

(a) Kolikšna je verjetnost, da je razdalja od točke $T$ do diagonale $AC$ tega kvadrata manjša od 1?

(b) Slučajna spremenljivka $X$ naj meri razdaljo od točke $T$ do diagonale $AC$ tega kvadrata. Zapiši porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke $X$.

## 1.4 DISKRETNI NAKLJUČNI VEKTORJI

**Naloga 23.** Trikrat zaporedoma vržemo pošteno igralno kocko. Naključna spremenljivka $X$ nam meri, kolikokrat je padla šestica. Naključna spremenljivka $Y$ nam meri, v katerem poskusu je prvič padla šestica, pri čemer naj 0 označuje, da šestica ni padla niti enkrat.

(a) Zapiši verjetnostno tabelo slučajnega vektorja $(X, Y)$.

(b) S pomočjo robnih porazdelitev izračunaj verjetnost dogodkov:

- $A$ - šestica je prvič padla v drugem poskusu;
- $B$ - šestica ni padla niti enkrat.

(c) Določi verjetnostno shemo spremenljivke $Z = X + Y$.

**Naloga 24.** Na vrhu smučišča čaka 5 smučarjev. V dolino vodijo tri različne proge: proga 1, proga 2 in proga 3. Vsak od smučarjev povsem naključno izbere eno od prog, po kateri se spusti. Naključna spremenljivka $X$ naj meri število smučarjev, ki so izbrali progo 1. Naključna spremenljivka $Y$ naj meri število smučarjev, ki so izbrali progo 2.

(a) Zapiši zalogo vrednosti in verjetnostno funkcijo za naključno spremenljivko $X$.

(b) Zapiši verjetnostno tabelo za naključni vektor $(X, Y)$.

**Naloga 25.** Trikrat zaporedoma vržemo pošteno igralno kocko. Naključna spremenljivka $X$ nam meri, kolikokrat je padla enica. Naključna spremenljivka $Y$ nam meri, po katerem metu je vsota metov prvič vsaj šest, pri čemer naj 0 označuje, da vsota niti po treh metih ne doseže šest.

(a) Zapiši verjetnostno tabelo slučajnega vektorja $(X, Y)$.

(b) S pomočjo robnih porazdelitev izračunaj verjetnost dogodkov:

- $A$ - enica je padla dvakrat;
- $B$ - vsota metov je prvič vsaj šest po drugem metu.

(c) Določi verjetnostno shemo spremenljivke $Z = X + Y$.

## 1.5 NALOGE IZ STATISTIKE

**Naloga 26.** Pri 40 naključnih osebah ženskega spola smo merili koncentracijo hemoglobina v krvi. Povprečje meritev znaša 130 $g/L$. Standardni odklon meritev pa znaša 8 $g/L$.

(a) Na podlagi meritev določi 95% interval zaupanja za populacijski standardni odklon koncentracije hemoglobina v krvi oseb ženskega spola.

(b) Na stopnji značilnosti 0.01 preveri domnevo, da je populacijsko povprečje večje od postavljene spodnje meje, ki znaša 125 $g/L$.

**Naloga 27.** Na vzorcu 16-ih študentov smo izmerili povprečno telesno višino 174.5 cm s standardnim odklonom 6.8 cm.

(a) Določi 90% interval zaupanja za populacijsko povprečje telesne višine študentov.

(b) Na stopnji značilnosti 0.05 preveri hipotezo, da je populacijski standardni odklon telesne višine študenta manjši od 10 cm.

**Naloga 28.** Naključne študente UM (vzorec je vseboval 213 študentov) smo spraševali, ali so cepljeni proti Covid-19, in s katerim cepivom so cepljeni. Dobljeni podatki so zbrani v naslednji tabeli:

| cepivo | $f_k$ |
|---|---|
| Pfizer/BioNTech | 51 |
| Moderna | 9 |
| AstraZeneca | 32 |
| Janssen | 4 |
| necepljen | 117 |

(a) Na podlagi podatkov iz tabele določi 90% interval zaupanja za delež cepljenih študentov na UM.

(b) Na stopnji značilnosti 1% preveri hipotezo, da je delež cepljenih študentov na UM večji od 40% (kolikor znaša nacionalni delež za starost med 18 in 24 let).

**Naloga 29.** Ob zaključku šolskega leta smo dobili zaključne ocene pri matematiki za 40 naključno izbranih dijakov. Podatki o teh ocenah (od 1 do 5) so zbrani v naslednji frekvenčni tabeli:

| ocena | $f_k$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| 3 | 12 |
| 4 | 17 |
| 5 | 6 |

(a) Določi povprečje in standardni odklon za zaključno oceno pri matematiki tega vzorca.

(b) Določi 99% interval zaupanja za populacijski delež odličnih ocen pri matematiki (delež petic).

(c) Na stopnji značilnosti 5% preveri hipotezo, da je populacijska povprečna vrednost za zaključno oceno pri matematiki večja od 3.3.

**Naloga 30.** Zbrali smo podatke o velikosti obutve 20 naključno izbranih študentov:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 42 | 44 | 45 | 44 | 43 |
| 41 | 42 | 44 | 43 | 43 |
| 46 | 44 | 45 | 44 | 43 |
| 43 | 42 | 41 | 44 | 43 |

(a) Zapiši frekvenčno tabelo s frekvencami in kumulativnimi frekvencami.

(b) Določi modus, mediano, povprečje in standardni odklon.

(c) Določi interval zaupanja za populacijsko povprečje $\mu$ velikosti obutve študentov na stopnji zaupanja 0.99.

# 2

## REŠITVE RAČUNSKIH NALOG

### 2.1 POGOJNA VERJETNOST IN POPOLNA VERJETNOST

**Naloga 1** Hkrati mečemo dve pošteni igralni kocki.

(a) Kolikšna je verjetnost, da je pri metu vsota pik na obeh kockah enaka 7, če vemo, da je produkt pik na obeh kockah lih?

(b) Kolikšna je verjetnost, da je pri metu vsota pik na obeh kockah enaka 7, če vemo, da je produkt pik na obeh kockah sod?

(c) Met obeh kock ponovimo štirikrat. Kolikšna je verjetnost, da je vsota pik na obeh kockah vsaj enkrat deljiva s 5?

**Rešitev:** Preden zapišemo rešitve, bomo vpeljali oznake za posamezne dogodke:

$A \ldots$ vsota pik na obeh kockah je enaka 7;
$B \ldots$ produkt pik na obeh kockah je lih;
$C \ldots$ produkt pik na obeh kockah je sod;
$D \ldots$ vsota pik na obeh kockah je deljiva s 5.

(a) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{0}{36}}{\frac{9}{36}} = 0.$

(b) $P(A|C) = \dfrac{P(A \cap C)}{P(C)} = \dfrac{\frac{6}{36}}{\frac{27}{36}} = \dfrac{6}{27}.$

(c) Iskano verjetnost lahko poiščemo z nasprotnim dogodkom, ki pravi, da vsota pik na kockah ni deljiva s 5.

$$1 - (P(\overline{D}))^4 = 1 - \left(\frac{29}{36}\right)^4 \approx 0.58.$$

**Naloga 2** Dva igralca mečeta pošteno igralno kocko. Prvi vrže igralno kocko enkrat, drugi pa tolikokrat, kot je bilo število pik pri metu prvega. Kolikšna je verjetnost, da je prvi vrgel tri pike, če je vsota pik vseh metov drugega enaka pet.

**Rešitev:** Dogodek se zgodi v dveh fazah, pri čemer vse možne situcije pri metu prvega igralca tvorijo popoln sistem dogodkov. Označimo te dogodke (hipoteze):

$H_i \ldots$ prvi igralec vrže $i$ pik, pri čemer $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

in preučevan dogodek:

$A \ldots$ vsota pik od drugega igralca je 5.

Iščemo pogojno verjetnost

$$P(H_3|A) = \frac{P(A|H_3) \cdot P(H_3)}{P(A)}.$$

Za hipoteze velja $P(H_i) = \frac{1}{6}$ za vse $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Da izračunamo $P(A)$ potrebujemo še naslednje pogojne verjetnosti:

- $P(A|H_1) = \frac{1}{6}$;
- $P(A|H_2) = \frac{4}{6^2} = \frac{4}{36}$;
- $P(A|H_3) = \frac{3+3}{6^3} = \frac{1}{36}$;
- $P(A|H_4) = \frac{4}{6^4} = \frac{4}{1296}$;
- $P(A|H_5) = \frac{1}{6^5} = \frac{1}{7776}$;
- $P(A|H_6) = 0$.

Sledi $P(A) = \sum_{i=1}^{6} (P(H_i) \cdot P(A|H_i)) = \frac{2401}{46656}$ in lahko izračunamo iskano verjetnost

$$P(H_3|A) = \frac{P(A|H_3) \cdot P(H_3)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{2401}{46656}} = \frac{216}{2401} \approx 0.09.$$

**Naloga** 3 V škatli imamo na voljo 20 baterij, od tega jih je 5 z napako. Za delovanje stenske ure moramo vstaviti dve bateriji, ki ju naključno izberemo iz škatle. Če vstavimo v uro dve brezhibni bateriji, potem bo ura gotovo delovala. Če vstavimo v uro eno brezhibno baterijo in eno baterijo z napako, potem je verjetnost za delujočo uro enaka 0.7. Če pa vstavimo dve bateriji z napako, potem je verjetnost za delujočo uro enaka 0.3.

(a) Kolikšna je verjetnost, da bo ura delovala?

(b) Kolikšna je verjetnost, da smo izbrali dve bateriji z napako, če ura deluje?

**Rešitev:** Dogodek se zgodi v dveh fazah, pri čemer vse možne situcije pri izbiri dveh baterij iz škatle tvorijo popoln sistem dogodkov. Označimo te dogodke (hipoteze):

$H_1 \ldots$ izberemo dve brezhibni bateriji;
$H_2 \ldots$ izberemo eno brezhibno baterijo in eno baterijo z napako;
$H_3 \ldots$ izberemo dve bateriji z napako;

in preučevan dogodek:

$A \ldots$ ura deluje.

(a) Iščemo verjetnost dogodka $A$, ki se izračuna s pomočjo formule

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} (P(H_i) \cdot P(A|H_i))$$

in zato moramo najprej določiti verjetnosti za hipoteze $P(H_i)$:

- $P(H_1) = \dfrac{\binom{15}{2}}{\binom{20}{2}} = \dfrac{21}{38}$;
- $P(H_2) = \dfrac{\binom{15}{1} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{20}{2}} = \dfrac{15}{38}$;
- $P(H_3) = \dfrac{\binom{5}{2}}{\binom{20}{2}} = \dfrac{1}{19}$;

nato pa še pogojne verjetnosti $P(A|H_i)$ za vse $i \in \{1, 2, 3\}$:

- $P(A|H_1) = 1$;
- $P(A|H_2) = 0.7$;
- $P(A|H_3) = 0.3$.

Sledi, da je $P(A) = \sum_{i=1}^{3} (P(H_i) \cdot P(A|H_i)) = \dfrac{321}{380}$.

(b) Odgovor na drugo vprašanje pa dobimo s pomočjo Bayesovega obrazca

$$P(H_3|A) = \frac{P(A|H_3) \cdot P(H_3)}{P(A)} = \frac{0.3 \cdot \frac{1}{19}}{\frac{321}{380}} = \frac{2}{107}.$$

**Naloga 4** Iz intervala $[0,1]$ naključno in neodvisno izberemo dve točki $x$ in $y$.

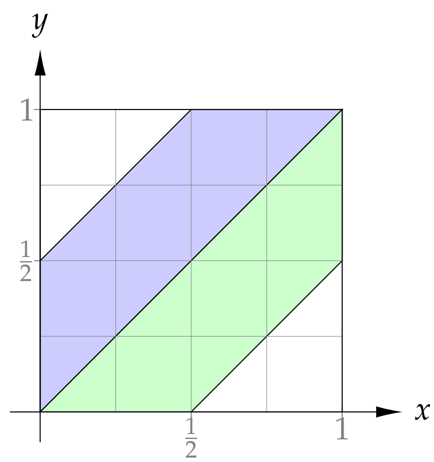
(a) Izračunaj verjetnost, da je razdalja med obema točkama manjša od $\frac{1}{2}$.

(b) Izračunaj verjetnost, da je vsota vrednosti obeh točk manjša od ena.

(c) Izračunaj verjetnost dogodkov iz točk (a) in (b), če vemo, da je vrednost točke $x$ večja od $\frac{1}{4}$.

**Rešitev:**

(a) Dogodek, da je razdalja med $x$ in $y$ manjša od $\dfrac{1}{2}$ lahko zapišemo s pomočjo absolutne vrednosti, torej $A = \left(|x-y| < \dfrac{1}{2}\right)$.



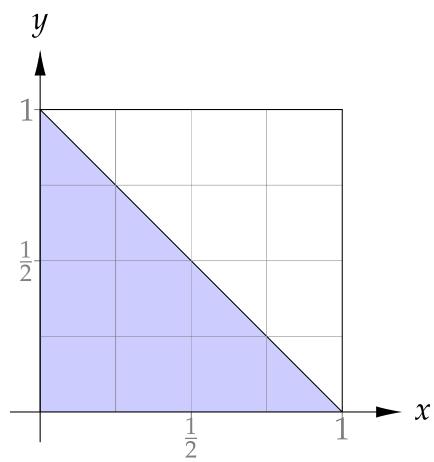

Razrešimo absolutno vrednost:

- $x \geq y: \; x - y < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow y > x - \dfrac{1}{2}$;
- $x < y: \; -(x-y) < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow y < x + \dfrac{1}{2}$.

Verjetnost dogodka $A$ izračunamo s pomočjo geometrijske verjetnosti:

$$P(A) = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2}{1} = \frac{3}{4}.$$

(b) Dogodek, da je vsota $x$ in $y$ manjša od 1 zapišemo kot $B = (x + y < 1)$.

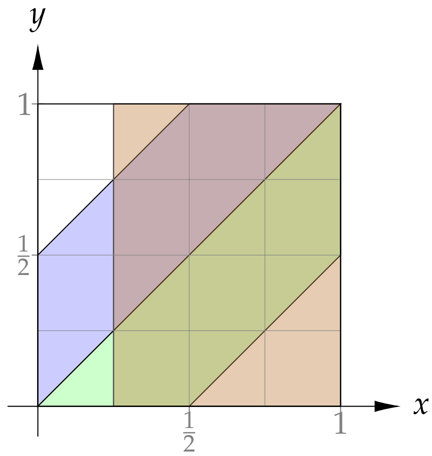



Skiciramo pogoj $y < -x+1$ in izračunamo verjetnost dogodka:

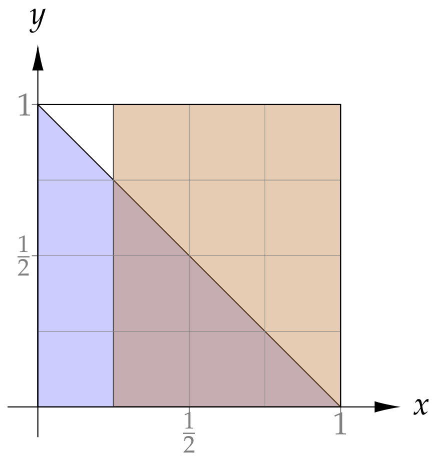
$$P(B) = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}.$$

(c) Dogodek, da je vrednost točke $x$ večja od $\frac{1}{4}$ je v tem primeru pogoj, ki ga je potrebno upoštevati. Označimo ta pogoj z dogodkom $C = \left(x > \frac{1}{4}\right)$ in izračunajmo obe pogojni verjetnosti.

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{32}}{\frac{3}{4}} = \frac{19}{24}.$$




$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{3}{8}.$$




**Naloga** 5 V nagradni igri naključno izberemo točko $T(x, y)$ iz območja $D = [-2, 3] \times [-1, 2]$. Glede na to, v katerem kvadrantu se nahaja točka $T$, potem iz bobna z 10 srečkami (4 dobitne in 6 praznih) izžrebamo različno število srečk:

- če se točka $T$ nahaja v $I$. kvadrantu ($x \geq 0 \wedge y \geq 0$), potem izžrebamo 1 srečko;
- če se točka $T$ nahaja v $II$. kvadrantu ($x < 0 \wedge y \geq 0$), potem izžrebamo 2 srečki;
- če se točka $T$ nahaja v $III$. kvadrantu ($x < 0 \wedge y < 0$), potem izžrebamo 3 srečke;
- če se točka $T$ nahaja v $IV$. kvadrantu ($x \geq 0 \wedge y < 0$), potem izžrebamo 4 srečke.

Kolikšna je verjetnost, da smo izžrebali vsaj eno dobitno srečko? Kolikšna je verjetnost, da je bila točka $T$ iz prvega kvadranta, če vemo, da smo izžrebali vsaj eno dobitno srečko?

**Rešitev:** Dogodek se zgodi v dveh fazah, pri čemer vse štiri možne situcije pri izbiri točke $T$ tvorijo popoln sistem dogodkov. Označimo te dogodke (hipoteze):

$H_1 \ldots$ točko $T$ izberemo iz $I$. kvadranta;
$H_2 \ldots$ točko $T$ izberemo iz $II$. kvadranta;
$H_3 \ldots$ točko $T$ izberemo iz $III$. kvadranta;
$H_4 \ldots$ točko $T$ izberemo iz $IV$. kvadranta;

in preučevan dogodek:

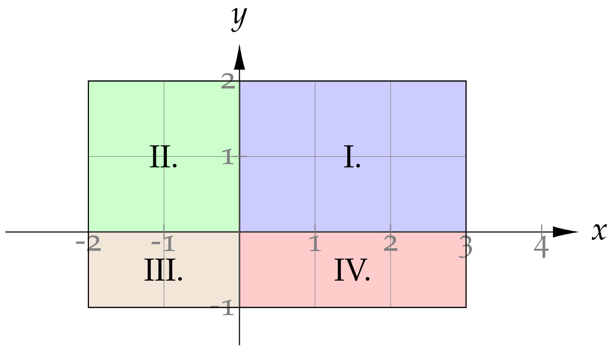
$A \ldots$ izžrebali smo vsaj eno dobitno srečko.

Iščemo verjetnost dogodka $A$, ki se izračuna s pomočjo formule za popolno verjetnost

$$P(A) = \sum_{i=1}^{4} \left(P(H_i) \cdot P(A|H_i)\right).$$

Verjetnosti za hipoteze $P(H_i)$ določimo s pomočjo geometrijske verjetnosti:

- $P(H_1) = \dfrac{6}{15}$;
- $P(H_2) = \dfrac{4}{15}$;
- $P(H_3) = \dfrac{2}{15}$;
- $P(H_4) = \dfrac{3}{15}$.




Pri pogojnih verjetnostih $P(A|H_i)$ za vse $i \in \{1,2,3,4\}$ pa si pomagamo z verjetnostjo nasprotnega dogodka. $P(A|H_i) = 1 - P(\overline{A}|H_i)$, kjer je $\overline{A}$ dogodek, da so vse izžrebane srečke prazne:

- $P(A|H_1) = 1 - \dfrac{6}{10} = \dfrac{4}{10}$;
- $P(A|H_2) = 1 - \dfrac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \dfrac{2}{3}$;
- $P(A|H_3) = 1 - \dfrac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{5}{6}$;

- $P(A|H_4) = 1 - \frac{\binom{6}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{13}{14}$.

Torej,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{4} \left(P(H_i) \cdot P(A|H_i)\right) = \frac{6}{15} \cdot \frac{4}{10} + \frac{4}{15} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{15} \cdot \frac{5}{6} + \frac{3}{15} \cdot \frac{13}{14} = \frac{1999}{3150}.$$

Odgovor na drugo vprašanje pa dobimo s pomočjo Bayesovega obrazca:

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{15}}{\frac{1999}{3150}} = \frac{504}{1999}.$$

**Naloga** 6 Dva igralca igrata igro metanja igralne kocke. Če eden izmed igralcev vrže 6, potem meče še enkrat, sicer je na vrsti nasprotnik. Igralec, ki igro začne, naj bo igralec $A$, njegov nasprotnik pa igralec $B$. Kolikšna je verjetnost, da bo četrti met po vrsti izvedel igralec $A$? Kolikšna je verjetnost, da je tretji met po vrsti izvedel igralec $B$, če vemo, da je četrti met izvedel igralec $A$?

**Rešitev:** Situacijo si lahko predstavimo kot dogodek, ki se zgodi v dveh fazah. Prvo fazo predstavlja tretji met, medtem ko drugo fazo predstavlja četrti met. Obe možni situciji pri tretjem metu tvorita popoln sistem dogodkov. Označimo ta dogodka (hipotezi):

$H_1 \ldots$ tretji met izvede igralec $A$;
$H_2 \ldots$ tretji met izvede igralec $B$;

in opazovan dogodek:

$D \ldots$ četrti met izvede igralec $A$.

Iščemo verjetnost dogodka $D$, ki se izračuna s pomočjo formule za popolno verjetnost

$$P(D) = \sum_{i=1}^{2} \left(P(H_i) \cdot P(D|H_i)\right)$$

in zato moramo določiti verjetnosti za hipotezi $P(H_i)$ in pogojni verjetnosti $P(D|H_i)$ za oba $i \in \{1, 2\}$. Najprej določimo $P(H_1)$ in $P(H_2)$:

- $P(H_1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{26}{36}$;
- $P(H_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{36}$.

Poiščimo še pogojni verjetnosti $P(D|H_1)$ in $P(D|H_2)$:

- $P(D|H_1) = \frac{1}{6}$;
- $P(D|H_2) = \frac{5}{6}$.

Sledi, da je $P(D) = \sum_{i=1}^{2} (P(H_i) \cdot P(D|H_i)) = \frac{26}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{10}{36} \cdot \frac{5}{6} = \frac{76}{216} = \frac{19}{54}$.
Odgovor na drugo vprašanje dobimo s pomočjo Bayesovega obrazca

$$P(H_2|D) = \frac{P(D|H_2) \cdot P(H_2)}{P(D)} = \frac{\frac{5}{6} \cdot \frac{10}{36}}{\frac{76}{216}} = \frac{50}{76} = \frac{25}{38}.$$

**Naloga 7** V poskusu, ki poteka v dveh fazah, najprej vržemo dve pošteni igralni kocki. Če padeta dve sodi števili, potem bomo v drugi fazi vrgli eno pošteno igralno kocko, če padeta sodo in liho število, potem bomo v drugi fazi vrgli dve pošteni igralni kocki, in če padeta dve lihi števili, potem bomo v drugi fazi vrgli tri poštene igralne kocke.

(a) Kolikšna je verjetnost, da je v drugi fazi vsota vseh padlih pik enaka 6?

(b) Kolikšna je verjetnost, da sta v prvi fazi padli dve sodi števili, če je v drugi fazi vsota vseh padlih pik enaka 6?

**Rešitev:** Dogodek se zgodi v dveh fazah, pri čemer vse možne situcije pri metu dveh kock v prvi fazi tvorijo popoln sistem dogodkov. Označimo te dogodke (hipoteze) in dogodek $A$:

$H_1 \ldots$ vržemo dve sodi števili;
$H_2 \ldots$ vržemo sodo in liho število;
$H_3 \ldots$ vržemo dve lihi števili;

in preučevan dogodek:

$A \ldots$ pade vsota 6 v drugi fazi.

(a) Iščemo verjetnost dogodka $A$, ki se izračuna s pomočjo formule

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} (P(H_i) \cdot P(A|H_i)),$$

in zato moramo najprej določiti verjetnosti za hipoteze $P(H_i)$:

- $P(H_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$;
- $P(H_2) = \binom{2}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$;
- $P(H_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Nato pa izračunamo še pogojne verjetnosti $P(A|H_i)$ za vse $i \in \{1,2,3\}$:

- $P(A|H_1) = \frac{1}{6}$ ;
- $P(A|H_2) = \frac{5}{36}$ ;
- $P(A|H_3) = \frac{10}{216}$.

Sledi, da je

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} (P(H_i) \cdot P(A|H_i)) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{36} + \frac{1}{4} \cdot \frac{10}{216} = \frac{53}{432}.$$

(b) Odgovor na drugo vprašanje dobimo s pomočjo Bayesovega obrazca

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{53}{432}} = \frac{18}{53}.$$

**Naloga** 8 Iz intervala $[0,3]$ naključno in neodvisno izberemo dve točki $x$ in $y$. Če je vsota vrednosti obeh točk manjša od dva, vržemo en pošten kovanec. Če je vsota vrednosti obeh točk večja ali enaka od dva in hkrati manjša od 3, potem vržemo dva poštena kovanca. Če je vsota vrednosti obeh točk večja ali enaka od tri, vržemo tri poštene kovance.

(a) Kolikšna je verjetnost, da sta padla natanko dva grba?

(b) Kolikšna je verjetnost, da je vsota obeh točk večja ali enaka od tri, če vemo, da sta padla natanko dva grba?

**Rešitev:**

(a) Vsako izbiro dvojice $x$ in $y$ si lahko predstavimo tudi kot izbiro točke v ravnini $T(x,y)$, pri čemer sta koordinati omejeni na interval $[0,3]$. Dogodek se zgodi v dveh fazah. V prvi fazi imamo tri možne situcije, ki tvorijo popoln sistem dogodkov. Označimo te dogodke (hipoteze):

$H_1 \ldots x + y < 2$;
$H_2 \ldots 2 \leq x + y < 3$;

$H_3 \dots 3 \leq x + y$;

in opazovan dogodek:

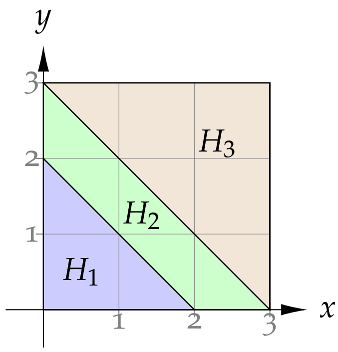
$A \dots$ padeta natanko dva grba.

Iščemo verjetnost dogodka $A$, ki se izračuna s pomočjo formule za popolno verjetnost

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} \left( P(H_i) \cdot P(A|H_i) \right).$$

Verjetnosti za hipoteze $P(H_i)$ določimo s pomočjo geometrijske verjetnosti:

- $P(H_1) = \frac{2}{9}$;
- $P(H_2) = \frac{5}{18}$;
- $P(H_3) = \frac{1}{2}$.




Določimo še pogojne verjetnosti $P(A|H_i)$ za vse $i \in \{1, 2, 3\}$:

- $P(A|H_1) = 0$;
- $P(A|H_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$;
- $P(A|H_3) = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$.

Torej,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} \left( P(H_i) \cdot P(A|H_i) \right) = \frac{2}{9} \cdot 0 + \frac{5}{18} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{37}{144}.$$

(b) Odgovor na drugo vprašanje pa dobimo s pomočjo Bayesovega obrazca:

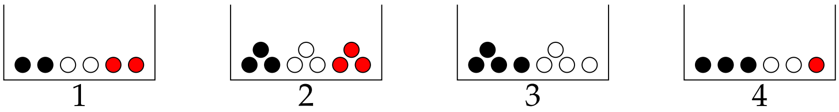
$$P(H_3|A) = \frac{P(A|H_3) \cdot P(H_3)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{37}{144}} = \frac{27}{37}.$$

**Naloga** 9 Na voljo imamo štiri enake posode, v katerih je različno število črnih, belih in rdečih kroglic. V prvi posodi sta dve črni, dve beli in dve rdeči kroglici. V drugi posodi so tri črne, tri bele in tri rdeče kroglice. V tretji posodi so štiri črne, štiri bele in nič rdečih kroglic. V četrti posodi so tri črne, dve beli in ena rdeča kroglica. Naključno izberemo posodo in nato iz nje izvlečemo dve kroglici.

(a) Kolikšna je verjetnost, da sta izvlečeni kroglici različne barve?

(b) Kolikšna je verjetnost, da smo izbrali prvo posodo, če vemo, da sta izvlečeni kroglici različne barve?

**Rešitev:** Na voljo imamo štiri posode, v katerih je različno število kroglic različnih barv. Za lažjo predstavo situacijo predstavimo s sliko:




(a) Dogodek se zgodi v dveh fazah, pri čemer vse štiri izbire posod v prvi fazi tvorijo popoln sistem dogodkov. Označimo te dogodke (hipoteze):

$H_i \ldots$ izberemo posodo $i$, pri čemer $i \in \{1,2,3,4\}$,

in opazovan dogodek:

$A \ldots$ izvlečemo dve kroglici različne barve.

Za hipoteze velja

$$P(H_i) = \frac{1}{4}, \text{ za vse } i \in \{1,2,3,4\}.$$

Da izračunamo $P(A)$ potrebujemo še naslednje pogojne verjetnosti:

- $P(A|H_1) = \dfrac{3 \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{6}{2}} = \dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5}$;
- $P(A|H_2) = \dfrac{3 \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{9}{2}} = \dfrac{27}{36} = \dfrac{3}{4}$;
- $P(A|H_3) = \dfrac{\binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{8}{2}} = \dfrac{16}{28} = \dfrac{4}{7}$;
- $P(A|H_4) = \dfrac{\binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} + \binom{3}{1} \cdot \binom{1}{1} + \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1}}{\binom{6}{2}} = \dfrac{11}{15}$.

Sledi, da je

$$P(A) = \sum_{i=1}^{4} \left(P(H_i) \cdot P(A|H_i)\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{4} \cdot \frac{11}{15} = \frac{1199}{1680}.$$

(b) Iščemo pogojno verjetnost

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1199}{1680}} = \frac{336}{1199}.$$

## 2.2 DISKRETNE NAKLJUČNE SPREMENLJIVKE

**Naloga 10** Biatlonec na zasledovalni tekmi strelja štirikrat po pet tarč. Dvakrat po pet tarč strelja leže in dvakrat po pet tarč strelja stoje. Predpostavimo, da so posamezni streli med seboj neodvisni in da naš biatlonec pri streljanju leže zadene tarčo z verjetnostjo 0.95, pri streljanju stoje pa z verjetnostjo 0.9. Izračunaj kolikšna je verjetnost, da bo naš biatlonec na zasledovalni tekmi zadel vsaj 18 strelov.

**Rešitev:** Naključna spremenljivka $X$ naj predstavlja število zadetkov pri streljanju leže. Naključna spremenljivka $Y$ naj predstavlja število zadetkov pri streljanju stoje. Obe spremenljivki sta porazdeljeni binomsko, torej

$$X : b(10, 0.95) \text{ in } Y : b(10, 0.9).$$

Želimo izračunati verjetnost dogodka, da je vsota obeh naključnih spremenljivk vsaj 18. Pri tem opazimo, da bo streljal točno 20-krat, zato je

$$P(X+Y \geq 18) = P(X+Y=18) + P(X+Y=19) + P(X+Y=20).$$

Zaradi preglednosti računa, zapišimo vsak člen te vsote posebej:

$$\begin{aligned}
P(X+Y=18) &= \left(\binom{10}{10} \cdot (0.95)^{10} \cdot (0.05)^0 \cdot \binom{10}{8} \cdot (0.9)^8 \cdot (0.1)^2 + \right. \\
&\quad + \binom{10}{9} \cdot (0.95)^9 \cdot (0.05)^1 \cdot \binom{10}{9} \cdot (0.9)^9 \cdot (0.1)^1 + \\
&\quad \left. + \binom{10}{8} \cdot (0.95)^8 \cdot (0.05)^2 \cdot \binom{10}{10} \cdot (0.9)^{10} \cdot (0.1)^0 \right); \\
P(X+Y=19) &= \left(\binom{10}{10} \cdot (0.95)^{10} \cdot (0.05)^0 \cdot \binom{10}{9} \cdot (0.9)^9 \cdot (0.1)^1 + \right. \\
&\quad \left. + \binom{10}{9} \cdot (0.95)^9 \cdot (0.05)^1 \cdot \binom{10}{10} \cdot (0.9)^{10} \cdot (0.1)^0 \right); \\
P(X+Y=20) &= \left(\binom{10}{10} \cdot (0.95)^{10} \cdot (0.05)^0 \cdot \binom{10}{10} \cdot (0.9)^{10} \cdot (0.1)^0 \right).
\end{aligned}$$

Potem je,

$$P(X+Y \geq 18) \approx 0.81.$$

**Naloga 11** Eno za drugo naključno izbiramo točko $T(x, y)$ iz območja $D = [-1, 3] \times [-1, 3]$, dokler ne izberemo točke iz prvega kvadranta ($x > 0 \wedge y > 0$). Naključna spremenljivka $X$ meri število vseh izbir točke $T$.

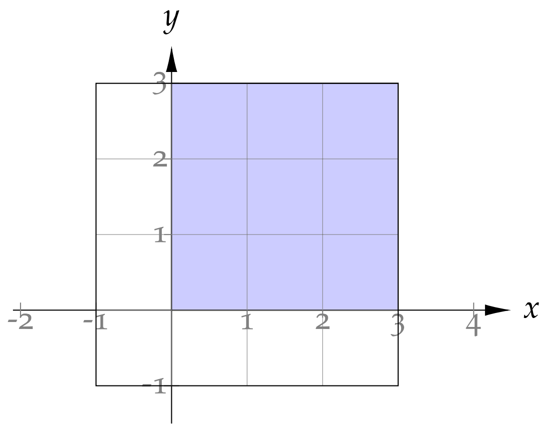
(a) Določi zalogo vrednosti in zapiši verjetnostno funkcijo spremenljivke $X$.

(b) Izračunaj verjetnost, da bo v drugi ali tretji izbiri točke $T$ izbrana točka iz prvega kvadranta.

(c) Izračunaj verjetnost, da v prvih štirih izbirah točke $T$ ne bo izbrana točka iz prvega kvadranta.

**Rešitev:**

(a) $Z_X = \mathbb{N}$.




Pri eni izbiri točke $T$ je verjetnost za prvi kvadrant enaka $\frac{9}{16}$.

Verjetnostna funkcija za $X$ se glasi:

$$P(X = n) = \left(\frac{7}{16}\right)^{n-1} \cdot \frac{9}{16}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$X$ je torej geometrijsko porazdeljena.

(b) $P(X = 2 \vee X = 3) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{7}{16} \cdot \frac{9}{16} + \left(\frac{7}{16}\right)^2 \cdot \frac{9}{16} = \frac{1449}{4096}$.

(c) Nalogo lahko rešimo na dva načina:

(i) z nasprotnim dogodkom:

$$\begin{aligned} P(X \geq 5) &= 1 - P(X \leq 4) = \\ &= 1 - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) - P(X = 4) = \\ &= 1 - \frac{9}{16} - \frac{7}{16} \cdot \frac{9}{16} - \left(\frac{7}{16}\right)^2 \cdot \frac{9}{16} - \left(\frac{7}{16}\right)^3 \cdot \frac{9}{16} = \\ &= \frac{2401}{65536}; \end{aligned}$$

(ii) z geometrijsko vrsto:

$$\begin{aligned} P(X \geq 5) &= \sum_{n=5}^{\infty} \left( \left(\frac{7}{16}\right)^{n-1} \cdot \frac{9}{16} \right) = \frac{9}{16} \cdot \sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{7}{16}\right)^{n-1} = \\ &= \frac{9}{16} \cdot \left(\frac{7}{16}\right)^4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{7}{16}\right)^n = \frac{9}{16} \cdot \left(\frac{7}{16}\right)^4 \cdot \frac{1}{1 - \frac{7}{16}} = \\ &= \left(\frac{7}{16}\right)^4 = \frac{2401}{65536}. \end{aligned}$$

**Naloga** 12 V posodi imamo 3 poštene igralne kocke in 2 igralni kocki, ki imata na vseh šestih ploskvah po eno piko. Na slepo iz posode izvlečemo tri igralne kocke in jih vržemo. Število padlih enic je slučajna spremenljivka $X$. Zapiši verjetnostno shemo slučajne spremenljivke $X$.

**Rešitev:** Zaloga vrednosti za naključno spremenljivko $X$ je $Z_X = \{0, 1, 2, 3\}$. Določimo še verjetnosti za vsako vrednost iz $Z_X$:

- Če je $X = 0$, potem pri metu treh kock ni padla nobena enica, kar pomeni, da smo metali 3 poštene kocke.

$$P(X = 0) = \frac{\binom{3}{3} \cdot \binom{2}{0}}{\binom{5}{3}} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{25}{432}$$

- Če je $X = 1$, imamo dve situaciji. Ali smo metali tri poštene kocke, kjer je na natanko eni izmed njih padla enica, ali pa smo metali dve pošteni kocki (na katerih ni bilo enice) in eno nepošteno kocko.

$$P(X = 1) = \frac{\binom{3}{3} \cdot \binom{2}{0}}{\binom{5}{3}} \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{5}{3}} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{65}{144}$$

- Če je $X = 2$, imamo tri situacije. Ali smo metali tri poštene kocke, kjer je na natanko dveh izmed njih padla enica, ali smo metali dve pošteni kocki (na katerih pade natanko ena enica) in eno nepošteno kocko ali pa smo metali eno pošteno kocko (na kateri ni bilo enice) in dve nepošteni kocki.

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= \frac{\binom{3}{3} \cdot \binom{2}{0}}{\binom{5}{3}} \cdot \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} + \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{5}{3}} \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \\ &+ \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{2}{2}}{\binom{5}{3}} \cdot \frac{5}{6} = \frac{61}{144} \end{aligned}$$

- Če je $X = 3$, imamo prav tako tri možne situacije. Ali smo metali tri poštene kocke, kjer je na vseh treh padla enica, ali smo metali dve pošteni kocki (na katerih padeta enici) in eno nepošteno kocko ali pa smo metali eno pošteno kocko (na kateri pade enica) in dve nepošteni kocki.

$$P(X=3) = \frac{\binom{3}{3}\cdot\binom{2}{0}}{\binom{5}{3}}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3 + \frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{5}{3}}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{2}}{\binom{5}{3}}\cdot\frac{1}{6} = \frac{29}{432}$$

Verjetnostna shema za $X$ je torej:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{25}{432} & \frac{65}{144} & \frac{61}{144} & \frac{29}{432} \end{pmatrix}.$$

**Naloga** 13 Janez je zaposlen v skladišču spletne trgovine z oblačili. Dobil je pet naročil za majico istega modela in velikosti. Dve majici morata biti rdeče barve, dve modre barve in ena črne barve. Janez pripravi pet identičnih paketov (v vsakem je ena majica), vendar jih pozabi označiti in sedaj ne ve, v katerem paketu je kakšna barva majice. Odloči se, da bo vseh pet naslovov napisal naključno na pakete - vsak naslov na en paket. Naključna spremenljivka $X$ naj meri število pravih barv majic na pravem naslovu.

(a) Zapiši verjetnostno shemo naključne spremenljivke $X$.

(b) Kolikšno je pričakovano število pravih barv majic na pravem naslovu?

**Rešitev:**

(a) V zalogi vrednosti naključne spremenljivke $X$ imamo $Z_X = \{0, 1, 2, 3, 5\}$. Štirice ni v zalogi, ker če imamo v štirih paketih prave majice, potem sledi da je tudi v petem paketu prava majica.

Ker so nekatere majice v naročilu med seboj enake in jih je potrebno razporediti na naslove, bomo v tem primeru uporabili permutacije s ponavljanjem za preštevanje možnosti. Vseh možnih razporeditev je torej v tem primeru $\frac{5!}{2!\cdot 2!} = 30$. Določimo še verjetnosti za vsako vrednost iz $Z_X$.

- $X = 0$: za črno majico izberemo enega od preostalih štirih paketov in s tem determiniramo preostale, saj noben paket ne sme vsebovati prave majice.

$$P(X=0) = \frac{4}{30}$$

- $X = 1$: za črno majico v pravem paketu imamo samo eno takšno razporeditev, za eno rdečo ali eno modro majico v pravem paketu pa imamo po štiri razporeditve.

$$P(X=1) = \frac{1+4+4}{30} = \frac{9}{30}$$

- $X = 2$: edina možnost v tem primeru je ena rdeča in ena modra majica na pravem naslovu. Potem pa lahko še črni majici izberemo enega od preostalih dveh paketov.

$$P\left(X=2\right)=\frac{2\cdot 2\cdot 2}{30}=\frac{8}{30}$$

- $X = 3$: štiri razporeditve dobimo, če so na pravem naslovu ena rdeča, ena modra in črna majica. Za dve rdeči in eno modro majico na pravem naslovu ali za eno rdečo in dve modri majici na pravem naslovu pa imamo po dve razporeditvi.

$$P\left(X=3\right)=\frac{4+2+2}{30}=\frac{8}{30}$$

- $X = 5$: na koncu ostane samo še razporeditev, kjer imamo vse majice na pravem naslovu.

$$P\left(X=5\right)=\frac{1}{30}$$

Verjetnostna shema za $X$ je torej:

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ \frac{4}{30} & \frac{9}{30} & \frac{8}{30} & \frac{8}{30} & \frac{1}{30} \end{pmatrix}.$$

(b) Pričakovano število pravih barv majic na pravem naslovu je $\frac{9}{5}$, saj je

$$E(X)=0\cdot\frac{4}{30}+1\cdot\frac{9}{30}+2\cdot\frac{8}{30}+3\cdot\frac{8}{30}+5\cdot\frac{1}{30}=\frac{9}{5}.$$

**Naloga** 14 V posodi imamo 5 rdečih in 3 bele kroglice. Iz posode naenkrat vlečemo po dve kroglici tako dolgo, dokler ne izvlečemo dveh rdečih (kroglic ne vračamo v posodo). Naključna spremenljivka $X$ naj meri kolikokrat smo morali seči v posodo (vključno z zadnjim poskusom, ko izvlečemo dve rdeči). Zapišite verjetnostno shemo za naključno spremenljivko $X$.

**Rešitev:** V zalogi vrednosti naključne spremenljivke $X$ imamo $Z_X = \{1, 2, 3, 4\}$. Gotovo moramo seči v posodo vsaj enkrat. Največ štiri poskuse pa dobimo, če trikrat zapored izvlečemo po eno rdečo in eno belo - v četrtem poskusu nam ostaneta v posodi le še dve rdeči kroglici.

Izbira dveh kroglic je neurejena izbira, tako da bomo v tem primeru uporabili kombinacije brez ponavljanja. Ker kroglic ne vračamo v posodo, bomo v izračunu, kjer bo $X > 1$ uporabili tudi pogojno verjetnost. Določimo verjetnosti za vsako vrednost iz $Z_X$.

- $X = 1$: v prvem poskusu izberemo dve rdeči kroglici izmed petih.

$$P(X = 1) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{5}{14}$$

- $X = 2$: v prvem poskusu izberemo dve beli ali pa eno belo in eno rdečo kroglico. Potem pa v drugem poskusu izberemo dve rdeči kroglici.

$$P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} \cdot \frac{\binom{5}{2}}{\binom{6}{2}} + \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{8}{2}} \cdot \frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{14} + \frac{3}{14} = \frac{4}{14}$$

- $X = 3$: v prvem in drugem poskusu izberemo ali dve beli v prvem in eno belo eno rdečo v drugem poskusu ali eno belo eno rdečo v prvem in dve beli v drugem poskusu ali eno belo eno rdečo v obeh poskusih. Potem pa v tretjem poskusu izberemo dve rdeči kroglici.

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= \frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} \cdot \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{1}{1}}{\binom{6}{2}} \cdot \frac{\binom{4}{2}}{\binom{4}{2}} + \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{8}{2}} \cdot \frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}} \cdot \frac{\binom{4}{2}}{\binom{4}{2}} + \\ &\quad + \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{8}{2}} \cdot \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{6}{2}} \cdot \frac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{2}} = \\ &= \frac{1}{28} + \frac{1}{28} + \frac{1}{7} = \frac{3}{14} \end{aligned}$$

- $X = 4$: v prvem, drugem in tretjem poskusu izberemo eno belo in eno rdečo kroglico. Potem pa v četrtem poskusu gotovo izberemo dve rdeči kroglici.

$$P(X = 4) = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{8}{2}} \cdot \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{6}{2}} \cdot \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{\binom{2}{2}}{\binom{2}{2}} = \frac{2}{14}$$

Verjetnostna shema za $X$ je torej:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{5}{14} & \frac{4}{14} & \frac{3}{14} & \frac{2}{14} \end{pmatrix}.$$

**Naloga** 15 Igralec hkrati meče dva poštena kovanca tako dolgo, dokler ne padeta dva grba. Naključna spremenljivka $X$ meri število metov, ki so za to potrebni.

(a) Določi zalogo vrednosti naključne spremenljivke $X$ in zapiši njeno verjetnostno funkcijo.

(b) Izračunaj verjetnost dogodka, da bosta dva grba padla pri petem metu.

(c) Izračunaj verjetnost dogodka, da bosta dva grba padla prej kot je pričakovana vrednost.

(d) Izračunaj verjetnost dogodka, da bosta dva grba padla pri lihem metu.

**Rešitev:**

(a) Spremenljivka $X$ je geometrijsko porazdeljena z verjetnostjo $p = \frac{1}{4}$. To pomeni, da je zaloga vrednosti $Z_X = \mathbb{N}$. Verjetnostna funkcija pa se glasi

$$P(X = n) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) $P(X = 5) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3^4}{4^5} = \frac{81}{1024}$.

(c) Pričakovana vrednost je $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$. To pomeni, da iščemo verjetnost dogodka $P(X < 4)$, torej

$$\begin{aligned} P\left(X<4\right) &= P\left(X=1\right) + P\left(X=2\right) + P\left(X=3\right) = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{37}{64}. \end{aligned}$$

(d) Iskano verjetnost izračunamo s pomočjo geometrijske vrste

$$\begin{aligned} P\left(X=(2k-1)\right) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{2k-2}\right) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{2k-2} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{2k} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{9}{16}\right)^{k} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{9}{16}} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{7}{16}} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

**Naloga** 16 V posodi imamo dve pošteni igralni kocki, eno nepošteno igralno kocko s samimi enicami in eno nepošteno igralno kocko z eno enico, dvema dvojkama in tremi trojkami. Iz posode naključno izvlečemo dve igralni kocki in ju vržemo. Naključna spremenljivka $X$ meri največje število padlih pik na eni izmed obeh izvlečenih kock. Zapiši verjetnostno shemo naključne spremenljivke $X$.

**Rešitev:**
Zaloga vrednosti za naključno spremenljivko $X$ je $Z_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Določimo še verjetnosti za vsako vrednost iz $Z_X$. Verjetnosti $P(X = i)\ \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ izračunamo s formulo za popolno verjetnost, pri čemer so hipoteze vse možne izbire dveh kock. Zaradi boljše preglednosti bomo zapisovali le situacije, v katerih imamo neničelno verjetnost za izbrani dogodek.

- $X = 6$: v prvi fazi lahko izberemo dve pošteni igralni kocki ali pa eno pošteno in eno nepošteno, pri čemer mora potem na vsaj eni pošteni kocki pasti šestica.

$$P(X=6) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} \cdot \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2\right) + \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{11}{36} + \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{35}{216}$$

- $X = 5$: v prvi fazi lahko izberemo dve pošteni igralni kocki ali pa eno pošteno in eno nepošteno, pri čemer mora potem na vsaj eni pošteni kocki pasti petica, medtem ko na drugi kocki ne sme pasti šestica.

$$P(X=5) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{9}{36} + \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{9}{36} + \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{33}{216}$$

- $X = 4$: v prvi fazi lahko izberemo dve pošteni igralni kocki ali pa eno pošteno in eno nepošteno, pri čemer mora potem na vsaj eni pošteni kocki pasti štirica, medtem ko na drugi ne sme pasti več kot štiri.

$$P(X=4) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{7}{36} + \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{36} + \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{31}{216}$$

- $X = 3$: v prvi fazi lahko izberemo poljubni dve igralni kocki, pri čemer mora potem na vsaj eni kocki pasti trojka, medtem ko na drugi ne sme pasti več kot tri.

$$\begin{aligned} P(X=3) &= \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{5}{36} + \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{1}{6} + \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}\right) + \\ &\quad + \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{36} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right) + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{59}{216} \end{aligned}$$

- $X = 2$: v prvi fazi lahko izberemo poljubni dve igralni kocki, pri čemer mora potem na vsaj eni kocki pasti dvojka, medtem ko na drugi ne sme pasti več kot dva.

$$\begin{aligned} P(X=2) &= \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{3}{36} + \frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{1}{6} + \frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} \cdot \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right) + \\ &\quad + \frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{1}{3} = \\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{36} + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2}{6}\cdot\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{36}\right) + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} = \frac{37}{216} \end{aligned}$$

- $X = 1$: v prvi fazi lahko izberemo poljubni dve igralni kocki, pri čemer mora potem na obeh kockah pasti enica.

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{1}{36} + \frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{1}{6} + \frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \\ &\quad + \frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{1}{6} = \\ &= = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{36} + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{36} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{21}{216} \end{aligned}$$

Verjetnostna shema za $X$ je torej:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{21}{216} & \frac{37}{216} & \frac{59}{216} & \frac{31}{216} & \frac{33}{216} & \frac{35}{216} \end{pmatrix}.$$

**Naloga 17** Dva igralca igrata igro metanja igralne kocke. Če igralec, ki je na potezi, vrže 1, potem izgubi igro. Če igralec, ki je na potezi, vrže 6, potem zmaga igro. Če igralec, ki je na potezi, vrže 2 ali 3, potem je na vrsti nasprotnik. Če igralec, ki je na potezi, vrže 4 ali 5, potem je še enkrat na vrsti sam. Naj bo $X$ naključna spremenljivka, ki meri kolikorat vržeta kocko, preden se igra zaključi.

(a) Določi zalogo vrednosti za $X$ in zapiši verjetnostno funkcijo.

(b) Kolikšno je pričakovano število metov, preden se igra zaključi?

(c) Kolikšna je verjetnost, da se igra konča po treh metih in zmaga pripada igralcu $A$, ki je igro začel?

**Rešitev:**

(a) Verjetnost, da se igra po nekem metu konča, je $\frac{1}{3}$ in ostaja enaka pri vseh metih. Spremenljivka $X$ je torej geometrijsko porazdeljena z verjetnostjo $p = \frac{1}{3}$. Zaloga vrednosti je $Z_X = \mathbb{N}$. Verjetnostna funkcija za $X$ se glasi:

$$P(X = n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3.$

(c) Igralec $A$ torej meče prvi. Označimo z $B$ njegovega nasprotnika. Če se igra konča po treh metih, potem smo do takšnega konca lahko prišli na štiri načine:

- $AAA$ - $A$ vrže 4 ali 5 v prvem in drugem metu.
- $AAB$ - $A$ vrže 4 ali 5 v prvem in 2 ali 3 v drugem metu.
- $ABA$ - $A$ vrže 2 ali 3 v prvem metu in potem $B$ vrže 2 ali 3 v drugem metu.
- $ABB$ - $A$ vrže 2 ali 3 v prvem metu in potem $B$ vrže 4 ali 5 v drugem metu.

Za vsakega od teh štirih načinov velja, da je verjetnost za njega enaka $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. Verjetnost za končanje igre v tretjem metu z zmago igralca $A$ v dani situaciji je vedno enaka $\frac{1}{6}$. Če tretji meče igralec $A$, potem mora vreči 6. Če tretji meče igralec $B$, potem mora vreči 1.

Odgovor na vprašanje je torej:

$$P(A \text{ zmaga po treh metih}) = 4 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{54}.$$

## 2.3 ZVEZNE NAKLJUČNE SPREMENLJIVKE

**Naloga** 18 Točko $A$ izberemo naključno iz kroga s polmerom 2. Slučajna spremenljivka $X$ naj meri razdaljo točke $A$ do krožnice, ki omejuje ta krog.

(a) Zapiši porazdelitveno funkcijo naključne spremenljivke $X$ in skiciraj njen graf.

(b) Zapiši gostoto porazdelitve naključne spremenljivke $X$.

(c) Izračunaj povprečno oddaljenost točke $A$ do krožnice.

**Rešitev:**

(a) Ker je porazdelitvena funkcija realna funkcija, ki je definirana na celotni realni osi, je potrebno obravnavati različne situacije glede na to, kje se nahaja vrednost $x$. Porazdelitveno funkcijo izračunamo kot $F_X(x) = P(X < x)$.

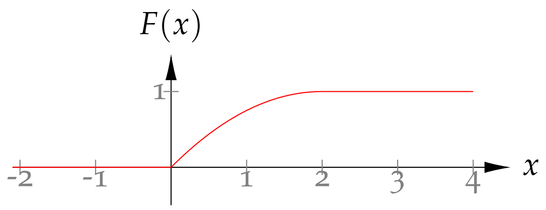
- Ker razdalja ne more biti negativna, bo za $x < 0$ porazdelitvena funkcija enaka 0, medtem ko bo za $x > 2$ enaka 1.
- V primeru, ko je $0 \leq x \leq 2$ pa s pomočjo geometrijske verjetnosti izračunamo:

$$
\begin{aligned}
F_X(x) = P(X < x) = & \frac{\pi \cdot 2^2 - \pi \cdot (2-x)^2}{\pi \cdot 2^2} = \\
= & \frac{4\pi - \pi\left(4 - 4x + x^2\right)}{4\pi} = \\
= & \frac{4\pi x - \pi x^2}{4\pi} = \frac{4x - x^2}{4}.
\end{aligned}
$$

Predpis za porazdelitveno funkcijo od $X$ je

$$
F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \in (-\infty, 0) \\ \frac{4x-x^2}{4} & ; \quad x \in [0, 2] \\ 1 & ; \quad x \in (2, \infty) \end{cases}
$$

in narišemo še graf porazdelitvene funkcije.




(b) Gostota porazdelitve je odvod od porazdelitvene funkcije, torej dobimo

$$
p_X(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty) \\ \frac{2-x}{2} & ; \quad x \in [0, 2] \end{cases} .
$$

(c) Povprečna oddaljenost točke $A$ do krožnice je enaka matematičnemu upanju za naključno spremenljivko $X$:

$$
E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = \frac{1}{2} \int_{0}^{2} (2x - x^2) dx = \frac{1}{2} \left[ x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{2}{3}.
$$

**Naloga** 19 Naj bo zvezna slučajna spremenljivka $X$ podana z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} a\sin x & ; \; 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & ; \; \text{sicer} \end{cases} .$$

(a) Določi konstanto $a$.

(b) Izračunaj porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$.

(c) Izračunaj $E(X)$.

(d) Izračunaj $P\left(X < \frac{\pi}{3}\right)$ in določi $x_0$, da bo $P\left(X < x_0\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$.

**Rešitev:**

(a) Upoštevajmo definicijo zveznih naključnih spremenljivk:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1.$$

Ker je $p(x) = 0$ na območju $(-\infty, 0) \cup (\pi, \infty)$, se integral preoblikuje v

$$\int_0^{\pi} a\sin(x)dx = 1$$

in rešimo to enačbo

$$\begin{aligned} a \cdot \int_0^{\pi} \sin(x)dx &= 1 \\ a \cdot \Big[-\cos(x)\Big]_0^{\pi} &= 1 \\ 2a &= 1 \\ a &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(b) V primeru, ko je $0 \leq x \leq \pi$ izračunamo:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x} p(t)dt &= \int_0^x \frac{1}{2}\sin(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^x \sin(t)dt = \\ &= \frac{1}{2}\Big[-\cos(t)\Big]_0^x = \frac{1}{2}\left(1-\cos(x)\right) = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(x). \end{aligned}$$

Predpis za porazdelitveno funkcijo od $X$ je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; \; x \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(x) & ; \; x \in [0, \pi] \\ 1 & ; \; x \in (\pi, \infty) \end{cases} .$$

(c)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} x\sin(x)dx = \frac{1}{2}\Big[-x\cos(x) + \sin(x)\Big]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

(d) Upoštevajmo, da je $P(X < x) = F_X(x)$, in zato

$$P\left(X < \frac{\pi}{3}\right) = F_X\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

in

$$\begin{aligned} P\left(X < x_0\right) &= \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ F_X\left(x_0\right) &= \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(x_0\right) &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \cos\left(x_0\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x_0 &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

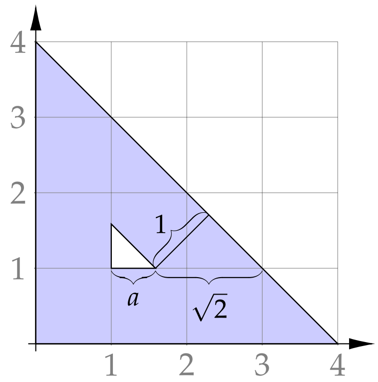
**Naloga** 20 Točko $T$ iz ravnine izberemo slučajno na trikotniku z oglišči $A(0,0)$, $B(4,0)$ in $C(0,4)$.

(a) Kolikšna je verjetnost, da je razdalja točke $T$ do najbližje stranice tega trikotnika manjša od 1?

(b) Slučajna spremenljivka $X$ naj meri razdaljo točke $T$ do najbližje stranice tega trikotnika. Zapiši porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke $X$.

**Rešitev:**

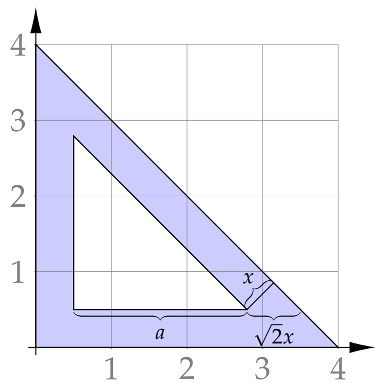
(a) Prvo vprašanje je povezano z geometrijsko verjetnostjo, saj je potrebno izračunati razmerje med ploščino lika za ugodne možnosti izbire točke $T$ in ploščino celotnega trikotnika. Označimo z $D$ dogodek, da je razdalja točke $T$ do najbližje stranice podanega trikotnika manjša od 1.




Ploščino majhnega trikotnika v notranjosti je potrebno odšteti od celotne ploščine trikotnika. Iz zgornje slike lahko razberemo, da gre za enakokraki pravokotni trikotnik. Z določitvijo katete $a = 4 - 2 - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}$ dobimo njegovo ploščino in s tem odgovor na vprašanje:

$$P(D) = \frac{\frac{4^2}{2} - \frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{2}}{\frac{4^2}{2}} = \frac{\frac{16-\left(4-4\sqrt{2}+2\right)}{2}}{\frac{16}{2}} = \frac{10+4\sqrt{2}}{16}.$$

(b) Drugo vprašanje je posplošitev prvega, saj predpis za porazdelitveno funkcijo v takšnem primeru izračunamo kot $F_X(x) = P(X < x)$. To pa je posplošitev geometrijske verjetnosti iz prve naloge, pri čemer vlogo enice iz prvega vprašanja prevzame neodvisna spremenljivka $x$.




Izračunamo vrednost katete $a = 4 - 2x - \sqrt{2}x = 4 - \left(2 + \sqrt{2}\right) x$, pri čemer je navzdol omejena z 0, navzgor pa s 4. To pomeni, da ko je $x \in \left[0, \frac{4}{2+\sqrt{2}}\right]$, je predpis porazdelitvene funkcije enak:

$$\begin{aligned} F_X(x) = P(X < x) &= \frac{\frac{4^2}{2} - \frac{\left(4-\left(2+\sqrt{2}\right)x\right)^2}{2}}{\frac{4^2}{2}} = \\ &= \frac{\frac{16-\left(16-8\left(2+\sqrt{2}\right)x+\left(2+\sqrt{2}\right)^2x^2\right)}{2}}{\frac{16}{2}} = \\ &= \frac{4\left(2+\sqrt{2}\right)x - \left(3+2\sqrt{2}\right)x^2}{8} = \\ &= \frac{\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}x - \frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)}{8}x^2. \end{aligned}$$

Celotna porazdelitvena funkcija se torej glasi:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \in (-\infty, 0) \\ \frac{\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}x - \frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)}{8}x^2 & ; \quad x \in \left[0, \frac{4}{2+\sqrt{2}}\right] \\ 1 & ; \quad x \in \left(\frac{4}{2+\sqrt{2}}, \infty\right) \end{cases}.$$

**Naloga 21** Naj bo zvezna slučajna spremenljivka $X$ podana z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^3} & ; \quad x \geq 1 \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases}.$$

(a) Določi konstanto $a$.

(b) Izračunaj porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$.

(c) Izračunaj $E(X)$.

(d) Izračunaj $P(X < 3)$ in določi $x_0$, da bo $P(X < x_0) = \frac{1}{2}$.

**Rešitev:**

(a) Najprej upoštevajmo, da je $X$ zvezna naključna spremenljivka.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx &= 1 \\ \int_{1}^{\infty} \frac{a}{x^3}dx &= 1 \\ a \cdot \int_{1}^{\infty} x^{-3}dx &= 1 \end{aligned}$$

Ker imamo opravka s posplošenim integralom, moramo vpeljati limito.

$$
\begin{aligned}
a \cdot \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-3} dx &= 1 \\
a \cdot \lim_{b\to\infty} \left[ -\frac{x^{-2}}{-2} \right]_1^b &= 1 \\
a \left( \lim_{b\to\infty} \left( \frac{b^{-2}}{2} \right) - \frac{1^{-2}}{-2} \right) &= 1 \\
a \left( 0 + \frac{1}{2} \right) &= 1 \\
a &= 2
\end{aligned}
$$

(b) V primeru, ko je $1 \leq x$ izračunamo:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{x} p(t) dt &= \int_1^x \frac{2}{t^3} dt = 2 \int_1^x t^{-3} dt = \\
&= 2 \left[ \frac{t^{-2}}{-2} \right]_1^x = 2 \left( \frac{x^{-2}}{-2} - \frac{1^{-2}}{-2} \right) = \\
&= 1 - \frac{1}{x^2}.
\end{aligned}
$$

Predpis za porazdelitveno funkcijo od $X$ je

$$
F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \in (-\infty, 1) \\ 1 - \dfrac{1}{x^2} & ; \quad x \in [1, \infty] \end{cases} .
$$

(c)

$$
E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = \int_1^{\infty} x \cdot \frac{2}{x^3} dx = 2 \int_1^{\infty} x^{-2} dx.
$$

Upoštevajmo pravila pri delu s posplošenim integralom.

$$
\begin{aligned}
E(X) &= 2 \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-2} dx = 2 \lim_{b\to\infty} \left[ \frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^b \\
&= 2 \left( \lim_{b\to\infty} \left( -\frac{1}{b} \right) - \frac{1^{-1}}{-1} \right) = \\
&= 2 (0 + 1) = 2.
\end{aligned}
$$

(d) Ker velja $P(X < x) = F_X(x)$, sledi

$$P(X < 3) = F_X(3) = 1 - \frac{1}{3^2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

in

$$\begin{aligned} P(X < x_0) &= \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{1}{x_0^2} &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x_0^2} &= \frac{1}{2} \\ x_0 &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

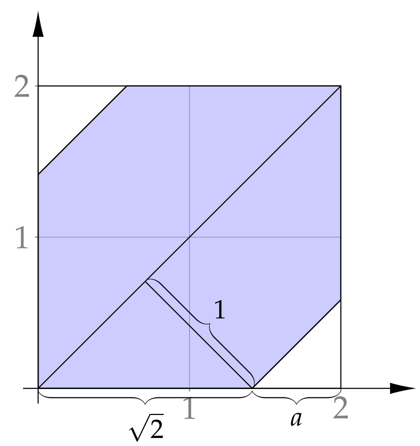
**Naloga 22** Točko $T$ iz ravnine izberemo slučajno na kvadratu z oglišči $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,2)$ in $D(0,2)$.

(a) Kolikšna je verjetnost, da je razdalja od točke $T$ do diagonale $AC$ tega kvadrata manjša od 1?

(b) Slučajna spremenljivka $X$ naj meri razdaljo od točke $T$ do diagonale $AC$ tega kvadrata. Zapiši porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke $X$.

**Rešitev:**

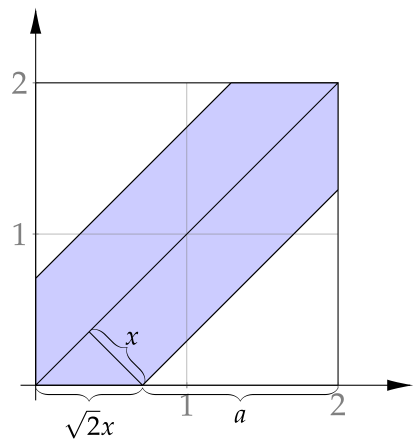
(a) Prvo vprašanje je povezano z geometrijsko verjetnostjo, saj je potrebno izračunati razmerje med ploščino lika za ugodne možnosti izbire točke $T$ in ploščino celotnega kvadrata. Označimo z $D$ dogodek, da je razdalja točke $T$ do diagonale $AC$ tega kvadrata manjša od 1.



Ploščino dveh majhnih pravokotnih trikotnikov s katetama dolžine $a$ je potrebno odšteti od celotne ploščine kvadrata. Kateta $a$ je enaka $2-\sqrt{2}$, torej dobimo ploščino obeh pravokotnih trikotnikov kar kot $\left(2-\sqrt{2}\right)^2$ in lahko zapišemo odgovor na vprašanje:

$$P(D) = \frac{2^2-\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{2^2} = \frac{4-\left(4-4\sqrt{2}+2\right)}{4} = \frac{4\sqrt{2}-2}{4} = \frac{2\sqrt{2}-1}{2}.$$

(b) Drugo vprašanje je posplošitev prvega, saj predpis za porazdelitveno funkcijo v takšnem primeru izračunamo kot $F_X(x) = P(X < x)$. To pa je posplošitev geometrijske verjetnosti iz prve naloge, pri čemer vlogo enice iz prvega vprašanja prevzame neodvisna spremenljivka $x$.




Izračunamo vrednost katete $a = 2-\sqrt{2}x$, pri čemer je navzdol omejena z 0, navzgor pa z dolžino polovice diagonale $AC$, kar znaša $\frac{\sqrt{2^2+2^2}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$. To pomeni, da ko je $x \in \left[0,\sqrt{2}\right]$, je predpis porazdelitvene funkcije enak:

$$\begin{aligned} F_X(x) = P(X<x) &= \frac{2^2-\left(2-\sqrt{2}x\right)^2}{2^2} = \\ &= 1-\frac{\left(2-\sqrt{2}x\right)^2}{4}. \end{aligned}$$

Celotna porazdelitvena funkcija se torej glasi:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; \ x \in (-\infty, 0) \\ 1-\dfrac{\left(2-\sqrt{2}x\right)^2}{4} & ; \ x \in \left[0,\sqrt{2}\right] \\ 1 & ; \ x \in \left(\sqrt{2},\infty\right) \end{cases}.$$

## 2.4 DISKRETNI NAKLJUČNI VEKTORJI

**Naloga** 23 Trikrat zaporedoma vržemo pošteno igralno kocko. Naključna spremenljivka $X$ nam meri, kolikokrat je padla šestica. Naključna spremenljivka $Y$ nam meri, v katerem poskusu je prvič padla šestica, pri čemer naj 0 označuje, da šestica ni padla niti enkrat.

(a) Zapiši verjetnostno tabelo slučajnega vektorja $(X, Y)$.

(b) S pomočjo robnih porazdelitev izračunaj verjetnost dogodkov:
- $A$ - šestica je prvič padla v drugem poskusu;
- $B$ - šestica ni padla niti enkrat.

(c) Določi verjetnostno shemo spremenljivke $Z = X + Y$.

**Rešitev:**

(a) V zalogi vrednosti naključne spremenljivke $X$ imamo $Z_X = \{0, 1, 2, 3\}$. Podobno je zaloga vrednosti $Z_Y = \{0, 1, 2, 3\}$. Najprej določimo celice naključnega vektorja $(X, Y)$, v katerih je verjetnost enaka 0. To velja, ko je:

$$(X, Y) \in \{(0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (2,0), (3,0), (2,3), (3,2), (3,3)\}.$$

Za ostale celice pa izračunamo verjetnosti:

- $(X, Y) = (0, 0)$: pri treh zaporednih metih igralne kocke ne pade nobena šestica.
$$P((X, Y) = (0, 0)) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$
- $(X, Y) = (1, 1)$: šestica pade natanko enkrat in to pri prvem metu.
$$P((X, Y) = (1, 1)) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{216}$$
- $(X, Y) = (1, 2)$: šestica pade natanko enkrat in to pri drugem metu.
$$P((X, Y) = (1, 2)) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{216}$$
- $(X, Y) = (1, 3)$: šestica pade natanko enkrat in to pri tretjem metu.
$$P((X, Y) = (1, 3)) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$$
- $(X, Y) = (2, 1)$: šestica pade natanko dvakrat. Prvič pri prvem metu, drugič pa v drugem ali tretjem metu.
$$P((X, Y) = (2, 1)) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) = \frac{10}{216}$$

- $(X, Y) = (2, 2)$: šestica pade natanko dvakrat. Prvič pri drugem metu, drugič pa v tretjem metu.

$$P((X, Y) = (2, 2)) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{216}$$

- $(X, Y) = (3, 1)$: šestica pade v vseh treh metih.

$$P((X, Y) = (3, 1)) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

Zdaj lahko zapišemo celotno verjetnostno tabelo naključnega vektorja $(X, Y)$:

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{125}{216}$ | 0 | 0 | 0 | $\frac{125}{216}$ |
| 1 | 0 | $\frac{25}{216}$ | $\frac{10}{216}$ | $\frac{1}{216}$ | $\frac{36}{216}$ |
| 2 | 0 | $\frac{25}{216}$ | $\frac{5}{216}$ | 0 | $\frac{30}{216}$ |
| 3 | 0 | $\frac{25}{216}$ | 0 | 0 | $\frac{25}{216}$ |
| | $\frac{125}{216}$ | $\frac{75}{216}$ | $\frac{15}{216}$ | $\frac{1}{216}$ | |

(b) $P(A) = P(Y = 2) = \dfrac{30}{216}$

$P(B) = P(X = 0) = P(Y = 0) = \dfrac{125}{216}$

(c) Naključna spremenljivka $Z$ lahko zavzame vrednost najmanj 0 in največ 4. Ne more pa zavzeti vrednosti 1. Zaloga vrednosti za naključno spremenljivko $Z$ je torej enaka $Z_Z = \{0, 2, 3, 4\}$. Verjetnostna shema za $Z$ se poračuna tako, da seštejemo ustrezne verjetnosti iz tabele in tako dobimo:

$$Z : \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{125}{216} & \frac{25}{216} & \frac{35}{216} & \frac{31}{216} \end{pmatrix}.$$

**Naloga** 24 Na vrhu smučišča čaka 5 smučarjev. V dolino vodijo tri različne proge: proga 1, proga 2 in proga 3. Vsak od smučarjev povsem naključno izbere eno od prog, po kateri se spusti. Naključna spremenljivka $X$ naj meri število smučarjev, ki so izbrali progo 1. Naključna spremenljivka $Y$ naj meri število smučarjev, ki so izbrali progo 2.

(a) Zapiši zalogo vrednosti in verjetnostno funkcijo za naključno spremenljivko $X$.

(b) Zapiši verjetnostno tabelo za naključni vektor $(X, Y)$.

**Rešitev:**

(a) V zalogi vrednosti naključne spremenljivke $X$ imamo $Z_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Gre za binomsko porazdelitev, pri čemer poskus (naključni spust smučarja) ponovimo petkrat. Ker se vsak smučar naključno odloči za progo, sledi, da je verjetnost pri vsaki ponovitvi poskusa $p = \frac{1}{3}$. Verjetnostna funkcija za $X$ je torej enaka

$$P(X = k) = \binom{5}{k} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{5-k}, \ \forall k \in Z_X.$$

(b) Verjetnostna tabela za naključni vektor $(X, Y)$ je:

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\left(\tfrac{1}{3}\right)^5$ | $\tbinom{5}{1}\left(\tfrac{1}{3}\right)^5$ | $\tbinom{5}{2}\left(\tfrac{1}{3}\right)^5$ | $\tbinom{5}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)^5$ | $\tbinom{5}{4}\left(\tfrac{1}{3}\right)^5$ | $\tbinom{5}{5}\left(\tfrac{1}{3}\right)^5$ |
| 1 | $\tbinom{5}{1}\left(\tfrac{1}{3}\right)^5$ | $\tbinom{5}{1}\tbinom{4}{1}\left(\tfrac{1}{3}\right)^5$ | $\tbinom{5}{1}\tbinom{4}{2}\left(\tfrac{1}{3}\right)^5$ | $\tbinom{5}{1}\tbinom{4}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)^5$ | $\tbinom{5}{1}\tbinom{4}{4}\left(\tfrac{1}{3}\right)^5$ | 0 |
| 2 | $\tbinom{5}{2}\left(\tfrac{1}{3}\right)^5$ | $\tbinom{5}{2}\tbinom{3}{1}\left(\tfrac{1}{3}\right)^5$ | $\tbinom{5}{2}\tbinom{3}{2}\left(\tfrac{1}{3}\right)^5$ | $\tbinom{5}{2}\tbinom{3}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)^5$ | 0 | 0 |
| 3 | $\tbinom{5}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)^5$ | $\tbinom{5}{3}\tbinom{2}{1}\left(\tfrac{1}{3}\right)^5$ | $\tbinom{5}{3}\tbinom{2}{2}\left(\tfrac{1}{3}\right)^5$ | 0 | 0 | 0 |
| 4 | $\tbinom{5}{4}\left(\tfrac{1}{3}\right)^5$ | $\tbinom{5}{4}\tbinom{1}{1}\left(\tfrac{1}{3}\right)^5$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | $\tbinom{5}{5}\left(\tfrac{1}{3}\right)^5$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

oziroma, če poračunamo vrednosti v celicah:

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{243}$ | $\frac{5}{243}$ | $\frac{10}{243}$ | $\frac{10}{243}$ | $\frac{5}{243}$ | $\frac{1}{243}$ |
| 1 | $\frac{5}{243}$ | $\frac{20}{243}$ | $\frac{30}{243}$ | $\frac{20}{243}$ | $\frac{5}{243}$ | 0 |
| 2 | $\frac{10}{243}$ | $\frac{30}{243}$ | $\frac{30}{243}$ | $\frac{10}{243}$ | 0 | 0 |
| 3 | $\frac{10}{243}$ | $\frac{20}{243}$ | $\frac{10}{243}$ | 0 | 0 | 0 |
| 4 | $\frac{5}{243}$ | $\frac{5}{243}$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | $\frac{1}{243}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**Naloga 25** Trikrat zaporedoma vržemo pošteno igralno kocko. Naključna spremenljivka $X$ nam meri, kolikokrat je padla enica. Naključna spremenljivka $Y$ nam meri, po katerem metu je vsota metov prvič vsaj šest, pri čemer naj 0 označuje, da vsota niti po treh metih ne doseže šest.

(a) Zapiši verjetnostno tabelo slučajnega vektorja $(X, Y)$.

(b) S pomočjo robnih porazdelitev izračunaj verjetnost dogodkov:

- $A$ - enica je padla dvakrat;
- $B$ - vsota metov je prvič vsaj šest po drugem metu.

(c) Določi verjetnostno shemo spremenljivke $Z = X + Y$.

**Rešitev:**

(a) V zalogi vrednosti naključne spremenljivke $X$ imamo $Z_X = \{0, 1, 2, 3\}$. Podobno je zaloga vrednosti $Z_Y = \{0, 1, 2, 3\}$. Najprej določimo celice naključnega vektorja $(X, Y)$, v katerih je verjetnost enaka 0. To velja, ko je:

$$(X, Y) \in \{(0, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}.$$

Za ostale celice pa izračunamo verjetnosti:

- $(X, Y) = (0, 1)$: ne pade niti ena enica, medtem ko je vsota šest dosežena že po prvem metu. V prvem metu torej vržemo 6, potem pa karkoli različnega od 1.

$$P((X, Y) = (0, 1)) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{216}$$

- $(X, Y) = (0, 2)$: ne pade niti ena enica, medtem ko je vsota šest dosežena po drugem metu. V prvem metu torej ne smemo vreči 6, potem pa v drugem metu vržemo dovolj, da dosežemo vsoto šest. Pri nobenem metu ne vržemo 1.

$$P((X, Y) = (0, 2)) = \frac{3 + 4 + 5 + 5}{36} \cdot \frac{5}{6} = \frac{85}{216}$$

- $(X, Y) = (0, 3)$: ne pade niti ena enica, medtem ko je vsota šest dosežena po tretjem metu. V prvem in drugem metu torej smemo vreči vsoto največ 5, vendar pri nobenem metu ne vržemo 1. To lahko dosežemo le na tri načine. V tretjem metu potem lahko vržemo karkoli različnega od 1 in je vsota 6 dosežena.

$$P((X, Y) = (0, 3)) = \frac{3}{36} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{216}$$

- $(X, Y) = (1, 0)$: pade ena enica, medtem ko vsota šest ni dosežena. To lahko dosežemo le na tri načine.

$$P((X, Y) = (1, 0)) = \frac{3}{216}$$

- $(X,Y) = (1,1)$: pade ena enica in je vsota šest dosežena že po prvem metu. Prvi met torej vržemo 6, v drugem in tretjem metu pa mora pasti enica natanko enkrat.

$$P((X,Y) = (1,1)) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) = \frac{10}{216}$$

- $(X,Y) = (1,2)$: pade ena enica in je vsota šest dosežena po drugem metu. Prvi met ne smemo vreči 6 in hkrati v drugem dovolj, da dosežemo vsoto 6. Imamo 10 takšnih možnosti, ko pade enica v prvem metu, 5 takšnih možnosti, ko pade enica v drugem metu in 17 takšnih monžnosti, ko pade enica v tretjem metu.

$$P((X,Y) = (1,2)) = \frac{10+5+17}{216} = \frac{32}{216}$$

- $(X,Y) = (1,3)$: pade ena enica in je vsota šest dosežena po tretjem metu. V prvih dveh metih ne smemo doseči ali preseči vsote 6. Imamo 14 takšnih možnosti, ko pade enica v prvem metu, 14 takšnih možnosti, ko pade enica v drugem metu, in 2 takšni možnosti, ko pade enica v tretjem metu.

$$P((X,Y) = (1,3)) = \frac{14+14+2}{216} = \frac{30}{216}$$

- $(X,Y) = (2,0)$: padeta dve enici, medtem ko vsota šest ni dosežena. To lahko dosežemo z metom dveh enic in ene dvojke ali ene trojke v poljubnem vrstnem redu. Skupaj torej na 6 načinov.

$$P((X,Y) = (2,0)) = \frac{6}{216}$$

- $(X,Y) = (2,1)$: padeta dve enici in je vsota šest dosežena že po prvem metu. Prvi met torej vržemo 6, v drugem in tretjem metu pa mora pasti enica.

$$P((X,Y) = (2,1)) = \frac{1}{216}$$

- $(X,Y) = (2,2)$: padeta dve enici in je vsota šest dosežena po drugem metu. To lahko dosežemo z metom dveh enic in ene petice ali ene šestice, pri čemer mora petica pasti v prvem ali drugem metu, šestica pa nujno v drugem metu. Skupaj torej na 3 načine.

$$P((X,Y) = (2,2)) = \frac{3}{216}$$

- $(X,Y) = (2,3)$: padeta dve enici in je vsota šest dosežena po tretjem metu. To lahko dosežemo z metom dveh enic in ene štirice ali ene petice ali ene šestice, pri čemer lahko štirica pade kadarkoli, petica in šestica pa morata pasti nujno v tretjem metu. Skupaj torej na 5 načinov.
$$P\left((X,Y) = (2,3)\right) = \frac{5}{216}$$
- $(X,Y) = (3,0)$: padejo tri enice, vsota 6 pa seveda ni dosežena.
$$P\left((X,Y) = (3,0)\right) = \frac{1}{216}$$

Verjetnostna tabela za naključni vektor $(X,Y)$ je:

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $\frac{3}{216}$ | $\frac{6}{216}$ | $\frac{1}{216}$ | $\frac{10}{216}$ |
| 1 | $\frac{25}{216}$ | $\frac{10}{216}$ | $\frac{1}{216}$ | 0 | $\frac{36}{216}$ |
| 2 | $\frac{85}{216}$ | $\frac{32}{216}$ | $\frac{3}{216}$ | 0 | $\frac{120}{216}$ |
| 3 | $\frac{15}{216}$ | $\frac{30}{216}$ | $\frac{5}{216}$ | 0 | $\frac{50}{216}$ |
| | $\frac{125}{216}$ | $\frac{75}{216}$ | $\frac{15}{216}$ | $\frac{1}{216}$ | |

(b) $P(A) = P(X=2) = \dfrac{15}{216}$

$P(B) = P(Y=2) = \dfrac{120}{216}$

(c) Naključna spremenljivka $Z$ lahko zavzame najmanj 1 in največ 5. Zaloga vrednosti za naključno spremenljivko $Z$ je torej enaka $Z_Z = \{1,2,3,4,5\}$. Verjetnostna shema za $Z$ se poračuna tako, da seštejemo ustrezne verjetnosti iz tabele in tako dobimo:
$$Z : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{28}{216} & \frac{101}{216} & \frac{49}{216} & \frac{33}{216} & \frac{5}{216} \end{pmatrix}.$$

## 2.5 NALOGE IZ STATISTIKE

**Naloga** 26 Pri 40 naključnih osebah ženskega spola smo merili koncentracijo hemoglobina v krvi. Povprečje meritev znaša 130 $g/L$. Standardni odklon meritev pa znaša 8 $g/L$.

(a) Na podlagi meritev določi 95% interval zaupanja za populacijski standardni odklon koncentracije hemoglobina v krvi oseb ženskega spola.

(b) Na stopnji značilnosti 0.01 preveri domnevo, da je populacijsko povprečje večje od postavljene spodnje meje, ki znaša 125 $g/L$.

**Rešitev:**

(a) Radi bi poiskali interval zaupanja za populacijski standardni odklon $\sigma$. Ker je $n = 40$, je opazovani vzorec velik, zato bomo uporabili naslednjo statistiko:

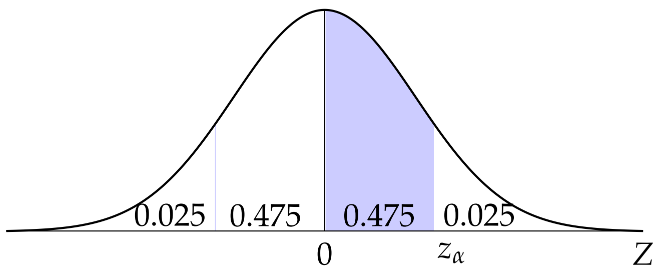
$$Z = \frac{S}{\sigma}\sqrt{2(n-1)} - \sqrt{2n-3} \sim N(0,1).$$

V tem primeru se iskani interval zaupanja določi kot

$$\left[\frac{\sqrt{2(n-1)}S}{\sqrt{2n-3}+z_\alpha}, \frac{\sqrt{2(n-1)}S}{\sqrt{2n-3}-z_\alpha}\right].$$

Po vrsti določimo vrednosti neznank tega intervala.

- $n = 40$
- $S = 8$
- $z_\alpha = 1.96$




Iskani interval zaupanja na stopnji zaupanja 95% je

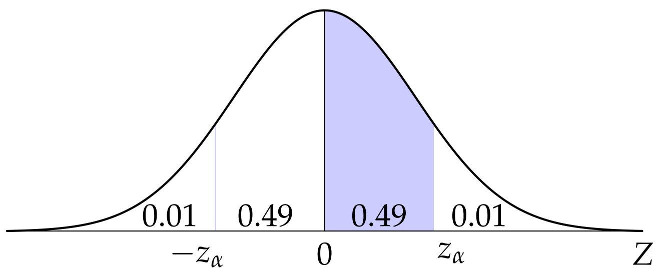
$$\left[\frac{\sqrt{78}\cdot 8}{\sqrt{77}+1.96}, \frac{\sqrt{78}\cdot 8}{\sqrt{77}-1.96}\right] = [6.58, 10.37].$$

(b) $H_0(\mu \leq 125) : H_1(\mu > 125)$
Ker je $n = 40$, je opazovani vzorec velik, in ker je populacijski standardni odklon $\sigma$ neznan, bomo uporabili naslednjo testno statistiko:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S} \cdot \sqrt{n} \sim N(0,1).$$

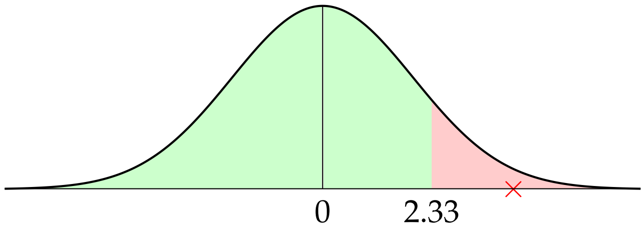
Določimo vrednosti neznank

- $\overline{X} = 130$
- $S = 8$
- $z_\alpha = 2.33$



Potem pa je

$$Z = \frac{130 - 125}{8} \cdot \sqrt{40} \approx 3.95.$$




Ker testna vrednost $Z$ pade v kritično območje, hipotezo $H_0$ zavrnemo na stopnji značilnosti 0.01.

**Komentar**. Na stopnji značilnosti 0.01 trdimo, da je populacijsko povprečje koncentracije hemoglobina v krvi žensk večje od postavljene spodnje meje, ki znaša 125 $g/L$.

**Naloga 27** Na vzorcu 16-ih študentov smo izmerili povprečno telesno višino 174.5 cm s standardnim odklonom 6.8 cm.

(a) Določi 90% interval zaupanja za populacijsko povprečje telesne višine študentov.

(b) Na stopnji značilnosti 0.05 preveri hipotezo, da je populacijski standardni odklon telesne višine študenta manjši od 10 cm.

**Rešitev:**

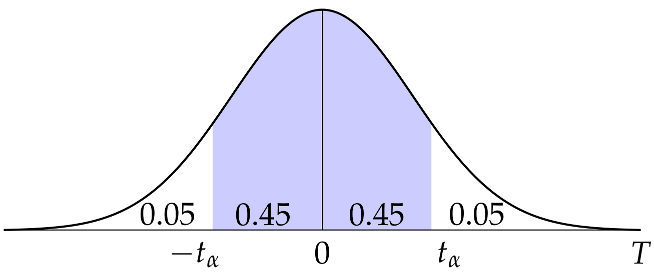
(a) Radi bi poiskali interval zaupanja za populacijsko povprečje $\mu$. Opazovani vzorec je majhen ($n = 16$), in ker je populacijski standardni odklon $\sigma$ neznan, bomo uporabili naslednjo statistiko:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{SE} \sim S(15).$$

V tem primeru se iskani interval zaupanja določi kot $\left[\overline{X} - t_\alpha SE, \overline{X} + t_\alpha SE\right]$.

Po vrsti določimo vrednosti neznank tega intervala.

- $n = 16$
- $\overline{X} = 174.5$
- $S = 6.8$
- $SE = 1.7$
- $t_\alpha = 1.753$




Iskani interval zaupanja na stopnji zaupanja 90% je

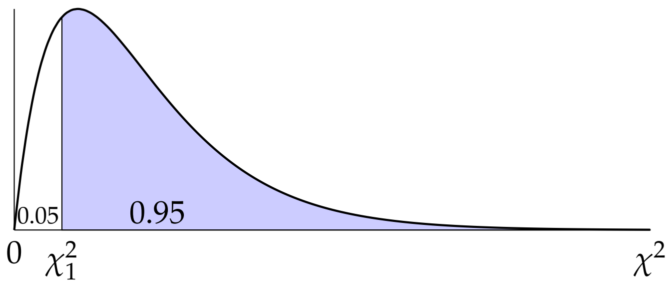
$$[174.5 - 1.753 \cdot 1.7, 174.5 + 1.753 \cdot 1.7] = [171.52, 177.48] .$$

(b) $H_0(\sigma \geq 10) : H_1(\sigma < 10)$
Uporabimo testno statistiko za testiranje standardnega odklona na majhnih vzorcih:

$$\chi^2 = \frac{(n-1) \cdot S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(15).$$

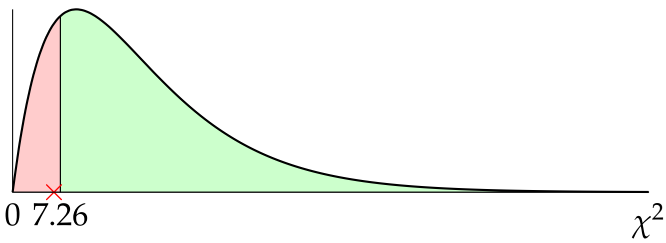
Izračunajmo neznane vrednosti

- $n = 16$
- $S = 6.8$
- $\chi_1^2 = 7.26$




Vrednost testne statistike znaša za podani primer znaša

$$\chi^2 = \frac{15 \cdot 6.8^2}{10^2} = 6.936.$$




Ker testna vrednost $\chi^2$ pade v kritično območje, hipotezo $H_0$ na stopnji značilnosti 0.05 zavrnemo.

**Komentar**. Na stopnji značilnosti 0.05 zavrnemo ničelno hipotezo in sprejmemo alternativo, da je populacijski standardni odklon telesne višine študenta manjši od 10 cm.

**Naloga** 28 Naključne študente UM (vzorec je vseboval 213 študentov) smo spraševali, ali so cepljeni proti Covid-19, in s katerim cepivom so cepljeni. Dobljeni podatki so zbrani v naslednji tabeli:

| Cepivo | $f_k$ |
|---|---|
| Pfizer/BioNTech | 51 |
| Moderna | 9 |
| AstraZeneca | 32 |
| Janssen | 4 |
| Necepljen | 117 |

(a) Na podlagi podatkov iz tabele določi 90% interval zaupanja za delež cepljenih študentov na UM.

(b) Na stopnji značilnosti 1% preveri hipotezo, da je delež cepljenih študentov na UM večji od 40% (kolikor znaša nacionalni delež za starost med 18 in 24 let).

**Rešitev:**

(a) Radi bi poiskali interval zaupanja za populacijski delež $p$. Uporabili bomo naslednjo statistiko:

$$Z = \frac{\overline{p} - p}{SE(\overline{p})} \sim N(0,1).$$

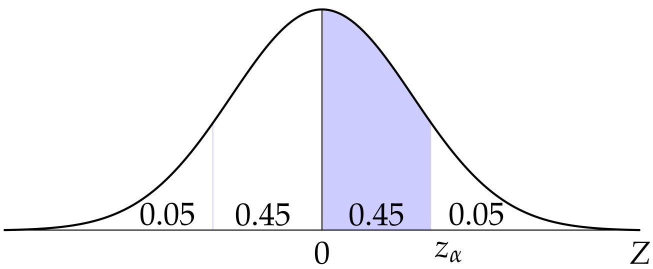
Pri čemer $\overline{p}$ predstavlja vzorčni delež, standarna napaka vzorčnega deleža pa se izračuna kot $SE(\overline{p}) = \sqrt{\dfrac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}$.

Interval zaupanja se določi kot

$$\left[\overline{p} - z_\alpha SE(\overline{p}), \overline{p} + z_\alpha SE(\overline{p})\right].$$

Po vrsti določimo vrednosti neznank tega intervala.

- $n = 213$
- $\overline{p} = \frac{96}{213}$
- $SE(\overline{p}) \approx 0.0341$
- $z_\alpha = 1.64$




Iskani interval zaupanja na stopnji zaupanja 90% je

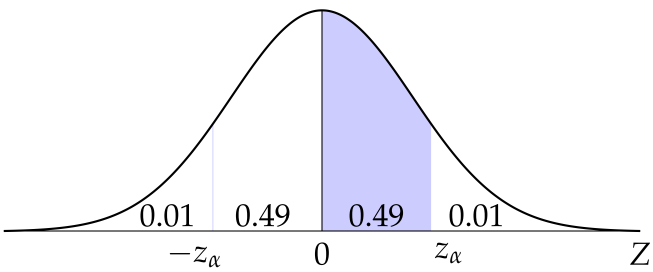
$$\left[\frac{96}{213} - 1.64 \cdot 0.0341, \frac{96}{213} + 1.64 \cdot 0.0341\right] = [0.3948, 0.5066].$$

(b) $H_0(p \leq 0.4) : H_1(p > 0.4)$
Uporabili bomo naslednjo testno statistiko:

$$Z = \frac{\overline{p} - p_0}{\sqrt{p_0 \cdot (1-p_0)}} \cdot \sqrt{n} \sim N(0,1).$$

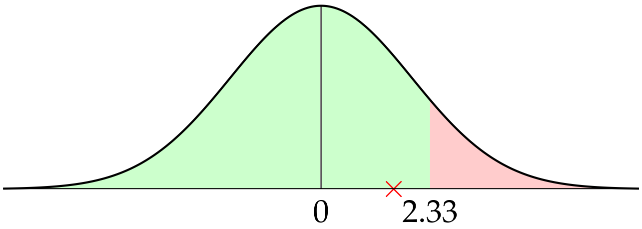
Določimo vrednosti neznank

- $\overline{p} = \frac{96}{213}$
- $p_0 = 0.4$
- $z_\alpha = 2.33$



Potem pa je

$$Z = \frac{\frac{96}{213} - 0.4}{\sqrt{0.4 \cdot (1 - 0.4)}} \cdot \sqrt{213} = \frac{9\sqrt{142}}{71} \approx 1.511.$$




Ker testna vrednost $Z$ ne pade v kritično območje, hipoteze $H_0$ ne zavrnemo na stopnji značilnosti 0.01.

**Komentar**. Podatki za delež cepljenih študentov na UM iz vzorca se ne razlikujejo statistično značilno od podanega nacionalnega deleža za starost med 18 in 24 let. To pomeni, da pri stopnji značilnosti 1% ne moremo trditi, da je delež cepljenih študentov na UM večji od 40%.

**Naloga 29** Ob zaključku šolskega leta smo dobili zaključne ocene pri matematiki za 40 naključno izbranih dijakov. Podatki o teh ocenah (od 1 do 5) so zbrani v naslednji frekvenčni tabeli:

| Ocena | $f_k$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 4 |
| 3 | 12 |
| 4 | 17 |
| 5 | 6 |

(a) Določi povprečje in standardni odklon za zaključno oceno pri matematiki tega vzorca.

(b) Določi 99% interval zaupanja za populacijski delež odličnih ocen pri matematiki (delež petic).

(c) Na stopnji značilnosti 5% preveri hipotezo, da je populacijska povprečna vrednost za zaključno oceno pri matematiki večja od 3.3.

**Rešitev:**

(a) Vzorčno povprečje za zaključno oceno je:

$$\overline{X} = \frac{1}{40}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 12 + 4 \cdot 17 + 5 \cdot 6) = 3.575.$$

Vzorčni standardni odklon izračunamo preko vzorčne disperzije:

$$S^2 = \frac{1}{39}\sum_{i=1}^{5}\left(\left(\overline{X} - x_i\right)^2 \cdot f_i\right) = \frac{477}{520}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{\frac{477}{520}}$$

(b) Za populacijski delež $p$ uporabimo naslednjo statistiko:

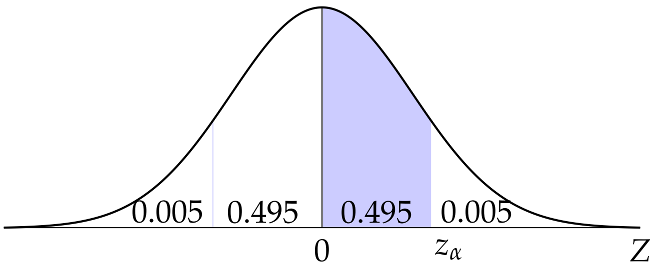
$$Z = \frac{\overline{p} - p}{SE(\overline{p})} \sim N(0, 1).$$

Pri čemer $\overline{p}$ predstavlja vzorčni delež, standarna napaka vzorčnega deleža pa se izračuna kot $SE(\overline{p}) = \sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}$.
Interval zaupanja se določi kot

$$\left[\overline{p} - z_\alpha SE(\overline{p}), \overline{p} + z_\alpha SE(\overline{p})\right].$$

Po vrsti določimo vrednosti neznank tega intervala.

- $n = 40$
- $\overline{p} = \frac{6}{40}$
- $SE(\overline{p}) = \sqrt{\frac{0.15 \cdot 0.85}{40}}$
- $z_\alpha = 2.57$




Iskani interval zaupanja na stopnji zaupanja 99% je

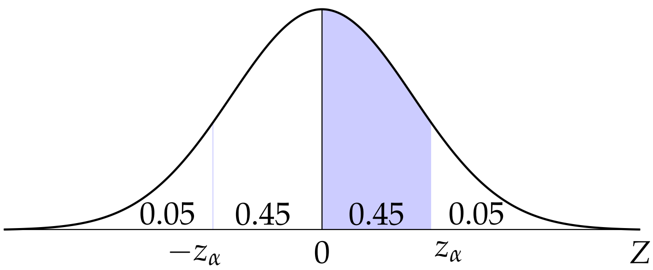
$$\left[\frac{6}{40} - 2.57 \cdot \sqrt{\frac{0.15 \cdot 0.85}{40}}, \frac{6}{40} + 2.57 \cdot \sqrt{\frac{0.15 \cdot 0.85}{40}}\right] = [0.005, 0.2951].$$

(c) $H_0(\mu \leq 3.3) : H_1(\mu > 3.3)$
Ker je $n = 40$, je opazovani vzorec velik, in ker je populacijski standardni odklon $\sigma$ neznan, bomo uporabili naslednjo testno statistiko:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S} \cdot \sqrt{n} \sim N(0, 1).$$

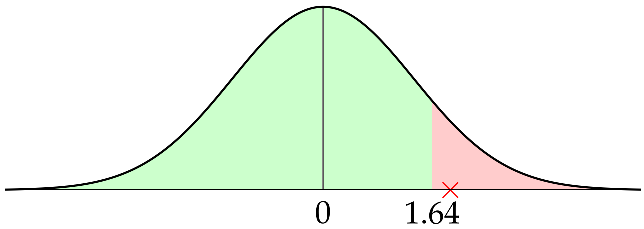
Določimo vrednosti neznank

- $\overline{X} = 3.575$
- $S = \sqrt{\frac{477}{520}}$
- $z_\alpha = 1.64$




Potem pa je

$$Z = \frac{3.575 - 3.3}{\sqrt{\frac{477}{520}}} \cdot \sqrt{40} \approx 1.816.$$




Ker testna vrednost $Z$ pade v kritično območje, hipotezo $H_0$ zavrnemo na stopnji značilnosti 0.05.

**Komentar**. Na stopnji značilnosti 0.05 trdimo, da je populacijsko povprečje zaključne ocene pri matematiki za dijake večje od 3.3.

**Naloga** 30 Zbrali smo podatke o velikosti obutve 20 naključno izbranih študentov:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 42 | 44 | 45 | 44 | 43 |
| 41 | 42 | 44 | 43 | 43 |
| 46 | 44 | 45 | 44 | 43 |
| 43 | 42 | 41 | 44 | 43 |

(a) Zapiši frekvenčno tabelo s frekvencami in kumulativnimi frekvencami.

(b) Določi modus, mediano, povprečje in standardni odklon.

(c) Določi interval zaupanja za populacijsko povprečje $\mu$ velikosti obutve študentov na stopnji zaupanja 0.99.

**Rešitev:**

(a) Frekvenčna tabela s frekvencami in kumulativnimi frekvencami:

| Velikosti $x_k$ | $f_k$ | $F_k$ |
|---|---|---|
| 41 | 2 | 2 |
| 42 | 3 | 5 |
| 43 | 6 | 11 |
| 44 | 6 | 17 |
| 45 | 2 | 19 |
| 46 | 1 | 20 |

(b) Modusa sta dva, in sicer 43 in 44. Mediana je enaka $\dfrac{43+43}{2} = 43$.

Vzorčno povprečje za velikost obutve je:

$$\overline{X} = \frac{1}{20}\,(41 \cdot 2 + 42 \cdot 3 + 43 \cdot 6 + 44 \cdot 6 + 45 \cdot 2 + 46 \cdot 1) = \frac{866}{20} = 43.3.$$

Vzorčni standardni odklon izračunamo preko vzorčne disperzije:

$$S^2 = \frac{1}{39}\sum_{i=1}^{6}\left(\left(\overline{X} - x_i\right)^2 \cdot f_i\right) = \frac{161}{95}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{\frac{161}{95}}$$

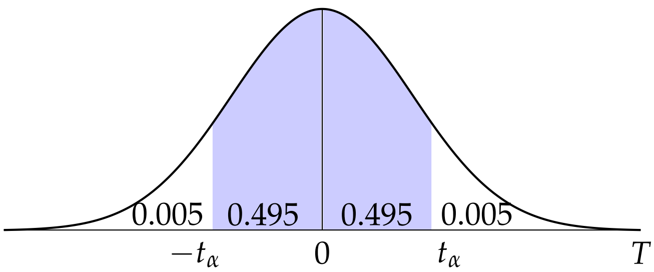
(c) Radi bi poiskali interval zaupanja za populacijsko povprečje $\mu$. Opazovani vzorec je majhen ($n = 20$), in ker je populacijski standardni odklon $\sigma$ neznan, bomo uporabili naslednjo statistiko:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{SE} \sim S(19).$$

V tem primeru se iskani interval zaupanja določi kot $\left[\overline{X} - t_\alpha SE, \overline{X} + t_\alpha SE\right]$.

Po vrsti določimo vrednosti neznank tega intervala.

- $n = 20$
- $\overline{X} = 43.3$
- $S = \sqrt{\frac{161}{95}}$
- $SE = \sqrt{\frac{161}{1900}}$
- $t_\alpha = 2.861$




Iskani interval zaupanja na stopnji zaupanja 99% je

$$\left[43.3 - 2.861 \cdot \sqrt{\frac{161}{1900}}, 43.3 + 2.861 \cdot \sqrt{\frac{161}{1900}}\right] = [42.47, 44.13]\,.$$

Univerza v Mariboru

Fakulteta za elektrotehniko,
računalništvo in informatiko