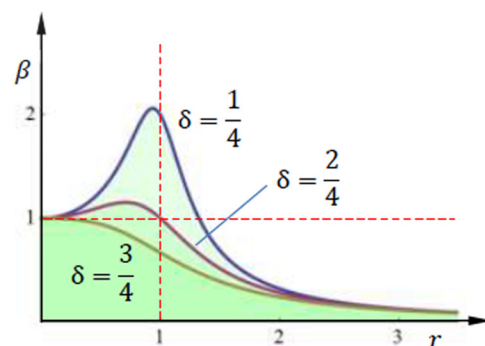
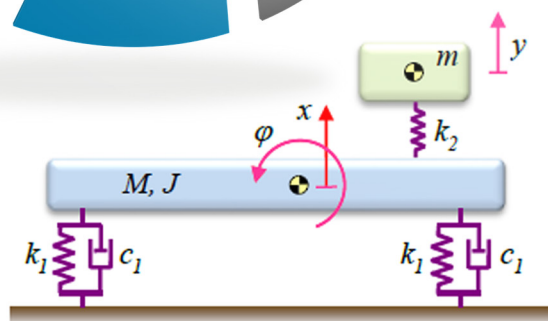




Univerzitetna založba  
Univerze v Mariboru

# Dinamika masnih sistemov

Boštjan Harl Marko Kegl Timi Karner







Univerza v Mariboru

Fakulteta za strojništvo

# Dinamika masnih sistemov

Avtorji

**Boštjan Harl**

**Marko Kegl**

**Timi Karner**

Marec 2024

<b>Naslov</b> <i>Title</i>	<b>Dinamika masnih sistemov</b> <i>Dynamics of Mass Systems</i>	
<b>Avtor</b> <i>Authors</i>	Boštjan Harl (Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo)	Marko Kegl (Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo)
	Timi Karner (Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo)	
<b>Recenzija</b> <i>Review</i>	Nenad Gubelj (Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo)	Boštjan Brank (Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo)
<b>Lektoriranje</b> <i>Language editing</i>	Amidas, d. o. o.	
<b>Tehnična urednika</b> <i>Technical editors</i>	Jan Perša (Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba)	
<b>Oblikovanje ovitka</b> <i>Cover designer</i>	Jan Perša (Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba)	
<b>Grafika na ovitku</b> <i>Cover graphics</i>	System web, avtor: geralt, Pixabay.com, 2024 Harl, Kegl, Karner (avtorji), 2024	
<b>Grafične priloge</b> <i>Graphic material</i>	Viri so lastni, razen če ni navedeno drugače. Harl, Kegl, Karner (avtorji), 2024	

**Založnik**  
*Published by* **Univerza v Mariboru**  
**Univerzitetna založba**  
Slomškov trg 15, 2000 Maribor  
Slovenija  
<https://press.um.si>, [zalozba@um.si](mailto:zalozba@um.si)

**Izdajatelj**  
*Issued by* **Univerza v Mariboru**  
**Fakulteta za strojništvo**  
Smetanova ulica 17, 2000 Maribor  
Slovenija  
<https://fs.um.si>, [fs@um.si](mailto:fs@um.si)

**Izdaja**  
*Edition* Prva izdaja

**Izdano**  
*Published at* Maribor, marec 2024

**Vrsta publikacije**  
*Publication type* E-knjiga

**Dostopno na**  
*Available at* <http://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/854>

CIP - Kataložni zapis o publikaciji Univerzitetna knjižnica Maribor
531.391(0.034.2)
HARL, Boštjan Dinamika masnih sistemov [Elektronski vir] / avtorji Boštjan Harl, Marko Kegl, Timi Karner. - 1. izd. - E-publikacija. - Maribor : Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba, 2024
Način dostopa (URL): <a href="https://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/854">https://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/854</a> ISBN 978-961-286-835-2 (Pdf) doi: 10.18690/um.fs.1.2024 COBISS.SI-ID 188292867



© Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba  
/ University of Maribor, University Press

**Besedilo / Text** © Harl, Kegl, Karner, 2024

To delo je objavljeno pod licenco Creative Commons Priznanje avtorstva-Nekomercialno-Brez predelav 4.0 Mednarodna. / *This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivs 4.0 International License.*

Uporabnikom je dovoljeno reproduciranje brez predelave avtorskega dela, distribuiranje, dajanje v najem in priobčitev javnosti samega izvirmega avtorskega dela, in sicer pod pogojem, da navedejo avtorja in da ne gre za komercialno uporabo.

Vsa gradiva tretjih oseb v tej knjigi so objavljena pod licenco Creative Commons, razen če to ni navedeno drugače. Če želite ponovno uporabiti gradivo tretjih oseb, ki ni zajeto v licenci Creative Commons, boste morali pridobiti dovoljenje neposredno od imetnika avtorskih pravic.

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

**ISBN** 978-961-286-835-2 (pdf)

**DOI** <https://doi.org/10.18690/um.fs.1.2024>

**Cena**  
*Price* Brezplačni izvod

**Odgovorna oseba založnika**  
*For publisher* prof. dr. Zdravko Kacič,  
rektor Univerze v Mariboru

**Citiranje**  
*Attribution* Harl, B., Kegl, M., Karner, T. (2024). *Dinamika masnih sistemov*. Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba.  
doi: 10.18690/um.fs.1.2024

# Vsebina

<b>Vsebina</b> .....	<b>I</b>
<b>Predgovor</b> .....	<b>1</b>
<b>1 MATEMATIČNE IN MEHANSKE OSNOVE</b> .....	<b>3</b>
<b>1.1 Osnovne predpostavke in dogovori</b>	<b>3</b>
<b>1.2 Matematične osnove</b>	<b>4</b>
<b>1.3 Kinematične osnove</b>	<b>6</b>
1.3.1 Opis gibanja točke na podlagi gibljive baze	7
1.3.2 Opis gibanja telesa	9
1.3.3 Rotacijska matrika in preslikave komponent	10
<b>2 DINAMIKA TOGEGA TELESA</b> .....	<b>11</b>
<b>2.1 Masni delec in telo</b>	<b>11</b>
<b>2.2 Osnovni zakoni dinamike</b>	<b>16</b>
2.2.1 Newtonovi zakoni za masni delec	16
2.2.2 Uporaba Newtonovih zakonov na sistemu delcev in na zveznem telesu končnih dimenzij	16
<b>2.3 Splošni zakoni dinamike in njihova uporaba</b>	<b>18</b>
2.3.1 Zakoni o gibalni količini	18
2.3.2 Zakoni o vrtilni količini	22
2.3.3 Zakoni o mehanski energiji	26
2.3.3.1 Delo in moč	26
2.3.3.2 Kinetična energija	27
2.3.3.3 Potencialne energije	29
<b>3 MEHANSKA NIHANJA</b> .....	<b>31</b>
<b>3.1 Uvod in definicije</b>	<b>31</b>
3.1.1 Telo	32
3.1.2 Vzmet	33
3.1.2.1 Togosti konstrukcijskih elementov	33
3.1.2.2 Nadomestna togost skupine vzmeti	35
3.1.3 Dušilka	37
<b>3.2 Lastna nihanja sistemov z eno prostostno stopnjo</b>	<b>38</b>
3.2.1 Nedušeno lastno nihanje	38
3.2.1.1 Eliminacija statične obremenitve	40
3.2.1.2 Rotacija okrog fiksne osi	40
3.2.2 Dušeno lastno nihanje	41
<b>3.3 Lastna nihanja sistemov z več prostostnimi stopnjami</b>	<b>44</b>
<b>3.4 Vsiljena nihanja sistemov z eno prostostno stopnjo</b>	<b>46</b>
3.4.1 Nedušeno vsiljeno nihanje	47
3.4.2 Dušeno vsiljeno nihanje	48
3.4.2.1 Primer vsiljenega nihanja z inercialnim vzburjanjem	50
3.4.2.2 Primer vsiljenega nihanja z vzburjanjem podlage	51

<b>4 ANALITIČNA DINAMIKA.....</b>	<b>53</b>
<b>4.1 Uvod</b>	<b>53</b>
<b>4.2 Prostostne stopnje dinamičnih sistemov</b>	<b>54</b>
<b>4.3 Pridobivanje gibalnih enačb s pomočjo Newton-Eulerjevega pristopa in D'Alembertovega načela</b>	<b>54</b>
4.3.1 Newton-Eulerjev pristop	54
4.3.2 D'Alembertovo načelo	55
4.3.3 Newton-Eulerjev pristop in diagram prostih teles	56
4.3.4 D'Alembertovo načelo in uporaba metode prerezov	59
<b>4.4 Posplošene oziroma generalizirane koordinate</b>	<b>62</b>
<b>4.5 Holonomni sistemi in holonomne vezi</b>	<b>64</b>
<b>4.6 Neholonomni sistemi in neholonomne vezi</b>	<b>65</b>
<b>4.7 Virtualno delo</b>	<b>66</b>
4.7.1 Virtualni pomik	66
4.7.2 Odvisne in neodvisne koordinate	67
<b>4.8 Virtualno delo in posplošene sile</b>	<b>69</b>
4.8.1 Posplošene sile	69
4.8.2 Virtualno delo konservativnih in nekonservativnih sil	72
4.8.3 Virtualno delo reakcijskih sil v podporah	72
<b>4.9 Načelo uporabe virtualnega dela v statiki oziroma statičnem ravnotežju</b>	<b>73</b>
4.9.1 Virtualno delo v statiki	73
4.9.2 Pridobivanje ravnotežnih enačb	74
<b>4.10 Načelo uporabe virtualnega dela v dinamiki</b>	<b>78</b>
4.10.1 Virtualno delo v dinamiki	78
4.10.2 Pridobivanje gibalnih oziroma dinamičnih enačb	78
<b>4.11 Izpeljava Lagrangeeve enačbe</b>	<b>83</b>
4.11.1 Lagrangeeva enačba	83
4.11.2 Upoštevanje sile vzmeti pri Lagrangeevi metodi	88
<b>LITERATURA .....</b>	<b>91</b>
<b>Stvarno kazalo .....</b>	<b>93</b>

# Predgovor

Ta knjiga je nastala kot učni pripomoček k predmetu *Dinamika masnih sistemov*, ki spada v učni program Fakultete za elektrotehniko, računalništvo in informatiko, smer Mehatronika, na Univerzi v Mariboru.

Za razumevanje knjige je potrebno relativno skromno predznanje. S področja mehanike je koristno poznavanje osnovnih pojmov iz statike in kinematike. S področja matematike pa je potrebno poznavanje osnov vektorskega in diferencialnega računa.

Zaradi preglednosti in lažjega branja so matematični in drugi objekti pisani z različnimi pisavami. Kolikor se je dalo, so uporabljena naslednja pravila označevanja:

- skalarji:  $a, b, c \dots \alpha, \beta, \gamma$
- vektorji in matrice (tenzorji):  $\mathbf{a}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{B} \dots \mathbf{z}, \mathbf{Z}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \dots$
- točke:  $A, B, C \dots Z$





# 1 MATEMATIČNE IN MEHANSKE OSNOVE

**Namen:**

- Opredeliti osnovne predpostavke in dogovore.
- Osvežiti matematične pojme, ki jih bomo najbolj potrebovali.
- Osvežiti najbolj nujne teme s področja kinematike.

**Cilj:**

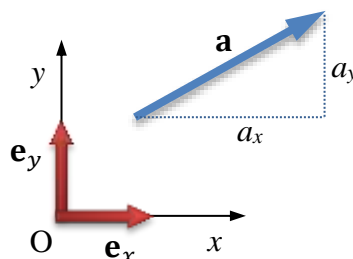
S pridobljenim znanjem bo študent sposoben predelati in razumeti snov naslednjih poglavij.

## 1.1 Osnovne predpostavke in dogovori

V okviru te knjige bomo privzeli naslednje dogovore in predpostavke:

- Telesa bomo obravnavali kot *homogena*. Največ opravka bomo imeli z *nedeformabilnimi* oziroma *togimi* telesi, razen kadar bo posebej poudarjeno, da je obravnavano telo *deformabilno* oziroma (v našem primeru) elastično.
- Vse *mehanske sklope*, kot so na primer ležaji, mehanske vezi in podpore, bomo obravnavali *idealizirano*: ni zračnosti, ni trenja in podobno.
- Za opis gibanja bomo večinoma uporabljali *Kartezijev koordinatni sistem*.

Za opis mehanskega dogajanja v ravnini bomo uvedli *fiksno* ortonormirano vektorsko bazo ( $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ ) in koordinatni sistem  $Oxy$  (slika 1.1).

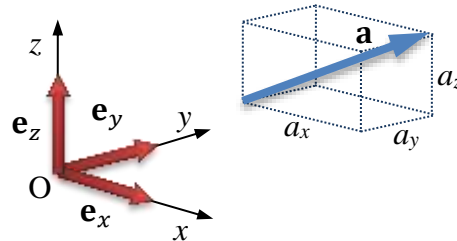


**Slika 1.1:** Ortonormiran koordinatni sistem  $Oxy$  v opazovani ravnini

Dogovorimo se še, da bomo bazo ( $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ ) in koordinatni sistem  $Oxy$  vedno orientirali tako,

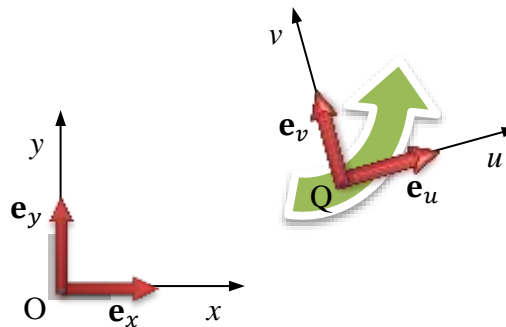
kot kaže slika. Zaradi tega dogovora bomo risanje koordinatnega sistema pogosto opuščali. Prav tako bomo običajno opuščali risanje vektorske baze.

Za opis gibanja v prostoru vektorsko bazo  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$  razširimo z vektorjem  $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y$ , ki določa tretjo os, os  $z$  (slika 1.2). Baza  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  je ortonormirana in določa desnosučni koordinatni sistem  $Oxyz$ , ki ga imenujemo Kartezijev koordinatni sistem.



**Slika 1.2:** Ortonormiran koordinatni sistem  $Oxyz$  v prostoru

Razen fiksnega koordinatnega sistema  $Oxyz$  bomo uvedli še *gibljivega*  $Quvw$ . Vektorsko bazo gibljivega sistema bomo označili z  $(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w)$ . Ravninski različici fiksnega in gibljivega koordinatnega sistema sta prikazani na **sliki 1.3**.



**Slika 1.3:** Fiksni koordinatni sistem  $Oxy$  in gibljivi koordinatni sistem  $Quv$

Kot se bo izkazalo v nadaljevanju, je uvedba gibljivega koordinatnega sistema koristna zato, ker lahko s tem opis gibanja v mnogih primerih zelo poenostavimo.

## 1.2 Matematične osnove

Z uporabo fiksnega koordinatnega sistema  $Oxyz$  lahko poljuben vektor  $\mathbf{a}$  zapišemo kot

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z \quad (1.1)$$

kjer so  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  bazni vektorji koordinatnega sistema. Ker v tem koordinatnem sistemu velja

$$\mathbf{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

lahko zapis vektorja  $\mathbf{a}$  skrajšamo na

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

oziroma

$$\mathbf{a} = [a_x \quad a_y \quad a_z]^T \quad (1.4)$$

Skalarje  $a_x$ ,  $a_y$  in  $a_z$  imenujemo *koordinate* vektorja  $\mathbf{a}$ .

Pri ravninskih problemih imamo v glavnem opravka z vektorji, za katere velja  $a_z = 0$ . Zaradi racionalnosti v takih primerih vektor  $\mathbf{a}$  pišemo tudi kot

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

**Pozor:** Če tak vektor uporabimo v vektorskem produktu, ga je treba pred tem obvezno razširiti s tretjo koordinato  $a_z = 0$ .

V izračunih pogosto potrebujemo tudi *normo* ali *dolžino* vektorja  $\mathbf{a}$ , ki je skalar in jo izračunamo

$$a = \|\mathbf{a}\| = +\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1.6)$$

Z uvedbo dodatnega gibljivega koordinatnega sistema  $Quvw$  lahko poljubni vektor  $\mathbf{a}$  zapišemo na dva načina, in sicer kot

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z \quad (1.7)$$

ter kot

$$\mathbf{a} = a_u \mathbf{e}_u + a_v \mathbf{e}_v + a_w \mathbf{e}_w \quad (1.8)$$

kjer so  $(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w)$  bazni vektorji gibljivega koordinatnega sistema, ki so spremenljivi in odvisni od časa. Opozorimo na dejstvo, da so koordinate  $a_x$ ,  $a_y$  in  $a_z$  vektorja  $\mathbf{a}$  v fiksnem koordinatnem sistemu v splošnem številčno drugačne od koordinat  $a_u$ ,  $a_v$  in  $a_w$  istega vektorja v gibljivem koordinatnem sistemu.

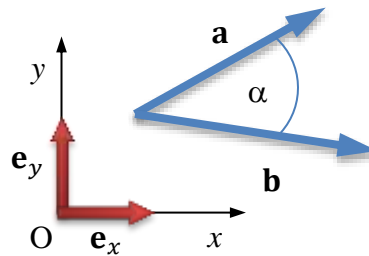
Definirajmo še operacije med vektorji in matrikami. *Skalarni produkt* dveh vektorjev  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{b}$  (slika 1.4) je skalar  $c$ , ki se izračuna kot produkt dolžin obeh vektorjev in kosinusa vmesnega kota (vmesni kot je kot  $\alpha$ , ki ga vektorja oklepata, če izhajata iz skupne začetne točke)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \alpha = c \quad (1.9)$$

Skalarni produkt lahko izračunamo tudi kot vsoto produktov istoležnih komponent obeh vektorjev  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = c \quad (1.10)$$

Skalarni produkt vektorja s samim seboj lahko zapišemo kot  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2$ .

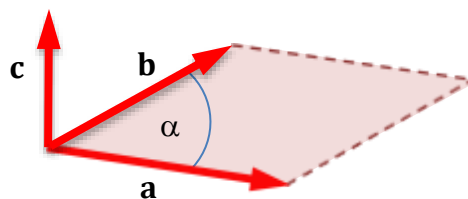


**Slika 1.4:** Vektorja **a** in **b** v koordinatnem sistemu  $Oxy$

Iz definicije skalarnega produkta je očitno, da je njegova vrednost enaka *nič*, če sta vektorja **a** in **b** med seboj *ortogonalna*.

*Vektorski produkt* vektorjev **a** in **b** je vektor **c** (slika 1.5), ki je pravokoten na ravnino, ki jo tvorita vektorja **a** in **b**. Njegova absolutna vrednost je enaka ploščini paralelograma, ki ga določata vektorja **a** in **b**.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -(a_x b_z - a_z b_x) \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix} = \mathbf{c} \quad (1.11)$$



**Slika 1.5:** Vektorski produkt vektorjev **a** in **b**

Absolutna vrednost vektorskega produkta je enaka produktu norm obeh vektorjev in sinusa vmesnega kota oziroma  $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = ab \sin \alpha$ . Od tod sledi, da je vektorski produkt enak *vektorju nič*, če sta vektorja **a** in **b** med seboj *paralelna*.

Produkt matrike **A** dimenzije  $3 \times 3$  in vektorja **b** dimenzije 3 da vektor **c** dimenzije 3, ki ga izračunamo kot

$$\mathbf{A}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_x + a_{12}b_y + a_{13}b_z \\ a_{21}b_x + a_{22}b_y + a_{23}b_z \\ a_{31}b_x + a_{32}b_y + a_{33}b_z \end{bmatrix} = \mathbf{c} \quad (1.12)$$

## 1.3 Kinematične osnove

V tem poglavju bomo na kratko predstavili tiste teme s področja kinematike, ki jih bomo nujno potrebovali pri opisu dinamike togega telesa.

### 1.3.1 Opis gibanja točke na podlagi gibljive baze

Eden od najbolj uporabnih načinov opisa gibanja točke je s pomočjo gibljive baze. Motiv za tak način opisa je v tem, da gibljivo bazo namestimo tako, da kompleksnejše gibanje razstavimo na dve enostavnejši gibanji. To nam mnogokrat precej poenostavi zapis krajevnega vektorja in nato tudi izračun hitrosti in pospeškov točke.

Uvedimo fiksni koordinatni sistem  $Oxyz$  z bazo  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  in gibljiv koordinatni sistem  $Quvw$  z bazo  $(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w)$ , (slika 1.6). Lego izhodišča  $Q$  gibljive baze podaja krajevni vektor  $\mathbf{r}_Q$ , njeno vrtenje v prostoru pa naj podaja vektor kotne hitrosti  $\boldsymbol{\omega}$ .

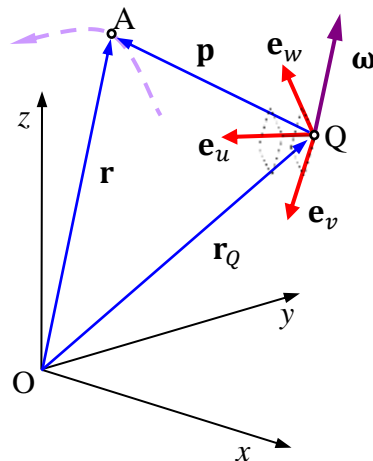
Krajevni vektor točke  $A$  lahko zapišemo kot

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_Q + \mathbf{p} \quad (1.13)$$

Vektor  $\mathbf{p}$  lahko na osnovi gibljive baze izrazimo kot

$$\mathbf{p} = u\mathbf{e}_u + v\mathbf{e}_v + w\mathbf{e}_w \quad (1.14)$$

pri čemer smo z  $(u, v, w)$  označili *lokalne koordinate* točke  $A$  – koordinate  $A$  glede na gibljivo bazo  $(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w)$ .



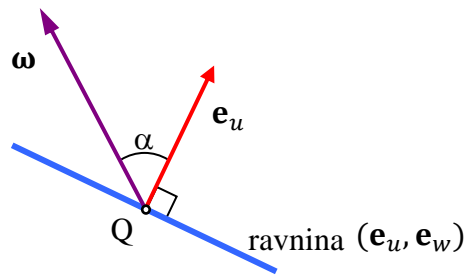
Slika 1.6: Opis gibanja na osnovi gibljive baze

Hitrost točke  $A$  dobimo, kot vedno, z odvajanjem krajevnega vektorja po času

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_Q + \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v}_Q + \dot{u}\mathbf{e}_u + \dot{v}\mathbf{e}_v + \dot{w}\mathbf{e}_w + u\dot{\mathbf{e}}_u + v\dot{\mathbf{e}}_v + w\dot{\mathbf{e}}_w \quad (1.15)$$

Izpeljava izrazov za odvode baznih vektorjev  $(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w)$  po času se verjetno najenostavneje naredi na podlagi sklepanja o lastnostih odvoda vektorja po skalarju. Oglejmo si poljubno situacijo, in sicer iz takega zornega kota, da bosta vektorja  $\mathbf{e}_u$  in  $\boldsymbol{\omega}$  ležala v opazovani ravnini (slika 1.7).

Iz teorije vemo, da je odvod vektorja po času enak vektorju, ki kaže v smeri gibanja vrha vektorja, če bi tega risali iz fiksne točke. Ali drugače:  $\dot{\mathbf{e}}_u$  kaže v smeri gibanja vrha  $\mathbf{e}_u$ , če bi tega risali iz fiksne točke. V narisani situaciji je očitno, da morata biti smer in orientacija  $\dot{\mathbf{e}}_u$  *enaka* smeri in orientaciji vektorja  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_u$ . Glede norme odvoda pa je znano naslednje: norma odvoda vektorja po skalarju (času) je enaka absolutni hitrosti gibanja vrha vektorja  $\mathbf{e}_u$ , če bi tega risali iz fiksne točke.



**Slika 1.7:** Izračun odvoda baznega vektorja  $\mathbf{e}_u$

V narisani situaciji je jasno, da je (pri fiksirani točki Q) absolutna hitrost vrha  $\mathbf{e}_u$  enaka  $\|\boldsymbol{\omega}\| \|\mathbf{e}_u\| \sin \alpha$ . To pa je natanko norma vektorja  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_u$ . Iz tega torej sledi

$$\dot{\mathbf{e}}_u = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_u \quad (1.16)$$

s podobnim sklepanjem pa lahko ugotovimo še

$$\dot{\mathbf{e}}_v = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_v, \dot{\mathbf{e}}_w = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_w \quad (1.17)$$

Z upoštevanjem teh ugotovitev lahko hitrost točke A torej zapišemo kot

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_Q + \dot{u}\mathbf{e}_u + \dot{v}\mathbf{e}_v + \dot{w}\mathbf{e}_w + \boldsymbol{\omega} \times (u\mathbf{e}_u + v\mathbf{e}_v + w\mathbf{e}_w) \quad (1.18)$$

oziroma

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_Q + \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} \quad (1.19)$$

Pri obravnavanem opisu gibanja lahko torej na hitrost točke A gledamo kot na vsoto naslednjih treh komponent

- $\mathbf{v}_Q$  – hitrost izhodišča Q gibljive baze,
- $\mathbf{v}_r = \dot{u}\mathbf{e}_u + \dot{v}\mathbf{e}_v + \dot{w}\mathbf{e}_w$  – hitrost A v primerjavi z gibljivo bazo  $(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w)$  – *relativna hitrost* in
- $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}$  – hitrost A zaradi vrtenja gibljive baze  $(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w)$  s kotno hitrostjo  $\boldsymbol{\omega}$ .

Pospešek točke A dobimo, kot običajno, z odvajanjem vektorja hitrosti po času. Sledi

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}_Q + \dot{\mathbf{v}}_r + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{p} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{p}} \quad (1.20)$$

oziroma

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_Q + \ddot{u}\mathbf{e}_u + \ddot{v}\mathbf{e}_v + \ddot{w}\mathbf{e}_w + \dot{u}\dot{\mathbf{e}}_u + \dot{v}\dot{\mathbf{e}}_v + \dot{w}\dot{\mathbf{e}}_w + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (u\mathbf{e}_u + v\mathbf{e}_v + w\mathbf{e}_w) + \boldsymbol{\omega} \times (\dot{u}\mathbf{e}_u + \dot{v}\mathbf{e}_v + \dot{w}\mathbf{e}_w) + \boldsymbol{\omega} \times (u\dot{\mathbf{e}}_u + v\dot{\mathbf{e}}_v + w\dot{\mathbf{e}}_w) \quad (1.21)$$

Po preureditvi dobimo

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_Q + (\ddot{u}\mathbf{e}_u + \ddot{v}\mathbf{e}_v + \ddot{w}\mathbf{e}_w) + 2\boldsymbol{\omega} \times (\dot{u}\mathbf{e}_u + \dot{v}\mathbf{e}_v + \dot{w}\mathbf{e}_w) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (u\mathbf{e}_u + v\mathbf{e}_v + w\mathbf{e}_w) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times (u\mathbf{e}_u + v\mathbf{e}_v + w\mathbf{e}_w)) \quad (1.22)$$

oziroma

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_Q + \mathbf{a}_r + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{p} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}) \quad (1.23)$$

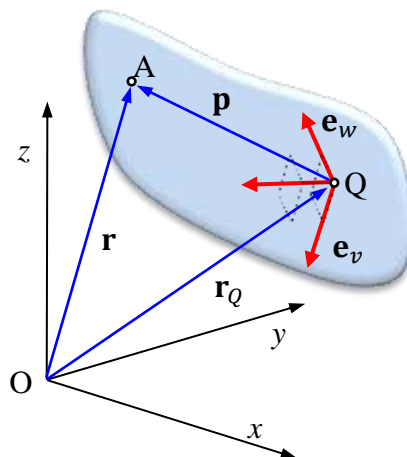
Na pospešek točke A lahko torej pri tem opisu gledamo kot na vsoto naslednjih petih komponent:

- $\mathbf{a}_Q$  – pospešek izhodišča Q gibljive baze,
- $\mathbf{a}_r = \ddot{u}\mathbf{e}_u + \ddot{v}\mathbf{e}_v + \ddot{w}\mathbf{e}_w$  – pospešek A v primerjavi z gibljivo bazo napram gibljivi bazi  $(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w)$  – *relativni pospešek*,
- $\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$  – pospešek A zaradi spreminjanja njene obodne hitrosti kot posledice spreminjanja krivinskega polmera tira – *Coriolisov pospešek*,
- $\mathbf{a}_t = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{p}$  – pospešek A zaradi spreminjanja njene obodne hitrosti kot posledice spreminjanja kotne hitrosti  $\boldsymbol{\omega}$  – *tangencialni pospešek* in
- $\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p})$  – pospešek A zaradi ukrivljenosti tira – *normalni pospešek*.

Na koncu poudarimo, da so zgoraj omenjene komponente (tako pri hitrosti kot tudi pri pospešku) odvisne od izbire koordinatnega sistema. *Drugačna izbira gibljive baze* da namreč *drugačne vrednosti komponent* hitrosti in pospeška pri *istem gibanju*.

### 1.3.2 Opis gibanja telesa

Zelo primerno izhodišče za opis gibanja telesa v prostoru je opis gibanja točke na podlagi gibljive baze. Če namreč gibljivo bazo  $(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w)$  pritrdimo na opazovano telo, lahko lego, hitrost in pospešek poljubne točke A telesa (slika 1.8) izrazimo z enačbami, ki smo jih spoznali v prejšnjem poglavju.



Slika 1.8: Opis gibanja telesa v prostoru

V skladu s povedanim lahko torej lego poljubne točke A telesa zapišemo kot

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_Q + \mathbf{p} = \begin{bmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{bmatrix} + (u\mathbf{e}_u + v\mathbf{e}_v + w\mathbf{e}_w) \quad (1.24)$$

Pri tem so  $(u, v, w)$  lokalne koordinate točke A, ki so odvisne od tega, katero točko telesa opazujemo. Druge količine pa so tiste, ki določajo položaj in zasuk telesa v prostoru, in sicer v naslednjem smislu:

- *položaj telesa* določa lega točke Q oziroma parametri  $x_Q, y_Q$  in  $z_Q$ ,
- *zasuk telesa* določa gibljiva baza oziroma bazni vektorji  $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v$  in  $\mathbf{e}_w$ .

Treba se je spomniti, da ima prosto telo v prostoru 6 prostostnih stopenj: 3 za položaj in 3 za

zasuk. Trije primerni parametri za določanje položaja so očitno  $x_Q$ ,  $y_Q$  in  $z_Q$ . Pri rotacijah pa se pri izbiri primernih parametrov zaplete. Vektorji  $\mathbf{e}_u$ ,  $\mathbf{e}_v$  in  $\mathbf{e}_w$  imajo namreč skupaj 9 komponent, ki jih je očitno treba izraziti samo s tremi parametri. Ta postopek imenujemo *parametrizacija prostorskih rotacij*.

Možnosti, kako parametrizirati rotacije, je več. Vsaka od njih ima svoje dobre in slabe lastnosti. Zgolj za ilustracijo omenimo le naslednji dve varianti:

- parametrizacija z uporabo *Eulerjevih kotov* in
- parametrizacija z *rotacijskim psevdovektorjem*.

Če vektorje  $\mathbf{e}_u$ ,  $\mathbf{e}_v$  in  $\mathbf{e}_w$  po stolpcih zložimo v matriko, dobimo *rotacijsko matriko*

$$\mathbf{R} = [\mathbf{e}_u : \mathbf{e}_v : \mathbf{e}_w] \quad (1.25)$$

Zaradi tega lahko rečemo, da zasuk telesa v prostoru določa njegova rotacijska matrika  $\mathbf{R}$ , parametrizacijo zasukov pa imenujemo tudi *parametrizacija rotacijske matrike*.

### 1.3.3 Rotacijska matrika in preslikave komponent

Za konec si oglejmo le nekaj najpomembnejših lastnosti rotacijske matrike. Fiksni in gibljivi koordinatni sistem naj imata *isto izhodiščno točko*, eden proti drugemu pa sta lahko *poljubno zavrtena*.  $\mathbf{r}_{xyz}$  naj označuje lego neke točke A, izraženo v fiksnem koordinatnem sistemu;  $\mathbf{r}_{uvw}$  pa naj označuje lego iste točke A, izraženo v gibljivem koordinatnem sistemu. V takem primeru lahko dokaj preprosto pokažemo, da velja

$$\mathbf{r}_{xyz} = \mathbf{R}\mathbf{r}_{uvw} \quad (1.26)$$

Rotacijska matrika predstavlja torej *preslikavo med koordinatami* iste točke, izraženimi v dveh koordinatnih sistemih, ki sta med seboj poljubno zavrtena. Pokazati je mogoče, da je matrika  $\mathbf{R}$  *ortogonalna matrika*. To pomeni, da ima vedno inverzno matriko, in ta je enaka njeni transponiranki. Torej velja  $\mathbf{R}^{-1} \equiv \mathbf{R}^T$ , iz česar sledi, da velja tudi

$$\mathbf{r}_{uvw} = \mathbf{R}^T \mathbf{r}_{xyz} \quad (1.27)$$

Ni pa rotacijska matrika uporabna le pri preslikavi vektorjev. Z njeno uporabo lahko preslikujemo tudi objekte višjega reda, kot so na primer *tenzorji* (drugega ali višjega reda). Razlaga pomena pojma *tenzor* presega okvir tega učbenika. Za nas naj bo za zdaj dovolj le to, da lahko *preslikavo (vztrajnostnega) tenzorja* iz enega koordinatnega sistema v drugega naredimo z uporabo rotacijske matrike  $\mathbf{R}$ , in sicer kot

$$\mathbf{J}_{xyz} = \mathbf{R}\mathbf{J}_{uvw}\mathbf{R}^T \quad (1.28)$$

kjer je  $\mathbf{J}_{xyz}$  vztrajnostni tenzor, izražen v koordinatnem sistemu  $xyz$ ,  $\mathbf{J}_{uvw}$  pa je isti tenzor, izražen v zasukanem koordinatnem sistemu  $uvw$ . V obratni smeri je preslikava naslednja

$$\mathbf{J}_{uvw} = \mathbf{R}^T \mathbf{J}_{xyz} \mathbf{R} \quad (1.29)$$



# 2 DINAMIKA TOGEGA TELESA

## Namen:

- Spoznati osnovne zakone dinamike za masni delec.
- Spoznati pojme gibalna in vrtilna količina ter delo, moč in energija.
- Spoznati splošne zakone dinamike za masni delec in telo.

## Cilj:

S pridobljenim znanjem bo študent sposoben preprostejše dinamične probleme iz tehniške prakse pravilno formulirati in rešiti.

## Glavne oporne točke:

- Osnovni zakoni dinamike: trije Newtonovi zakoni za masni delec.
- Splošni zakoni se izpeljejo iz osnovnih zakonov dinamike ter se nanašajo na gibalno in vrtilno količino ter delo, moč in energijo.

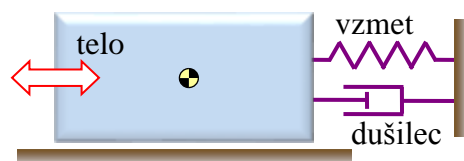
## 2.1 Masni delec in telo

Osnovni zakoni dinamike so formulirani za *masni delec*, vendar pa lahko iz njih izpeljemo zakone, ki veljajo za *telo*.

*Masni delec* imenujemo *točkasto telo* s končno *maso*  $m$ . Z besedo *točkasto* poudarimo, da so dimenzije telesa tako majhne, da lahko:

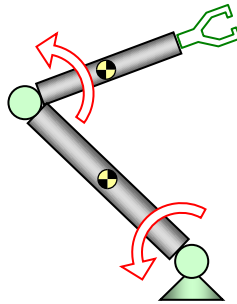
- *zanemarimo* vse *vplive*, ki so *posledica rotacije* telesa, in
- *prijemališča* vseh zunanjih sil *prestavimo v težišče* telesa.

Morda se zdi, da takšen model telesa ni kaj prida uporaben v praksi, vendar pa se izkaže, da ni tako. V mnogih praktičnih primerih se zaradi vezi (vodila, podpore ...) telesa lahko gibljejo samo premo, medtem ko je rotacija preprečena. Razen tega lahko pogosto prijemališča zunanjih sil brez škode prestavimo v težišče telesa. V takih primerih lahko opazovano telo upravičeno obravnavamo kot masni delec (**slika 2.1**).



**Slika 2.1:** Dinamičnih vplivov rotacij tukaj ni – telo lahko obravnavamo kot masni delec

Seveda pa se situacija spremeni, če se opazovano telo lahko vrti in so vplivi zaradi rotacije takšni, da jih ne moremo zanemariti (**slika 2.2**). V takem primeru moramo naš objekt obravnavati kot *telo* s končnimi *dimenzijami* in končno *maso*  $m$ .



**Slika 2.2:** Dinamični vplivi rotacij so tukaj veliki – teles zato ne moremo obravnavati kot masne delce

Za dinamično obravnavo teles potrebujemo nekaj pomožnih količin. Najpomembnejše med njimi so: *prostornina* in *masa* telesa, krajevni vektor *težišča*, *osni vztrajnostni momenti* in *deviacijski vztrajnostni momenti* telesa.

*Prostornino* in *maso* telesa  $B$  računamo z izrazoma

$$\begin{aligned} V &= \int_B dV \\ m &= \int_B \rho dV = \int_B dm \end{aligned} \quad (2.1)$$

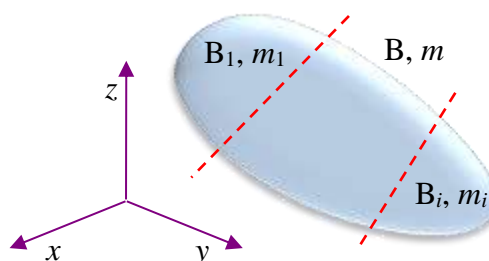
kjer operator  $\int_B$  označuje integracijo po celem telesu,  $dV$  je diferencial prostornine,  $\rho$  pa je gostota snovi telesa. Produkt  $dm = \rho dV$  imenujemo diferencial mase telesa.

*Težišče* telesa je točka, ki ustreza *masnemu središču* telesa, če je gravitacijsko polje konstantno. V tem primeru lahko krajevni vektor težišča izračunamo kot

$$\mathbf{r}_T = \frac{1}{m} \int_B \mathbf{r} dm \quad (2.2)$$

kjer je krajevni vektor poljubne točke telesa označen z  $\mathbf{r}$ .

V praksi si lahko računanje težišča pogosto poenostavimo, če upoštevamo lastnost aditivnosti integrala. Poenostavljeno povedano to pomeni, da lahko integracijo po celem telesu nadomestimo z vsoto integracij po njegovih sestavnih delih. V ta namen razdelimo opazovano telo  $B$  skupne mase  $m$  na  $n$  delov  $B_1 \dots B_n$  z masami  $m_1 \dots m_n$ , kjer je  $m = \sum_{i=1}^n m_i$  (**slika 2.3**).



**Slika 2.3:** Razcep telesa  $B$  na sestavne dele  $B_i$  lahko olajša računanje težišča

Zaradi lastnosti aditivnosti integrala lahko zapišemo

$$\int_B \mathbf{r} dm = \sum_{i=1}^n \int_{B_i} \mathbf{r} dm_i \quad (2.3)$$

Ker pa je

$$\int_{B_i} \mathbf{r} dm_i = m_i \mathbf{r}_{T_i} \quad (2.4)$$

kjer je  $\mathbf{r}_{T_i}$  težišče dela  $B_i$ , sledi

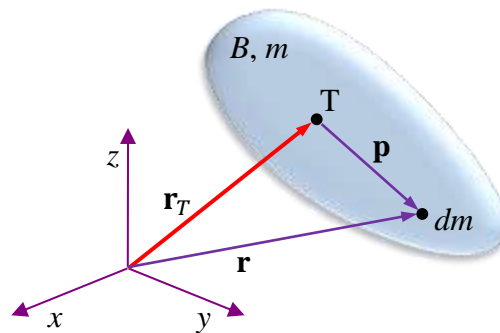
$$\mathbf{r}_T m = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{T_i} m_i \rightarrow \mathbf{r}_T = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{T_i} m_i}{m} \quad (2.5)$$

Ta izraz za računanje težišča telesa B je dokaj koristen, saj je v praksi pogosto lažje izračunljiv kot osnovni izraz z integralom po celem telesu.

V zvezi s težiščem telesa je koristno izpeljati še eno pomembno relacijo, ki se izkaže za zelo koristno pri izpeljavi splošnih zakonov mehanike za telo. V ta namen zapišimo definicijo težišča telesa in jo nekoliko preuredimo, kot sledi (**slika 2.4**).

$$m \mathbf{r}_T = \int_B \mathbf{r} dm = \int_B (\mathbf{r}_T + \mathbf{p}) dm \quad (2.6)$$

kjer je  $\mathbf{p}$  vektor, ki kaže od težišča telesa do točke, podane z  $\mathbf{r}$ .



**Slika 2.4:** Razcep krajevnega vektorja  $\mathbf{r}$  na  $(\mathbf{r}_T + \mathbf{p})$

Vektor  $\mathbf{r}_T$  je neodvisen od integracije po telesu, iz česar sledi

$$m \mathbf{r}_T = \mathbf{r}_T \int_B dm + \int_B \mathbf{p} dm = m \mathbf{r}_T + \int_B \mathbf{p} dm \quad (2.7)$$

Očitno mora veljati

$$\int_B \mathbf{p} dm = 0 \quad (2.8)$$

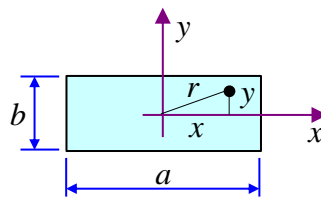
oziroma z besedami: če vektor, odmerjen iz težišča telesa do poljubne točke, integriramo po celotnem telesu, bo rezultat vedno enak nič.

*Osni vztrajnostni moment telesa* je definiran kot

$$J_\alpha = \int_B r_\alpha^2 dm \quad (2.9)$$

kjer desni spodnji indeks  $\alpha$  označuje os, glede na katero računamo moment, B označuje telo,  $dm$  je diferencial mase (masa elementarnega dela) telesa,  $r_\alpha$  pa je oddaljenost  $dm$  od osi  $\alpha$ .

Kot primer si oglejmo izračun osnega vztrajnostnega momenta mase homogene pravokotne prizme za os z, ki gre skozi geometrijsko središče prizme (**slika 2.5**). Dimenzije prizme so  $a \times b \times c$ , gostota materiala pa je enaka  $\rho$ .



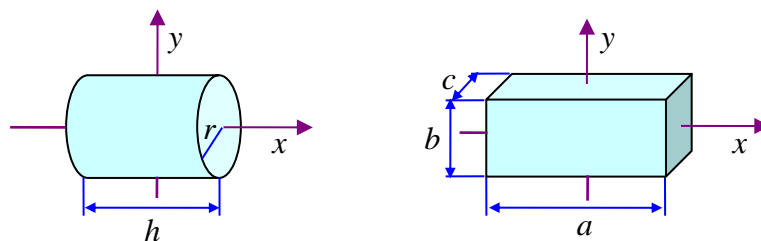
$$J_z = \int_B r^2 dm = \int_B (x^2 + y^2) \rho dx dy dz$$

$$J_z = \rho c \left( b \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 dx + a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy \right)$$

$$J_z = \rho c \left( \frac{1}{12} a^3 b + \frac{1}{12} b^3 a \right) = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

V praksi si pri računanju osnih vztrajnostnim momentov običajno pomagamo z vztrajnostnimi momenti teles pravilnih geometrijskih oblik. Formule za izračun teh vztrajnostnih momentov je zato dobro imeti izpeljane vnaprej. Morda najbolj uporabne od teh formul, kjer  $m$  označuje maso telesa, vse osi pa gredo skozi težišče teles (**slika 2.5**), so naslednje:

- za valj polmera  $r$  in višine  $h$ :  $J_x = \frac{1}{2} m r^2$ ,  $J_y = m \left( \frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right)$ ,
- za kvader dolžine  $a$ , višine  $b$  in širine  $c$ :  $J_x = \frac{1}{12} m (b^2 + c^2)$ ,  $J_y = \frac{1}{12} m (a^2 + c^2)$ ,
- za tanko dolgo palico dolžine  $l$ :  $J_y = \frac{1}{12} m l^2$  (os  $y$  je pravokotna na geometrijsko os in  $r \rightarrow 0$ ).

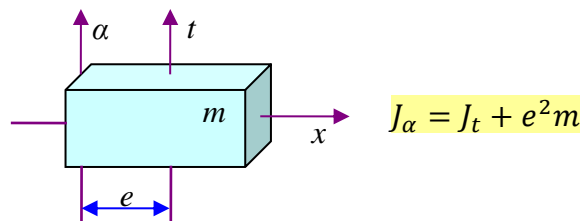


**Slika 2.5:** Telesa pravilnih geometrijskih oblik

Za izračun vztrajnostnega momenta *okoli osi*, ki *ne gre skozi težišče* telesa, lahko uporabimo *Huygens-Steinerjevo pravilo* (izpeljava ni težka in jo bralec lahko naredi sam), ki ga zapišemo kot

$$J_\alpha = J_t + e^2 m \quad (2.10)$$

Pri tem je  $J_\alpha$  vztrajnostni moment glede na (netežiščno) os  $\alpha$ ,  $J_t$  je vztrajnostni moment glede na vzporedno težiščno os  $t$ ,  $e$  je razdalja med osmi,  $m$  pa je masa telesa (**slika 2.6**).



**Slika 2.6:** Uporaba Huygens-Steinerjevega pravila

*Deviacijski vztrajnostni moment telesa* je definiran kot

$$J_{\alpha\beta} = - \int_B \alpha\beta dm \quad (2.11)$$

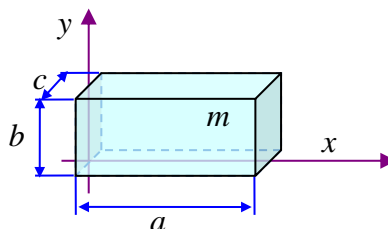
kjer indeksa  $\alpha$  in  $\beta$  označujeta izbrani (medsebojno ortogonalni) osi,  $\alpha$  in  $\beta$  v integralu pa sta koordinati materialnega delca glede na ti dve izbrani osi. Opozorimo na naslednji dejstvi:

- iz *definicije* očitno *sledi*, da je  $J_{\alpha\beta} = J_{\beta\alpha}$ ,
- če je *vsaj ena* od ravnin  $\alpha\gamma$  ali  $\beta\gamma$  *simetrijska* ravnina telesa, velja  $J_{\alpha\beta} = 0$ .

Če osi  $\alpha$ ,  $\beta$  in  $\gamma$  ortogonalnega koordinatnega sistema izberemo tako, da so vsi deviacijski momenti enaki nič, to je  $J_{\alpha\beta} = J_{\beta\gamma} = J_{\gamma\alpha} = 0$ , potem osi  $\alpha$ ,  $\beta$  in  $\gamma$  imenujemo *glavne vztrajnostne osi telesa*. Če gredo *vse* glavne vztrajnostne osi skozi *težišče* telesa, jih imenujemo *centralne glavne vztrajnostne osi* telesa.

Kot primer si oglejmo prizmo mase  $m$  v neki izbrani legi, glede na koordinatni sistem  $xy$  (**slika 2.7**). Deviacijski vztrajnostni moment mase, glede na osi  $x$  in  $y$ , se izračuna kot

$$J_{xy} = - \int_B xy dm = -\rho c \int_0^b \int_0^a xy dx dy = -\frac{1}{4} mab \quad (2.12)$$



**Slika 2.7:** Deviacijski vztrajnostni moment telesa

Osi in deviacijski vztrajnostni momenti telesa, zloženi v matriko dimenzij  $3 \times 3$ , predstavljajo tako imenovani *vztrajnostni tenzor*  $\mathbf{J}$  telesa

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_x & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_y & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Razlaga pomena pojma *tenzor* presega okvir tega učbenika. Za nas naj bo za zdaj dovolj le to, da lahko preslikavo (vztrajnostnega) tenzorja iz enega koordinatnega sistema v drugega naredimo z uporabo rotacijske matrike  $\mathbf{R}$ , kot je to opisano v prvem poglavju.

## 2.2 Osnovni zakoni dinamike

*Osnovni zakoni* dinamike so trije Newtonovi zakoni, ki veljajo za *masni delec*. Na osnovi teh treh zakonov lahko namreč izpeljemo vse druge zakone (zakon o ohranitvi gibalne količine ...), ki jih imenujemo *splošni zakoni* dinamike.

### 2.2.1 Newtonovi zakoni za masni delec

#### Prvi Newtonov zakon

*Prvi Newtonov zakon*, ki ga imenujemo tudi *zakon vztrajnosti* (ali *inercije*), lahko zapišemo tako:

❖ *Masni delec, na katerega ne delujejo nobene zunanje sile, ohranja svoje stanje mirovanja ali translatornega enakomernega gibanja.*

Lastnost masnega delca, da ohranja svoje stanje, če nanj ne delujejo zunanje sile, imenujemo *vztrajnost* ali *inercija* delca.

#### Drugi Newtonov zakon

*Drugi Newtonov zakon*, ki mu rečemo kar *osnovni zakon dinamike*, je Newton formuliral na podlagi gibalne količine, Euler pa ga je pozneje zapisal v bolj znani obliki, in sicer:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (2.14)$$

Z besedami bi ga lahko opisali tako:

❖ *Masni delec mase  $m$ , na katerega delujejo zunanje sile z rezultanto  $\mathbf{F}$ , se giblje s takim pospeškom  $\mathbf{a}$ , da je produkt  $m\mathbf{a}$  enak  $\mathbf{F}$ .*

Pospešek delca in sila, ki nanj deluje, sta torej sorazmerna vektorja; njuna smer in orientacija sta vedno enaki. Sorazmernostni faktor predstavlja maso delca.

#### Tretji Newtonov zakon

*Tretji Newtonov zakon*, ki ga imenujemo tudi *zakon akcije in reakcije*, lahko zapišemo tako:

❖ *Dva masna delca delujeta drug na drugega s silo enake intenzitete in smeri, vendar nasprotno orientacije.*

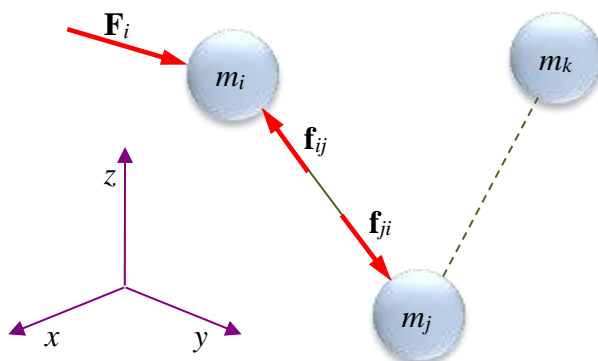
To velja ne glede na gibalno stanje obeh delcev, torej tako pri pospeševanju kot tudi v stanju mirovanja.

### 2.2.2 Uporaba Newtonovih zakonov na sistemu delcev in na zveznem telesu končnih dimenzij

Newton je svoje zakone zapisal za masni delec. Da lahko te zakone prevedemo tudi v obliko, ki velja za telesa končnih dimenzij, je zelo koristno uvesti *sistem masnih delcev* (slika 2.8). Ta

je sestavljen iz  $N$  masnih delcev z masami  $m_i, i = 1 \dots N$ . Posamezni delci so med seboj *lahko povezani* z vezmi ali pa tudi ne. Vsak delec  $m_i$  je lahko obremenjen z zunanjo silo  $\mathbf{F}_i$  in s silami  $\mathbf{f}_{ij}$  v vezeh, ki vežejo delce. Za sile v vezeh iz tretjega Newtonovega zakona sledi:

❖ Če na delec  $m_i$  deluje vezna sila  $\mathbf{f}_{ij}$ , potem na delec  $m_j$  deluje nasprotno enaka vezna sila  $\mathbf{f}_{ji} = -\mathbf{f}_{ij}$ .



Slika 2.8: Sistem masnih delcev

Težišče sistema masnih delcev je podano z enačbo:

$$\mathbf{r}_T = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i m_i \quad (2.15)$$

kjer je  $m = \sum_{i=1}^N m_i$  skupna masa sistema,  $\mathbf{r}_i$  pa je krajevni vektor oziroma lega masnega delca  $m_i$ . Če to enačbo množimo z  $m$  in dvakrat odvajamo po času, dobimo

$$m \mathbf{a}_T = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \quad (2.16)$$

kjer je  $\mathbf{a}_T$  *pospešek težišča* sistema.

Uporabimo drugi Newtonov zakon za masni delec  $m_i$ . Ta se glasi:  $\mathbf{F}_i + \sum \mathbf{f}_{ij} = m_i \mathbf{a}_i$ . Pri tem  $\sum \mathbf{f}_{ij}$  označuje vsoto vseh veznih sil, s katerimi drugi delci delujejo na delec  $m_i$ . Če to enačbo vstavimo v prejšnjo, dobimo:

$$m \mathbf{a}_T = \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i + \sum \mathbf{f}_{ij}) \quad (2.17)$$

Za konec se moramo samo še spomniti, da vezne sile  $\mathbf{f}_{ij}$  nastopajo v paru in da je vsota vseh teh sil v sistemu enaka nič. Ker je torej  $\sum_{i=1}^N \sum \mathbf{f}_{ij} = 0$ , sledi

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}_T \quad (2.18)$$

kjer  $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i$  označuje rezultanto vseh zunanjih sil, ki delujejo na sistem. Za sistem delcev torej velja, da je *vsota vseh zunanjih sil* enaka produktu *skupne mase* in *pospeška težišča* sistema. To enačbo lahko interpretiramo kot *drugi Newtonov zakon* za *sistem masnih delcev*.

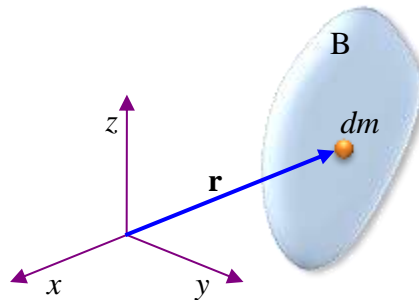
Kadar na sistem delcev ne delujejo zunanje sile, je torej pospešek težišča enak nič. Iz tega sledi, da mora biti v odsotnosti zunanjih sil hitrost težišča sistema konstantna. Ali drugače, če je  $\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = 0$ , sledi:

$$\mathbf{v}_T = \text{konst.} \quad (2.19)$$

To pomeni, da *brez vpliva* zunanjih sil *težišče* sistema delcev *ohranja konstantno hitrost*, ki je

lahko tudi enaka nič. Torej tak sistem lahko, na primer, *miruje*, se *giblje enakomerno premo*, *enakomerno rotira okrog ene od glavnih težiščnih osi* ali pa opravlja še kakšno drugačno gibanje. V vsakem primeru je vektor hitrosti težišča zagotovo konstanten, če nimamo vpliva zunanjih sil.

*Sistem masnih delcev* lahko *prevedemo* na *zvezno telo končnih dimenzij*, če privzamemo  $N \rightarrow \infty$  in  $m_i \rightarrow dm$ , kjer  $dm$  označuje diferencial mase telesa (**slika 2.9**).



**Slika 2.9:** Zvezno telo B končnih dimenzij in njegov diferencial mase  $dm$

Zamenjava  $m_i \rightarrow dm$  formalno pomeni, da je treba vsak operator za seštevanje po  $N$  delcih sistema zamenjati z integralom po celotnem telesu B oziroma

$$\sum_{i=1}^N \rightarrow \int_B \quad (2.20)$$

V splošnem lahko ugotovimo, da po opravljenih zamenjavah vse enačbe, ki smo jih izpeljali za sistem delcev, smiselno veljajo tudi za telo končnih dimenzij. *Drugi Newtonov zakon* se torej za *telo končnih dimenzij* lahko zapiše kot

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_T \quad (2.21)$$

Ali z besedami: *vsota vseh zunanjih sil*, ki delujejo na telo, je enaka produktu *mase telesa* in *pospeška* njegovega *težišča*.

## 2.3 Splošni zakoni dinamike in njihova uporaba

Z uporabo Newtonovih zakonov lahko načelno rešimo vse probleme klasične dinamike. Vendar pa se v praksi izkaže, da je reševanje mnogih problemov precej bolj preprosto, če namesto osnovnih zakonov uporabimo njihove *izpeljanke* – torej zakonitosti, ki jih izpeljemo iz Newtonovih zakonov in jih imenujemo *splošni zakoni* dinamike. V tej knjigi bomo obravnavali le nekaj najpomembnejših.

### 2.3.1 Zakoni o gibalni količini

#### Masni delec

Za *masni delec* z maso  $m$ , ki se giblje s hitrostjo  $\mathbf{v}$  (**slika 2.10**), definiramo *gibalno količino*  $\mathbf{K}$  kot



$$\mathbf{K} = m\mathbf{v} \quad (2.22)$$

Če levo in desno stran gornje enačbe odvajamo po času (in upoštevamo, da je masa konstantna), dobimo

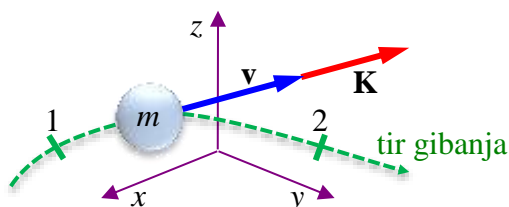
$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} \quad (2.23)$$

Če upoštevamo, da je produkt  $m\mathbf{a}$  enak rezultanti  $\mathbf{F}$  vseh zunanjih sil (drugi Newtonov zakon), pa sledi

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{F} \quad (2.24)$$

Gornja enačba nam pove, da je hitrost spreminjanja gibalne količine enaka rezultanti zunanjih sil. To enačbo imenujemo tudi *zakon o spremembi gibalne količine* (v diferencialni obliki). Z besedami ga lahko opišemo tako:

❖ Časovni odvod gibalne količine masnega delca je enak vsoti vseh zunanjih sil, ki delujejo na masni delec.



Slika 2.10: Gibalna količina masnega delca

Pomnožimo gornjo enačbo z diferencialom časa  $dt$  ter levo in desno stran integrirajmo od stanja 1 (v času  $t_1$ ) do stanja 2 (v času  $t_2$ ). Dobimo

$$\int_{\mathbf{K}_1}^{\mathbf{K}_2} d\mathbf{K} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt \quad (2.25)$$

Iz tega očitno sledi

$$\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt \quad (2.26)$$

kjer sta  $\mathbf{K}_1$  in  $\mathbf{K}_2$  gibalni količini masnega delca v trenutku  $t_1$  oziroma  $t_2$ , integral na desni strani gornje enačbe pa imenujemo *impulz* ali *sunek sile*. Gornjo enačbo, ki jo imenujemo tudi *zakon o spremembi gibalne količine* (v integralski obliki), lahko torej z besedami opišemo tako:

❖ Sprememba gibalne količine masnega delca v časovnem intervalu od  $t_1$  do  $t_2$  je enaka impulzu sile v tem istem časovnem intervalu.

Iz gornje razlage je očitno, da se bo gibalna količina masnega delca ohranjala, kadar bo  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ . V takem primeru je namreč tudi impulz sile enak nič in torej velja

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_1 \quad (2.27)$$

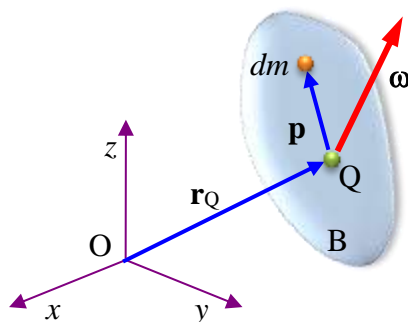
kar imenujemo *zakon o ohranitvi gibalne količine*.

## Telo

Gornje enačbe, ki smo jih izpeljali za masni delec, lahko v nekem smislu posplošimo tudi na *telo končnih dimenzij*. Gibalna količina telesa B je enaka *vsoti gibalnih količin* vseh njegovih delcev. Torej lahko zapišemo

$$\mathbf{K} = \int_B \mathbf{v} dm \quad (2.28)$$

kjer je  $\mathbf{v}$  hitrost diferenciala mase  $dm$ .



**Slika 2.11:** Na telesu B izberemo točko Q

Izberimo na telesu B poljubno točko Q (**slika 2.11**). Iz poglavij o kinematiki vemo, da lahko hitrost  $\mathbf{v}$  poljubne točke telesa vedno zapišemo kot

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} \quad (2.29)$$

kjer je  $\mathbf{v}_Q$  hitrost točke Q (translacija telesa),  $\boldsymbol{\omega}$  je kotna hitrost vrtenja telesa (rotacija telesa) okrog osi, ki gre skozi Q,  $\mathbf{p}$  pa je vektor od točke Q do diferenciala  $dm$  (**slika 2.11**). Po vstavljanju te relacije v izraz za gibalno količino dobimo

$$\mathbf{K} = \int_B (\mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}) dm = \mathbf{v}_Q \int_B dm + \boldsymbol{\omega} \times \int_B \mathbf{p} dm \quad (2.30)$$

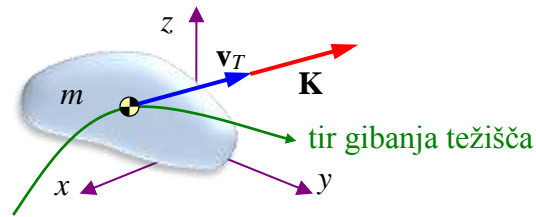
Drugi člen na desni strani enačbe vsebuje integral  $\int_B \mathbf{p} dm$ . Če točko Q izberemo v *težišču telesa*, se pravi  $Q \equiv T$ , dobimo  $\int_B \mathbf{p} dm = 0$ . Razen tega vemo, da je  $\int_B dm = m$ , iz česar sledi

$$\mathbf{K} = m\mathbf{v}_T \quad (2.31)$$

Gibalna količina telesa je torej enaka produktu *mase telesa* in *hitrosti njegovega težišča* in je torej *neodvisna* od *rotacije* telesa okrog njegove težiščne osi (**slika 2.12**). Če dobljeno relacijo odvajamo po času, dobimo zakon o spremembi gibalne količine telesa (v diferencialni obliki)

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = m\mathbf{a}_T = \mathbf{F} \quad (2.32)$$

kjer je  $\mathbf{F}$  rezultanta vseh zunanjih sil, ki delujejo na telo,  $\mathbf{a}_T$  pa je pospešek težišča telesa.



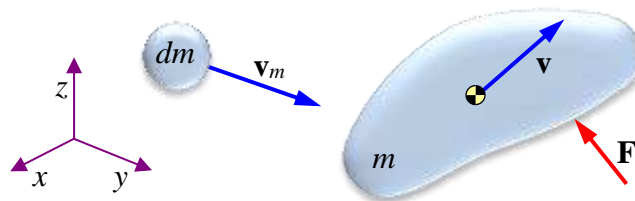
Slika 2.12: Gibalna količina telesa

Smiselno lahko seveda zapišemo tudi zakon o spremembi gibalne količine telesa v integralski obliki

$$\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt \quad (2.33)$$

### Telo spremenljive mase

V tehniški praksi ni malo situacij, kjer je treba analizirati gibanje telesa, katerega masa se med gibanjem zvezno in bistveno spreminja. Primer takšne situacije je gibanje rakete z motorjem na tekoče gorivo. V takšnih primerih je treba gibalne enačbe zapisati z ustreznim upoštevanjem vpliva masnega toka, zaradi katerega se masa telesa spreminja (narašča ali upada).



Slika 2.13: Gibanje telesa s spremenljivo maso

Oglejmo si situacijo na **sliki 2.13**. Težišče telesa mase  $m$  se giblje s hitrostjo  $\mathbf{v}$ . Znotraj časovnega intervala  $dt$  na telo deluje zunanja sila  $\mathbf{F}$ , v telo pa trči tudi masni delec mase  $dm$ , ki se giblje s hitrostjo  $\mathbf{v}_m$ . Masni delec se pri trku spoji s telesom, katerega masa je po trku torej enaka vsoti  $m + dm$ . Zaradi delovanja zunanje sile in trka se spremeni tudi hitrost telesa; njegovo težišče se po trku giblje s hitrostjo  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ .

Za opisano situacijo lahko zapišemo zakon o spremembi gibalne količine sistema (telo + delec) znotraj časovnega intervala  $dt$ . Ta se glasi

$$(m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) - (m\mathbf{v} + dm\mathbf{v}_m) = \mathbf{F} dt \quad (2.34)$$

V tej enačbi se med seboj izničita dva produkta  $m d\mathbf{v}$ , poleg tega pa lahko zanemarimo tudi diferencialno količino višjega reda  $dmd\mathbf{v} \approx 0$ . Z upoštevanjem slednjega lahko zakon preoblikujemo v

$$m d\mathbf{v} + dm\mathbf{v} = dm\mathbf{v}_m + \mathbf{F} dt \quad (2.35)$$

Če dobljeno enačbo delimo z  $dt$ , dobimo na levi strani časovni odvod gibalne količine telesa spremenljive mase. Zakon o spremembi gibalne količine telesa spremenljive mase se torej v

diferencialni obliki lahko zapiše kot

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \dot{m}\mathbf{v}_m + \mathbf{F} \quad (2.36)$$

kjer  $\dot{m} = \frac{dm}{dt}$  predstavlja masni tok, zaradi katerega se spreminja masa opazovanega telesa. V tej enačbi na desni strani nastopa vektor  $\mathbf{v}_m$ , ki predstavlja hitrost delcev masnega toka. V tehniški praksi ta hitrost običajno ni znana, dokler ne poznamo hitrosti gibanja telesa. To je dokaj neugodna situacija, ki se ji lahko izognemo, če to enačbo predelamo v nekoliko drugačno obliko.

Za predelavo gornje enačbe najprej upoštevamo, da lahko časovni odvod gibalne količine zapišemo kot  $\frac{d\mathbf{K}}{dt} = m\mathbf{a} + \dot{m}\mathbf{v}$ . Z upoštevanjem te relacije lahko po preureditvi dobimo

$$m\mathbf{a} = \dot{m}(\mathbf{v}_m - \mathbf{v}) + \mathbf{F} \quad (2.37)$$

kjer izraz v oklepaju  $(\mathbf{v}_m - \mathbf{v}) = \mathbf{v}_r$  predstavlja relativno hitrost delcev masnega toka, merjeno proti telesu. To enačbo lahko torej zapišemo tudi kot

$$m\mathbf{a} = \dot{m}\mathbf{v}_r + \mathbf{F} \quad (2.38)$$

To je zelo uporabna enačba za izračun gibanja rakete. Na desni strani razen zunanje sile  $\mathbf{F}$  nastopata še masni tok  $\dot{m}$  in relativna hitrost  $\mathbf{v}_r$  izpušnih plinov raketnega motorja. Obe slednji količini sta torej parametra raketnega motorja in predstavljata znana podatka. Če lahko rezultanto  $\mathbf{F}$  zunanjih sil (gravitacija, zračni upor ...) dovolj dobro ovrednotimo, izračun trenutnega pospeška rakete torej ni več problematičen. Produkt  $\dot{m}\mathbf{v}_r$  ima enoto sile in ga imenujemo tudi *potisk motorja*.

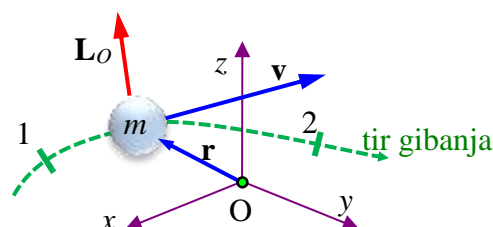
## 2.3.2 Zakoni o vrtilni količini

### Masni delec

Opazujemo *masni delec* z maso  $m$ , ki se giblje s hitrostjo  $\mathbf{v}$  (slika 2.14). *Vrtilno količino* masnega delca, izračunano glede na fiksno točko  $O$ , definiramo kot

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (2.39)$$

kjer je  $\mathbf{r}$  krajevni vektor masnega delca.



Slika 2.14: Vrtilna količina masnega delca

Kar takoj opozorimo na dejstvo, da je vrtilna količina delca odvisna od izbire točke  $O$  (oziroma izhodišča koordinatnega sistema). Če koordinatni sistem premaknemo, se torej spremeni tudi vrednost vrtilne količine delca.

Odvajajmo vrtilno količino po času. Dobimo

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\mathbf{a} \quad (2.40)$$

Ker je prvi vektorski produkt na desni strani enak nič in če upoštevamo drugi Newtonov zakon, sledi

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (2.41)$$

oziroma

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \mathbf{M}_O \quad (2.42)$$

kjer smo z  $\mathbf{M}_O$  označili rezultanto momenta vseh zunanjih sil na delec. Pri tem mora biti moment zunanjih sil izračunan glede na točko O. To enačbo imenujemo *zakon o spremembi vrtilne količine* (v diferencialni obliki). Z besedami jo lahko opišemo tako:

❖ Časovni odvod vrtilne količine (izračunane glede na točko O) masnega delca je enak momentu vseh zunanjih sil (izračunanemu glede na točko O), ki delujejo na masni delec.

Pomnožimo gornjo enačbo z diferencialom časa  $dt$  ter levo in desno stran integrirajmo od stanja 1 (v času  $t_1$ ) do stanja 2 (v času  $t_2$ ). Dobimo

$$\int_{\mathbf{L}_{O1}}^{\mathbf{L}_{O2}} d\mathbf{L}_O = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O dt \quad (2.43)$$

Iz tega očitno sledi

$$\mathbf{L}_{O2} - \mathbf{L}_{O1} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O dt \quad (2.44)$$

kjer sta  $\mathbf{L}_{O1}$  in  $\mathbf{L}_{O2}$  vrtilni količini masnega delca v trenutku  $t_1$  oziroma  $t_2$ , integral na desni strani gornje enačbe pa imenujemo *impulz* ali *sunek momenta sile*. Gornjo enačbo, ki jo imenujemo tudi *zakon o spremembi vrtilne količine* (v integralski obliki), lahko torej z besedami opišemo tako:

❖ Sprememba vrtilne količine masnega delca v časovnem intervalu od  $t_1$  do  $t_2$  je enaka impulzu momenta v tem istem časovnem intervalu.

Iz zgornje razlage je očitno, da se bo vrtilna količina masnega delca ohranjala v vsakem časovnem intervalu, v katerem bo  $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ . V takem primeru torej velja

$$\mathbf{L}_{O2} = \mathbf{L}_{O1} \quad (2.45)$$

kar imenujemo *zakon o ohranitvi vrtilne količine*.

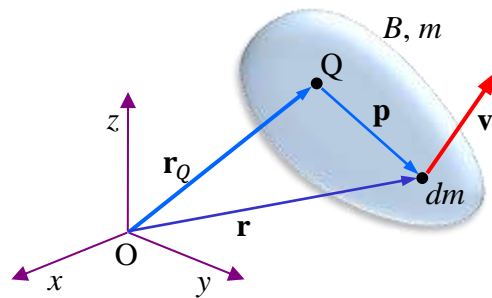
## Telo

Enačbe, ki smo jih izpeljali za masni delec, lahko smiselno posplošimo tudi na *telo končnih dimenzij*. Kar takoj povejmo, da je izpeljava zakonitosti, ki so vezane na vrtilno količino telesa, precej zahtevna. Na srečo se stvari nekoliko poenostavijo, če se dogovorimo, da bomo vrtilno količino telesa računali le glede na *posebej izbrane točke telesa*.

Začnimo s splošno definicijo. Vrtilna količina telesa B, izračunana glede na izhodišče O koordinatnega sistema (**slika 2.15**), je podana z izrazom

$$\mathbf{L}_O = \int_B \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm \quad (2.46)$$

kjer je  $\mathbf{r}$  krajevni vektor diferenciala mase  $dm$ ,  $\mathbf{v}$  pa je njegova hitrost.



**Slika 2.15:** Razcep krajevnega vektorja  $\mathbf{r}$  na  $(\mathbf{r}_Q + \mathbf{p})$

Splošen izraz za vrtilno količino je običajno razmeroma težko izračunljiv. Tukaj si pomagamo tako, da na telesu  $B$  izberemo točko  $Q$  (slika 2.11). Vrtilna količina telesa  $B$ , izračunana glede na  $Q$ , se lahko zapiše kot

$$\mathbf{L}_Q = \int_B \mathbf{p} \times \mathbf{v} dm = \int_B \mathbf{p} \times (\mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}) dm \quad (2.47)$$

kjer je  $\mathbf{v}_Q$  hitrost točke  $Q$  telesa,  $\boldsymbol{\omega}$  je kotna hitrost rotacije telesa okrog osi, ki gre skozi točko  $Q$ ,  $\mathbf{p}$  pa je vektor od točke  $Q$  telesa do diferenciala  $dm$ . Dobimo

$$\mathbf{L}_Q = \int_B \mathbf{p} dm \times \mathbf{v}_Q + \int_B \mathbf{p} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}) dm = \int_B \mathbf{p} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}) dm \quad (2.48)$$

kjer smo privzeli, da je  $\int_B \mathbf{p} dm \times \mathbf{v}_Q = 0$ . Ta relacija je *izpolnjena* takrat, kadar je točka  $Q$  izbrana tako, da velja *vsaj eden* od naslednjih *pogojev*:

- Točka  $Q$  je *fiksna točka*. V tem primeru namreč v vsakem trenutku velja  $\mathbf{v}_Q = \mathbf{0}$  in gornja relacija je očitno izpolnjena. Kot primer take točke lahko navedemo točko na fiksni osi rotirajočega telesa.
- Točka  $Q$  je *težišče telesa*. V tem primeru je namreč  $\int_B \mathbf{p} dm = \mathbf{0}$  in gornja relacija je očitno spet izpolnjena. Pri tem ni pomembno, ali se težišče telesa giblje ali ne.

Od zdaj bomo predpostavljali, da točka  $Q$  *izpolnjuje vsaj enega* od navedenih pogojev.

Krajši račun nam pokaže, da lahko integral  $\int_B \mathbf{p} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}) dm$  zapišemo kot

$$\int_B \mathbf{p} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}) dm = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \quad (2.49)$$

kjer je  $\mathbf{J}$  *vztrajnostni tenzor* telesa, izračunan glede na osi, ki gredo skozi točko  $Q$  telesa. Torej velja

$$\mathbf{L}_Q = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \quad (2.50)$$

Vrtilna količina telesa, izračunana glede na njegovo točko  $Q$ , je torej enaka produktu *vztrajnostnega tenzorja* telesa in vektorja njegove *kotne hitrosti* in je torej *neodvisna* od *translacije* telesa. Z odvajanjem te enačbe po času in izpeljavi, ki presega okvir te knjige, lahko dobimo

$$\frac{d\mathbf{L}_Q}{dt} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_Q \quad (2.51)$$

kjer  $\mathbf{M}_Q$  označuje moment vseh zunanjih sil, ki delujejo na telo, izračunan glede na točko  $Q$ .

**Pozor:** Ta enačba velja le, če točka Q izpolnjuje vsaj eno od predhodno navedenih zahtev.

Uporaba te enačbe pri poljubnem gibanju telesa ni ravno preprosta. Težaven je predvsem časovni odvod  $\dot{\mathbf{J}}$  vztrajnostnega tenzorja. Tukaj si pogosto pomagamo tako, da izračunamo vztrajnostni tenzor  $\mathbf{J}_{uvw}$  glede na gibljivo bazo, ki jo prednostno izberemo tako, da njene osi predstavljajo *centralne glavne vztrajnostne osi* telesa. Če v isti gibljivi bazi izrazimo še vektor kotne hitrosti telesa  $\boldsymbol{\omega}_{uvw}$ , lahko z uporabo rotacijske matrike  $\mathbf{R}$  vrtilno količino telesa glede na fiksne osi izrazimo kot

$$\mathbf{L}_Q = \mathbf{R}\mathbf{J}_{uvw}\mathbf{R}^T\mathbf{R}\boldsymbol{\omega}_{uvw} = \mathbf{R}\mathbf{J}_{uvw}\boldsymbol{\omega}_{uvw} \quad (2.52)$$

kjer smo upoštevali, da je  $\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$ . V mnogih inženirskih situacijah sta količini  $\mathbf{J}_{uvw}$  in  $\boldsymbol{\omega}_{uvw}$  *glede na čas konstantni*, kar pomeni, da sta njuna časovna odvoda enaka nič. V takem primeru se odvod vrtilne količine lahko izračuna relativno preprosto, in sicer kot

$$\frac{d\mathbf{L}_Q}{dt} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{J}_{uvw}\boldsymbol{\omega}_{uvw} = \mathbf{M}_Q \quad (2.53)$$

kjer  $\dot{\mathbf{R}}$  označuje časovni odvod rotacijske matrike.

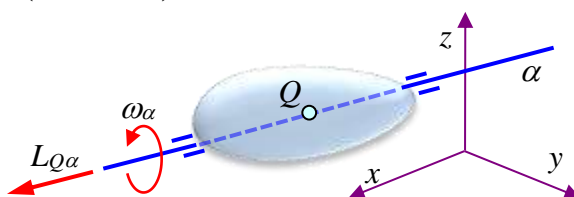
V tehniški praksi imamo na srečo pogosto opravka z razmeroma preprostimi situacijami. Dve taki pogosti situaciji sta:

- Telo rotira okrog osi  $\alpha$ , ki gre skozi *težišče* telesa in ima *fiksno smer*. Pri tem je rotacijska os (in torej tudi težišče telesa) lahko tudi *pospešena*. Primer takšne situacije bi lahko bilo kotaljenje valja po strmini.
- Telo rotira okrog osi  $\alpha$ , ki gre skozi *fiksno* točko telesa in ima *fiksno smer*. Primera takšne situacije bi bila rotacija vztrajnika na gredi in nihanje telesa v ravnini okrog fiksne točke.

V obeh navedenih situacijah lahko za vrtilno količino ugotovimo, da se njena komponenta  $L_{Q\alpha}$  v smeri osi  $\alpha$  zapiše kot

$$L_{Q\alpha} = J_\alpha\omega_\alpha \quad (2.54)$$

kjer  $J_\alpha$  označuje osni vztrajnostni moment mase telesa glede na os  $\alpha$ ,  $\omega_\alpha$  pa je kotna hitrost vrtenja telesa okrog  $\alpha$  (slika 2.16).



**Slika 2.16:** Vrtilna količina pri rotaciji telesa okrog osi fiksne smeri

V danih razmerah je  $J_\alpha$  konstanten in je torej njegov časovni odvod enak nič. Razen tega pa je konstantna tudi smer vektorja  $\boldsymbol{\omega}$ . Zakon o spremembi te komponente vrtilne količine se torej v obravnavani situaciji glasi

$$\frac{dL_{Q\alpha}}{dt} = J_\alpha\dot{\omega}_\alpha = M_{Q\alpha} \quad (2.55)$$

kjer je  $M_{Q\alpha}$  komponenta (v smeri osi  $\alpha$ ) rezultante momenta vseh zunanjih sil, ki delujejo na telo, izračunana glede na točko Q. Z uporabo integracije lahko ta zakon zapišemo še v integralni obliki

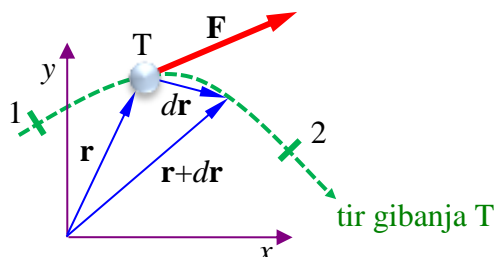
$$L_{Q\alpha 2} - L_{Q\alpha 1} = \int_{t_1}^{t_2} M_{Q\alpha} dt \quad (2.56)$$

ki pravi, da je sprememba (osne komponente) vrtilne količine enaka impulzu navora zunanjih sil okrog osi  $\alpha$ .

## 2.3.3 Zakoni o mehanski energiji

### 2.3.3.1 Delo in moč

Obravnavajmo točko T, ki se giblje po nekem poljubnem tiru. Krajevni vektor točke T označimo z  $\mathbf{r}$ , njen diferencialno majhen pomik vzdolž tira pa z  $d\mathbf{r}$ . Na točko T naj deluje sila  $\mathbf{F}$ .



Slika 2.17: Delo sile na diferencialnem pomiku  $d\mathbf{r}$

Količino

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.57)$$

imenujemo *diferencial dela*, ki ga je opravila sila  $\mathbf{F}$  pri pomiku točke T iz lege  $\mathbf{r}$  (v času  $t$ ) v lego  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  (v času  $t + dt$ ). Skalarni produkt  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  je pozitiven, kadar je kot med  $\mathbf{F}$  in  $d\mathbf{r}$  oster, in negativen, če je ta kot top. Opravljeno delo sile je torej

- *pozitivno*, če sila 'pomaga' pri gibanju točke, oziroma
- *negativno*, če sila 'zavira' gibanje.

To tudi pomeni, da je v primeru, ko je sila  $\mathbf{F}$  *pravokotna* na pomik  $d\mathbf{r}$ , opravljeno *delo enako nič* (skalarni produkt dveh pravokotnih vektorjev je enak nič).

Celotno delo, ki ga sila  $\mathbf{F}$  opravi v končnem časovnem intervalu od trenutka  $t_1$  do trenutka  $t_2$ , dobimo z integracijo gornje enačbe in ga lahko izrazimo kot

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt \quad (2.58)$$

kjer smo upoštevali, da je  $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$ .

V tehniški praksi se pogosto zgodi, da se točka T giblje po premici, sila  $\mathbf{F}$ , ki nanjo deluje, pa je v časovnem intervalu od  $t_1$  do  $t_2$  konstantna. V takem primeru lahko delo, ki ga je opravila sila  $\mathbf{F}$  v intervalu od  $t_1$  do  $t_2$ , izrazimo kot

$$A_{12} = F_u u_{12} \quad (2.59)$$

kjer je  $u_{12}$  pomik točke T v opazovanem času,  $F_u$  pa je komponenta sile  $\mathbf{F}$  v smeri pomika  $u_{12}$ .

Drug pogost primer v tehniški praksi je, da se točka T giblje po krožnici, sila  $\mathbf{F}$ , ki nanjo deluje, pa v časovnem intervalu od  $t_1$  do  $t_2$  povzroča konstantni moment  $M_\varphi$  (glede na os rotacije). V takem primeru lahko delo, ki ga je opravil moment  $M_\varphi$ , v intervalu od  $t_1$  do  $t_2$ , izrazimo kot



$$A_{12} = M_{\varphi} \varphi_{12} \quad (2.60)$$

kjer je  $\varphi_{12}$  kot zasuka točke T v opazovanem časovnem intervalu.

Delo, ki ga sila opravi, je med drugim odvisno od dolžine  $t_2 - t_1$  opazovanega časovnega intervala. Vendar nas v praksi pogosto ne zanima samo skupno opravljeno delo, ampak tudi, kako hitro narašča delo, ki ga opravlja neka sila. V ta namen vpeljemo skalarno količino, ki jo imenujemo *moč*. Definirana je kot odvod dela  $A$ , ki ga opravlja neka sila, po času  $t$  oziroma

$$P = \frac{dA}{dt} \quad (2.61)$$

Z upoštevanjem definicije za diferencial dela  $dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  dobimo

$$P = \frac{dA}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (2.62)$$

Trenutna moč, ki jo dovaja sila  $\mathbf{F}$ , je torej enaka skalarnemu produktu vektorjev sile  $\mathbf{F}$  in hitrosti  $\mathbf{v}$  njenega prijemališča. Iz tega lahko izpeljemo naslednji ugotovitvi, ki ju pogosto potrebujemo v praksi:

**Prvič:** Če pri *translatornem gibanju* s potovalno hitrostjo  $v$  na sistem delujemo s silo  $F_v$  (v smeri gibanja), je trenutna moč, ki jo dobavlja sila  $F_v$ , enaka

$$P = F_v v \quad (2.63)$$

**Drugič:** Če pri *rotacijskem gibanju* s kotno hitrostjo  $\omega$  na sistem delujemo z momentom  $M_{\omega}$  okrog rotacijske osi, je trenutna moč, ki jo dobavlja moment  $M_{\omega}$ , enaka

$$P = M_{\omega} \omega \quad (2.64)$$

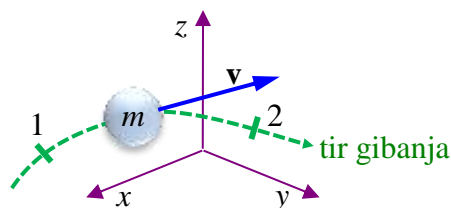
### 2.3.3.2 Kinetična energija

#### Masni delec

Opazujmo *masni delec* z maso  $m$ , ki se giblje s hitrostjo  $\mathbf{v}$  (slika 2.18). Skalarno količino  $W_k$ , ki jo definiramo kot

$$W_k = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \quad (2.65)$$

kjer  $\mathbf{v}^2$  predstavlja skalarni produkt vektorja hitrosti s samim seboj, imenujemo *kinetična energija masnega delca*.



**Slika 2.18:** Kinetična energija masnega delca

Odvod kinetične energije po času nam da

$$\frac{dW_k}{dt} = \frac{m}{2} 2\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} \quad (2.66)$$

od koder po množenju z  $dt$  in upoštevanju, da je  $\mathbf{v}dt = d\mathbf{r}$ , dobimo

$$dW_k = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dA \quad (2.67)$$

kjer je  $\mathbf{F}$  rezultanta zunanjih sil na masni delec,  $dA$  pa je diferencial dela, ki ga opravi  $\mathbf{F}$  na pomiku  $d\mathbf{r}$ . Ta enačba pomeni, da je diferencialna sprememba kinetične energije enaka diferencialu dela, ki ga je opravila *rezultanta zunanjih sil*, ki delujejo na delec.

Integrirajmo zdaj levo in desno stran enačbe od stanja 1 (v času  $t_1$ ) do stanja 2 (v času  $t_2$ ). Dobimo

$$W_{k2} - W_{k1} = \Delta W_k = A_{12} \quad (2.68)$$

Z besedami bi to lahko opisali tako:

❖ Sprememba kinetične energije masnega delca v izbranem časovnem intervalu je enaka delu, ki ga v tem istem časovnem intervalu opravi rezultanta zunanjih sil, ki delujejo na delec.

Če je torej vloženo delo pozitivno, potem kinetična energija delca naraste, v nasprotnem primeru (vloženo delo je negativno) pa kinetična energija delca upade.

## Telo

Kinetična energija diferenciala mase  $dm$  telesa se lahko zapiše kot

$$dW_k = \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 dm \quad (2.69)$$

kjer je  $\mathbf{v}$  hitrost diferenciala mase  $dm$ . Z integriranjem teh prispevkov po celem telesu B dobimo izraz za kinetično energijo telesa

$$W_k = \frac{1}{2} \int_B \mathbf{v}^2 dm \quad (2.70)$$

Kot smo to že večkrat naredili, tudi tokrat hitrost  $\mathbf{v}$  poljubne točke telesa razcepimo na

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p} \quad (2.71)$$

kjer je  $\mathbf{v}_Q$  hitrost točke Q (translacija telesa),  $\boldsymbol{\omega}$  je kotna hitrost vrtenja telesa (rotacija telesa) okrog osi, ki gre skozi Q,  $\mathbf{p}$  pa je vektor od točke Q do diferenciala  $dm$ . Po vstavljanju te relacije v izraz za kinetično energijo telesa dobimo

$$\begin{aligned} W_k &= \frac{1}{2} \int_B (\mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p})^2 dm \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{v}_Q^2 \int_B dm + \mathbf{v}_Q \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \int_B \mathbf{p} dm) + \frac{1}{2} \int_B (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p})^2 dm \end{aligned} \quad (2.72)$$

Če točko Q izberemo v *težišču telesa*, se pravi  $Q \equiv T$ , potem imamo  $\int_B \mathbf{p} dm = 0$ . Poleg tega pa vemo, da je  $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p})^2 = r^2 \omega^2$ , kjer  $r$  označuje oddaljenost delca telesa od rotacijske osi,  $\omega$  pa je norma rotacijske hitrosti. Iz tega sledi

$$W_k = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_T^2 + \frac{1}{2} J \boldsymbol{\omega}_T^2 \quad (2.73)$$

kjer je  $m$  masa telesa,  $J$  pa je osni vztrajnostni moment telesa glede na *težiščno rotacijsko os*, podano z vektorjem kotne hitrosti  $\boldsymbol{\omega}_T$ .

Izpeljava zakona o spremembi kinetične energije za telo je dokaj preprosta za telo, ki rotira okrog *osi fiksne smeri*. V tem primeru je osni vztrajnostni moment  $J$  telesa glede na to os konstanten, konstantno smer pa ima tudi vektor kotne hitrosti  $\boldsymbol{\omega}_T$ . Če upoštevamo te okoliščine, lahko izraz za kinetično energijo telesa odvajamo po času ter integriramo od stanja 1 (v času  $t_1$ ) do stanja 2 (v času  $t_2$ ) in dokaj preprosto izpeljemo

$$W_{k2} - W_{k1} = \Delta W_k = A_{12} \quad (2.74)$$

kjer je vloženo delo  $A_{12}$ , ki ga opravijo zunanje sile na telo, enako

$$A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} F_v v_T dt + \int_{t_1}^{t_2} M_\omega \omega_T dt \quad (2.75)$$

Pri tem je  $v_T$  potovalna hitrost težišča telesa,  $F_v$  je komponenta rezultante zunanjih sil v smeri gibanja težišča,  $M_\omega$  je rezultanta momenta zunanjih sil okrog rotacijske osi,  $\omega_T$  pa je kotna hitrost rotacije telesa okrog težiščne osi.

### 2.3.3.3 Potencialne energije

V tehniški praksi je običaj, da delo, ki ga vlagajo nekatere vrste zunanjih sil, izračunavamo na podlagi ustreznih *potencialov*. Ker se tak potencial v nekem smislu obnaša podobno kot energija opazovanega sistema, se zanj pogosto uporablja izraz *potencialna energija*. Tukaj bomo na kratko omenili samo dve vrsti potencialne energije; to sta:

- *potencialna energija*  $W_{pg}$ , s katero izračunavamo delo, ki ga opravi *teža* oziroma *gravitacijsko polje*, in
- *potencialna energija*  $W_{pe}$ , s katero izračunavamo delo, ki ga opravijo sile, ki so posledica *elastičnih deformacij* (*deformacijska energija*).

Z izrazom *potencialna* poudarimo dve posebni lastnosti teh energij, in sicer:

- *Količina energije* je odvisna od *lege masnega delca* v prostoru.
- *Sprememba energije* pri spremembi lege masnega delca je odvisna samo od *začetne* in *končne lege*, ne pa tudi od tega, po kakšni poti je delec potoval od začetne v končno lego.

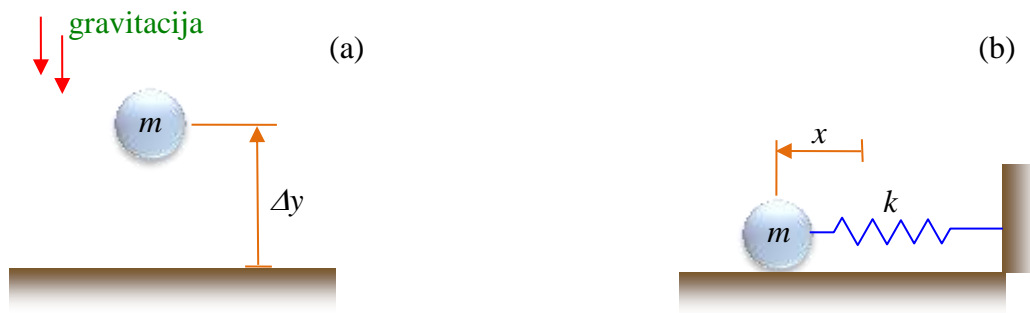
Opazujmo delec z maso  $m$ , ki ga premaknemo od vertikalne koordinate  $y_1$  do koordinate  $y_2$  (**slika 2.19a**). Pokažemo lahko, da je pri tem (neodvisno od oblike poti gibanja) sila teže opravila delo  $A_g = -mg(y_2 - y_1)$ , kjer smo z  $g$  označili velikost gravitacijskega pospeška. Če spremembo *potencialne energije*  $W_{pg}$  definiramo kot

$$\Delta W_{pg} = -A_g = mg(y_2 - y_1) \quad (2.76)$$

lahko zakon o spremembi kinetične energije preuredimo v naslednjo obliko

$$\Delta W_k + \Delta W_{pg} = A_{12}^g \quad (2.77)$$

Pri tem je  $\Delta W_k$  sprememba kinetične energije,  $\Delta W_{pg}$  je sprememba potencialne energije,  $A_{12}^g$  pa je delo rezultante vseh zunanjih sil *razen sile teže*. Ta enačba je uporabna tudi za *telo končnih dimenzij*, le da v tem primeru  $y$  predstavlja vertikalno koordinato *težišča telesa*. Izbira *referenčne lege* s koordinato  $y = 0$  je *poljubna*. V tehniški praksi so namreč vedno zanimive le *spremembe* potencialne energije, ki ustrezajo spremembi lege masnega delca ali telesa.



**Slika 2.19:** Potencialni energiji  $W_{pg}$  in  $W_{pe}$

Opazujemo masni delec  $m$ , ki se lahko giblje v horizontalni smeri (**slika 2.19b**). Na podlago je pritrjen z *linearno vzmetjo* togosti  $k$  z enoto [N/m]. Uvedimo koordinato  $x$ , ki meri horizontalno lego delca tako, da je  $x = 0$ , ko je vzmet nedeformirana (sila vzmeti na telo je enaka nič). V tem primeru lahko *velikost sile* pri poljubni legi delca zapišemo kot

$$F = kx \quad (2.78)$$

Če delec premaknemo od koordinate  $x_1$  do koordinate  $x_2$ , pri tem elastična sila v vzmeti opravi delo  $A_e = -k(x_2^2 - x_1^2)/2$ . Če spremembo *potencialne energije*  $W_{pe}$  definiramo kot

$$\Delta W_{pe} = -A_e = \frac{k(x_2^2 - x_1^2)}{2} \quad (2.79)$$

lahko zakon o spremembi kinetične energije preuredimo v naslednjo obliko

$$\Delta W_k + \Delta W_{pe} = A_{12}^e \quad (2.80)$$

Pri tem je  $\Delta W_k$  sprememba kinetične energije,  $\Delta W_{pe}$  je sprememba elastične energije,  $A_{12}^e$  pa je delo rezultante vseh zunanjih sil *razen elastične sile vzmeti*. Za telo končnih dimenzij, ki se lahko giblje translatorsno in je pritrjeno na linearno vzmet, velja enaka enačba.

Kadar imamo opravka s telesom, ki se lahko *vrti okrog fiksne osi* in je pritrjeno na *linearno torzijsko vzmet*, je situacija načeloma podobna, le da so tukaj vpletene rotacijske količine. Velikost momenta v torzijski vzmeti je enaka

$$M = k_t \varphi \quad (2.81)$$

kjer  $k_t$  označuje *torzijsko togost* vzmeti z enoto [Nm/rad],  $\varphi$  pa je *zasuk telesa*, merjen iz lege, pri kateri je vzmet nedeformirana (navor vzmeti na telo je enak nič). Spremembo potenciala pri zasuku od kota  $\varphi_1$  do kota  $\varphi_2$  lahko v tem primeru zapišemo kot

$$\Delta W_{pe} = \frac{k_t(\varphi_2^2 - \varphi_1^2)}{2} \quad (2.82)$$

# 3 MEHANSKA NIHANJA

## Namen:

- Spoznati osnove mehanskih nihanj.
- Spoznati osnovne gradnike nihajočih mehanskih sistemov.
- Zapisati diferencialno enačbo gibanja nihajočega mehanskega sistema.
- Rešiti enačbo gibanja sistema.

## Cilj:

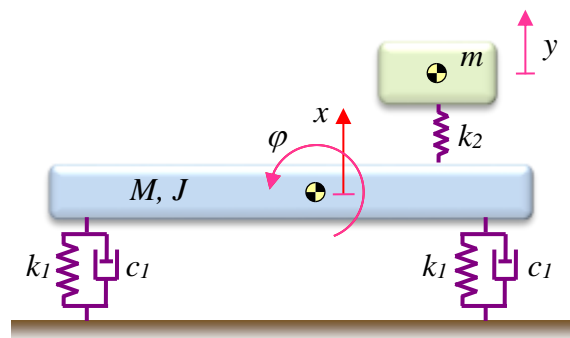
S pridobljenim znanjem bo študent sposoben opisati in analizirati preprostejše nihajoče mehanske sisteme in njihov odziv, s poudarkom na nedušenem in dušenem lastnem nihanju.

## Glavne oporne točke:

- Osnovni gradniki: telo, vzmet in dušilec.
- Diferencialna enačba gibanja sledi iz Newtonovih zakonov.
- Nihanja: lastna/vsiljena in nedušena/dušena.

## 3.1 Uvod in definicije

Kadar se telesa ali sistemi teles ponovljivo gibljejo okoli svojih *ravnovesnih leg*, govorimo o *mehanskem nihanju*. Preprostejše nihajoče sisteme lahko modeliramo kot *sistem masnih delcev* ali *togih teles*, ki so med seboj povezana z *veznimi elementi*, kot so na primer *vzmeti* in *dušilci* (slika 3.1). Precej bolj zahtevni sistemi pa so sestavljeni iz *deformabilnih* teles, vendar obravnava takih sistemov presega okvir te knjige.



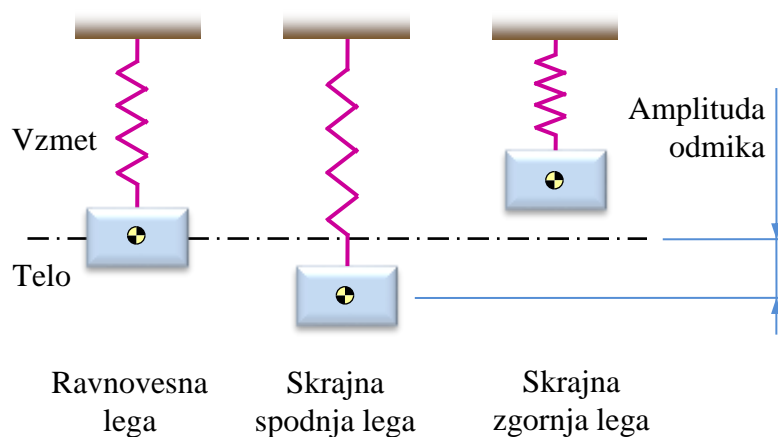
**Slika 3.1:** Primer nihajočega sistema – poenostavljen model vozila

Pri mehanskem nihanju imamo torej opravka z gibanjem sistema okrog ravnovesne lege. To pomeni, da moramo v sistemu imeti tako imenovane *povratne sile*, ki sistem vračajo v ravnovesno lego. Te sile običajno izvirajo iz *elastičnih podpor* in *elastičnih veznih* elementov,

ki jih v najbolj preprostih primerih modeliramo z uporabo *linearnih elastičnih vzmeti* (slika 3.2). Razen povratnih sil v nihajočem sistemu praviloma nastopajo vsaj še *disipacijske sile*, ki so posledica trenja in drugih vrst *izgubljanja energije* sistema. V najbolj preprostih primerih te sile modeliramo z uporabo *linearnih dušilnih elementov*.

Kadar pri nihanju na sistem delujejo le povratne in disipacijske sile, govorimo o *lastnem nihanju*. Če pa na nihajoči sistem razen teh sil delujejo še *aktivne sile*, govorimo o *vsiljenem nihanju* sistema.

Nihajočemu sistemu, na katerega ne delujejo aktivne sile, njegova amplituda in s tem tudi energija nihanja s časom upadata. Razlogi za to so trenje in druge vrste energijskih izgub. V nekaterih situacijah so te *izgube* tako *majhne*, da jih lahko v modelu nihajočega sistema zanemarimo. Tak model ne vsebuje dušilnih elementov, njegova *energija* pa se pri odsotnosti zunanjih sil *ohranja*. Takšno nihanje imenujemo *nedušeno nihanje*. V nasprotnem primeru, kadar izgub energije ne moremo zanemariti, pa je model nihajočega sistema treba opremiti z dušilnimi elementi, ki poskrbijo za *disipacijo energije* sistema. Takšno nihanje imenujemo *dušeno nihanje*.



**Slika 3.2:** Nedušeno mehansko nihalo – telo na elastični vzmeti

Pri mehanskih nihanjih se vzorci gibanja posameznih delov sistema pogosto periodično ponavljajo v določenih časovnih intervalih. V takih primerih govorimo o *periodičnem nihanju*. *Časovni interval*, ki je potreben, da nihajoči del opravi en *popolni cikel* oziroma *nihaj* (na primer pomik iz skrajne spodnje lege v skrajno zgornjo lego in nazaj v skrajno spodnjo lego), imenujemo *nihajna doba* ali *perioda nihanja*. Število nihajev na enoto časa pa imenujemo *frekvenca nihanja*. Frekvenco nihanja  $f$  lahko izračunamo iz periode nihanja  $T$  kot

$$f = \frac{1}{T} \quad (3.1)$$

Med nihanjem se odmik posameznega dela nihajočega sistema, merjen iz ravnovesne lege, s časom spreminja. Maksimalni odmik od ravnovesne lege imenujemo *amplituda* nihanja.

Najpomembnejši elementi, ki jih uporabljamo pri modeliranju nihanj preprostejših mehanskih sistemov, so: *telo*, *vzmet* in *dušilka*.

### 3.1.1 Telo

Pri nihajočem sistemu z besedo *telo* označujemo *masni element*, njegovih vztrajnostnih vplivov na dinamiko nihanja pa ne moremo zanemariti. Karakteristični parametri telesa so njegova *masa* in njegovi *vztrajnostni momenti mase*. Te količine smo v predhodnih poglavjih že obravnavali.

### 3.1.2 Vzmet

Z besedo *vzmet* običajno označujemo tako imenovani *linearni vzmetni element*. To je elastični element brez mase, ki izkazuje *linearno karakteristiko*.

Za običajno linearno vzmet slednje pomeni, da je povezava med raztežno silo  $F$  in raztežkom  $x$  vzmeti linearna

$$F = kx \quad (3.2)$$

kjer proporcionalni faktor  $k$  predstavlja *togost* vzmeti z enoto [N/m], raztezek  $x$  pa je merjen tako, da je vzmet nedeformirana pri  $x = 0$ .

Situacija je podobna za linearno torzijsko vzmet. Tukaj je povezava med sučnim momentom  $M$  in kotom zasuka  $\varphi$  vzmeti linearna

$$M = k_t \varphi \quad (3.3)$$

kjer  $k_t$  označuje *torzijsko togost* vzmeti z enoto [Nm/rad],  $\varphi$  pa je *kot zasuka telesa*, merjen tako, da je vzmet nedeformirana pri  $\varphi = 0$ .

Za vsako linearno vzmet velja, da je *idealno elastična*. To pomeni, da obremenitev in razbremenitev vzmeti poteka *brez disipacije energije* oziroma brez energijskih izgub.

Pri modeliranju nihajočih sistemov vzmetni elementi nadomeščajo elastične podpore in elastične vezi med nihajočimi telesi in podlago. Elastična podprtja in vezi so pogosto izvedeni z elastičnimi konstrukcijskimi elementi, kot je na primer osno, upogibno ali torzijsko obremenjena elastična palica. Za takšne elemente moramo na podlagi njihovih geometrijskih in materialnih parametrov izračunati togost pripadajočega vzmetnega elementa.

#### 3.1.2.1 Togosti konstrukcijskih elementov

##### Togost osno obremenjene elastične palice

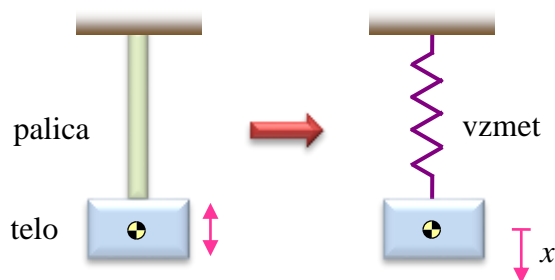
Pri osno obremenjeni palici je raztezek  $x$  palice v odvisnosti od statične osne  $F$  podan z enačbo

$$x = \frac{L}{AE} F \quad (3.4)$$

kjer je  $L$  dolžina palice,  $A$  je velikost njenega prereza,  $E$  pa je elastični modul materiala. Če to enačbo za raztezek primerjamo z ustrezno enačbo vzmetnega elementa,  $F = kx$ , sledi, da je togost osno obremenjene palice enaka

$$k = \frac{EA}{L} \quad (3.5)$$

To je togost, ki jo uporabimo, če v nihajočem sistemu osno obremenjeno elastično palico modeliramo z vzmetnim elementom (**slika 3.3**). Seveda to lahko naredimo le, kadar je masa palice dovolj majhna, da lahko njene vztrajnostne vplive na dinamiko nihanja zanemarimo.



**Slika 3.3:** Osno obremenjena elastična palica v vlogi elastičnega elementa

### Togost upogibno obremenjene elastične palice

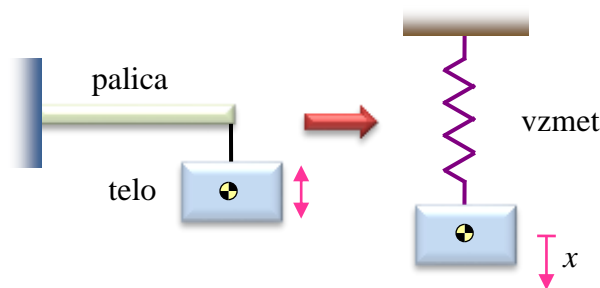
Pri upogibno obremenjeni palici je prečni poves  $x$  vrha palice v odvisnosti od statične prečne sile  $F$  podan z enačbo

$$x = \frac{L^3}{3EI} F \quad (3.6)$$

kjer je  $L$  dolžina palice,  $I$  je vztrajnostni moment njenega prereza glede na težiščno os upogiba,  $E$  pa je elastični modul materiala. Če to enačbo za prečni poves primerjamo z ustrežno enačbo vzmetnega elementa,  $F = kx$ , sledi, da je togost upogibno obremenjene palice enaka

$$k = \frac{3EI}{L^3} \quad (3.7)$$

To je togost, ki jo uporabimo, če v nihajočem sistemu upogibno obremenjeno elastično palico modeliramo z vzmetnim elementom (**slika 3.4**). Seveda to lahko naredimo le, kadar je masa palice dovolj majhna, da lahko njene vztrajnostne vplive na dinamiko nihanja zanemarimo.



**Slika 3.4:** Upogibno obremenjena elastična palica v vlogi elastičnega elementa

### Togost torzijsko obremenjene elastične palice

Pri torzijskem nihanju vlogo vzmeti opravlja *linearni torzijski vzmetni element*, pri katerem je odvisnost med *kotom zasuka*  $\varphi$  torzijske vzmeti in obremenitvenim *torzijskim momentom*  $M_t$  podana z enačbo

$$M_t = k_t \varphi \quad (3.8)$$

kjer je  $k_t$  *torzijska togost* vzmeti z enoto [Nm/rad].

Pri torzijsko obremenjeni palici je zasuk  $\varphi$  vrha palice v odvisnosti od statičnega torzijskega momenta  $M_t$  podan z enačbo

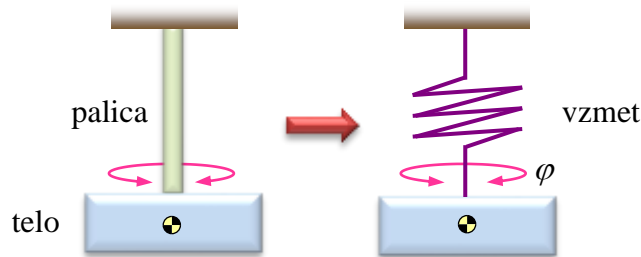
$$\varphi = \frac{L}{GI_t} M_t \quad (3.9)$$

kjer je  $L$  dolžina palice,  $I_t$  je torzijski vztrajnostni moment njenega prereza,  $G$  pa je strižni modul materiala. Če to enačbo za zasuk primerjamo z ustrežno enačbo vzmetnega elementa,  $M_t = k_t \varphi$ , sledi, da je togost torzijsko obremenjene palice enaka

$$k_t = \frac{GI_t}{L} \quad (3.10)$$

To je togost, ki jo uporabimo, če v nihajočem sistemu torzijsko obremenjeno elastično palico modeliramo z vzmetnim elementom (**slika 3.5**). Seveda to lahko naredimo le, kadar je masa palice dovolj majhna, da lahko njene vztrajnostne vplive na dinamiko nihanja zanemarimo.





**Slika 3.5:** Torzijsko obremenjena elastična palica v vlogi elastičnega elementa

Torzijsko obremenjene palice imajo pogosto okrogli prerez. Za *okrogli prerez* s premerom  $d$  je torzijski vztrajnostni moment  $I_t$  enak polarnemu vztrajnostnemu momentu  $I_p$  oziroma

$$I_t = I_p = \frac{\pi d^4}{32} \quad (3.11)$$

### 3.1.2.2 Nadomestna togost skupine vzmeti

Nihajoči sistemi pogosto vsebujejo več vzmetnih elementov. Pri tem se pogosto izkaže, da lahko posamezno *skupino vzmeti* zamenjamo z enim samim vzmetnim elementom, ki pa mora izkazovati *ekvivalentno* oziroma ustrezno *nadomestno togost*. Če nam to uspe, smo s tem poenostavili tako model nihajočega sistema kot tudi zapis pripadajočih diferencialnih enačb gibanja.

Nadomeščanje skupine vzmeti z nadomestnim vzmetnim elementom je odvisno od lastnosti in konfiguracije obravnavane skupine in ga moramo izvesti v skladu s konkretno situacijo. Pri tem si lahko pomagamo z ugotovitvami, ki sledijo iz zamenjave sistema dveh vzmeti, ki sta lahko vezani

- *vzporedno* ali
- *zaporedno*.

Ti dve zamenjavi si je zato koristno ogledati natančneje.

#### Nadomestna togost vzporedno vezanih vzmeti

O *vzporedni vezavi* dveh vzmeti 1 in 2 (**slika 3.6**) govorimo takrat, ko imata obe vzmeti ves čas nihanja *enaka raztezka*

$$x_1 = x_2 = x \quad (3.12)$$

V tem primeru lahko sile v vzmeteh zapišemo kot

$$F_1 = k_1 x \quad (3.13)$$

$$F_2 = k_2 x \quad (3.14)$$

Skupna sila, ki deluje na nihajoče telo, je torej enaka

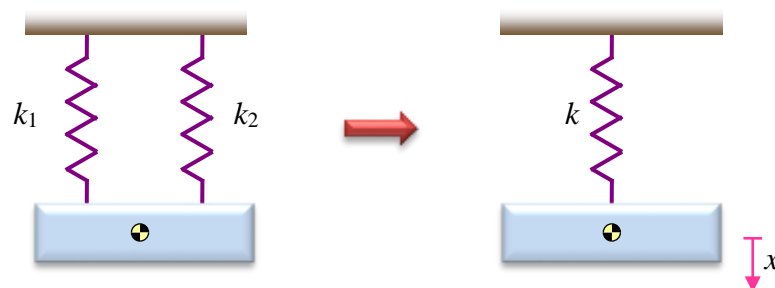
$$F = F_1 + F_2 = k_1 x + k_2 x = (k_1 + k_2) x \quad (3.15)$$

Enaka sila bi delovala na telo, če bi namesto vzmeti 1 in 2 uporabili nadomestno vzmet s togostjo  $k$ , ki izpolnjuje pogoj

$$k = k_1 + k_2 \quad (3.16)$$

Izkaže se, da lahko ta rezultat celo posplošimo. Nadomestna togost večjega števila vzporedno vezanih vzmeti je namreč enaka vsoti togosti posameznih vzmeti ali drugače

$$k = \sum_i k_i \quad (3.17)$$



**Slika 3.6:** Vzporedna vezava dveh vzmeti 1 in 2 ter nadomestni vzmetni element

### Nadomestna togost zaporedno vezanih vzmeti

O *zaporedni vezavi* dveh vzmeti 1 in 2 (**slika 3.7**) govorimo takrat, ko imamo v obeh vzmeteh ves čas nihanja *enako silo*

$$F_1 = F_2 = F \quad (3.18)$$

V tem primeru raztezka v obeh vzmeteh izpolnjujeta enačbi

$$F = k_1 x_1 \quad (3.19)$$

$$F = k_2 x_2 \quad (3.20)$$

Skupni raztezek obeh vzmeti je torej enak

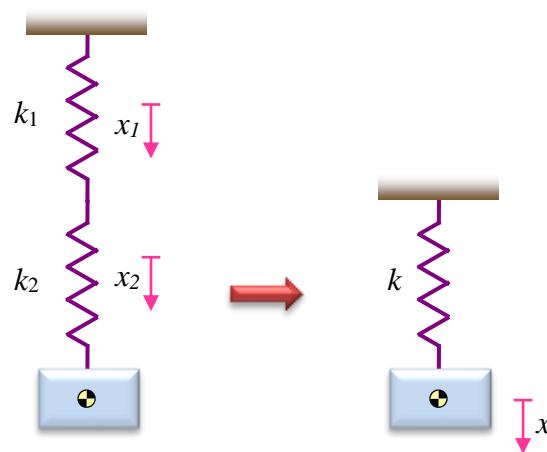
$$x = x_1 + x_2 = F \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) \quad (3.21)$$

Natanko tolikšen pomik telesa bi izmerili, če bi namesto vzmeti 1 in 2 uporabili nadomestno vzmet s togostjo  $k$ , ki izpolnjuje pogoj

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (3.22)$$

Izkaže se, da lahko ta rezultat celo posplošimo. Nadomestna togost večjega števila zaporedno vezanih vzmeti je namreč enaka

$$k = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{k_i}} \quad (3.23)$$



**Slika 3.7:** Zaporedna vezava dveh vzmeti 1 in 2 ter nadomestni vzmetni element

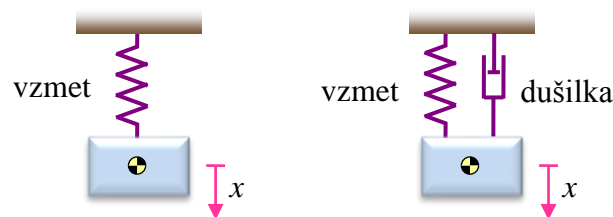
### 3.1.3 Dušilka

Z besedo *dušilka* običajno označujemo *linearni dušilni element*. To je element brez mase, ki je namenjen disipaciji energije in izkazuje *linearno karakteristiko*. Slednje pomeni, da je povezava med raztežno silo  $F$  in raztežno hitrostjo  $\dot{x}$  dušilke linearna

$$F = c\dot{x} \quad (3.24)$$

kjer proporcionalni faktor  $c$  predstavlja *dušilno konstanto* z enoto [Ns/m].

Linearna dušilka omogoča najbolj preprost način za približno modeliranje tako namenskih *dušilnih mehanskih sklopov* (na primer oljni dušilci v amortizerjih) kakor tudi vse vrste nezaželenih *energijskih izgub* (na primer drsno trenje in zračni upor). V obeh primerih je ta element tisti, ki povzroča *disipacijo energije* oziroma *nepovratne energijske izgube* (slika 3.8).

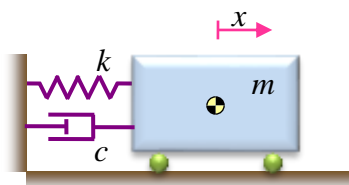


**Slika 3.8:** Nihajoč sistem, modeliran brez disipacije in z disipacijo energije

Podobno kot pri vzmeteh lahko teoretično tudi pri dušilkah večje skupine dušilnih elementov nadomeščamo z enim ekvivalentnim oziroma nadomestnim elementom. Vendar pa so večje skupine dušilcev v praksi precej redke, zato posebna obravnava takih situacij verjetno ni smiselna oziroma upravičena.

## 3.2 Lastna nihanja sistemov z eno prostostno stopnjo

Kot smo že omenili, o *lastnem nihanju* govorimo takrat, kadar na gibajoč sistem delujejo le *povratne* in *disipacijske sile* brez prisotnosti aktivnih sil. Študijo lastnosti in obnašanja takih sistemov bomo obravnavali na *vzorčnem modelu*, kjer lahko togo telo translatorsno niha samo v eni smeri (**slika 3.9**). V tem modelu je togo telo običajno postavljeno na *valjčke*, za katere privzamemo, da so *brez mase* in omogočajo translatorsno gibanje telesa *brez* kakršnih koli *energijskih izgub*. To pomeni, da za disipacijo energije skrbi izključno dušilni element.



**Slika 3.9:** Vzorčni model z 1 PS za študij lastnega nihanja

Masa telesa vzorčnega modela je podana z  $m$ , togost linearno elastične vzmeti je  $k$ , konstanta dušilca pa je enaka  $c$ . Lego telesa podaja koordinata  $x$ , ki je merjena tako, da je pri  $x = 0$  sila v vzmetnem elementu enaka nič. Iz tega sledi, da je velikost sile v vzmetnem elementu enaka  $|F| = k|x|$ . Ker je lega telesa natančno podana le z eno koordinato, pravimo, da ima sistem eno *prostostno stopnjo* (1 PS).

### 3.2.1 Nedušeno lastno nihanje

*Nedušene lastno nihanje* je nihanje brez disipacije energije. Predstavimo ga lahko z uporabo vzorčnega modela, pri katerem odstranimo dušilko oziroma zahtevamo, da je

$$c = 0 \quad (3.25)$$

Na tak sistem deluje v horizontalni smeri samo ena sila, in sicer sila vzmetnega elementa. Njena komponenta  $x$  je enaka  $F_v = -kx$  (**slika 3.10**).



**Slika 3.10:** Model za nedušeno lastno nihanje in zunanje sile v smeri  $x$

Za opis gibanja tega sistema uporabimo Newtonov zakon za smer  $x$  oziroma zakon o spremembi gibalne količine. Ta se glasi

$$m\ddot{x} = F_v = -kx \quad (3.26)$$

To enačbo običajno nekoliko preuredimo, in sicer tako, da vse člene prestavimo na levo stran

enačaja ter obe strani delimo z maso telesa. Od tod dobimo *diferencialno enačbo* nedušenega mehanskega nihala z *eno translatorno prostostno stopnjo*

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (3.27)$$

Z matematičnega stališča je to homogena linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti. Pri tem je  $x$  *neznana funkcija*, ki predstavlja časovno odvisen pomik telesa iz ravnovesne lege,  $\dot{x}$  pa je njen drugi odvod po času. Iz popolnoma praktičnih računskih razlogov konstanto  $k/m$ , ki stoji pred neznano funkcijo  $x$ , zamenjamo s pomožno količino

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (3.28)$$

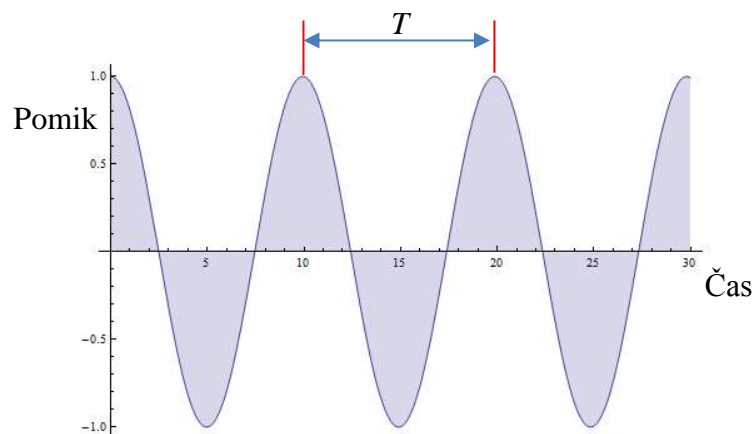
Z uvedbo te količine se torej diferencialna enačba obravnavanega sistema glasi

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (3.29)$$

Takšne diferencialne enačbe ne moremo rešiti z direktno integracijo, ampak je treba poiskati tako imenovani *nastavek* za njeno rešitev. Nastavek, ki reši našo diferencialno enačbo, se lahko zapiše kot

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (3.30)$$

kjer sta  $A$  in  $B$  za zdaj še neznani konstanti,  $t$  pa je čas. Iz nastavka za rešitev diferencialne enačbe je očitno, da je  $x$  *zamaknjena sinusoida* oziroma *harmonična funkcija*, pomožna količina  $\omega$  pa predstavlja *lastno krožno frekvenco* nedušenega nihanja (**slika 3.11**).



**Slika 3.11:** Lastno nihanje nedušenega sistema je harmonična funkcija

Lastna krožna frekvenca  $\omega$  sistema je povezana s *frekvenco*  $f$  in *periodo*  $T$  nihanja. Ta odvisnost je podana z

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (3.31)$$

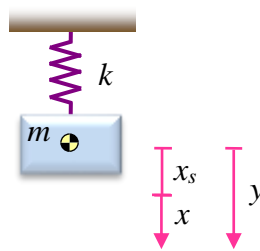
Na koncu sta ostali nedoločeni le še konstanti  $A$  in  $B$  v nastavku za rešitev diferencialne enačbe. Ti dve konstanti izračunamo iz *začetnih pogojev*. Število razpoložljivih začetnih pogojev mora ustrezati redu diferencialne enačbe. Naša diferencialna enačba je *drugega reda*, kar torej zahteva *dva začetna pogoja*. Najpogosteje se ta dva pogoja podajata v obliki naslednjih enačb

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= \dot{x}_0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

kjer sta  $x_0$  in  $\dot{x}_0$  znana lega in hitrost telesa v času  $t = 0$ . Če v ta dva začetna pogoja vstavimo nastavek za rešitev, dobimo sistem dveh navadnih linearnih enačb za neznani konstanti  $A$  in  $B$ . Rešitev teh dveh enačb nam da pravilne vrednosti za ti dve konstanti.

### 3.2.1.1 Eliminacija statične obremenitve

Lastno nihanje poteka brez prisotnosti aktivnih zunanjih sil, vendar pa obstajajo situacije, ko lahko aktivno zunanjo silo eliminiramo in tako nihanje vseeno obravnavamo kot lastno nihanje. To se zgodi ob prisotnosti *statične* oziroma *časovno neodvisne* zunanje obremenitve, kot je na primer lastna teža.



**Slika 3.12:** Eliminacija statične obremenitve z uvedbo nove koordinate

Obravnavajmo primer preprostega nihala, pri katerem mora sila v vzmeti prevzeti tudi težo telesa (**slika 3.12**). Naj bo koordinata  $y$ , ki meri lego telesa, *enaka nič* takrat, ko je vzmet *nedeformirana* (sila v vzmeti je enaka nič). Diferencialna enačba nihanja sistema v vertikalni smeri se torej lahko zapiše kot

$$m\ddot{y} = -ky + mg \quad (3.33)$$

Uvedimo zdaj novo koordinato  $x = y - x_s$ , kjer je  $x_s = mg/k$  *statični povos* telesa pod vplivom lastne teže. Če upoštevamo to definicijo in dejstvo, da je  $\ddot{x} = \ddot{y}$ , lahko diferencialno enačbo predelamo v

$$m\ddot{x} = -k(x + x_s) + mg = -k(x + mg/k) + mg \quad (3.34)$$

iz česar sledi

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (3.35)$$

To pomeni, da lahko *statično aktivno* obremenitev *eliminiramo* preprosto z *uvedbo nove koordinate*, ki meri lego telesa iz *statične ravnovesne lege*. Po eliminaciji lahko nihanje obravnavamo kot lastno nihanje brez prisotnosti aktivnih zunanjih sil.

### 3.2.1.2 Rotacija okrog fiksne osi

Vse ugotovitve, vezane na lastna nihanja, smo izpeljali za sistem, kjer lahko telo niha translatorsno, lega telesa pa je podana s translatorsno koordinato  $x$ . Vendar pa imamo v praksi pogosto opravka tudi s takimi sistemi, kjer nihajoče telo *rotira okrog fiksne osi*, njegova lega pa je podana s *kotno koordinato*  $\varphi$ . Kadar imamo opravka z lastnim nihanjem, je takšno telo razen v rotacijski osi podprto tudi z elastičnimi vzmetmi, ki okrog rotacijske osi povzročajo povratni moment sil

$$M = -k_t\varphi \quad (3.36)$$

Pri tem je  $k_t$  nadomestna torzijska togost elastičnih vzmeti, kot  $\varphi$  pa je merjen iz statične ravnovesne lege sistema.

Za opis gibanja tega sistema uporabimo zakon o spremembi vrtilne količine, ki se glasi

$$J\ddot{\varphi} = M = -k_t\varphi \quad (3.37)$$

kjer je  $J$  aksialni vztrajnostni moment telesa okrog rotacijske osi. To enačbo preuredimo podobno kot pri translatorsnem nihanju in dobimo *diferencialno enačbo* nedušenega mehanskega nihala z *eno rotacijsko prostostno stopnjo*

$$\ddot{\varphi} + \frac{k_t}{J}\varphi = 0 \quad (3.38)$$

Iz matematičnega stališča je ta enačba enakega tipa kot diferencialna enačba translatorsnega nihanja, le da je zdaj *neznana funkcija* kot  $\varphi$ , ki predstavlja časovno odvisen zasuk telesa iz ravnovesne lege,  $\ddot{\varphi}$  pa je njegov drugi odvod po času. Tako kot pri translaciji tudi tukaj vpeljemo lastno krožno frekvenco  $\omega$  sistema, in sicer z relacijo

$$\omega^2 = \frac{k_t}{J} \quad (3.39)$$

Diferencialna enačba obravnavanega sistema se torej glasi

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0 \quad (3.40)$$

Nastavek, ki reši našo diferencialno enačbo, se lahko zapiše kot

$$\varphi = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (3.41)$$

kjer sta  $A$  in  $B$  integracijski konstanti, ki ju dobimo iz začetnih pogojev,  $t$  pa je čas. Zasuk telesa pri rotacijskem lastnem nedušenem nihanju je torej, enako kot pri translaciji, harmonična funkcija časa.

### 3.2.2 Dušeno lastno nihanje

*Dušeno lastno nihanje* je nihanje z disipacijo oziroma z izgubami energije. Predstavimo ga lahko z uporabo vzorčnega modela, pri katerem zagotovimo dušenje z zahtevo

$$c > 0 \quad (3.42)$$

Na tak sistem delujeta v horizontalni smeri le dve sili, in sicer sila vzmetnega elementa in sila dušilnega elementa. Njunji komponenti  $x$  sta enaki  $F_v = -kx$  in  $F_d = -c\dot{x}$  (**slika 3.13**).



**Slika 3.13:** Model za dušeno lastno nihanje in zunanje sile v smeri  $x$

Za opis gibanja tega sistema uporabimo Newtonov zakon za smer  $x$  oziroma zakon o spremembi gibalne količine. Ta se glasi

$$m\ddot{x} = F_v + F_d = -kx - c\dot{x} \quad (3.43)$$

To enačbo običajno nekoliko preuredimo, in sicer tako, da vse člene prestavimo na levo stran enačaja. Od tod dobimo *diferencialno enačbo* dušenega mehanskega nihala z *eno translatorsno*

prostostno stopnjo

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (3.44)$$

To je linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti. Nastavek za rešitev ima obliko

$$x = Xe^{\lambda t} \quad (3.45)$$

kjer je  $X$  še nedoločena konstanta,  $\lambda$  pa neznan parameter. Po vstavljanju tega nastavka v diferencialno enačbo dobimo

$$mX\lambda^2 e^{\lambda t} + cX\lambda e^{\lambda t} + kXe^{\lambda t} = 0 \quad (3.46)$$

Če to enačbo delimo z  $Xe^{\lambda t}$ , dobimo kvadratno enačbo

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \quad (3.47)$$

ki jo mora obvezno izpolnjevati parameter  $\lambda$ , da bo uporabljen nastavek za rešitev ustrezen. Rešitvi te kvadratne enačbe sta

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (3.48)$$

kar pogosto zapišemo v obliki

$$\lambda_{1,2} = -p \pm iq \quad (3.49)$$

kjer je

$$p = \frac{c}{2m} \quad (3.50)$$

in

$$q = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \frac{2\pi}{T_D} \quad (3.51)$$

Pri tem količina  $q$  predstavlja *lastno krožno frekvenco*,  $T_D$  pa je *perioda* dušenega nihanja. Opazimo lahko, da je v primeru zanemarljivo majhnega dušenja,  $c \approx 0$ , frekvenca  $q$  enaka krožni frekvenci  $\omega$  nedušenega lastnega nihanja.

Dušeno lastno nihanje je precej odvisno od tega, kolikšna je vrednost koeficienta dušenja  $c$  glede na mejno oziroma kritično vrednost  $c_{kr}$ , ki jo imenujemo *koeficient kritičnega dušenja*. Kritična vrednost dušenja nastopi, ko sta rešitvi karakteristične enačbe  $\lambda_1$  in  $\lambda_2$  realni in enaki. V tem primeru je  $q = 0$ , od koder lahko zapišemo enačbo za izračun  $c_{kr}$ , in sicer

$$q = \sqrt{\left(\frac{c_{kr}}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = 0 \quad (3.52)$$

Od tod sledi

$$c_{kr} = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega \quad (3.53)$$

kjer je  $\omega$  lastna krožna frekvenca nedušenega sistema.

Glede na vrednost koeficienta dušenja  $c$  razlikujemo tri oblike dušenja:

- *nadkritično dušenje* ( $c > c_{kr}$ ): rešitvi karakteristične enačbe  $\lambda_1$  in  $\lambda_2$  sta realni in različni, splošna rešitev diferencialne enačbe gibanja pa je naslednja

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \quad (3.54)$$



Sistem s takšnim dušenjem ne niha, pomiki pa se s časom približujejo vrednosti nič.

- **kritično dušenje** ( $c = c_{kr}$ ): rešitvi karakteristične enačbe  $\lambda_1$  in  $\lambda_2$  sta realni in enaki, kar pomeni, da je  $q = 0$  in

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{c_{kr}}{2m} = -\omega \quad (3.55)$$

Rešitev diferencialne enačbe gibanja zapišemo kot

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Bte^{\lambda_2 t} \quad (3.56)$$

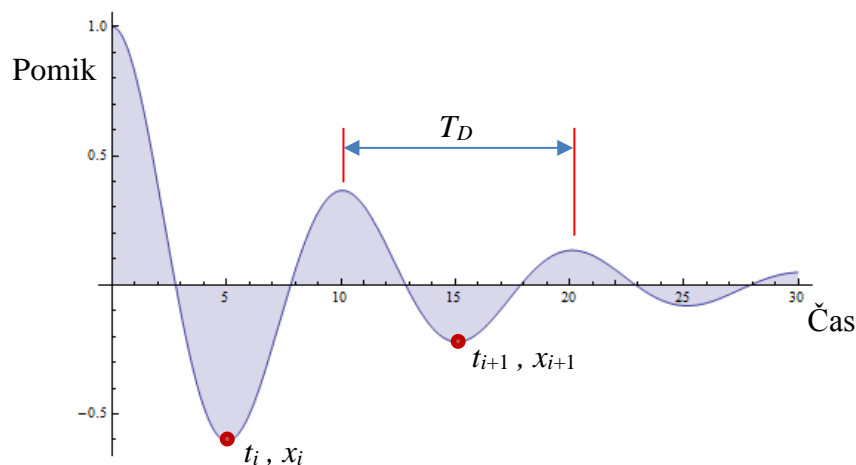
Tudi pri sistemu s kritičnim dušenjem ta ne niha. Sistemi s kritičnim dušenjem so pogosto uporabni za inženirske aplikacije, saj dosežejo ravnotežni položaj brez oscilacij v najkrajšem možnem času.

- **podkritično dušenje** ( $c < c_{kr}$ ): rešitvi karakteristične enačbe  $\lambda_1$  in  $\lambda_2$  sta kompleksni in konjugirani. Z uporabo Eulerjeve formule,  $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ , lahko splošno rešitev diferencialne enačbe v tem primeru zapišemo v naslednji obliki:

$$x = e^{-pt}(A \cos(qt) + B \sin(qt)) \quad (3.57)$$

Ta situacija je za inženirsko prakso najbolj zanimiva, zato si jo je vredno natančneje ogledati.

Primer odziva mehanskega nihala s **podkritičnim dušenjem** je prikazan na **sliki 3.14**. Vidimo lahko, da se amplituda nihanja zaradi dušenja postopoma zmanjšuje. Časovni interval med dvema zaporednima (pozitivnima ali negativnima) amplitudama je konstanten in je enak periodi dušenega nihanja  $T_D$ . Simboli  $t_i$  in  $x_i$  označujejo čase ekstremnih (amplitudnih) odmikov in njihove vrednosti.



**Slika 3.14:** Lastno nihanje podkritično dušenega sistema

V inženirski praksi je hitrost zmanjševanja amplitud pogosto zelo pomemben podatek. Za oceno te hitrosti uporabljamo količino  $\Delta = \ln \frac{x_i}{x_{i+1}}$ , ki jo imenujemo **logaritemski dekrement**. Ta količina predstavlja naravni logaritem količnika dveh zaporednih amplitud. Z uporabo nastavka  $x = e^{-pt}(A \cos(qt) + B \sin(qt))$  in dejstva, da je  $t_{i+1} = t_i + T_D$ , lahko izraz za logaritemski dekrement zapišemo v obliki

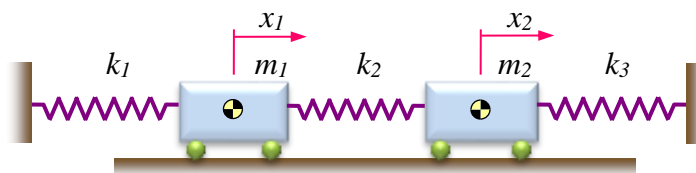
$$\Delta = pT_D \quad (3.58)$$

ki je mnogo bolj uporabna za izračunavanje vrednosti logaritemskega dekrementa.

### 3.3 Lastna nihanja sistemov z več prostostnimi stopnjami

Do zdaj smo obravnavali nihanje mehanskih sistemov z le *eno prostostno stopnjo*. V praksi so takšni sistemi še kar pogosti, vendar pa imamo mnogokrat opravka tudi s sistemi, ki imajo *več prostostnih stopenj*. Odziv takih sistemov lahko običajno izračunamo le z uporabo ustreznih *numeričnih postopkov*, ki presegajo okvir te knjige. Zaradi tega si bomo v nadaljevanju ogledali le postopek določevanja *lastnih frekvenc* in *lastnih nihajnih oblik* nedušenega sistema z *več prostostnimi stopnjami*. Lastne frekvence in lastne nihajne oblike sistema predstavljajo namreč pomembne parametre sistema, katerih poznavanje nam koristi pri obravnavi tako nedušenih kot dušenih nihajočih sistemov. Poleg tega lahko z uporabo teh količin zapišemo tudi *zakon nihanja* nedušenega sistema z več prostostnimi stopnjami.

Izpeljavo splošnih enačb bomo začeli na vzorčnem modelu z dvema prostostnima stopnjama (slika 3.15).



Slika 3.15: Vzorčni model z dvema prostostnima stopnjama

Lego teles v vzorčnem modelu določata dva parametra:

- $x_1$ , ki predstavlja lego telesa z maso  $m_1$ , in
- $x_2$ , ki predstavlja lego telesa z maso  $m_2$ .

Opazovani sistem ima torej dve prostostni stopnji. Za določitev diferencialnih enačb gibanja zapišemo Newtonov zakon za vsako telo posebej

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \quad (3.59)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 (x_2 - x_1) - k_3 x_2 \quad (3.60)$$

iz česar sledi

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \quad (3.61)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = 0 \quad (3.62)$$

Če ti dve enačbi predelamo v matrično obliko, dobimo

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.63)$$

oziroma

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (3.64)$$

kjer je  $\mathbf{M}$  *masna matrika* sistema,  $\mathbf{K}$  je *togostna matrika* sistema,  $\ddot{\mathbf{x}}$  je *vektor pospeškov*,  $\mathbf{x}$  pa je

*vektor koordinat* oziroma prostostnih stopenj sistema. Rang vpletenih matrik in vektorjev ustreza številu prostostnih stopenj obravnavanega sistema.

Če imamo opravka z nihajočim sistemom z  $N$  prostostnimi stopnjami, ta matrična enačba predstavlja sistem  $N$  linearnih diferencialnih enačb drugega reda. Iskanja *lastnih frekvenc* takšnega sistema se lahko lotimo z uporabo nastavka v obliki

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} \sin \omega t \quad (3.65)$$

kjer je  $\mathbf{X}$  vektor konstant. Po vstavljanju tega nastavka v sistem diferencialnih enačb dobimo

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (3.66)$$

Iz takega sistema enačb lahko izračunamo netrivialen oziroma od nič različen vektor  $\mathbf{X}$  edino v primeru, ko je *karakteristična matrika*  $[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}]$  singularna. Drugače povedano, za netrivialne rešitve moramo zahtevati, da je determinanta te matrike enaka nič oziroma

$$\det[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] = 0 \quad (3.67)$$

Za sistem z  $N$  prostostnimi stopnjami lahko iz te enačbe izračunamo  $N$  *lastnih frekvenc* sistema

$$\omega_i, i = 1 \dots N \quad (3.68)$$

Ko so lastne frekvence  $\omega_i$  znane, lahko iz naslednjih sistemov enačb

$$[\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}] \mathbf{X}_i = \mathbf{0}, i = 1 \dots N \quad (3.69)$$

izračunamo še  $N$  *lastnih vektorjev* oziroma *lastnih nihajnih oblik* sistema

$$\mathbf{X}_i, i = 1 \dots N \quad (3.70)$$

Vektorji  $\mathbf{X}_i$  so *medsebojno ortogonalni* glede na masno matriko  $\mathbf{M}$ , kar pomeni, da je produkt  $\mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \mathbf{X}_j = 0$ , če  $i \neq j$ .

Znane lastne frekvence  $\omega_i$  in lastne nihajne oblike  $\mathbf{X}_i$  nihajočega sistema nam omogočajo zapis splošnega *nastavka za rešitev* diferencialnih enačb gibanja sistema z  $N$  prostostnimi stopnjami. Ta nastavek se lahko zapiše kot

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N \mathbf{X}_i (A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t) \quad (3.71)$$

kjer so  $A_i$  in  $B_i$  integracijske konstante, ki jih izračunamo iz začetnih pogojev

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t=0) &= \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}(t=0) &= \dot{\mathbf{x}}_0 \end{aligned} \quad (3.72)$$

Za to lahko uporabimo enačbi, ki ju izpeljemo z upoštevanjem ortogonalnosti lastnih nihajnih oblik. Če namreč nastavek za rešitev množimo z leve z  $\mathbf{X}_i^T \mathbf{M}$ , po preureditvi dobimo

$$A_i = \frac{\mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \mathbf{x}_0}{\mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \mathbf{X}_i} \quad (3.73)$$

in

$$B_i = \frac{\mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}_0}{\omega_i \mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \mathbf{X}_i} \quad (3.74)$$

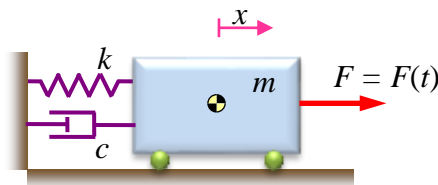
kjer je  $\mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \mathbf{x}_0$  produkt začetnih pomikov z vektorjem nihajnih oblik (izračunan glede na masno matriko  $\mathbf{M}$ ),  $\mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}_0$  je produkt začetnih hitrosti z vektorjem nihajnih oblik,  $\mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \mathbf{X}_i$  pa je produkt vektorja nihajnih oblik s samim seboj. Izračun konstant  $A_i, B_i, i = 1, \dots, N$  nam da torej *zakon nihanja* nedušenega sistema z  $N$  prostostnimi stopnjami.

## 3.4 Vsiljena nihanja sistemov z eno prostostno stopnjo

Pri *vsiljenem nihanju* na nihajoč sistem delujejo razen *povratnih* in *disipacijskih sil* še razne vrste *aktivnih sil*, ki običajno *niso odvisne* od trenutne *lege* ali *hitrosti sistema*. Te sile so lahko posledica:

- raznih *procesov znotraj opazovanega sistema* (npr. vrtenje neuravnovešenega rotorja elektromotorja) ali
- *vplivov drugega sistema* na naš opazovani sistem (npr. tresljaji podlage, na katero je pripet naš opazovani sistem).

Študijo lastnosti in obnašanja takih sistemov bomo obravnavali na *vzorčnem modelu*, kjer lahko togo telo translatorsno niha samo v eni smeri (**slika 3.16**). Gre za enak model, kot smo ga imeli pri obravnavi lastnih nihanj. Edina razlika je prisotnost zunanje aktivne sile  $F$ , ki je odvisna od časa.



**Slika 3.16:** Vzorčni model z 1 PS za študij vsiljenega nihanja

Diferencialno enačbo gibanja takega sistema lahko zapišemo kot

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \quad (3.75)$$

kjer je  $F = F(t)$  časovno odvisna sila, ki zajema vse aktivne zunanje vplive na sistem. Splošna rešitev take diferencialne enačbe je sestavljena iz dveh delov:

- *homogenega* dela,  $x_h$ , in
- *partikularnega* dela,  $x_p$ ,

tako da imamo

$$x = x_h + x_p \quad (3.76)$$

Partikularni del reši *originalno* diferencialno enačbo, homogeni del pa pripadajočo *homogeno* enačbo  $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ .

Sila  $F$  je aktivna sila, ki lahko mirujoč sistem spravi v gibanje. Zato pravimo, da  $F$  predstavlja *vzbujanje* dinamičnega sistema. V inženirski praksi imamo opravka z različnimi oblikami vzbujanja dinamičnih sistemov, vendar je daleč najpomembnejše *harmonično vzbujanje*. Takšno vzbujanje je definirano s harmonično funkcijo, ki jo lahko v splošni obliki zapišemo kot

$$F = F_0 \sin(\Omega t + \Phi) \quad (3.77)$$

Pri tem konstanta  $F_0$  predstavlja *amplitudo sile* vzbujanja,  $\Omega$  je *krožna frekvenca* vzbujanja,  $\Phi$  pa *fazni zamik* vzbujanja. V nadaljevanju bomo obravnavali izključno harmonično motnjo, za fazni zamik pa bomo zaradi enostavnosti kar predpostavili

$$\Phi = 0 \quad (3.78)$$

Ta predpostavka nima pomembnih posledic za ugotovitve, ki bodo sledile.

### 3.4.1 Nedušeno vsiljeno nihanje

Za opis nedušene vsiljene nihanja lahko uporabimo diferencialno enačbo vzorčnega modela, če privzamemo, da je  $c = 0$ . Ker smo predpostavili harmonično motnjo brez faznega zamika, se enačba gibanja zapiše kot

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin(\Omega t) \quad (3.79)$$

Če to enačbo delimo z  $m$  in uvedemo pomožne količine

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad f = \frac{F_0}{m} \quad (3.80)$$

dobimo

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f \sin(\Omega t) \quad (3.81)$$

Nastavek za rešitev je v tem primeru

$$x = x_h + x_p, \quad x_h = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \quad x_p = C \sin(\Omega t) \quad (3.82)$$

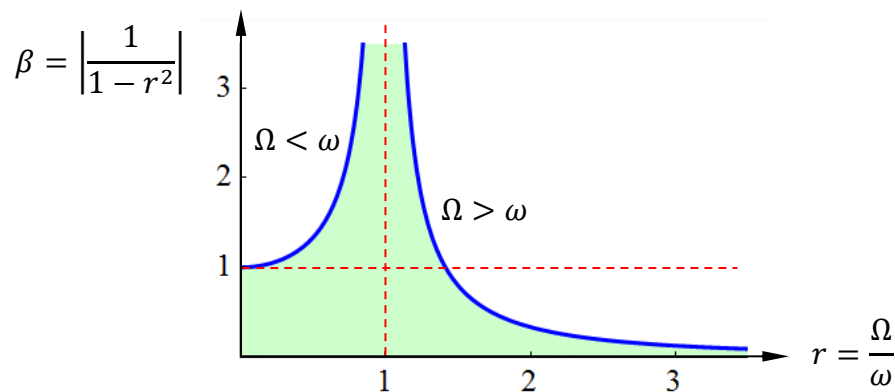
Integracijski konstanti  $A$  in  $B$  se izračunata iz začetnih pogojev, konstanto  $C$  pa dobimo z vstavljanjem partikularnega dela rešitve  $x_p$  v diferencialno enačbo. Iz tega sledi

$$C = \frac{f}{\omega^2 - \Omega^2} \quad (3.83)$$

Če bi šel  $\Omega \rightarrow 0$ , dobimo kvazistatično obremenitev sistema. V tem primeru je konstanta  $C$  enaka  $C_{st} = \frac{f}{\omega^2} = \frac{F_0}{k}$  in predstavlja odmik sistema od ravnovesne lege pri statični obremenitvi. Količnik

$$\beta = \left| \frac{C}{C_{st}} \right| = \left| \frac{1}{1-r^2} \right| \quad (3.84)$$

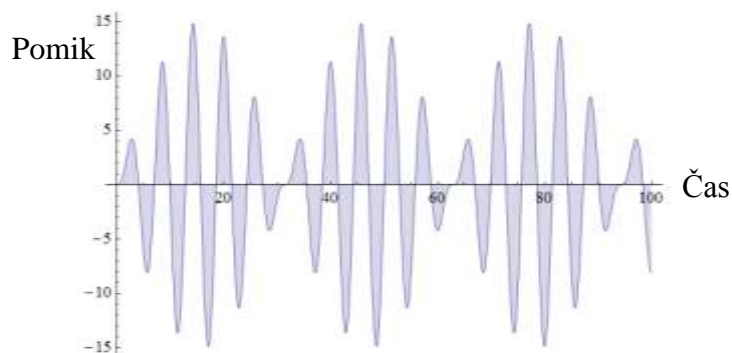
kjer je  $r = \frac{\Omega}{\omega}$ , imenujemo *dinamični faktor ojačenja*. Ta količina predstavlja relativno mero za velikost amplitud vsiljenega nihanja. Z inženirskega stališča je zelo koristen graf faktorja  $\beta$  v odvisnosti od količnika frekvenc  $r$  (slika 3.17).



**Slika 3.17:** Dinamični faktor ojačenja v odvisnosti od količnika frekvenc

S slike vidimo, da faktor dinamičnega ojačenja, in s tem tudi amplituda nihanja, narašča prek vseh meja takrat, ko gre  $r \rightarrow 1$  oziroma  $\Omega \rightarrow \omega$ . Ta pojav, ki je lahko usoden za normalno delovanje sistema, imenujemo *resonanca*.

Teoretično imamo opravka z resonanco takrat, kadar je frekvenca vzbujanja enaka lastni frekvenci sistema oziroma  $\Omega = \omega$ . V praksi pa so seveda problematične tudi situacije, ko sta obe frekvenci sicer različni, vendar se bistveno ne razlikujeta. Namreč, kadar imamo  $\Omega \approx \omega$ , lahko na dinamičnem sistemu opazimo *periodično naraščanje in upadanje amplitud* nihanja. Ta pojav, ki ga imenujemo *podrhtavanje* sistema, je lahko zaradi občasnih prevelikih amplitud prav tako usoden za dinamični sistem. V tehniški praksi se je zato vedno treba *izogibati situacijam*, ko je  $\Omega \approx \omega$ . Za ilustracijo podrhtavanja sistema je na **sliki 3.18** prikazan odziv sistema, pri katerem je  $\Omega = 1,2 \omega$ .



**Slika 3.18:** Podrhtavanje sistema kot posledica  $\Omega \approx \omega$

### 3.4.2 Dušeno vsiljeno nihanje

Dušenja v opazovanem sistemu v praksi pogosto ne moremo zanemariti, kar pomeni, da imamo  $c > 0$ . V takem primeru se diferencialna enačba vzorčnega modela s harmoničnim vzbujanjem zapiše kot

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin(\Omega t) \quad (3.85)$$

Če to enačbo delimo z  $m$  in uvedemo pomožne količine

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, f = \frac{F_0}{m}, p = \frac{c}{2m}, q = \sqrt{\frac{k}{m} - p^2} \quad (3.86)$$

dobimo

$$\ddot{x} + 2p\dot{x} + \omega^2 x = f \sin(\Omega t) \quad (3.87)$$

Če predpostavimo podkritično dušenje, ki se pojavlja v večini inženirskih sistemov, se nastavek za rešitev zapiše kot

$$x = x_h + x_p, x_h = e^{-pt}(A \cos(qt) + B \sin(qt)), x_p = C \sin(\Omega t - \gamma) \quad (3.88)$$

Konstanti  $A$  in  $B$  se izračunata iz začetnih pogojev; konstanti  $C$  in  $\gamma$  pa dobimo z vstavljanjem partikularnega dela rešitve  $x_p$  v diferencialno enačbo. Iz tega sledi

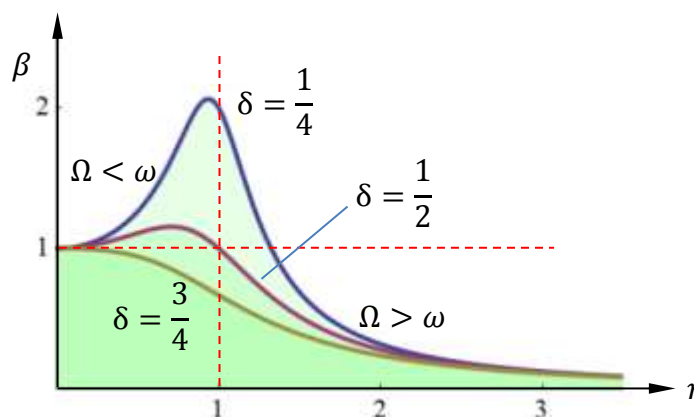
$$C = \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4p^2\Omega^2}}, \gamma = \tan^{-1}\left(\frac{2p\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}\right) \quad (3.89)$$

Dinamični faktor ojačenja je pri dušenem sistemu

$$\beta = \left| \frac{c}{c_{st}} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\delta^2 r^2}} \quad (3.90)$$

kjer smo uporabili  $\delta = \frac{p}{\omega}$  in  $r = \frac{\Omega}{\omega}$ .

Dinamični faktor ojačenja je torej pri dušenem vsiljenem nihanju odvisen od količine  $\delta$ , ki je sorazmerna koeficientu dušenja  $c$ . Graf odvisnosti  $\beta$  od  $r$  in  $\delta$  prikazuje **slika 3.19**. Vidimo lahko, da bo z inženirskega stališča bližina resonance oziroma frekvenc  $\Omega$  in  $\omega$  problematična pri vrednostih  $\delta < \frac{1}{2}$ , medtem ko postane vpliv resonance pri vrednostih  $\delta > \frac{1}{2}$  praktično zanemarljiv.



**Slika 3.19:** Dinamični faktor ojačenja v odvisnosti od  $r$  in  $\delta$

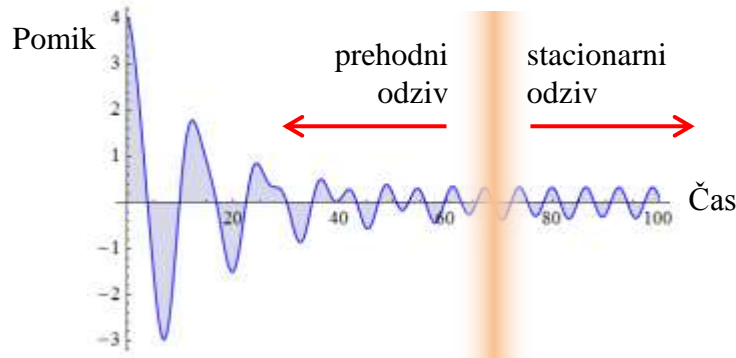
Na koncu je dobro opozoriti še na naslednje dejstvo: homogeni del rešitve dinamičnega odziva gre zaradi dušenja vedno proti nič, ko gre čas proti neskončnosti. Ali drugače

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow x_h \rightarrow 0 \quad (3.91)$$

V praksi to pomeni, da bo po določenem (prehodnem) času  $\Delta T$ , merjenem od začetka vzbujanja sistema, njegov odziv praktično enak partikularnemu delu rešitve. Ali drugače

$$t > \Delta T \Rightarrow x_h \approx 0 \Rightarrow x \approx x_p \quad (3.92)$$

Zaradi tega odziv sistema v času  $t < \Delta T$  imenujemo *prehodni odziv*, odziv v času  $t > \Delta T$  pa *stacionarni odziv* sistema. Na **sliki 3.20** je prikazan tipičen primer vsiljenega nihanja z dušenjem, pri katerem se jasno ločita prehodni in stacionarni del odziva sistema.



**Slika 3.20:** Prehodni in stacionarni odziv sistema

### 3.4.2.1 Primer vsiljenega nihanja z inercialnim vzburjanjem

Pogost vzrok nihanja sistemov so *neuravnovešene vrteče se mase*, ki povzročajo *inercialno vzburjanje*. Na **sliki 3.21** je prikazan primer, kjer masa  $m_u$  kroži s kotno hitrostjo  $\Omega$  na razdalji  $e$  okoli fiksne osi na telesu mase  $m_s$ . Diferencialna enačba gibanja sistema je

$$(m_s + m_u)\ddot{y} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (3.93)$$

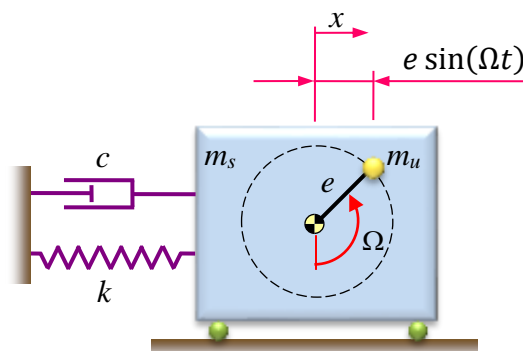
kjer  $y$  označuje lego težišča celotnega sistema mase  $m_s + m_u$ . Če zapišemo izraz za težišče sistema

$$(m_s + m_u)y = m_s x + m_u(x + e \sin(\Omega t)) \quad (3.94)$$

tega dvakrat odvajamo in vstavimo v izvirno diferencialno enačbo sistema, dobimo

$$(m_s + m_u)\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m_u e \Omega^2 \sin(\Omega t) \quad (3.95)$$

Vidimo lahko, da ta enačba *ustreza splošni diferencialni enačbi* za vsiljeno nihanje s harmoničnim vzburjanjem, pri čemer je  $m_s + m_u = m$  in  $m_u e \Omega^2 = F_0$ .



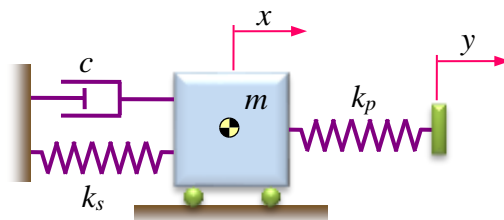
**Slika 3.21:** Sistem z inercialnim vzburjanjem

To pomeni, da vse enačbe, ki veljajo za harmonično vzburjanje sistema, smiselno veljajo tudi za sistem z inercialnim harmoničnim vzburjanjem.



### 3.4.2.2 Primer vsiljenega nihanja z vzbujanjem podlage

Drug pogost vzrok vsiljenih nihanj je *vzbujanje s premikanjem podlage*, na katero je pripet opazovani dinamični sistem.



**Slika 3.22:** Sistem z vzbujanjem prek podlage

Primer takšnega sistema je prikazan na **sliki 3.22**. Če je pomik podlage  $y$  harmonična funkcija  $y = Y \sin(\Omega t)$ , lahko diferencialno enačbo gibanja zapišemo kot

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + (k_s + k_p)x = k_p Y \sin(\Omega t) \quad (3.96)$$

Očitno tudi ta enačba *ustreza splošni diferencialni enačbi* za vsiljeno nihanje s harmoničnim vzbujanjem, pri čemer je  $k_s + k_p = k$  in  $k_p Y = F_0$ .



# 4 ANALITIČNA DINAMIKA

**Namen:**

- Spoznati Newton-Eulerjev pristop.
- Spoznati D'Alembertovo načelo.
- Spoznati posplošene oziroma generalizirane koordinate in posplošene sile.
- Spoznati načelo virtualnega pomika, virtualnega dela ter uporabe virtualnega dela v statiki in dinamiki.
- Spoznati Lagrangeovo enačbo in njeno uporabnost.

**Cilj:**

S pridobljenim znanjem bo študent sposoben zapisati gibalne enačbe sistema z različnimi uporabljenimi metodami.

## 4.1 Uvod

Kot že ime pove, gibalne enačbe opisujejo gibanje mehanskega oziroma dinamičnega sistema, ko je ta podvržen nekim zunanjim silam in/ali momentom. Takšen sistem ima lahko odprto kinematično verigo, kot jo imajo roboti, ali pa zaprto, kot jo imajo npr. štirizgibni mehanizmi. Gibalne enačbe ne opisujejo samo gibanja sistema, temveč podajajo tudi potrebne momente in/ali sile za željeno gibanje po predpisani poti, hitrosti ali pospešku. Lahko podajajo tudi pospeške, hitrosti in poti iz podanih momentov na motorju.

Pridobivanje gibalnih enačb dinamičnega sistema je za inženirja mehatronike pomembno iz več vidikov. Če želimo dimenzionirati motor dinamičnega sistema, potrebujemo gibalne enačbe. Z njihovo pomočjo izračunamo, kolikšen moment je potreben na motorju za premagovanje gibanja po predpisani trajektoriji. Gibalne enačbe so prav tako pomembne pri vodenju dinamičnih sistemov. Če želimo voditi dinamični sistem s pomočjo regulacije, potrebujemo gibalne enačbe, ki jih zapišemo v Laplaceovem prostoru, ter tako dobimo stopnični odziv dinamičnega sistema. S pomočjo stopničnega sistema izberemo ustrezen regulator za vodenje obravnavanega sistema. Prav tako s pomočjo gibalnih enačb dobimo ustrezne reakcijske sile v vezeh, s pomočjo katerih potem ustrezno dimenzioniramo vezni element.

Klasičen pristop, ki smo ga do zdaj že spoznali, je pridobivanje gibalnih enačb s pomočjo Newtonovih zakonov, še posebej z uporabo Newtonovega drugega in tretjega zakona. Newtonov pristop je vektorski pristop z uporabo prostih diagramov teles, kot bo to prikazano v nadaljevanju. Pri tem poleg gibalnih enačb za dinamični sistem vedno dobimo še reakcijske enačbe v podporah oziroma vezeh dinamičnega sistema.

Analitičen pristop, na drugi strani, ne zahteva poznavanja Newtonovih zakonov. S pomočjo skalarne veličine dela, ki je razdeljeno na kinetično in potencialno energijo, ter

zakonom o ohranitvi energije in uporabo Lagrangeevega pristopa preprosto pridemo do gibalnih enačb dinamičnega sistema. Z omenjenim pristopom dobimo minimalno število gibalnih enačb dinamičnega sistema brez reakcijskih sil, lahko pa iz pridobljenih gibalnih enačb pridobimo reakcijske sile v vezeh in podporah.

Dinamični sistemi so dinamično vzbujaeni, kar pomeni, da je podan moment, ki poganja sistem, in je treba poiskati odziv sistema v smislu opravljene poti, hitrosti, pospeška ali generirane sile. Na drugi strani lahko na dinamični sistem delujejo zunanje sile in nas zanima potreben moment na motorju, ki bo premagoval zunanje sile po vnaprej predpisani trajektoriji.

Če želimo pridobiti odziv dinamičnega sistema, moramo rešiti gibalne enačbe. Gibalne enačbe dinamičnega sistema so po navadi navadne diferencialne enačbe drugega reda. Za pridobivanje odziva jih je treba integrirati. Analitično je težko najti rešitev, zato večinoma uporabljamo numerične metode, predvsem metodo Runge-Kutta.

V nadaljevanju se bomo osredotočili na obravnavo ravninskih dinamičnih sistemov.

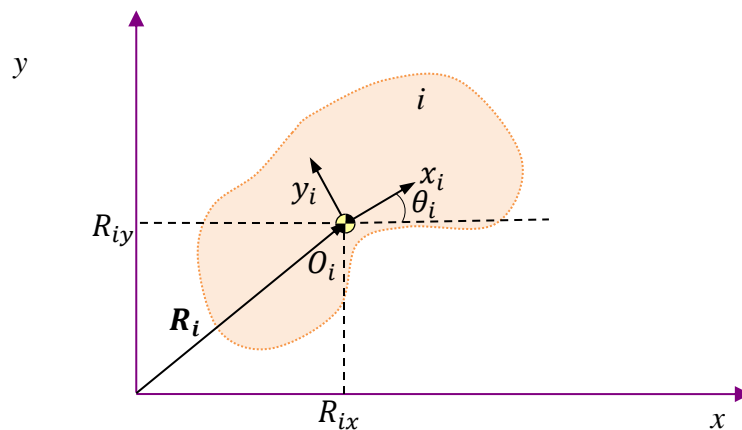
## 4.2 Prostostne stopnje dinamičnih sistemov

Izraz prostostne stopnje označuje najmanjše možno število položajnih parametrov, ki popolnoma opišejo dinamični sistem. Povedano drugače, če dinamični sistem potrebuje najmanj dva podatka, da popolnoma opišemo dinamični sistem, potem ima ta sistem dve prostostni stopnji. Industrijski robot ima šest prostostnih stopenj oziroma šest servo motorjev, kjer s prvimi tremi motorji doseže vse položaje točke v prostoru, z zadnjimi tremi motorji pa vse orientacije točke v prostoru. Batni mehanizem ima samo eno prostostno stopnjo, saj lahko z zasukom pogonske ročice določimo vse kote in položaj batnice.

## 4.3 Pridobivanje gibalnih enačb s pomočjo Newton-Eulerjevega pristopa in D'Alembertovega načela

### 4.3.1 Newton-Eulerjev pristop

V nadaljevanju bomo pridobili gibalne enačbe dinamičnega sistema s pomočjo Newton-Eulerjevega pristopa, ki ga že poznate, vendar ga niste nikoli tako poimenovali, saj večinoma uporabljamo kar izraz Newtonov pristop. Prosto togo telo  $i$  v ravnini ima tri prostostne stopnje, kar lahko opišemo s tremi podatki  $R_{ix}$ ,  $R_{iy}$  in  $\theta_i$ , kot to prikazuje slika 4.1. Za pridobivanje dinamičnega modela telesa tako potrebujemo tri neodvisne diferencialne enačbe drugega reda, ki opisujejo neomejeno gibanje togega telesa v ravnini.



Slika 4.1: Prosto togo telo v ravnini

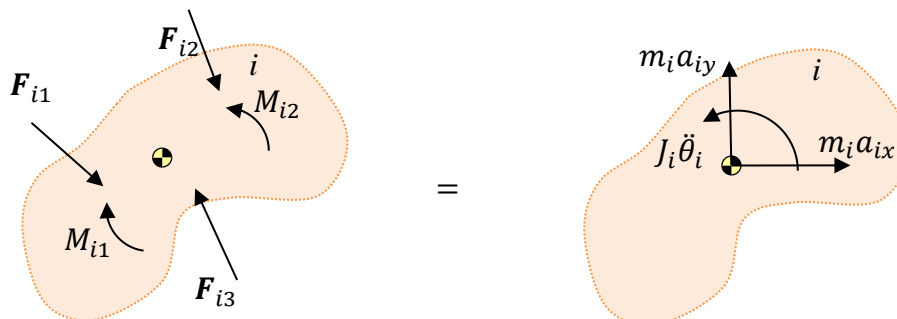
Newton-Eulerjev pristop tako pridobi naslednje tri enačbe za gibanje težišča togega telesa v ravnini.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n F_{ijx} &= m_i a_{ix} \\ \sum_{j=1}^n F_{ijy} &= m_i a_{iy} \\ \sum_{j=1}^m M_{ij} &= J_i \ddot{\theta}_i \end{aligned} \quad (4.1)$$

Pri tem sta prvi dve enačbi Newtonovi enačbi, pridobljeni iz izreka o gibalni količini, tretja pa je Eulerjeva enačba, pridobljena iz izreka o vrtilni količini. Od tod tudi izraz Newton-Eulerjev pristop.

### 4.3.2 D'Alembertovo načelo

D'Alembertovo načelo pravi, da so vztrajnostne sile in vztrajnostni momenti togega telesa enaki vsoti vseh zunanjih sil in vsoti vseh zunanjih momentov, ki delujejo na togo telo. Slika 4.2 prikazuje grafično upodobitev načela.



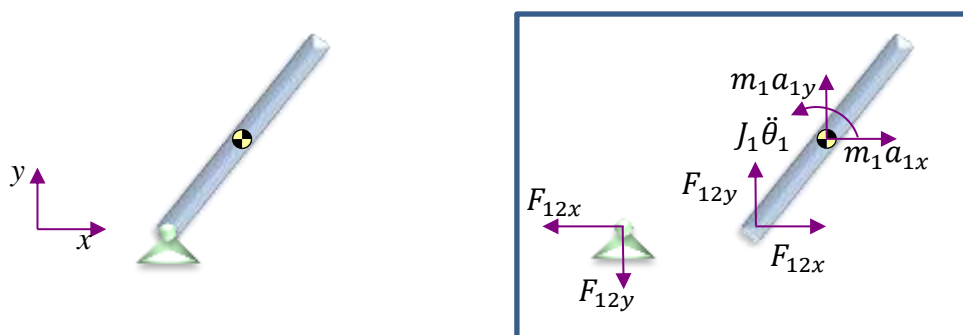
Slika 4.2: Grafična upodobitev D'Alembertovega načela

Pri tem se sile  $F_{i1}, F_{i2}, F_{i3}$  in momenta  $M_{i1}, M_{i2}$  obravnavata kot zunanje sile in zunanji momenti, izrazi  $m_i a_{iy}, m_i a_{ix}$  in  $J_i \ddot{\theta}_i$  pa predstavljajo vztrajnostne sile obravnavanega telesa.

Če bi zapisali enačbe glede na D'Alembertovo načelo, bi pridobili popolnoma identične gibalne enačbe, kot smo jih pridobili v enačbi (4.1).

### 4.3.3 Newton-Eulerjev pristop in diagram prostih teles

Pridobivanje gibalnih enačb dinamičnega sistema togih teles s pomočjo Newton-Eulerjevega pristopa poteka s pomočjo diagrama prostih teles. Predstavljajte si, da so tri toga telesa med sabo povezana z vezmi oziroma sklepi. Diagram prostih teles pridobimo tako, da telesa med sabo razdružimo, kjer vezi nadomestimo z reakcijskimi silami oziroma silami v vezeh, na vsako telo pa narišemo še sile in momente, ki vplivajo na telo. Za vsako posamezno telo tako zapišemo tri enačbe v obliki enačbe (4.1). Usmeritve posameznih sil predvidevamo. Če smo se pri usmeritvi zmotili, bomo kot rezultat dobili negativno vrednost.



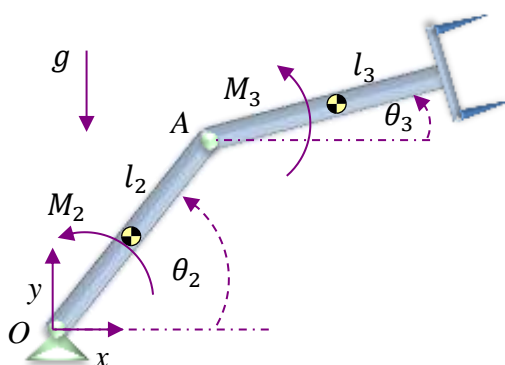
a) Dinamični sistem

b) Diagram prostih teles

**Slika 4.3:** Dinamični sistem in diagram prostih teles

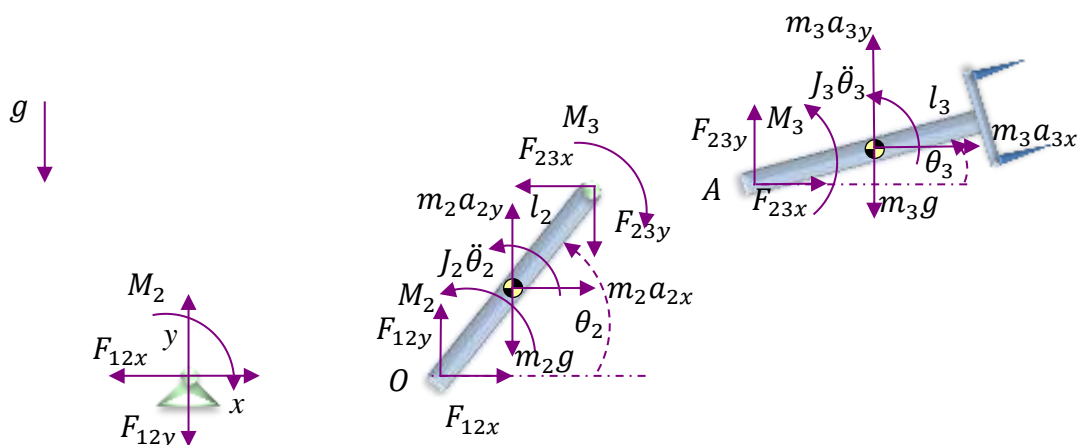
V nadaljevanju si bomo pogledali pridobivanje gibalnih enačb dinamičnih sistemov z odprto kinematično verigo, kot jo imajo npr. industrijski roboti.

**Primer 4.1:** Za dvoosni manipulator na sliki 4.4 zapišite gibalne enačbe s pomočjo Newton-Eulerjevega pristopa, če so znani  $\theta_2$  in  $\theta_3$  ter  $\ddot{\theta}_2$  in  $\ddot{\theta}_3$ .



**Slika 4.4:** Dvoosni manipulator

Če želimo zapisati gibalne enačbe dvoosnega manipulatorja s pomočjo Newton-Eulerjevega pristopa, je treba narediti diagrame prostih teles, kot prikazuje slika 4.5. Za telo 2 in telo 3 zapišemo ravnotežne enačbe, ki nadomestijo sile v podporah oz. sklepih kot tudi momente motorjev, ki se nahajajo v posameznem sklepu.



**Slika 4.5:** Diagram prostih teles dvoosnega manipulatorja

Pri zapisu ravnotežnih enačb za drugo telo moramo upoštevati, da vse momente pri tem pristopu opazujemo okoli težišča telesa 2.

$$\begin{aligned}
 F_{12x} - F_{23x} &= m_2 a_{2x} \\
 F_{12y} - m_2 g - F_{23y} &= m_2 a_{2y} \\
 F_{12x} \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 - F_{12y} \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 + M_2 + F_{23x} \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 - F_{23y} \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 - M_3 &= J_2 \ddot{\theta}_2
 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Pri zapisu ravnotežnih enačb za tretjo telo ponovno upoštevamo vse momente okoli težišča telesa 3.

$$\begin{aligned}
 F_{23x} &= m_3 a_{3x} \\
 F_{23y} - m_3 g &= m_3 a_{3y} \\
 F_{23x} \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 - F_{23y} \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 + M_3 &= J_3 \ddot{\theta}_3
 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Iz obeh zgornjih enačb lahko izrazimo potreben moment na posameznem motorju.

$$\begin{aligned}
 M_2 &= M_3 + J_2 \ddot{\theta}_2 - F_{12x} \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 + F_{12y} \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 - F_{23x} \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 \\
 &\quad + F_{23y} \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \\
 M_3 &= J_3 \ddot{\theta}_3 - F_{23x} \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 + F_{23y} \frac{l_3}{2} \cos \theta_3
 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Poglejmo, koliko neznank imamo zdaj v zgornjih enačbah. Neznanke so:  $M_2, M_3, F_{12x}, F_{12y}, F_{23x}, F_{23y}, a_{2x}, a_{2y}, a_{3x}, a_{3y}$ . Torej imamo 6 enačb in 10 neznank. Dodatne štiri enačbe dobimo, če s pomočjo kinematike zapišemo pospeške težišča telesa 2 in 3 po  $x$  in  $y$  osi. Tako dobimo 10 enačb in 10 neznank. S tem sistem enačb postane rešljiv.

Če izraze za sile vstavimo v enačbi za momente, dobimo končni enačbi, kjer pospeški niso eksplicitno izraženi.

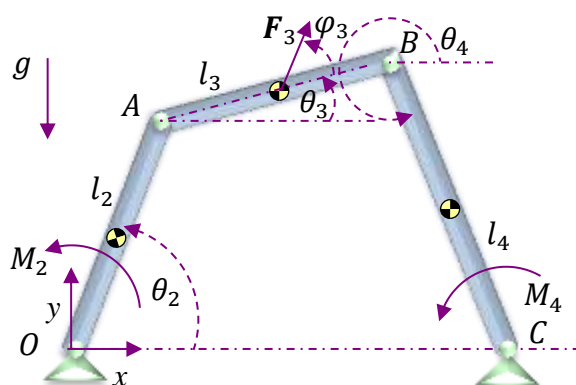
$$\begin{aligned}
 M_2 &= M_3 + J_2 \ddot{\theta}_2 - m_2 a_{2x} \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 + (m_2 g + m_2 a_{2y}) \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \\
 &\quad - m_3 a_{3x} l_2 \sin \theta_2 + (m_3 g + m_3 a_{3y}) l_2 \cos \theta_2 \\
 M_3 &= J_3 \ddot{\theta}_3 + (m_3 a_{3y} + m_3 g) \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 - m_3 a_{3x} \frac{l_3}{2} \sin \theta_3
 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Opazimo lahko, da z Newton-Eulerjevim pristopom pridobimo še enačbe za reakcijske sile v

vezeh oziroma sile v posameznih podporah. Poznavanje teh sil je v določenih primerih željeno – kadar npr. želimo dimenzionirati posamezen element, moramo poznati sile v podporah. V večini primerov pa je dovolj, če poznamo samo gibalne enačbe za posamezno prostostno stopnjo dinamičnega sistema.

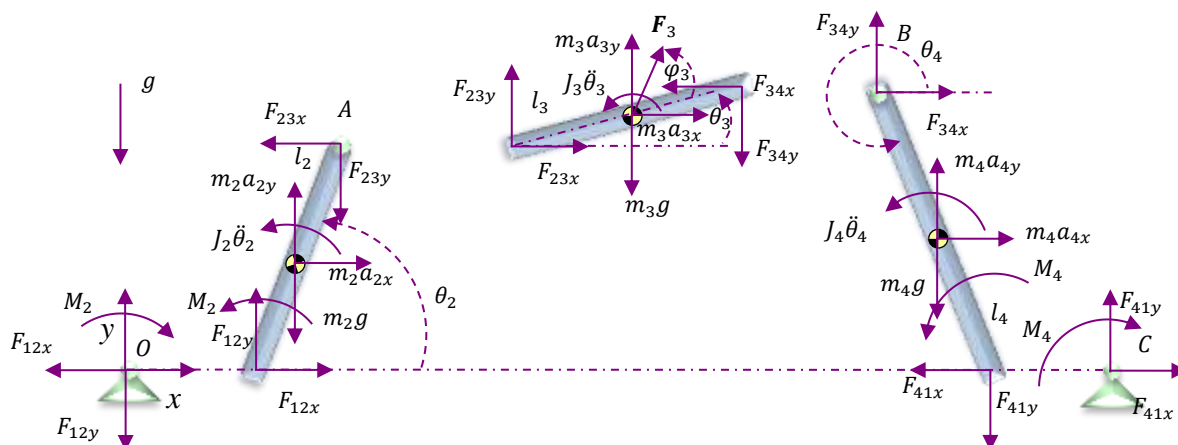
V nadaljevanju si bomo pogledali pridobivanje gibalnih enačb dinamičnih sistemov z zaprto kinematično verigo.

**Primer 4.2:** Za štirizgibni mehanizem, kot je prikazan na sliki 4.6, izpeljite gibalne enačbe s pomočjo Newton-Eulerjevega pristopa, če so znani  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  in  $\theta_4$ ,  $\ddot{\theta}_2$ ,  $\ddot{\theta}_3$  in  $\ddot{\theta}_4$  ter  $F_3$ .



Slika 4.6: Štirizgibni mehanizem

Ponovno je treba izdelati diagrame prostih teles in za posamezno prosto telo zapisati ravnotežne enačbe v obliki enačbe (4.1).



Slika 4.7: Diagram prostih teles štirizgibnega mehanizma

Pri zapisu ravnotežnih enačb za drugo telo moramo upoštevati, da vse momente pri tem pristopu opazujemo okoli težišča telesa 2.

$$\begin{aligned} F_{12x} - F_{23x} &= m_2 a_{2x} \\ F_{12y} - m_2 g - F_{23y} &= m_2 a_{2y} \\ F_{12x} \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 - F_{12y} \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 + M_2 + F_{23} \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 - F_{23y} \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 &= J_2 \ddot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Pri zapisu ravnotežnih enačb za tretjo telo ponovno upoštevamo vse momente okoli težišča telesa 3.



$$\begin{aligned}
 F_{23x} + F_{3x} - F_{34x} &= m_3 a_{3x} \\
 F_{23y} - m_3 g + F_{3y} - F_{34y} &= m_3 a_{3y} \\
 F_{23x} \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 - F_{23y} \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 + F_{34x} \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 - F_{34y} \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 &= J_3 \ddot{\theta}_3
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Enak postopek izberemo tudi pri zapisu ravnotežnih enačb za četrto telo.

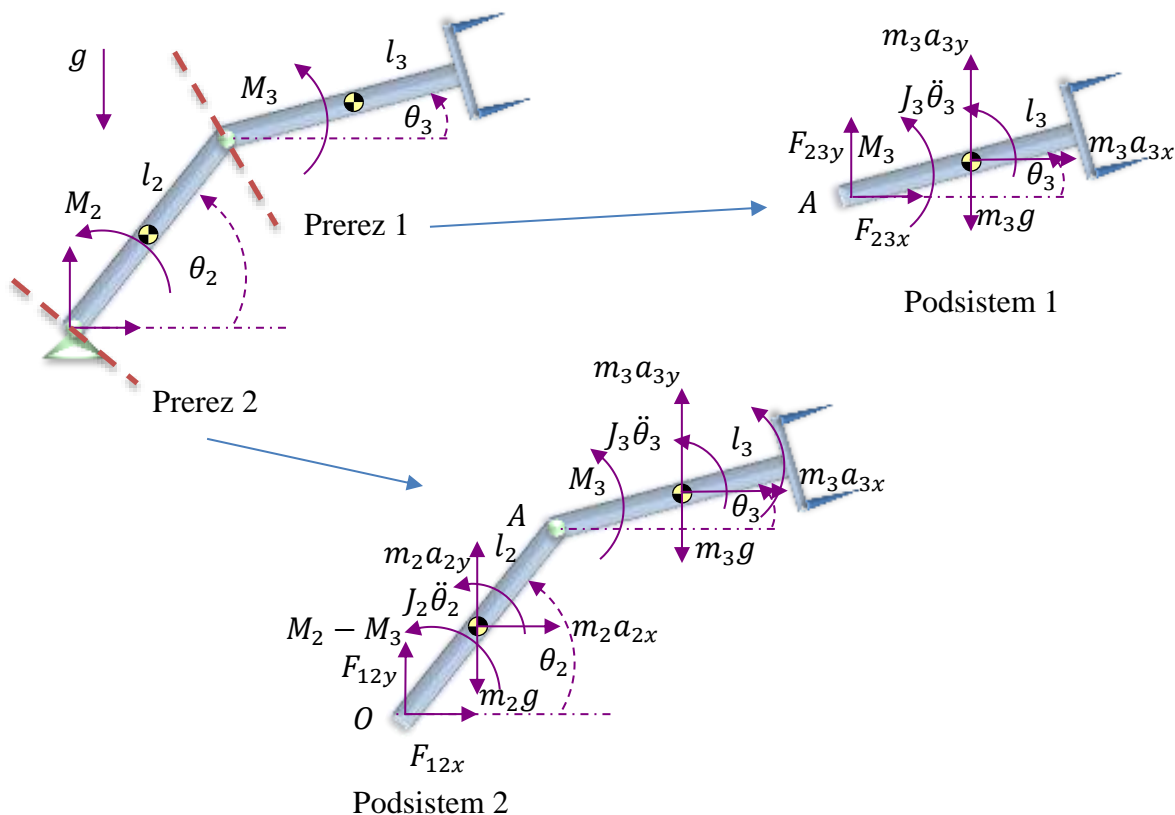
$$\begin{aligned}
 F_{34x} - F_{41x} &= m_4 a_{4x} \\
 F_{34y} - m_4 g - F_{41y} &= m_4 a_{4y} \\
 F_{34x} \frac{l_4}{2} \sin \theta_4 - F_{34y} \frac{l_4}{2} \cos \theta_4 + F_{41x} \frac{l_4}{2} \sin \theta_4 - F_{41y} \frac{l_4}{2} \cos \theta_4 + M_4 &= J_4 \ddot{\theta}_4
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Ta postopek da 9 enačb. Če vstavimo v zgornje enačbe še izraze za pospeške in vstavimo enačbe v momentne enačbe, dobimo sistem 8 enačb, ki podajajo reakcijske sile v podporah, in momentno enačbo, iz katere lahko izrazimo potreben moment ali pa kotni pospešek, odvisno, kaj točno nas zanima.

### 4.3.4 D'Alembertovo načelo in uporaba metode prerezov

V nadaljevanju bo prikazan postopek uporabe D'Alembertovega načela in metode prerezov oziroma ravnovesja podsistemov na obeh prej prikazanih primerih.

**Primer 4.3:** Za dvoosni manipulator zapišite gibalne enačbe s pomočjo D'Alembertovega načela in uporabo metode prerezov, če so znani  $\theta_2$  in  $\theta_3$  ter  $\ddot{\theta}_2$  in  $\ddot{\theta}_3$ .



**Slika 4.8:** Dvoosni manipulator, metoda prerezov in ravnotežje podsistemov

Vsak prerez naredimo pri posameznem sklepu začevši pri zadnjem sklepu. S tem dobimo prvi

podsystem. Po tem naredimo še en prerez pri sklepu 1. Tako dobimo drugi podsystem. Za oba podsystema zapišemo ravnotežne momentne enačbe glede na točko prereza, kjer upoštevamo D'Alembertovo načelo.

Za prvi podsystem tako zapišemo ravnotežne enačbe okoli točke A. D'Alembertovo načelo pravi, da je vsota vseh zunanjih momentov enaka vsem vztrajnostnim momentom.

$$\begin{aligned} \sum M_{ZM} &= \sum M_{VM} \\ M_3 - m_3 g \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 &= J_3 \ddot{\theta}_3 + m_3 a_{3y} \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 - m_3 a_{3x} \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 \quad (4.9) \\ M_3 &= J_3 \ddot{\theta}_3 + (m_3 a_{3y} + m_3 g) \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 - m_3 a_{3x} \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 \end{aligned}$$

Za podsystem 2 zapišemo momentne ravnotežne enačbe okoli točke O s pomočjo D'Alembertovega načela.

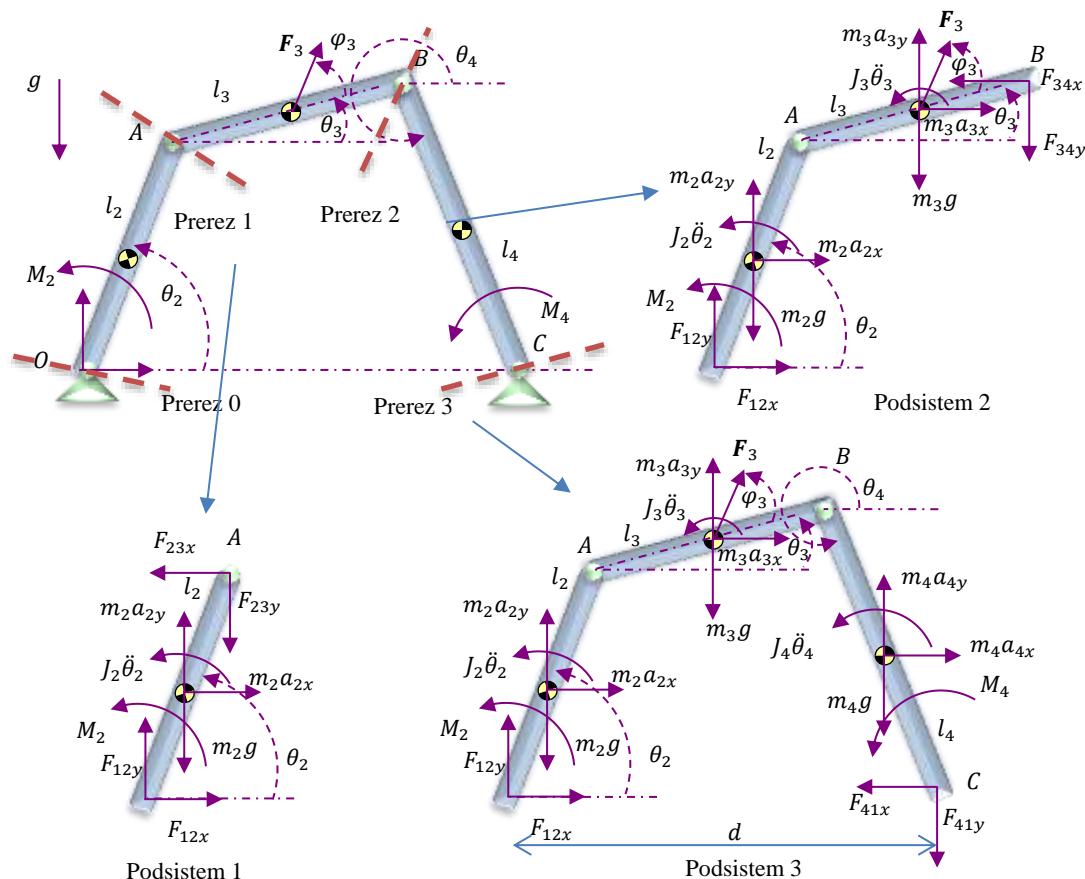
$$\begin{aligned} \sum M_{ZM} &= \sum M_{VM} \\ M_2 - M_3 + M_3 - m_2 g \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 - m_3 g \left( l_2 \cos \theta_2 + \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 \right) \\ &= J_2 \ddot{\theta}_2 + J_3 \ddot{\theta}_3 - m_2 a_{2x} \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 + m_2 a_{2y} \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \\ &\quad - m_3 a_{3x} \left( l_2 \sin \theta_2 + \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 \right) \\ &\quad + m_3 a_{3y} \left( l_2 \cos \theta_2 + \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 \right) \quad (4.10) \end{aligned}$$

V enačbi (4.10) se  $M_3$  izniči. Posamezni členi zgornje enačbe pa še vedno vsebujejo elemente  $M_3$ . Če te elemente združimo, dobimo rezultat enačbe (4.9). Namesto posameznih združenih členov lahko v enačbo (4.10) vstavimo  $M_3$ . Tako pridobimo spodnjo enačbo.

$$\begin{aligned} M_2 = M_3 + J_2 \ddot{\theta}_2 - m_2 a_{2x} \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 + (m_2 g + m_2 a_{2y}) \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \\ - m_3 a_{3x} l_2 \sin \theta_2 + (m_3 g + m_3 a_{3y}) l_2 \cos \theta_2 \quad (4.11) \end{aligned}$$

Kot lahko opazimo, z uporabo metode prerezov pri mehanizmih z odprto kinematično verigo pridobimo toliko gibalnih enačb, kot ima mehanizem prostostnih stopenj.

**Primer 4.4:** Za štirizgibni mehanizem zapišite gibalne enačbe s pomočjo uporabe D'Alembertovega načela in uporabo metode prerezov, če so znani  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  in  $\theta_4$ ,  $\ddot{\theta}_2$ ,  $\ddot{\theta}_3$  in  $\ddot{\theta}_4$  ter  $F_3$ .



**Slika 4.9:** Štirizgibni mehanizem, metoda prerezov in ravnotežja podsistemov

Pri zaprtozanknih verigah moramo narediti pri ročici 2 dva prereza, torej pri obeh sklepih. S tem dobimo prvi podsistem. Od tukaj dalje pa v vsakem sklepu naredimo prerez in pridobimo nov podsistem. Postopek prikazuje slika 4.9. Najprej zapišemo ravnotežne enačbe za podsistem 1 okoli točke A z upoštevanjem D'Alembertovega načela.

$$\sum M_{ZM} = \sum M_{VM}$$

$$F_{12x}l_2 \sin \theta_2 - F_{12y}l_2 \cos \theta_2 + m_2g \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 + M_2$$

$$= J_2\ddot{\theta}_2 + m_2a_{2x} \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 - m_2a_{2y} \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 \quad (4.12)$$

Za podsistem 2 zapišemo ravnotežne enačbe okoli točke B z upoštevanjem D'Alembertovega načela.

$$\begin{aligned}
& \sum M_{ZM} = \sum M_{VM} \\
& F_{12x}(l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3) - F_{12y}(l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3) \\
& + m_2 g \left( \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 \right) + M_2 + F_{3x} \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 \\
& + (m_3 g - F_{3y}) \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 \\
& = J_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 a_{2x} \left( \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 \right) \\
& - m_2 a_{2y} \left( \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 \right) + J_3 \ddot{\theta}_3 + m_3 a_{3x} \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 \\
& - m_3 a_{3y} \frac{l_3}{2} \cos \theta_3
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Za podsistem 3 zapišemo ravnotežne enačbe okoli točke C z upoštevanjem D'Alembertovega načela.

$$\begin{aligned}
& \sum M_{ZM} = \sum M_{VM} \\
& -F_{12y}d + M_2 + m_2 g \left( \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 + l_4 \cos \theta_4 \right) \\
& + F_{3x} \left( \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 + l_4 \sin \theta_4 \right) \\
& + (m_3 g - F_{3y}) \left( \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 + l_4 \cos \theta_4 \right) + M_4 + m_4 g \frac{l_4}{2} \cos \theta_4 \\
& = J_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 a_{2x} \left( \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 + l_4 \sin \theta_4 \right) \\
& - m_2 a_{2y} \left( \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 + l_4 \cos \theta_4 \right) + J_3 \ddot{\theta}_3 \\
& + m_3 a_{3x} \left( \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 + l_4 \sin \theta_4 \right) - m_3 a_{3y} \left( \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 + l_4 \cos \theta_4 \right) \\
& + J_4 \ddot{\theta}_4 + m_4 a_{4x} \frac{l_4}{2} \sin \theta_4 - m_4 a_{4y} \frac{l_4}{2} \cos \theta_4
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Kot lahko opazimo, v zgornjih treh enačbah še vedno nastopata dve reakcijski sili v podpori O. Žal se z uporabo metode prerezov ne moremo popolnoma znebiti reakcijskih sil pri zaprtostančnih kinematičnih mehanizmih.

V zgornjih primerih so bili podani klasični pristopi za pridobivanje gibalnih enačb odprtih in zaprtih kinematičnih mehanizmov. Če so znani posamezni zasuki in pospeški teles, lahko s pomočjo gibalnih enačb izračunamo generirane momente in sile v podporah. Če so znani momenti in zunanje sile, lahko iz gibalnih enačb s pomočjo metod numeričnih reševanj navadnih diferencialnih enačb drugega reda pridobimo zasuke in pospeške posameznih teles.

## 4.4 Posplošene oziroma generalizirane koordinate

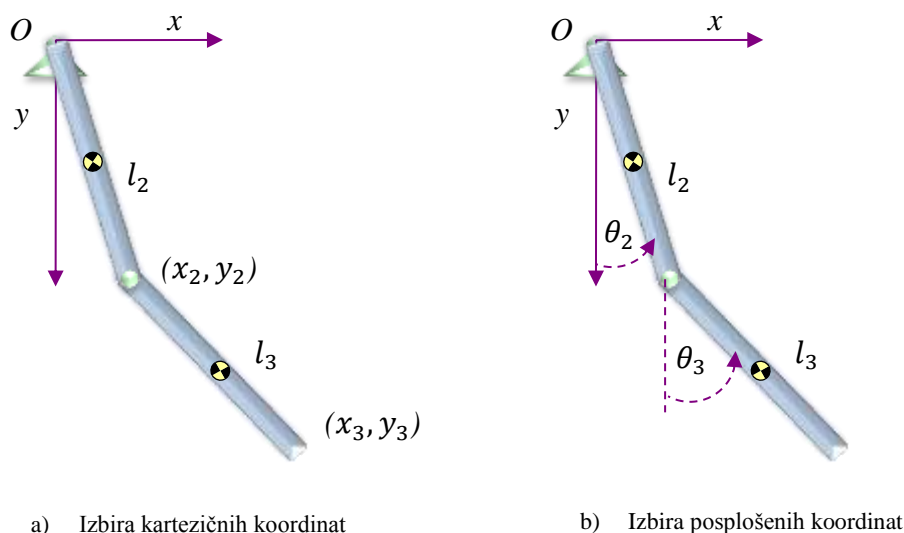
Za namen uporabe analitične mehanike potrebujemo vpeljavo oziroma uporabo posplošenih oziroma generaliziranih koordinat. Posplošene koordinate so koordinate, ki jih izberemo za opisovanje točke oziroma objekta v prostoru. Po navadi poznamo koordinate  $x, y$  in  $z$ . Lahko

izberemo tudi polarne koordinate, torej  $r$  in  $\varphi$ , ali pa cilindrične koordinate  $r$ ,  $\varphi$  in  $z$ . Pri izbiri koordinat moramo paziti na naslednje:

1. Ni nujno, da izberemo kartezične koordinate.
2. Med seboj morajo biti neodvisne.
3. Morajo popolnoma opisati sistem.

Če povzamemo, posplošene koordinate so neodvisne koordinate, ki popolnoma opišejo opazovani sistem. Poglejmo si primer dvojnega nihala.

**Primer 4.5:** Izbira ustreznih posplošenih koordinat na primeru dvojnega nihala.



**Slika 4.10:** Izbira a) kartezičnih in b) posplošenih koordinat

Če želimo opisati sistem na zgornji sliki, lahko to naredimo na več načinov. Prvi način je, da izberemo kartezične koordinate in tako potrebujemo štiri podatke  $x_2, y_2$  in  $x_3, y_3$ . Poglejmo, ali so te med seboj neodvisne. Z drugimi besedami, če izberem podatek  $x_2$ , ali je potem  $y_2$  prosto določljiv? Opazimo lahko, da ni tako. Člen 2 ima vnaprej znano dolžino  $l_2$ , kar pomeni, da če izberemo  $x_2$ , potem podatek za  $y_2$  dobimo z upoštevanjem Pitagorovega

izreka  $y_2 = \pm \sqrt{l_2^2 - x_2^2}$ . Tako hitro ugotovimo, da takšen izbor koordinat ne more dati

posplošenih koordinat. Dvojno nihalo ima dve prostostni stopnji. Že ta podatek nam mora povedati, da za opisovanje sistema potrebujemo dve posplošeni koordinati. Lahko si za opis sistema izberemo kot med členom 2 in  $y$  osjo ter kot med členom 3 in navidezno osjo, podaljšano od člena 2, kot to prikazuje zgornja slika. Izbrana kota označimo z  $\theta_2$  in  $\theta_3$ . Ta dva kota sta zdaj med seboj neodvisna. Če določimo enega od njiju, se drugi lahko prosto vrti. Prav tako, če določimo oba, smo s tem popolnoma opisali sistem, saj se sistem ne more več vrteti oziroma premakniti. S tem lahko zagotovo trdimo, da sta kota  $\theta_2$  in  $\theta_3$  posplošeni koordinati zgorjnjega sistema. Posplošene koordinate splošno označimo s črko  $q_i$ . Tako bi zgoraj opisani sistem opisali s  $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), q_2(t))$ , pri čemer sta  $q_1(t) = \theta_2(t)$  in  $q_2(t) = \theta_3(t)$ . Vemo, da sta obe spremenljivki kota časovno odvisni spremenljivki, zato lahko posplošene koordinate zapišemo kot  $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ . Ker bomo v nadaljevanju uporabljali Lagrangeeve enačbe in Lagrangeev pristop, moramo pojasniti, na kakšnih dinamičnih sistemih lahko ta pristop sploh uporabimo in na katerih bi bilo treba uporabiti drugačno metodo.

## 4.5 Holonomni sistemi in holonomne vezi

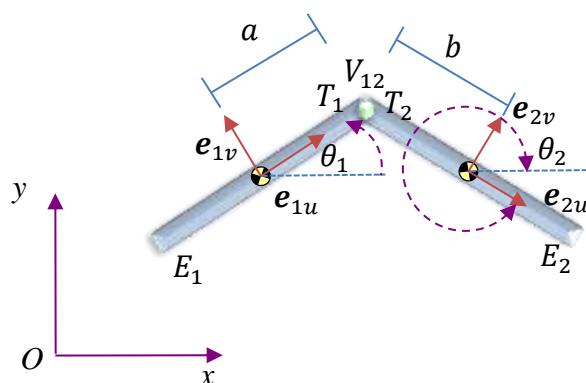
Holonomni dinamični sistemi so sistemi, kjer za opis sistema potrebujemo toliko podatkov, kolikor ima sistem prostostnih stopenj. Takšen primer je bil podan že v primeru 4.5. Poglejmo primer klasičnega industrijskega robota s šestprostostnimi osmi. Če želimo določiti položaj in orientacijo vrha robota, potrebujemo natanko 6 podatkov oziroma zasukov posameznih motorjev. Tako hitro ugotovimo, da je industrijski robot holonomni sistem. Holonomni sistemi imajo med posameznimi elementi sistema holonomne vezi. Te se nanašajo na omejitve konfiguracije oziroma konstrukcije, torej gre za geometrijske omejitve. Z drugimi besedami, omejujejo gibanje sistema tako, da ustrezno zmanjšajo prostostno stopnjo sistema. Da je vez holonomna, mora biti izražena s funkcijo, ki vsebuje posplošene koordinate in čas.

$$\mathbf{C}(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = 0 \quad (4.15)$$

Enačba (4.15) tako predstavlja enačbo holonomnih kinematičnih omejitev posameznih vezi, kjer je  $\mathbf{C}$  matrika neodvisnih omejitvenih enačb posameznega sklepa sistema, ki je odvisna od posplošenih koordinat in časa.

Prav tako so holonomne vezi lahko časovno odvisne ali pa časovno neodvisne. Časovno odvisnim vezem pravimo *rheonomne*, časovno neodvisnim pa *skleronomne* vezi. Poglejmo primer.

**Primer 4.6:** Zapišite enačbo vezne točke  $V_{12}$  v globalnem koordinatnem sistemu in določite, ali je vez rheonomna ali skleronomna.



Slika 4.11: Primer holonomne vezi

Za zapis enačbe vezne točke  $V_{12}$  moramo zapisati položaj točk  $T_1$  in  $T_2$  glede na globalni koordinatni sistem. Za to potrebujemo dva krajevna vektorja. Enega, ki gre skozi težišče prvega elementa do vezne točke, in drugega, ki gre skozi težišče drugega elementa do vezne točke. Ta dva krajevna vektorja morata biti med sabo enaka, saj opisujeta isto točko.

$$\begin{aligned} x_1 + a \cos \theta_1 - (x_2 - b \cos \theta_2) &= 0 \\ y_1 + a \sin \theta_1 - (y_2 - b \sin \theta_2) &= 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Kot lahko vidimo iz zgornje enačbe, gre za geometrijsko omejitveno vez, kjer čas ne nastopa eksplicitno, spremenljivki za oba kota pa sta še vedno časovno odvisni. Torej gre za holonomno vez, ki je hkrati tudi skleronomna. Če bi v vezno točko  $V_{12}$  vgradili motor, bi se zapis za zasuk telesa dva spremenil. Ta takrat postane eksplicitno časovno odvisen  $\theta_2 = c \cdot t$ , kjer je  $c$  konstanta zasuka,  $t$  pa čas. To pomeni, da je to zdaj holonomna vez, ki je hkrati tudi rheonomna, torej eksplicitno časovno odvisna. Enačba (4.16) se tako preoblikuje v enačbo (4.17).

$$\begin{aligned}x_1 + a \cos \theta_1 - (x_2 - b \cos(c \cdot t)) &= 0 \\y_1 + a \sin \theta_1 - (y_2 - b \sin(c \cdot t)) &= 0\end{aligned}\quad (4.17)$$

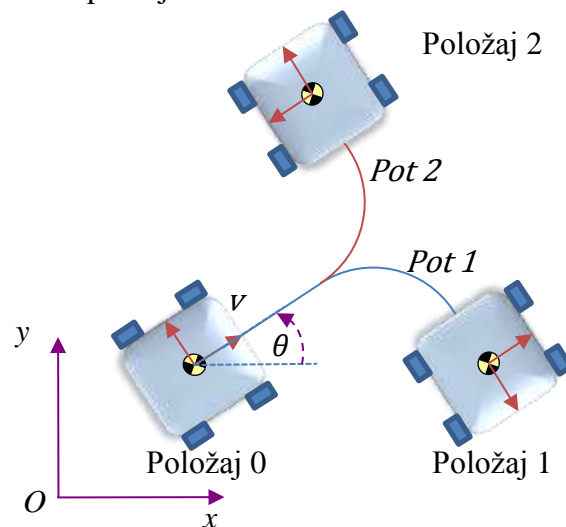
## 4.6 Neholonomni sistemi in neholonomne vezi

Neholonomni sistemi so dinamični sistemi, ki za opis sistema potrebujejo več podatkov, kot imajo število prostostnih stopenj. Prav tako imajo neholonomni sistemi neholonomne vezi. To so vezi, kjer je poleg posplošenih koordinat in časa treba definirati tudi hitrosti.

$$\mathcal{C}(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) = \mathcal{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0 \quad (4.18)$$

Zgornja enačba tako predstavlja enačbo neholonomnih kinematičnih omejitev posameznih vezi, kjer je  $\mathcal{C}$  matrika neodvisnih omejitvenih enačb posameznega sklepa sistema, ki je odvisna od posplošenih koordinat, posplošenih hitrosti in časa. Poglejmo primer.

**Primer 4.7:** Avtonomno vozilo ima v ravnini tri prostostne stopnje,  $x, y, \theta$ . Vozilo se lahko pomika naprej in nazaj ter krmili s pomočjo sprednjih koles. Tako imamo samo dve krmilni veličini, s katerima lahko pridemo s položaja 0 v položaj 1 ali 2, kot to prikazuje slika 4.12. To sta hitrost vozila in zasuk sprednjih koles.



**Slika 4.12:** Primer neholonomnega sistema

Za opis takšnega sistema potrebujemo začetne podatke o položaju sistema, torej posplošene koordinate, v katere so vključeni zasuk  $\theta$ , hitrost sistema in čas. Samo tako lahko iz položaja 0 pridemo v položaj 1 ali 2. Ugotovimo lahko, da položaja 1 in 2 nista odvisna samo od položaja vozila, temveč tudi od poti, po kateri je to vozilo prišlo v določen položaj.

V nadaljevanju se bomo posvečali samo holonomnim sistemom.

## 4.7 Virtualno delo

V nadaljevanju bo predstavljen način virtualnega dela. Virtualno delo omogoča izpeljavo gibalnih enačb brez omejitvenih oziroma reakcijskih sil v podporah. Na podlagi skalarne veličine dela tako pridobimo gibalne enačbe. Dobimo minimalno število gibalnih enačb, ki je enako številu prostostnih stopenj dinamičnega sistema. Da lahko zapišemo virtualno delo, moramo najprej definirati virtualni pomik in posplošene sile.

### 4.7.1 Virtualni pomik

Virtualni pomik je definiran kot infinitezimalno (neskončno) majhen pomik, ki je skladen s kinematičnimi omejitvami sistema. Virtualni pomiki so imaginarni/navidezni, saj naj bi se zgodili, ko čas miruje. Virtualni pomik lahko obravnavamo kot parcialni odvod, kjer je čas fiksen, se ne spreminja. Vektor položaja zapišemo kot  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q}, t)$ , kjer je  $\mathbf{q}$  vektor posplošenih koordinat. Če želimo pridobiti virtualni pomik, je treba vektor položaja odvajati. Tega odvajamo kot totalni odvod in dobimo enačbo (4.19).

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \quad (4.19)$$

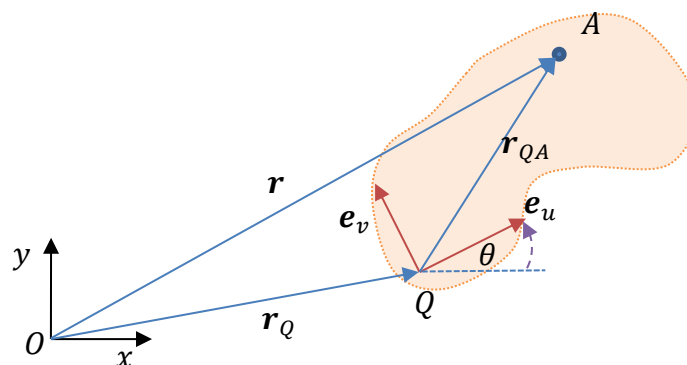
Enačbo pomnožimo na obeh straneh z  $dt$ .

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} dt \quad (4.20)$$

Pri virtualnem pomiku  $\mathbf{r}$  ni eksplicitna funkcija časa, zato zadnji člen odpade. Prav tako za zapis virtualnega pomika uporabimo grško črko  $\delta$ . Tako se enačba (4.20) pretvori v enačbo (4.21), kar predstavlja definicijo virtualnega pomika.

$$\delta \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} \quad (4.21)$$

**Primer 4.8:** Izračunajte virtualni pomik točke A prostega telesa v ravnini, katerega položaj je zapisan z uporabo gibljive baze, kot kaže slika 4.13. Vemo, da je  $\mathbf{e}_u = [\cos \theta \ \sin \theta]^T$  in  $\mathbf{e}_v = [-\sin \theta \ \cos \theta]^T$ . Tako zapišemo začetni položaj točke A glede na globalni koordinatni sistem  $O$ .



**Slika 4.13:** Za izračun virtualnega pomika uporabimo krajevni vektor točke A prostega telesa v ravnini.



$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_Q + \mathbf{r}_{QA} = \mathbf{r}_Q + u\mathbf{e}_u + v\mathbf{e}_v \quad (4.22)$$

Od začetnega položaja zdaj poiščemo virtualni pomik s parcialnim odvodom, kjer odvod zapišemo z grško črko  $\delta$ .

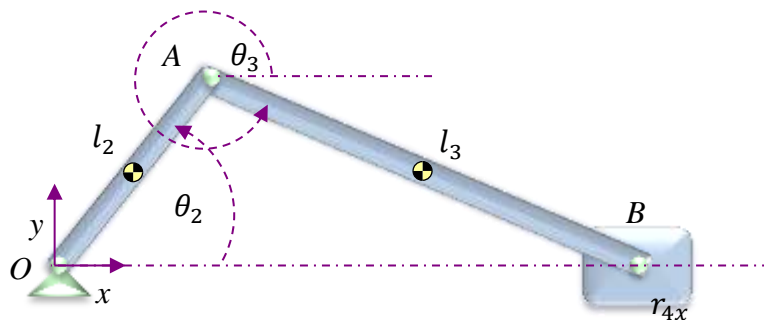
$$\begin{aligned} \delta\mathbf{r} &= \delta\mathbf{r}_Q + \delta\mathbf{r}_{QA} = \delta\mathbf{r}_Q + \delta(u\mathbf{e}_u) + \delta(v\mathbf{e}_v) \\ \delta\mathbf{r} &= \delta\mathbf{r}_Q + u\delta \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} + v\delta \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \\ \delta\mathbf{r} &= \delta\mathbf{r}_Q + u \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \delta\theta - v \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \delta\theta \\ \delta\mathbf{r} &= \delta\mathbf{r}_Q + \begin{bmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \delta\theta \end{aligned} \quad (4.23)$$

## 4.7.2 Odvisne in neodvisne koordinate

V sistemih imamo vedno **odvisne** in **neodvisne** koordinate. Poglejmo si primer.

**Primer 4.9:** Za batni mehanizem izpeljite virtualne zasuke in pomike za kot  $\theta_3$  in  $r_{4x}$  glede na zasuk  $\theta_2$ .

Batni mehanizem ima samo eno prostostno stopnjo. Tako ima samo eno neodvisno koordinatno, koordinato  $\theta_2$ . Koordinati  $\theta_3$  in  $r_{4x}$  pa sta odvisni koordinati.



Slika 4.14: Virtualni pomik za batni mehanizem

Za opis položaja točke  $B$  bomo sešteli vektorje od izhodiščne točke prek točke  $A$  do točke  $B$ . Po tem poiščemo virtualni pomik s pomočjo parcialnega odvoda.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_B &= \mathbf{r}_{OA} + \mathbf{r}_{AB} \\ \begin{bmatrix} r_{4x} \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_2 \cos\theta_2 \\ l_2 \sin\theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_3 \cos\theta_3 \\ l_3 \sin\theta_3 \end{bmatrix} / \delta \\ \begin{bmatrix} \delta r_{4x} \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -l_2 \sin\theta_2 \delta\theta_2 \\ l_2 \cos\theta_2 \delta\theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_3 \sin\theta_3 \delta\theta_3 \\ l_3 \cos\theta_3 \delta\theta_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Iz zgornje enačbe ločimo odvisne in neodvisne koordinate tako, da dobimo na levi strani virtualni zasuk in pomik  $\delta\theta_3$  in  $\delta r_{4x}$ , na desni pa virtualni zasuk  $\delta\theta_2$ .

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -l_3 \sin\theta_3 \delta\theta_3 \\ -l_3 \cos\theta_3 \delta\theta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\delta r_{4x} \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_2 \sin\theta_2 \delta\theta_2 \\ l_2 \cos\theta_2 \delta\theta_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -l_3 \sin\theta_3 & -1 \\ -l_3 \cos\theta_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\theta_3 \\ \delta r_{4x} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_2 \sin\theta_2 \\ l_2 \cos\theta_2 \end{bmatrix} \delta\theta_2 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Poiščemo inverzno matriko  $2 \times 2$  na levi strani in jo pomnožimo na obeh straneh zgornje enačbe.

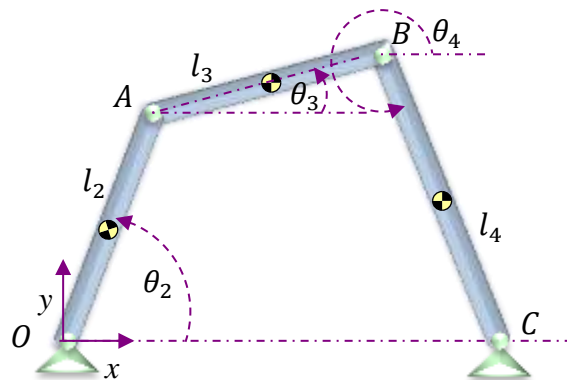
S tem dobimo končno rešitev.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta\theta_3 \\ \delta r_{4x} \end{bmatrix} &= \frac{-1}{l_3 \cos \theta_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ l_3 \cos \theta_3 & -l_3 \sin \theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_2 \sin \theta_2 \\ l_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \delta\theta_2 \\ \begin{bmatrix} \delta\theta_3 \\ \delta r_{4x} \end{bmatrix} &= \frac{-1}{l_3 \cos \theta_3} \begin{bmatrix} -1 & l_2 \cos \theta_2 \\ l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \end{bmatrix} \delta\theta_2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Zgornja enačba tako opisuje, kolikšna je sprememba virtualnega zasuka in pomika  $\delta\theta_3$  in  $\delta r_{4x}$ , če se zgodi virtualni zasuk  $\delta\theta_2$ .

**Primer 4.10:** Za štirizgibni mehanizem zapišite virtualna zasuka  $\delta\theta_3$  in  $\delta\theta_4$  glede na virtualni zasuk  $\delta\theta_2$ .

Štirizgibni mehanizem ima samo eno prostostno stopnjo. Neodvisna koordinata je tako  $\theta_2$ , odvisni koordinati pa sta  $\theta_3$  in  $\theta_4$ .



**Slika 4.15:** Virtualni zasuki štirizgibnega mehanizma

Naredimo enako kot v prejšnjem primeru. Za opis gibanja točke C uporabimo vektorski pristop. Seštejemo vse vektorje od izhodišča O skozi točki A in B do točke C.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_C &= \mathbf{r}_{OA} + \mathbf{r}_{AB} + \mathbf{r}_{BC} \\ \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_2 \cos \theta_2 \\ l_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_3 \cos \theta_3 \\ l_3 \sin \theta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_4 \cos \theta_4 \\ l_4 \sin \theta_4 \end{bmatrix} / \delta \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_2 \delta\theta_2 - l_3 \sin \theta_3 \delta\theta_3 - l_4 \sin \theta_4 \delta\theta_4 \\ l_2 \cos \theta_2 \delta\theta_2 + l_3 \cos \theta_3 \delta\theta_3 + l_4 \cos \theta_4 \delta\theta_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Iz zgornje enačbe izrazimo na levi strani virtualna zasuka  $\delta\theta_3$  in  $\delta\theta_4$  na desni pa virtualni zasuk  $\delta\theta_2$ .

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} l_3 \sin \theta_3 \delta\theta_3 + l_4 \sin \theta_4 \delta\theta_4 \\ l_3 \cos \theta_3 \delta\theta_3 + l_4 \cos \theta_4 \delta\theta_4 \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} l_2 \sin \theta_2 \delta\theta_2 \\ l_2 \cos \theta_2 \delta\theta_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} l_3 \sin \theta_3 & l_4 \sin \theta_4 \\ l_3 \cos \theta_3 & l_4 \cos \theta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\theta_3 \\ \delta\theta_4 \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} l_2 \sin \theta_2 \\ l_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \delta\theta_2 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Poiščemo inverzno matriko 2x2 na levi strani in jo pomnožimo na obeh straneh zgornje enačbe. S tem dobimo končno rešitev.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta\theta_3 \\ \delta\theta_4 \end{bmatrix} &= \frac{1}{l_3 l_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \begin{bmatrix} l_4 \cos \theta_4 & -l_4 \sin \theta_4 \\ -l_3 \cos \theta_3 & l_3 \sin \theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_2 \\ -l_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \delta\theta_2 \\ \begin{bmatrix} \delta\theta_3 \\ \delta\theta_4 \end{bmatrix} &= \frac{1}{l_3 l_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \begin{bmatrix} l_2 l_4 \sin(\theta_4 - \theta_2) \\ l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \end{bmatrix} \delta\theta_2 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Zgornja enačba tako opisuje, kolikšna je sprememba virtualnega zasuka  $\delta\theta_3$  in  $\delta\theta_4$ , če se zgodi

virtualni zasuk  $\delta\theta_2$ .

## 4.8 Virtualno delo in posplošene sile

Koncept virtualnega dela je v analitični mehaniki pomembno orodje. Sil in momentov ne moremo med sabo seštevati, saj predstavljajo različne fizikalne veličine. Če pa sile in momente pretvorimo v delo, v tem konkretnem primeru v virtualno delo, pa lahko njihovo opravljeno virtualno delo preprosto med sabo seštejemo. Virtualno delo zapišemo kot  $\delta W$ .

**Virtualno delo sile** je definirano kot skalarni produkt vektorja sile in virtualnega pomika prijemališča sile.

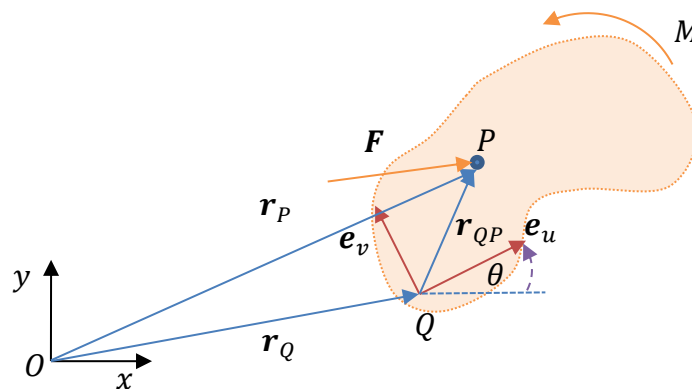
**Virtualno delo momenta** je definirano kot skalarni produkt momenta in virtualnega zasuka telesa.

Tako lahko virtualno delo sil in momentov zapišemo, kot je prikazano spodaj, kjer je  $\mathbf{F}$  vektor rezultante zunanjih sil in  $M$  vsota vseh zunanjih momentov.

$$\delta W = \mathbf{F}^T \delta \mathbf{r} + M \delta \theta \quad (4.30)$$

### 4.8.1 Posplošene sile

Z vpeljavo virtualnega dela dobimo izraz posplošene sile. Posplošene sile so izraz, ki zajema vse zunanje sile in momente, zapisane v posplošenih koordinatah. Na spodnji sliki imamo prikazan vpliv zunanje sile in zunanjega momenta na prosto gibajoče se telo v ravnini.



**Slika 4.16:** Virtualno delo zunanje sile in zunanjega momenta na prosto gibajoče se telo

Zapišimo virtualno delo zunanjih sil in zunanjih momentov.

$$\delta W = \mathbf{F}^T \delta \mathbf{r}_P + M \delta \theta \quad (4.31)$$

Izrazimo virtualni pomik točke  $P$ , na katero deluje sila  $\mathbf{F}$  s pomočjo gibljive baze.

$$\delta \mathbf{r}_P = \delta \mathbf{r}_Q + \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \delta \theta \quad (4.32)$$

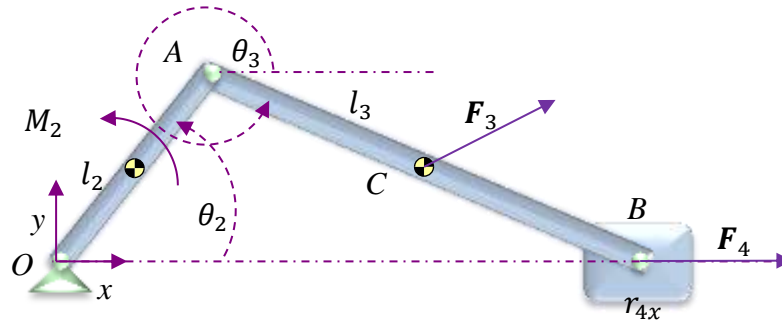
Zgornji zapis tako vstavimo v enačbo (4.31) in dobimo spodnji zapis.

$$\begin{aligned}\delta W &= \mathbf{F}^T \left( \delta \mathbf{r}_Q + \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \delta \theta \right) + M \delta \theta \\ \delta W &= \mathbf{F}^T \delta \mathbf{r}_Q + \left( \mathbf{F}^T \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + M \right) \delta \theta \\ \delta W &= \mathbf{Q}_R^T \delta \mathbf{r}_Q + Q_\theta \delta \theta\end{aligned}\quad (4.33)$$

V zgornji enačbi  $\mathbf{Q}_R$  predstavlja vektor posplošenih zunanjih sil,  $Q_\theta$  pa zunanje vplive, ki so povezani z rotacijo telesa. Ker po navadi zapišemo položaje vektorjev zunanjih sil v posplošenih koordinatah, lahko za prosto telo izberemo koordinate  $q_1 = x, q_2 = y$  in  $q_3 = \theta$ . Tako dobimo naslednji izraz, kjer je  $\mathbf{Q}$  vektor vseh posplošenih zunanjih sil vključno z zunanji momenti,  $\mathbf{q}$  pa je vektor vseh posplošenih koordinat.

$$\begin{aligned}\delta W &= Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + Q_3 \delta q_3 \\ \delta W &= \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q}\end{aligned}\quad (4.34)$$

**Primer 4.11:** Zapišite virtualno delo zunanjih sil in momentov, ki delujejo na batni mehanizem glede na virtualni zasuk  $\delta \theta_2$ .



**Slika 4.17:** Virtualno delo zunanjih sil in momentov na batnem mehanizmu

Najprej zapišemo virtualno delo posameznih zunanjih vplivov za posamezno telo in jih med sabo seštejemo.

$$\delta W = M_2 \delta \theta_2 + \mathbf{F}_3^T \delta \mathbf{r}_C + F_4 \delta r_{4x}\quad (4.35)$$

Za tem potrebujemo virtualni pomik za vektor  $\mathbf{r}_C$ .

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_C &= \begin{bmatrix} l_2 \cos \theta_2 + (l_3/2) \cos \theta_3 \\ l_2 \sin \theta_2 + (l_3/2) \sin \theta_3 \end{bmatrix} \\ \delta \mathbf{r}_C &= \begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2 - (l_3/2) \sin \theta_3 \delta \theta_3 \\ l_2 \cos \theta_2 \delta \theta_2 + (l_3/2) \cos \theta_3 \delta \theta_3 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4.36)$$

Virtualni pomik vstavimo v enačbo (4.35).

$$\begin{aligned}\delta W &= M_2 \delta \theta_2 - F_{3x} l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2 - F_{3x} (l_3/2) \sin \theta_3 \delta \theta_3 + F_{3y} l_2 \cos \theta_2 \delta \theta_2 \\ &+ F_{3y} (l_3/2) \cos \theta_3 \delta \theta_3 + F_4 \delta r_{4x}\end{aligned}\quad (4.37)$$

Pridobljeno enačbo zapišemo v matrični obliki, iz katere izpostavimo  $\delta \theta_2, \delta \theta_3$  in  $\delta r_{4x}$ .

$$\delta W = \begin{bmatrix} M_2 - F_{3x} l_2 \sin \theta_2 + F_{3y} l_2 \cos \theta_2 \\ -F_{3x} (l_3/2) \sin \theta_3 + F_{3y} (l_3/2) \cos \theta_3 \\ F_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \delta \theta_2 \\ \delta \theta_3 \\ \delta r_{4x} \end{bmatrix}\quad (4.38)$$

Trenutni zapis virtualnega dela še ni ustrezen, saj še vsebuje odvisne koordinate. Če želimo zapisati virtualno delo zunanjih vplivov glede na neodvisno koordinato  $\delta \theta_2$ , moramo  $\delta \theta_3$  in  $\delta r_{4x}$  zapisati v odvisnosti od  $\delta \theta_2$ . To smo že storili v primeru 4.9 in uporabimo tudi tu. Tako

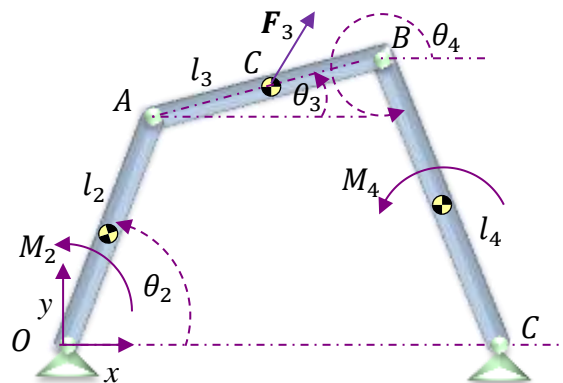
dobimo končen izraz za virtualno delo, izraženo z virtualnim pomikom neodvisne koordinate  $\delta\theta_2$ .

$$\delta W = \begin{bmatrix} M_2 - F_{3x}l_2 \sin \theta_2 + F_{3y}l_2 \cos \theta_2 \\ -F_{3x}(l_3/2) \sin \theta_3 + F_{3y}(l_3/2) \cos \theta_3 \\ F_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ -l_2 \cos \theta_2 / l_3 \cos \theta_3 \\ -l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) / l_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \delta\theta_2 \quad (4.39)$$

Skalarni produkt obeh matrik lahko zapišemo splošno, kjer  $Q$  predstavlja vse posplošene zunanje sile, ki vključujejo tudi moment.

$$\delta W = Q\delta\theta_2 \quad (4.40)$$

**Primer 4.12:** Zapišite virtualno delo zunanjih sil in momentov, ki delujejo na štirizgibni mehanizem glede na virtualni zasuk  $\delta\theta_2$ .



**Slika 4.18:** Virtualno delo zunanjih sil in momentov na štirizgibnem mehanizmu

Najprej zapišemo virtualno delo posameznih zunanjih vplivov za posamezno telo in jih med sabo seštejemo.

$$\delta W = M_2\delta\theta_2 + \mathbf{F}_3^T \delta\mathbf{r}_C + M_4\delta\theta_4 \quad (4.41)$$

Za tem potrebujemo virtualni pomik za vektor  $\mathbf{r}_C$ , ki pa je v konkretnem primeru kar enak virtualnemu pomiku v prejšnjem primeru.

$$\delta\mathbf{r}_C = \begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_2 \delta\theta_2 - (l_3/2) \sin \theta_3 \delta\theta_3 \\ l_2 \cos \theta_2 \delta\theta_2 + (l_3/2) \cos \theta_3 \delta\theta_3 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Virtualni pomik  $\delta\mathbf{r}_C$  vstavimo v enačbo (4.41).

$$\delta W = M_2\delta\theta_2 - F_{3x}l_2 \sin \theta_2 \delta\theta_2 - F_{3x}(l_3/2) \sin \theta_3 \delta\theta_3 + F_{3y}l_2 \cos \theta_2 \delta\theta_2 + F_{3y}(l_3/2) \cos \theta_3 \delta\theta_3 + M_4\delta\theta_4 \quad (4.43)$$

Trenutni zapis virtualnega dela še ni ustrezen, saj vsebuje odvisne koordinate. Če želimo zapisati virtualno delo zunanjih vplivov glede na neodvisno koordinato  $\delta\theta_2$ , moramo  $\delta\theta_3$  in  $\delta\theta_4$  zapisati v odvisnosti od  $\delta\theta_2$ . To smo že storili v primeru 4.10, kar uporabimo tudi v tem primeru. Tako dobimo končen izraz za virtualno delo, izraženo z virtualnim pomikom neodvisne koordinate  $\delta\theta_2$ .

$$\begin{aligned}
\delta W = & M_2 \delta \theta_2 - F_{3x} l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2 - F_{3x} (l_3/2) \sin \theta_3 \frac{l_2 \sin(\theta_4 - \theta_2)}{l_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \delta \theta_2 \\
& + F_{3y} l_2 \cos \theta_2 \delta \theta_2 + F_{3y} (l_3/2) \cos \theta_3 \frac{l_2 \sin(\theta_4 - \theta_2)}{l_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \delta \theta_2 \\
& + M_4 \frac{l_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)}{l_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \delta \theta_2
\end{aligned} \quad (4.44)$$

Virtualni pomik  $\delta \theta_2$  lahko izrazimo in tako pridemo do posplošenih zunanjih sil  $Q$ .

$$\begin{aligned}
\delta W = & [M_2 - F_{3x} l_2 \sin \theta_2 - F_{3x} (l_3/2) \sin \theta_3 \frac{l_2 \sin(\theta_4 - \theta_2)}{l_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)} + F_{3y} l_2 \cos \theta_2 \\
& + F_{3y} (l_3/2) \cos \theta_3 \frac{l_2 \sin(\theta_4 - \theta_2)}{l_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)} + M_4 \frac{l_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)}{l_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)}] \delta \theta_2 \\
\delta W = & Q \delta \theta_2
\end{aligned} \quad (4.45)$$

## 4.8.2 Virtualno delo konservativnih in nekonservativnih sil

Določene sile, ki se pojavljajo v dinamičnih sistemih, se ohranjajo, določene pa ne. Silam, ki se ohranjajo, pravimo konservativne sile. Silam, ki se ne ohranjajo, pa pravimo neconservativne sile. Med konservativne sile spadata gravitacijska sila in sila, ki se pojavi v vzmeti. Obe sili se ohranjata. Gravitacijska sila je konstanta po celotnem opazovanem prostoru, v katerem se giblje dinamični sistem. Sila v vzmeti pa se ohranja tako dolgo, dokler se vzmet ne povrne nazaj v začetno ravnovesno stanje. Virtualno delo gravitacijske sile prikazuje spodnja enačba, kjer je predznak negativen, saj gravitacija deluje v obratni smeri od predvidene koordinate  $y$ .

$$\delta W = -mg \delta y \quad (4.46)$$

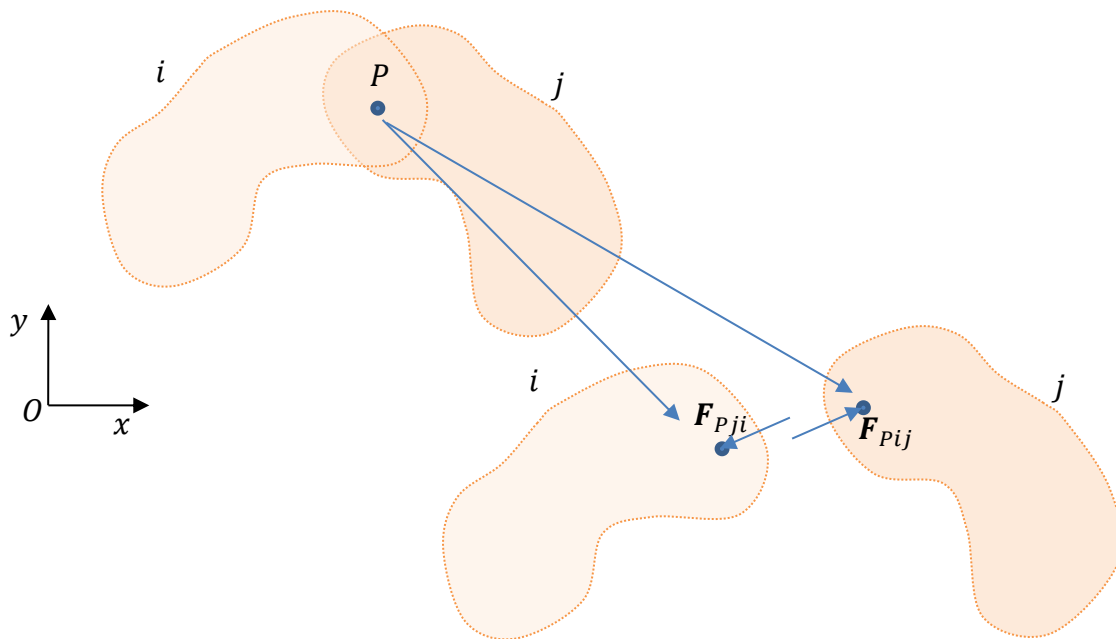
Virtualno delo sile v vzmeti prikazuje spodnja enačba. Virtualno delo v sili pišemo kot pozitivno. Predznak vzmeti definira raztezek, če je raztezek pozitiven, bo virtualno delo pozitivno in obratno.

$$\delta W = kx \delta x \quad (4.47)$$

Virtualno delo neconservativnih sil smo že zapisali v prejšnjih primerih, vendar jih nismo poimenovali tako. Neconservativne sile so vse zunanje sile, zunanji momenti in momenti, generirani z motorji, ki delujejo na opazovani dinamični sistem. Virtualno delo neconservativnih zunanjih sil zapišemo, kot prikazuje enačba (4.31).

## 4.8.3 Virtualno delo reakcijskih sil v podporah

Reakcijske sile, ki se pojavljajo v podporah, sledijo 3. Newtonovemu zakonu akcije in reakcije. Zato je virtualno delo reakcijskih sil v podporah vedno enako nič. Poglejmo primer rotacijskega sklepa.



**Slika 4.19:** Virtualno delo reakcijskih sil v podporah

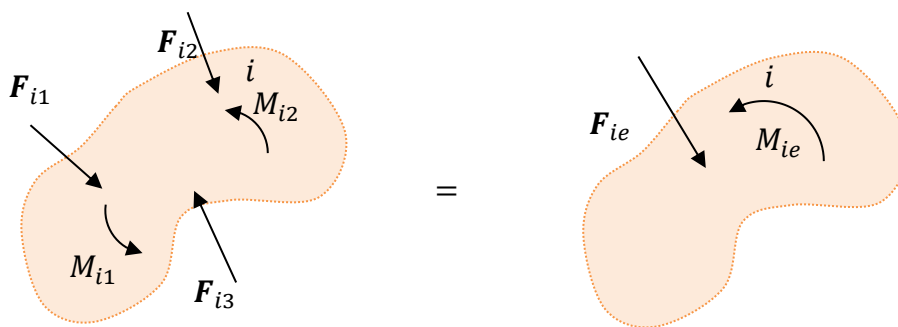
Kot lahko vidimo v točki  $P$ , na telo  $i$  deluje sila  $\mathbf{F}_{Pji}$ . Prav tako v isti točki  $P$  deluje na telo  $j$  sila  $\mathbf{F}_{Pij}$ , ki pa je nasprotno usmerjena kot sila na telo  $i$ . Virtualno delo posameznih reakcijskih sil posameznih teles tako znaša  $\delta W_i = -\mathbf{F}_{Pji}^T \delta \mathbf{r}_P$  in  $\delta W_j = \mathbf{F}_{Pij}^T \delta \mathbf{r}_P$ , pri čemer sta sili  $\mathbf{F}_{Pji} = \mathbf{F}_{Pij}$ . Če seštejemo virtualno delo posameznih teles, dobimo, da je virtualno delo enako nič.

$$\delta W = \delta W_i + \delta W_j = -\mathbf{F}_{Pji}^T \delta \mathbf{r}_P + \mathbf{F}_{Pij}^T \delta \mathbf{r}_P = 0 \quad (4.48)$$

## 4.9 Načelo uporabe virtualnega dela v statiki oziroma statičnem ravnotežju

### 4.9.1 Virtualno delo v statiki

V nadaljevanju si bomo pogledali načelo uporabe virtualnega dela v statiki oziroma statičnem ravnotežju. Velikokrat se zgodi, da imamo dinamični model, a nas zanima trenutni moment ali potrebna sila, ki vzdržuje dinamični sistem v statičnem ravnotežju. V takšnih primerih se načelo virtualnega dela izkaže za zelo uporabnega. Na telo  $i$  naj deluje sistem zunanjih sil in sistem zunanjih momentov, kot prikazuje slika 4.20. Ta sistem sil in momentov, ki prav tako vsebuje reakcijske sile, lahko zamenjamo z ekvivalentno silo (rezultanto) in ekvivalentnim momentom, ki predstavljata skupek vseh zunanjih sil in zunanjih momentov.



**Slika 4.20:** Načelo uporabe virtualnega dela pri statičnem ravnotežju

Virtualno delo vseh zunanjih sil lahko zapišemo kot:

$$\delta W_z = \mathbf{F}_{i1}^T \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_{i2}^T \delta \mathbf{r}_2 + \dots + \mathbf{F}_{in}^T \delta \mathbf{r}_n + (M_{i1} + M_{i2} + \dots + M_{im}) \delta \theta_i \quad (4.49)$$

V zgornji enačbi je  $\mathbf{r}_n$  vektor prijemališča posamezne zunanje sile. Virtualno delo zunanjih sil lahko zapišemo tudi kot vsoto.

$$\delta W_z = \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{ij}^T \delta \mathbf{r}_j + \left( \sum_{j=1}^m M_{ij} \right) \delta \theta_i \quad (4.50)$$

Zapišimo virtualno delo ekvivalentne zunanje sile in ekvivalentnega zunanjega momenta.

$$\delta W_e = \mathbf{F}_{ie}^T \delta \mathbf{r}_e + M_{ie} \delta \theta_i \quad (4.51)$$

Virtualno delo vseh zunanjih sil in momentov mora biti enako virtualnemu delu ekvivalentne zunanje sile in ekvivalentnemu zunanjemu momentu  $\delta W_z = \delta W_e$ .

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{ij}^T \delta \mathbf{r}_j + \left( \sum_{j=1}^m M_{ij} \right) \delta \theta_i = \mathbf{F}_{ie}^T \delta \mathbf{r}_e + M_{ie} \delta \theta_i \quad (4.52)$$

Če je telo v statičnem ravnotežju, velja naslednji pogoj.

$$\mathbf{F}_{ie}^T = 0, M_{ie} = 0 \quad (4.53)$$

Prav tako velja pogoj:

$$\mathbf{F}_{ie}^T \delta \mathbf{r}_e = 0, M_{ie} \delta \theta_i = 0 \quad (4.54)$$

Tukaj je treba poudariti, da virtualni pomik in virtualni zasuk ne moreta biti enaka nič, saj sta po definiciji oba možna in skladna z omejitvami. S tem pridemo do končne ugotovitve, da je virtualno delo zunanjih sil in momentov pri statičnem ravnotežju enako nič.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{ie}^T \delta \mathbf{r}_e + M_{ie} \delta \theta_i &= 0 \\ \delta W_z &= 0 \end{aligned} \quad (4.55)$$

## 4.9.2 Pridobivanje ravnotežnih enačb

Naj bo sistem  $n_b$  togih teles podvržen sistemu zunanjih sil in momentov ter zapisan tako, kot prikazuje enačba spodaj.

$$\mathbf{F} = [\mathbf{F}_1^T \mathbf{F}_2^T \dots \mathbf{F}_n^T]^T, \mathbf{M} = [M_1 M_2 \dots M_m]^T \quad (4.56)$$

Virtualno delo sistema zunanjih sil in momentov zapišemo kot:

$$\delta W_z = \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j^T \delta \mathbf{r}_j + \sum_{j=1}^m M_j \delta \theta_j \quad (4.57)$$



Pri tem lahko pomik  $\mathbf{r}_j$  in  $\theta_j$  zapišemo v odvisnosti od posplošenih neodvisnih koordinat  $\mathbf{q}_i$ .

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j(\mathbf{q}_i), \theta_j = \theta_j(\mathbf{q}_i) \quad (4.58)$$

Virtualni pomik in zasuk tako znašata:

$$\delta \mathbf{r}_j = \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{q}_i} \delta \mathbf{q}_i, \delta \theta_j = \frac{\partial \theta_j}{\partial \mathbf{q}_i} \delta \mathbf{q}_i, \quad (4.59)$$

Z upoštevanjem zgornje enačbe dobimo iz enačbe (4.57) zapis

$$\delta W_z = \left( \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j^T \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{q}_i} + \sum_{j=1}^m M_j \frac{\partial \theta_j}{\partial \mathbf{q}_i} \right) \delta \mathbf{q}_i. \quad (4.60)$$

Tega lahko okrajšano zapišemo kot

$$\delta W_z = \mathbf{Q}_z^T \delta \mathbf{q}_i, \quad (4.61)$$

kjer je  $\mathbf{Q}_z$  vektor posplošenih zunanjih sil. Če je sistem v statičnem ravnotežju, dobimo naslednjo enačbo.

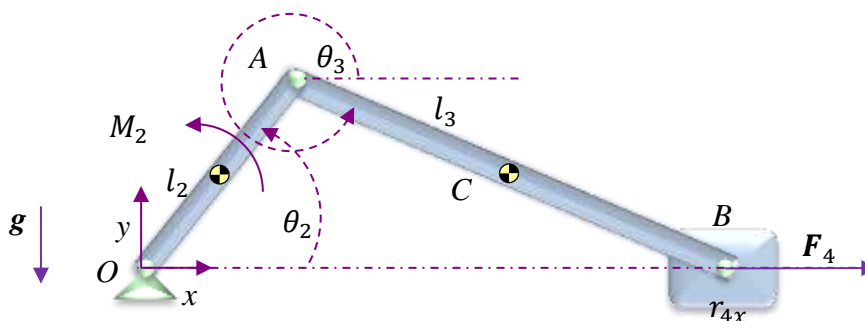
$$\delta W_z = \mathbf{Q}_z^T \delta \mathbf{q}_i = 0 \quad (4.62)$$

Kot smo že dejali, definicija virtualnega pomika ne dopušča, da je ta enak nič. Tako ostane edina možnost, da je  $\mathbf{Q}_z$  vektor posplošenih zunanjih sil enak nič.

$$\mathbf{Q}_z = 0 \quad (4.63)$$

V vektorju  $\mathbf{Q}_z$  je toliko ravnotežnih enačb, kolikor ima opazovani sistem prostostnih stopenj.

**Primer 4.13:** Za prikazan sistem na sliki 4.21 je treba s pomočjo virtualnega dela poiskati potreben moment  $M_2$ , da bo sistem v statičnem ravnotežju.



**Slika 4.21:** Batni mehanizem v statičnem ravnotežju

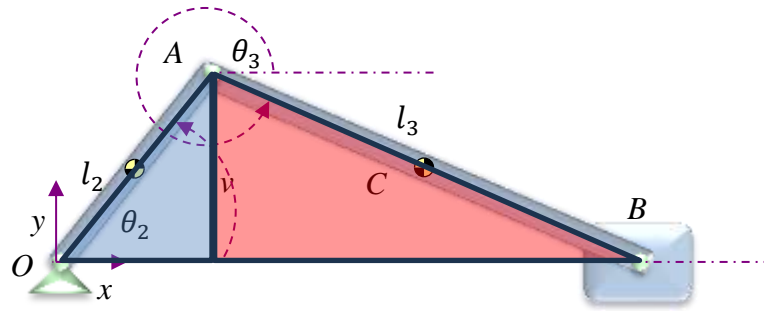
Treba je zapisati virtualno delo vseh zunanjih sil in momentov in virtualno delo gravitacije. Vse to mora biti enako nič. Samo takrat bo sistem v statičnem ravnotežju.

$$\delta W_z = M_2 \delta \theta_2 - m_2 g \delta r_{2y} - m_3 g \delta r_{3y} + F_4 \delta r_{4x} = 0 \quad (4.64)$$

V zgornji enačbi je treba zapisati vse virtualne pomike glede na neodvisno koordinato  $\theta_2$ .

$$\begin{aligned} r_{2y} &= (l_2/2) \sin \theta_2 \rightarrow \delta r_{2y} = (l_2/2) \cos \theta_2 \delta \theta_2 \\ r_{3y} &= l_2 \sin \theta_2 + (l_3/2) \sin \theta_3 \rightarrow \delta r_{3y} = l_2 \cos \theta_2 \delta \theta_2 + (l_3/2) \cos \theta_3 \delta \theta_3 \\ r_{4x} &= l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 \rightarrow \delta r_{4x} = -l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2 - l_3 \sin \theta_3 \delta \theta_3 \end{aligned} \quad (4.65)$$

Kot lahko opazimo, v zgornji enačbi še vedno nastopa odvisna koordinata  $\theta_3$ . To odpravimo s pomočjo geometrijske relacije dveh trikotnikov v batnem mehanizmu, kot prikazuje spodnja slika.



**Slika 4.22:** Geometrijska relacija dveh trikotnikov znotraj batnega mehanizma

Za skupno višino  $v$  obeh pravokotnih trikotnikov lahko zapišemo naslednjo relacijo.

$$l_2 \sin \theta_2 = -l_3 \sin \theta_3 \quad (4.66)$$

To spremenimo v virtualni pomik in izrazimo  $\delta\theta_3$ .

$$\delta\theta_3 = -\frac{l_2 \cos \theta_2 \delta\theta_2}{l_3 \cos \theta_3} \quad (4.67)$$

Zgornji izraz vstavimo v enačbo (4.65).

$$\begin{aligned} \delta r_{2y} &= \left(\frac{l_2}{2}\right) \cos \theta_2 \delta\theta_2 \\ \delta r_{3y} &= l_2 \cos \theta_2 \delta\theta_2 - \frac{l_2 \cos \theta_2}{2} \delta\theta_2 = \frac{l_2 \cos \theta_2}{2} \delta\theta_2 \\ \delta r_{4x} &= -l_2 \sin \theta_2 \delta\theta_2 + l_2 \cos \theta_2 \tan \theta_3 \delta\theta_2 \\ &= (-l_2 \sin \theta_2 + l_2 \cos \theta_2 \tan \theta_3) \delta\theta_2 \end{aligned} \quad (4.68)$$

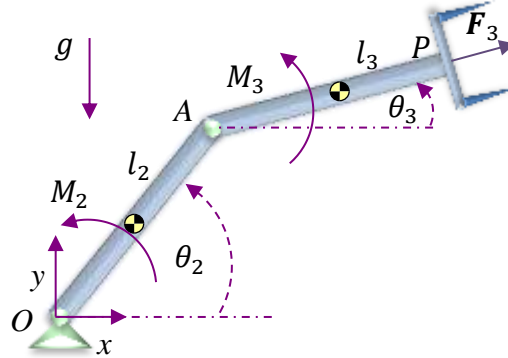
Zgornje izraze zdaj vstavimo v enačbo (4.64) in tako dobimo končno enačbo.

$$\begin{aligned} &\left[ M_2 - m_2 g (l_2/2) \cos \theta_2 - m_3 g \frac{l_2 \cos \theta_2}{2} \right. \\ &\quad \left. + F_4 (-l_2 \sin \theta_2 + l_2 \cos \theta_2 \tan \theta_3) \right] \delta\theta_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.69)$$

Končni izraz lahko zapišemo kot  $\delta W_z = Q_z \delta\theta_2 = 0$ , kjer je  $Q_z$  izraz posplošenih zunanjih sil. Ta izraz bo enak nič samo, kadar bo  $Q_z$  enak nič, saj virtualni zasuk ne more biti enak nič. Iz  $Q_z$  lahko zdaj izrazimo potreben moment na motorju, da bo batni mehanizem v statičnem ravnotežju.

$$M_2 = m_2 g (l_2/2) \cos \theta_2 + m_3 g \frac{l_2 \cos \theta_2}{2} - F_4 (-l_2 \sin \theta_2 + l_2 \cos \theta_2 \tan \theta_3) \quad (4.70)$$

**Primer 4.14:** Za dvoosni manipulator, prikazan na sliki 4.23, ki je v statičnem ravnotežju, poiščite potrebna momenta na motorju, ki vzdržujeta ravnotežje.



**Slika 4.23:** Dvoosni mehanizem v statičnem ravnotežju

Zapišimo virtualno delo sistema, ki zajema zunanje sile in momente ter vpliv gravitacije.

$$\delta W_z = M_2 \delta \theta_2 - m_2 g \delta r_{2y} + M_3 (\delta \theta_3 - \delta \theta_2) - m_3 g \delta r_{3y} + \mathbf{F}_3^T \delta \mathbf{r}_{P3} = 0 \quad (4.71)$$

V zgornji enačbi je treba zapisati vse virtualne pomike glede na neodvisni koordinati  $\theta_2$  in  $\theta_3$ .

$$\begin{aligned} r_{2y} &= (l_2/2) \sin \theta_2 \rightarrow \delta r_{2y} = (l_2/2) \cos \theta_2 \delta \theta_2 \\ r_{3y} &= l_2 \sin \theta_2 + (l_3/2) \sin \theta_3 \rightarrow \delta r_{3y} = l_2 \cos \theta_2 \delta \theta_2 + (l_3/2) \cos \theta_3 \delta \theta_3 \\ \mathbf{r}_{P3} &= \begin{bmatrix} l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 \\ l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 \end{bmatrix} \rightarrow \delta \mathbf{r}_{P3} = \begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2 - l_3 \sin \theta_3 \delta \theta_3 \\ l_2 \cos \theta_2 \delta \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 \delta \theta_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.72)$$

Pridobljene virtualne pomike vstavimo v enačbo (4.71).

$$\begin{aligned} \delta W_z &= M_2 \delta \theta_2 - m_2 g (l_2/2) \cos \theta_2 \delta \theta_2 + M_3 (\delta \theta_3 - \delta \theta_2) \\ &\quad - m_3 g (l_2 \cos \theta_2 \delta \theta_2 + (l_3/2) \cos \theta_3 \delta \theta_3) \\ &\quad + \mathbf{F}_3^T \begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2 - l_3 \sin \theta_3 \delta \theta_3 \\ l_2 \cos \theta_2 \delta \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 \delta \theta_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.73)$$

Iz zgornje enačbe izpostavimo vse izraze, ki so vezani na virtualni zasuk  $\delta \theta_2$  in  $\delta \theta_3$  ločeno in tako pridemo do končne enačbe.

$$\begin{aligned} \delta W_z &= [M_2 - M_3 - m_2 g (l_2/2) \cos \theta_2 - m_3 g l_2 \cos \theta_2 - F_{3x} l_2 \sin \theta_2 \\ &\quad + F_{3y} l_2 \cos \theta_2] \delta \theta_2 \\ &\quad + [M_3 - m_3 g (l_3/2) \cos \theta_3 - F_{3x} l_3 \sin \theta_3 + F_{3y} l_3 \cos \theta_3] \delta \theta_3 \end{aligned} \quad (4.74)$$

Ker gre za statično ravnotežje, morata biti izraza v oklepajih enaka nič, saj virtualna zasuka po definiciji ne moreta biti enaka nič. Iz tega dobimo izraz za potreben moment na posameznem motorju, da bo dvoosni manipulator v statičnem ravnotežju.

$$\begin{aligned} M_2 &= M_3 + m_2 g (l_2/2) \cos \theta_2 + m_3 g l_2 \cos \theta_2 + F_{3x} l_2 \sin \theta_2 - F_{3y} l_2 \cos \theta_2 \\ M_3 &= m_3 g (l_3/2) \cos \theta_3 + F_{3x} l_3 \sin \theta_3 - F_{3y} l_3 \cos \theta_3 \end{aligned} \quad (4.75)$$

## 4.10 Načelo uporabe virtualnega dela v dinamiki

### 4.10.1 Virtualno delo v dinamiki

Uporaba virtualnega dela v dinamiki temelji na D'Alembertovem načelu. Vpliv zunanjih sil in zunanjih momentov na sistem mora biti enak vztrajnostnim silam in vztrajnostnim momentom opazovanega sistema. To je osnova, s pomočjo katere izpeljemo uporabo načela virtualnega dela v dinamiki. D'Alembertovo načelo zapišemo, kot prikazujeta spodnji enačbi.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i &= 0 \\ M_i - J_i \ddot{\theta}_i &= 0 \end{aligned} \quad (4.76)$$

Če želimo seštevati sile in momente, jih moramo spremeniti v virtualno delo. To storimo tako, da zgornjo enačbo s silami pomnožimo z virtualnim pomikom težišča telesa, zgornjo enačbo z momentu pa pomnožimo z virtualnim zasukom telesa.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i &= 0 / \delta \mathbf{r}_i \\ M_i - J_i \ddot{\theta}_i &= 0 / \delta \theta_i \end{aligned} \quad (4.77)$$

S tem spremenimo sile in momente v virtualno delo in jih lahko med sabo preprosto seštejemo.

$$(\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i)^T \delta \mathbf{r}_i + (M_i - J_i \ddot{\theta}_i) \delta \theta_i = 0 \quad (4.78)$$

Virtualno delo razdelimo na delo, ki ga opravijo zunanje sile in zunanji momenti, ter na virtualno delo, ki ga opravijo vztrajnostne sile in vztrajnostni momenti.

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}_i^T \delta \mathbf{r}_i + M_i \delta \theta_i) - (m_i \mathbf{a}_i^T \delta \mathbf{r}_i + J_i \ddot{\theta}_i \delta \theta_i) &= 0 \\ \delta W_z &= \mathbf{F}_i^T \delta \mathbf{r}_i + M_i \delta \theta_i \\ \delta W_v &= m_i \mathbf{a}_i^T \delta \mathbf{r}_i + J_i \ddot{\theta}_i \delta \theta_i \\ \delta W_z - \delta W_v &= 0 \end{aligned} \quad (4.79)$$

Če imamo v sistemu  $n$  teles, zgornjo enačbo preuredimo.

$$\sum_{i=1}^n \delta W_{zi} - \sum_{i=1}^n \delta W_{vi} = 0 \quad (4.80)$$

Iz enačbe (4.80) ugotovimo, da je virtualno delo zunanjih sil, ki delujejo na sistem teles, enako virtualnemu delu vztrajnostnih sil obravnavanih teles.

### 4.10.2 Pridobivanje gibalnih oziroma dinamičnih enačb

Naj bo sistem  $n_b$  togih teles podvržen sistemu zunanjih sil in momentov zapisan tako, kot prikazuje enačba spodaj.

$$\mathbf{F} = [\mathbf{F}_1^T \mathbf{F}_2^T \dots \mathbf{F}_n^T]^T, \mathbf{M} = [M_1 M_2 \dots M_m]^T \quad (4.81)$$

Virtualno delo sistema zunanjih sil in momentov zapišemo kot:

$$\delta W_z = \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j^T \delta \mathbf{r}_j + \sum_{j=1}^m M_j \delta \theta_j \quad (4.82)$$

Na sistem  $n_b$  togih teles delujejo tudi vztrajnostne sile in vztrajnostni momenti, ki jih zapišemo z virtualnim delom, kot prikazuje enačba spodaj.

$$\delta W_v = \sum_j^{n_b} (m_j \mathbf{a}_j^T \delta \mathbf{r}_j + J_j \ddot{\theta}_j \delta \theta_j) \quad (4.83)$$

Pri tem lahko pomik  $\mathbf{r}_j$  in  $\theta_j$  zapišemo v odvisnosti od posplošenih neodvisnih koordinat  $\mathbf{q}_i$ .

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j(\mathbf{q}_i), \theta_j = \theta_j(\mathbf{q}_i) \quad (4.84)$$

Virtualni pomik in zasuk tako znašata:

$$\delta \mathbf{r}_j = \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{q}_i} \delta \mathbf{q}_i, \delta \theta_j = \frac{\partial \theta_j}{\partial \mathbf{q}_i} \delta \mathbf{q}_i, \quad (4.85)$$

Z upoštevanjem zgornje enačbe tako dobimo iz enačb (4.82) in (4.83) enačbo (4.86) za virtualno delo zunanjih sil in zunanjih momentov ter vztrajnostnih sil in vztrajnostnih momentov.

$$\begin{aligned} \delta W_z &= \left( \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j^T \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{q}_i} + \sum_{j=1}^m M_j \frac{\partial \theta_j}{\partial \mathbf{q}_i} \right) \delta \mathbf{q}_i \\ \delta W_v &= \sum_j^{n_b} \left( m_j \mathbf{a}_j^T \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial \mathbf{q}_i} + J_j \ddot{\theta}_j \frac{\partial \theta_j}{\partial \mathbf{q}_i} \right) \delta \mathbf{q}_i \end{aligned} \quad (4.86)$$

Izraza iz zgornje enačbe lahko krajše zapišemo s pomočjo vektorja posplošenih zunanjih sil  $\mathbf{Q}_z$  in vektorja posplošenih vztrajnostnih sil  $\mathbf{Q}_v$ .

$$\begin{aligned} \delta W_z &= \mathbf{Q}_z^T \delta \mathbf{q}_i \\ \delta W_v &= \mathbf{Q}_v^T \delta \mathbf{q}_i \end{aligned} \quad (4.87)$$

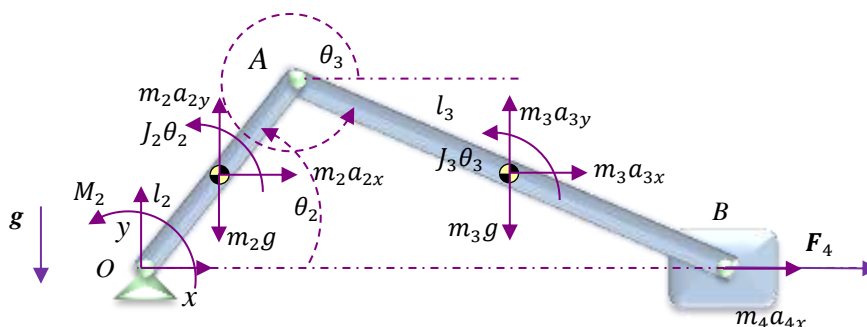
Ker mora biti virtualno delo zunanjih sil enako virtualnemu delu vztrajnostnih sil, lahko končen izraz zapišemo, kot prikazuje spodnja enačba.

$$\delta W_z - \delta W_v = (\mathbf{Q}_z^T - \mathbf{Q}_v^T) \delta \mathbf{q}_i = 0 \quad (4.88)$$

Virtualni pomik po definiciji ne more biti enak nič, zato sledi, da je vektor posplošenih zunanjih sil enak vektorju posplošenih vztrajnostnih sil.

$$\mathbf{Q}_z = \mathbf{Q}_v \quad (4.89)$$

**Primer 4.15:** Za batni mehanizem na sliki 4.24, na katerega delujeta zunanji moment in zunanja sila, pridobite gibalne enačbe s pomočjo virtualnega dela.



**Slika 4.24:** Uporaba virtualnega dela za pridobivanje gibalnih enačb batnega mehanizma

Batni mehanizem ima samo 1 prostostno stopnjo, kar pomeni, da pričakujemo samo eno gibalno enačbo, kjer je  $\theta_2$  neodvisna koordinata. Najprej je treba zapisati virtualno delo vseh zunanjih sil in zunanjih momentov glede na neodvisno koordinato  $\theta_2$ . To smo storili že v primeru 4.13. Enačbo (4.70) še enkrat uporabimo.

$$\delta W_z = \left[ M_2 - m_2 g (l_2/2) \cos \theta_2 - m_3 g \frac{l_2 \cos \theta_2}{2} + F_4 (-l_2 \sin \theta_2 + l_2 \cos \theta_2 \tan \theta_3) \right] \delta \theta_2 \quad (4.90)$$

V naslednjem koraku je treba zapisati virtualno delo vseh vztrajnostnih sil in vztrajnostnih momentov, ki delujejo na batni mehanizem.

$$\delta W_v = m_2 \mathbf{a}_2^T \delta \mathbf{r}_2 + J_2 \ddot{\theta}_2 + m_3 \mathbf{a}_3^T \delta \mathbf{r}_3 + J_3 \ddot{\theta}_3 + m_4 a_{4x} \delta r_{4x} \quad (4.91)$$

V zgornji enačbi virtualni pomik ni izražen glede na neodvisno koordinato. Virtualne pomike zapišemo glede na neodvisno koordinato.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2 &= \begin{bmatrix} \left(\frac{l_2}{2}\right) \cos \theta_2 \\ \left(\frac{l_2}{2}\right) \sin \theta_2 \end{bmatrix} \rightarrow \delta \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} -\left(\frac{l_2}{2}\right) \sin \theta_2 \delta \theta_2 \\ \left(\frac{l_2}{2}\right) \cos \theta_2 \delta \theta_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{r}_3 &= \begin{bmatrix} l_2 \cos \theta_2 + \left(\frac{l_3}{2}\right) \cos \theta_3 \\ l_2 \sin \theta_2 + \left(\frac{l_3}{2}\right) \sin \theta_3 \end{bmatrix} \rightarrow \\ \delta \mathbf{r}_3 &= \begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2 - (l_3/2) \sin \theta_3 \delta \theta_3 \\ l_2 \cos \theta_2 \delta \theta_2 + (l_3/2) \cos \theta_3 \delta \theta_3 \end{bmatrix} \\ r_{4x} &= l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 \rightarrow \delta r_{4x} = -l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2 - l_3 \sin \theta_3 \delta \theta_3 \end{aligned} \quad (4.92)$$

V zgornjih enačbah imamo še vedno virtualno delo zapisano v odvisnih koordinatah. Spomnimo se razmerja, ki smo ga že uporabili pri primeru 4.13. To uporabimo tudi v tem primeru in tako pridobimo naslednje enačbe za virtualne pomike.

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r}_2 &= \begin{bmatrix} -(l_2/2) \sin \theta_2 \delta \theta_2 \\ (l_2/2) \cos \theta_2 \delta \theta_2 \end{bmatrix} \\ \delta \mathbf{r}_3 &= \begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2 + (l_2/2) \cos \theta_2 \tan \theta_3 \delta \theta_2 \\ (l_2/2) \cos \theta_2 \delta \theta_2 \end{bmatrix} \\ \delta r_{4x} &= -l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2 + l_2 \cos \theta_2 \tan \theta_3 \delta \theta_2 \end{aligned} \quad (4.93)$$

Virtualne pomike, izražene iz zgornje enačbe, vstavimo v enačbo (4.91), kjer po preurejanju dobimo spodnjo enačbo za virtualno delo vseh vztrajnostnih sil in vztrajnostnih momentov.

$$\begin{aligned} \delta W_v &= [-m_2 a_{2x} (l_2/2) \sin \theta_2 + m_2 a_{2y} (l_2/2) \cos \theta_2 + J_2 \ddot{\theta}_2 \\ &+ m_3 a_{3x} (-l_2 \sin \theta_2 + (l_2/2) \cos \theta_2 \tan \theta_3) + m_3 a_{3y} (l_2/2) \cos \theta_2 \\ &- J_3 \ddot{\theta}_3 \frac{l_2 \cos \theta_2}{l_3 \cos \theta_3} + m_4 a_{4x} (-l_2 \sin \theta_2 + l_2 \cos \theta_2 \tan \theta_3)] \delta \theta_2 \end{aligned} \quad (4.94)$$

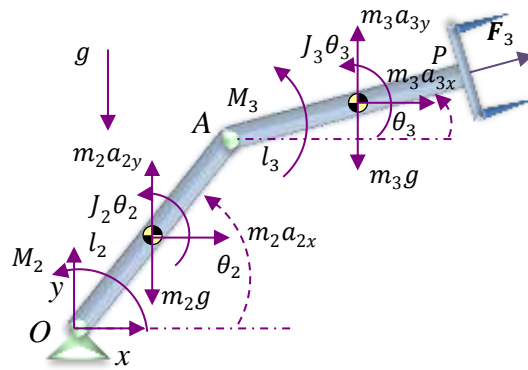
Izraz v oglatem oklepaju iz zgornje enačbe predstavlja posplošene vztrajnostne sile  $Q_v$ , ki se pojavljajo na batnem mehanizmu. Zdaj je virtualno delo zunanjih sil in zunanjih momentov v enačbi (4.90) ter virtualno delo vztrajnostnih sil in vztrajnostnih momentov v enačbi (4.94) zapisano glede na virtualno delo neodvisne koordinate  $\delta \theta_2$ . Tako lahko ti dve enačbi med sabo odštejemo in njuna razlika mora biti enaka nič.

$$\begin{aligned} \delta W_z - \delta W_v &= 0 \\ Q_z \delta \theta_2 - Q_v \delta \theta_2 &= (Q_z - Q_v) \delta \theta_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.95)$$

Ker virtualni pomik ne more biti enak nič, nas to pripelje do končne gibalne enačbe, ki opisuje gibanje batnega mehanizma, na katerega delujeta zunanji moment in sila.

$$\begin{aligned}
M_2 - m_2 g \left( \frac{l_2}{2} \right) \cos \theta_2 - m_3 g \frac{l_2 \cos \theta_2}{2} + F_4 (-l_2 \sin \theta_2 + l_2 \cos \theta_2 \tan \theta_3) \\
= -m_2 a_{2x} \left( \frac{l_2}{2} \right) \sin \theta_2 + m_2 a_{2y} \left( \frac{l_2}{2} \right) \cos \theta_2 + J_2 \ddot{\theta}_2 \\
+ m_3 a_{3x} \left( -l_2 \sin \theta_2 + \left( \frac{l_2}{2} \right) \cos \theta_2 \tan \theta_3 \right) \\
+ m_3 a_{3y} (l_2/2) \cos \theta_2 - J_3 \ddot{\theta}_3 \frac{l_2 \cos \theta_2}{l_3 \cos \theta_3} \\
+ m_4 a_{4x} (-l_2 \sin \theta_2 + l_2 \cos \theta_2 \tan \theta_3)
\end{aligned} \tag{4.96}$$

**Primer 4.16:** Za dinamični sistem dvoosnega manipulatorja na sliki 4.25, na katerega delujejo zunanja sila in zunanja momenta motorjev, je treba pridobiti gibalne enačbe s pomočjo virtualnega dela.



**Slika 4.25:** Uporaba virtualnega dela za pridobivanje gibalnih enačb dvoosnega manipulatorja

V primeru 4.14 smo že definirali virtualno delo vseh zunanjih sil in zunanjih momentov, vendar jih zdaj ne enačimo z nič, temveč z virtualnim delom vztrajnostnih sil in vztrajnostnih momentov. Prepišemo enačbo (4.74).

$$\begin{aligned}
\delta W_z = [M_2 - M_3 - m_2 g (l_2/2) \cos \theta_2 - m_3 g l_2 \cos \theta_2 - F_{3x} l_2 \sin \theta_2 \\
+ F_{3y} l_2 \cos \theta_2] \delta \theta_2 \\
+ [M_3 - m_3 g (l_3/2) \cos \theta_3 - F_{3x} l_3 \sin \theta_3 + F_{3y} l_3 \cos \theta_3] \delta \theta_3
\end{aligned} \tag{4.97}$$

Zgornjo enačbo lahko poenostavimo.

$$\delta W_z = Q_{z2} \delta \theta_2 + Q_{z3} \delta \theta_3 \tag{4.98}$$

Zapišimo virtualno delo vztrajnostnih sil in vztrajnostnih momentov dvoosnega manipulatorja.

$$\delta W_v = m_2 \mathbf{a}_2^T \delta \mathbf{r}_2 + J_2 \ddot{\theta}_2 + m_3 \mathbf{a}_3^T \delta \mathbf{r}_3 + J_3 \ddot{\theta}_3 \tag{4.99}$$

V zgornji enačbi virtualni pomik ni izražen glede na neodvisni koordinati. Virtualne pomike zapišemo glede na neodvisni koordinati  $\theta_2$  in  $\theta_3$ .

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_2 &= \begin{bmatrix} \left(\frac{l_2}{2}\right) \cos \theta_2 \\ \left(\frac{l_2}{2}\right) \sin \theta_2 \end{bmatrix} \rightarrow \delta \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} -\left(\frac{l_2}{2}\right) \sin \theta_2 \delta \theta_2 \\ \left(\frac{l_2}{2}\right) \cos \theta_2 \delta \theta_2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{r}_3 &= \begin{bmatrix} l_2 \cos \theta_2 + \left(\frac{l_3}{2}\right) \cos \theta_3 \\ l_2 \sin \theta_2 + \left(\frac{l_3}{2}\right) \sin \theta_3 \end{bmatrix} \rightarrow \\
\delta \mathbf{r}_3 &= \begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2 - (l_3/2) \sin \theta_3 \delta \theta_3 \\ l_2 \cos \theta_2 \delta \theta_2 + (l_3/2) \cos \theta_3 \delta \theta_3 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.100}$$

Virtualne pomike, izražene iz zgornje enačbe, vstavimo v enačbo (4.99), kjer po preurejanju dobimo spodnjo enačbo za virtualno delo vseh vztrajnostnih sil in vztrajnostnih momentov.

$$\begin{aligned}
\delta W_v &= \left[ -m_2 a_{2x} \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 + m_2 a_{2y} \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 + J_2 \ddot{\theta}_2 - m_3 a_{3x} l_2 \sin \theta_2 \right. \\
&\quad \left. + m_3 a_{3y} l_2 \cos \theta_2 \right] \delta \theta_2 \\
&\quad + \left[ -m_3 a_{3x} \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 + m_3 a_{3y} \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 + J_3 \ddot{\theta}_3 \right] \delta \theta_3
\end{aligned} \tag{4.101}$$

Če zgornjo enačbo poenostavimo, dobimo preprost izraz.

$$\delta W_v = Q_{v2} \delta \theta_2 + Q_{v3} \delta \theta_3 \tag{4.102}$$

Iz definicije sledi, da mora biti virtualno delo zunanjih sil enako virtualnemu delu vztrajnostnih sil. Tako lahko enačimo enačbi (4.97) in (4.102).

$$\begin{aligned}
\delta W_z &= \delta W_v \\
Q_{z2} \delta \theta_2 + Q_{z3} \delta \theta_3 &= Q_{v2} \delta \theta_2 + Q_{v3} \delta \theta_3 \\
(Q_{z2} - Q_{v2}) \delta \theta_2 + (Q_{z3} - Q_{v3}) \delta \theta_3 &= 0
\end{aligned} \tag{4.103}$$

Zopet velja, da virtualni pomiki ne morejo biti enaki nič. Tako je edina možnost, da sta izraza v oklepajih enaka nič oziroma enaka drug drugemu. Za neodvisno spremenljivko  $\theta_2$  tako dobimo naslednji izraz.

$$\begin{aligned}
M_2 - M_3 - m_2 g \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 - m_3 g l_2 \cos \theta_2 - F_{3x} l_2 \sin \theta_2 + F_{3y} l_2 \cos \theta_2 = \\
-m_2 a_{2x} \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 + m_2 a_{2y} \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 + J_2 \ddot{\theta}_2 - m_3 a_{3x} l_2 \sin \theta_2 \\
+ m_3 a_{3y} l_2 \cos \theta_2
\end{aligned} \tag{4.104}$$

Za neodvisno spremenljivko  $\theta_3$  pa dobimo izraz, zapisan spodaj.

$$\begin{aligned}
M_3 - m_3 g \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 - F_{3x} l_3 \sin \theta_3 + F_{3y} l_3 \cos \theta_3 = \\
-m_3 a_{3x} \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 + m_3 a_{3y} \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 + J_3 \ddot{\theta}_3
\end{aligned} \tag{4.105}$$



## 4.11 Izpeljava Lagrangeeve enačbe

### 4.11.1 Lagrangeeva enačba

Lagrangeeva enačba je še eno močno orodje za pridobivanje gibalnih enačb opazovanega dinamičnega sistema. Z uporabo kinetične in potencialne energije s pomočjo Lagrangeeve enačbe pridobimo enako število gibalnih enačb, kot ima sistem prostostnih stopenj. Izpeljavo Lagrangeeve enačbe izpeljemo s pomočjo uporabe virtualnega dela vztrajnostne sile na togem telesu.

$$\delta W_v = \int_{V_i} \rho_i \dot{\mathbf{r}}_i^T \delta \mathbf{r}_i dV_i \quad (4.106)$$

V zgornji enačbi  $\rho_i$  predstavlja gostoto togega telesa,  $\mathbf{r}_i$  predstavlja globalni položaj poljubne točke na togem telesu, zapisane z generaliziranimi koordinatami,  $dV_i$  pa volumen togega telesa. Izraz  $\int_{V_i} \rho_i dV_i = m_i$  predstavlja maso togega telesa. Globalni položaj poljubne točke  $\mathbf{r}_i$  je treba zapisati s pomočjo posplošenih koordinat in izraziti virtualni pomik poljubne točke glede na posplošene koordinate.

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q}, t) \rightarrow \delta \mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} \quad (4.107)$$

Virtualni pomik iz zgornje enačbe vstavimo v enačbo (4.106), iz katere lahko zapišemo izraz za posplošeno silo.

$$\begin{aligned} \delta W_v &= \int_{V_i} \rho_i \dot{\mathbf{r}}_i^T \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} dV_i \\ \delta W_v &= \mathbf{Q}_v^T \delta \mathbf{q} \\ \mathbf{Q}_v &= \int_{V_i} \rho_i \dot{\mathbf{r}}_i^T \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} dV_i = \int_{V_i} \rho_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \dot{\mathbf{r}}_i dV_i \end{aligned} \quad (4.108)$$

Za izpeljavo Lagrangeeve enačbe je treba zapisati hitrost točke  $\dot{\mathbf{r}}_i$ .

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (4.109)$$

Za izpeljavo Lagrangeeve enačbe potrebujemo tudi parcialni odvod od  $\dot{\mathbf{r}}_i$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (4.110)$$

Pravilo parcialnih odvodov omogoča, da v zadnjem členu zgornje enačbe vrstni red odvajanja parcialnih odvodov zamenjamo. Zadnji člen tako postane nič.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = 0 \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \right) \end{aligned} \quad (4.111)$$

To enačbo razpišemo in pogledamo vrednosti parcialnih odvodov.

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.112)$$

Prvi člen na desni strani zgornje enačbe je enak nič, saj vektor  $\mathbf{r}_i$  ne vsebuje hitrosti generalizirane koordinate  $\dot{\mathbf{q}}$ . Drugi člen na desni pa je kar enak parcialnemu odvodu vektorja  $\mathbf{r}_i$  po posplošeni koordinati  $\mathbf{q}$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} &= \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}}\end{aligned}\quad (4.113)$$

Tako pridemo do pomembne relacije parcialnih odvodov položaja in hitrosti po posplošenih koordinatah in posplošenih hitrostih.

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \quad (4.114)$$

Zgornjo enakost uporabimo v enačbi (4.108).

$$\mathbf{Q}_v = \int_{V_i} \rho_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \dot{\mathbf{r}}_i dV_i = \int_{V_i} \rho_i \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \dot{\mathbf{r}}_i dV_i \quad (4.115)$$

V pridobljeni enačbi še vedno nastopa pospešek. Tega se znebimo s pomočjo naslednjega odvoda.

$$\frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \dot{\mathbf{r}}_i \right] = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \dot{\mathbf{r}}_i + \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \ddot{\mathbf{r}}_i \quad (4.116)$$

Iz zgornje enačbe izrazimo zadnji člen na desni strani, saj ta predstavlja vrednost znotraj integrala v enačbi (4.115), kjer nastopa pospešek  $\ddot{\mathbf{r}}_i$ .

$$\left( \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \dot{\mathbf{r}}_i \right] - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \dot{\mathbf{r}}_i \quad (4.117)$$

V zgornji enačbi uporabimo relacijo, ki smo jo izpeljali v enačbi (4.114) za zadnji člen na desni strani.

$$\left( \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \dot{\mathbf{r}}_i \right] - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \dot{\mathbf{r}}_i \quad (4.118)$$

V drugem členu na desni strani zgornje enačbe lahko zamenjamo vrstni red odvajanja in v obeh členih na desni strani vstavimo vektor hitrosti  $\dot{\mathbf{r}}_i$  v parcialni odvod.

$$\begin{aligned}\left( \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \dot{\mathbf{r}}_i &= \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \dot{\mathbf{r}}_i \right] - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \frac{d}{dt} \mathbf{r}_i \right)^T \dot{\mathbf{r}}_i \\ \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \dot{\mathbf{r}}_i &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left( \frac{\dot{\mathbf{r}}_i^T \dot{\mathbf{r}}_i}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \frac{\dot{\mathbf{r}}_i^T \dot{\mathbf{r}}_i}{2} \right)\end{aligned}\quad (4.119)$$

Zgornji izraz vstavimo v enačbo (4.115) ter zamenjamo vrstni red integriranja in odvajanja.

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_v &= \int_{V_i} \rho_i \left[ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left( \frac{\dot{\mathbf{r}}_i^T \dot{\mathbf{r}}_i}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \frac{\dot{\mathbf{r}}_i^T \dot{\mathbf{r}}_i}{2} \right) \right] dV_i \\ \mathbf{Q}_v &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \int_{V_i} \rho_i \frac{\dot{\mathbf{r}}_i^T \dot{\mathbf{r}}_i}{2} dV_i \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \int_{V_i} \rho_i \frac{\dot{\mathbf{r}}_i^T \dot{\mathbf{r}}_i}{2} dV_i \right)\end{aligned}\quad (4.120)$$

V zgornji enačbi je izraz z integralom  $\int_{V_i} \rho_i \frac{\dot{\mathbf{r}}_i^T \dot{\mathbf{r}}_i}{2} dV_i = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}_i^T \dot{\mathbf{r}}_i = T_i$  enak kinetični energiji. Iz definicije uporabe virtualnega dela v dinamiki in D'Alembertovega načela vemo, da morajo biti posplošene vztrajnostne sile enake posplošenim zunanjam silam  $\mathbf{Q}_v = \mathbf{Q}_z$ . Tako dobimo

naslednji izraz.

$$\mathbf{Q}_z = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left( \frac{\partial T_i}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \quad (4.121)$$

Ta izraz še ni končna Lagrangeeva enačba, saj v njem potencialna energija še ne nastopa eksplicitno. Vektor zunanjih posplošenih sil vsebuje tako konservativne kot nekonservativne zunanje sile. Kot konservativne zunanje sile smo navedli, da sta to gravitacija in sila vzmeti. Sila vzmeti nas trenutno ne zanima toliko, kolikor nas zanima gravitacijska sila. Vemo, da je potencialna energija povezana z gravitacijsko silo. To zapišemo s posplošeno koordinato.

$$V_i = m_i g q \quad (4.122)$$

Zunanje posplošene sile tako razdelimo na konservativne in nekonservativne.

$$\mathbf{Q}_z = \mathbf{Q}_{KO} + \mathbf{Q}_{NK} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left( \frac{\partial T_i}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \quad (4.123)$$

Gravitacijsko konservativno silo dobimo, če enačbo (4.122) parcialno odvajamo glede na  $\mathbf{q}$  ter dodamo negativni predznak, saj v večini primerov gravitacijska sila deluje v nasprotno smer od postavitve koordinatnega sistema.

$$\mathbf{Q}_{KO} = - \left( \frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \quad (4.124)$$

Zgornji izraz vstavimo v enačbo (4.123) in po preurejanju dobimo naslednjo enačbo.

$$\begin{aligned} - \left( \frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \mathbf{Q}_{NK} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left( \frac{\partial T_i}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \mathbf{Q}_{NK} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (T_i - V_i)}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left( \frac{\partial (T_i - V_i)}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{aligned} \quad (4.125)$$

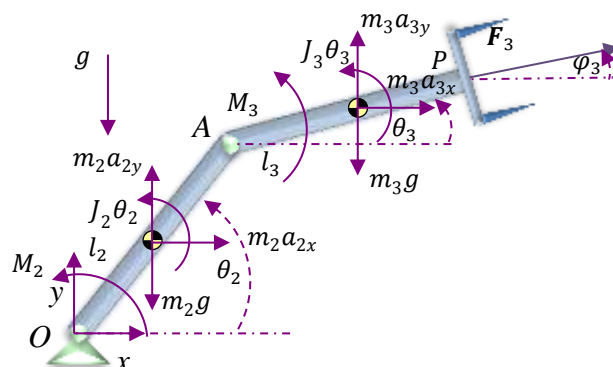
V zgornji enačbi izraz  $T_i - V_i = L$  predstavlja Lagrangeano, ki je razlika med kinetično in potencialno energijo opazovanega sistema. S tem pridemo do končne Lagrangeeve enačbe, ki pravi, da je vektor generaliziranih nekonservativnih zunanjih sil enak izrazu, ki vključuje kinetično in potencialno energijo sistema, kot je prikazano spodaj.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right)^T = \mathbf{Q}_{NK} \quad (4.126)$$

Spomnimo še, da vektor nekonservativnih posplošenih sil pridobimo s pomočjo zapisa virtualnega dela nekonservativnih sil, zapisanega z virtualnim pomikom po posplošeni koordinati  $\mathbf{q}$ .

$$\delta W_{NK} = \mathbf{Q}_{NK}^T \delta \mathbf{q} \quad (4.127)$$

**Primer 4.17:** Na primeru dvoosnega manipulatorja, na katerega delujejo zunanja sila in zunanja momenta, uporabite Lagrangeovo metodo za pridobivanje gibalnih enačb opazovanega sistema.



**Slika 4.26:** Dvoosni manipulator in Lagrangeova enačba

Pri Lagrangeovi metodi potrebujemo kinetično in potencialno energijo opazovanega sistema. Kinetična energija posameznega elementa je tako translacijska kot rotacijska energija.

$$T = \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^T \dot{\mathbf{r}}_2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{\mathbf{r}}_3^T \dot{\mathbf{r}}_3 + \frac{1}{2} J_3 \dot{\theta}_3^2 \quad (4.128)$$

Potem zapišemo potencialno energijo sistema.

$$V = m_2 g r_{2y} + m_3 g r_{3y} \quad (4.129)$$

Zapišemo virtualno delo zunanjih nekonservativnih sil in momentov.

$$\delta W_{NK} = M_2 \delta \theta_2 + M_3 (\delta \theta_3 - \delta \theta_2) + \mathbf{F}_3^T \delta \mathbf{r}_P \quad (4.130)$$

Preden vstavimo vse te izraze v Lagrangeovo enačbo, jih je treba razpisati za posamezne vektorje položaja  $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, r_{2y}, r_{3y}, \delta \mathbf{r}_P$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2 &= \begin{bmatrix} (l_2/2) \cos \theta_2 \\ (l_2/2) \sin \theta_2 \end{bmatrix} \rightarrow \dot{\mathbf{r}}_2 = \begin{bmatrix} -(l_2/2) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ (l_2/2) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{r}_3 &= \begin{bmatrix} l_2 \cos \theta_2 + (l_3/2) \cos \theta_3 \\ l_2 \sin \theta_2 + (l_3/2) \sin \theta_3 \end{bmatrix} \rightarrow \dot{\mathbf{r}}_3 = \begin{bmatrix} -l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - (l_3/2) \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 \\ l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + (l_3/2) \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{r}_P &= \begin{bmatrix} l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 \\ l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 \end{bmatrix} \rightarrow \delta \mathbf{r}_P = \begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2 - l_3 \sin \theta_3 \delta \theta_3 \\ l_2 \cos \theta_2 \delta \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 \delta \theta_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.131)$$

Te izraze vstavimo v enačbe (4.128), (4.129) in (4.130). Za kinetično energijo tako dobimo naslednjo enačbo.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_2 \left[ \left( -\frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \right)^2 + \left( \frac{l_2}{2} \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \right)^2 \right] + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \\ &\frac{1}{2} m_3 \left[ \left( -l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - \frac{l_3}{2} \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 \right)^2 + \left( l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + \frac{l_3}{2} \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 \right)^2 \right] + \\ &\frac{1}{2} J_3 \dot{\theta}_3^2 \end{aligned} \quad (4.132)$$

Po preurejanju dobimo naslednjo enačbo za kinetično energijo.

$$T = \frac{1}{2}m_2 \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m_3 \left[ l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \left(\frac{l_3}{2}\right)^2 \dot{\theta}_3^2 + l_2 l_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \right] + \frac{1}{2}J_3 \dot{\theta}_3^2 \quad (4.133)$$

Za potencialno energijo dobimo naslednjo enačbo.

$$V = m_2 g \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 + m_3 g \left( l_2 \sin \theta_2 + \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 \right) \quad (4.134)$$

Za virtualno delo nekonservativnih zunanjih sil in momentov po preurejanju dobimo enačbo, prikazano spodaj.

$$\delta W_{NK} = M_2 \delta \theta_2 - M_3 \delta \theta_2 + M_3 \delta \theta_3 + [F_3 \cos \varphi_3 \quad F_3 \sin \varphi_3]^T \begin{bmatrix} -l_2 \sin \theta_2 \delta \theta_2 - l_3 \sin \theta_3 \delta \theta_3 \\ l_2 \cos \theta_2 \delta \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 \delta \theta_3 \end{bmatrix} \quad (4.135)$$

$$\delta W_{NK} = [M_2 - M_3 - F_3 \cos \varphi_3 l_2 \sin \theta_2 + F_3 \sin \varphi_3 l_2 \cos \theta_2] \delta \theta_2 + [M_3 - F_3 \cos \varphi_3 l_3 \sin \theta_3 + F_3 \sin \varphi_3 l_3 \cos \theta_3] \delta \theta_3$$

Zdaj lahko zapišemo Lagrangeano  $L = T - V$ .

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_2 \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}m_3 \left[ l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \left(\frac{l_3}{2}\right)^2 \dot{\theta}_3^2 + l_2 l_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \right] + \frac{1}{2}J_3 \dot{\theta}_3^2 - m_2 g \frac{l_2}{2} \sin \theta_2 - m_3 g \left( l_2 \sin \theta_2 + \frac{l_3}{2} \sin \theta_3 \right) \quad (4.136)$$

Enačbi (4.136) in (4.135) vstavimo v enačbo (4.126). Ker imamo sistem z dvema prostostnima stopnjama, imamo dve neodvisni koordinati  $\theta_2$  in  $\theta_3$ . Tako je vektor posplošenih koordinat enak  $\mathbf{q} = [\theta_2 \ \theta_3]^T$ . Lagrangeovo enačbo bomo tako dvakrat obravnavali za vsako neodvisno spremenljivko posebej. Najprej uporabimo Lagrangeovo enačbo za neodvisno spremenljivko  $\theta_2$ . Lagrangeovo enačbo zapišemo, kot prikazuje spodnja enačba.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right) = Q_{NK}(\theta_2) \quad (4.137)$$

Najprej je treba poiskati parcialni odvod Lagrangeane po kotni hitrosti  $\dot{\theta}_2$ .

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 \dot{\theta}_2 + J_2 \dot{\theta}_2 + m_3 l_2^2 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_3 \quad (4.138)$$

Potem izvedemo časovni odvod zgornje enačbe.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= \left( m_2 \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 + J_2 + m_3 l_2^2 \right) \ddot{\theta}_2 \\ &\quad - \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) \dot{\theta}_3 \\ &\quad + \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \ddot{\theta}_3 \end{aligned} \quad (4.139)$$

Nazadnje izvedemo še parcialni odvod Lagrangeane po zasuku  $\theta_2$ .

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -\frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - m_2 g \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 - m_3 g l_2 \cos \theta_2 \quad (4.140)$$

Zdaj izraze iz (4.140), (4.139) in del enačbe (4.135) za  $\theta_2$  vstavimo v enačbo (4.137). S tem

pridobimo prvo gibalno enačbo našega sistema.

$$\begin{aligned} & \left( m_2 \left( \frac{l_2}{2} \right)^2 + J_2 + m_3 l_2^2 \right) \ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \ddot{\theta}_3 \\ & - \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) \dot{\theta}_3 + \\ & \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + m_2 g \frac{l_2}{2} \cos \theta_2 + m_3 g l_2 \cos \theta_2 = \\ & M_2 - M_3 - F_3 \cos \varphi_3 l_2 \sin \theta_2 + F_3 \sin \varphi_3 l_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (4.141)$$

Ponovimo celoten postopek odvajanja s parcialnimi in časovnimi odvodi za drugo neodvisno spremenljivko  $\theta_3$ .

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta_3} \right) = Q_{NK}(\theta_3) \quad (4.142)$$

Najprej je treba poiskati parcialni odvod Lagrangeane po kotni hitrosti  $\dot{\theta}_3$ .

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} = m_3 \left( \frac{l_3}{2} \right)^2 \dot{\theta}_3 + J_3 \dot{\theta}_3 + \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2 \quad (4.143)$$

Potem izvedemo časovni odvod zgornje enačbe.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} \right) &= m_3 \left( \frac{l_3}{2} \right)^2 \ddot{\theta}_3 + J_3 \ddot{\theta}_3 + \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \ddot{\theta}_2 - \\ & \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) \dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (4.144)$$

Nazadnje izvedemo še parcialni odvod Lagrangeane po zasuku  $\theta_3$ .

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_3} = \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 - m_3 g \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 \quad (4.145)$$

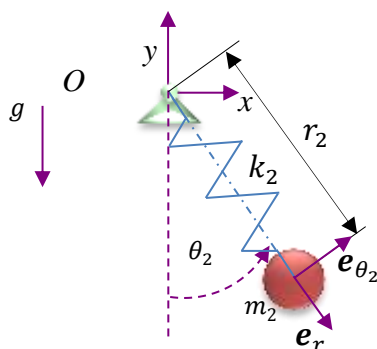
Izraze iz (4.145), (4.144) in del enačbe (4.135) za  $\theta_3$  vstavimo v enačbo (4.142). S tem pridobimo drugo gibalno enačbo našega sistema in tako pridobimo obe gibalni enačbi, ki opišeta dinamični odziv dvoosnega manipulatorja.

$$\begin{aligned} & \left( m_3 \left( \frac{l_3}{2} \right)^2 + J_3 \right) \ddot{\theta}_3 + \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \cos(\theta_2 - \theta_3) \ddot{\theta}_2 \\ & - \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) \dot{\theta}_2 - \\ & \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + m_3 g \frac{l_3}{2} \cos \theta_3 \\ & = M_3 - F_3 \cos \varphi_3 l_3 \sin \theta_3 + F_3 \sin \varphi_3 l_3 \cos \theta_3 \end{aligned} \quad (4.146)$$

## 4.11.2 Upoštevanje sile vzmeti pri Lagrangeevi metodi

V poglavju 4.8.2 smo definirali konservativne in neconservativne sile. Pri tem smo dejali, da sila vzmeti spada pod konservativne sile tako kot sila gravitacije. Kot takšno jo pri Lagrangeevi metodi vključimo k potencialni energiji. Poglejmo si primer.

**Primer 4.18:** Za vzmetno nihalo z vzmetno konstanto  $k_2$  na sliki 4.27 zapišite gibalne enačbe sistema z uporabo Lagrangeeve metode.



**Slika 4.27:** Vzmetno nihalo in Lagrangeeva metoda

Sistem ima dve prostostni stopnji, kar pomeni, da bosta za opis sistema potrebni dve gibalni enačbi. Prav tako potrebujemo dve posplošeni koordinati. Podobno kot v primeru 4.5 tudi tukaj izbira  $x$  in  $y$  koordinate ni ustrezna, saj koordinati med sabo nista neodvisni. Za opis sistema si izberemo polarne koordinate z enotskima vektorjema  $e_r$  in  $e_{\theta_2}$ . V smeri  $e_r$  imamo razdaljo  $r_2$ . Ta opisuje položaj vzmeti. Za vzmet je pomembno, da vemo njeno začetno lego. S tem namenom razdaljo  $r_2$  razdelimo na  $r_2 = r_0 + r(t)$ , kjer  $r_0$  opisuje začetni raztezek vzmeti,  $r(t)$  pa trenutni odmik od začetne lege. Tako je prva posplošena koordinata enaka  $r(t)$ , druga pa je kar zasuk vzmetnega nihala  $\theta_2(t)$ . To sta dve med seboj neodvisni generalizirani koordinati. Za uporabo Lagrangeeve metode potrebujemo kinetično in potencialno energijo sistema. Kinetična energija je tako sestavljena iz translacijske in rotacijske energije.

$$T = \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \dot{\theta}_2^2 \quad (4.147)$$

Če odvajamo razdaljo  $r_2$ , potem dobimo  $\dot{r}_2 = \dot{r}(t)$ .

$$T = \frac{1}{2} m_2 \dot{r}(t)^2 + \frac{1}{2} m_2 (r_0 + r(t))^2 \dot{\theta}_2^2 \quad (4.148)$$

Potencialna energija v tem primeru vsebuje še energijo vzmeti, ki pa je odvisna samo od trenutnega raztezka.

$$V = -m_2 g (r_0 + r(t)) \cos \theta_2 + \frac{1}{2} k_2 r(t)^2 \quad (4.149)$$

Ker na sistem vzmetnega nihala ne deluje nobena zunanja nekonservativna sila, v tem primeru ne potrebujemo načela virtualnega dela, da bi pridobili nekonservativne sile, zapisane v posplošenih koordinatah.

$$Q_{NK} = 0 \quad (4.150)$$

Nadaljujemo z zapisom Lagrangeane in uporabe Lagrangeeve enačbe.

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_2 \dot{r}(t)^2 + \frac{1}{2} m_2 (r_0 + r(t))^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 g (r_0 + r(t)) \cos \theta_2 - \frac{1}{2} k_2 r(t)^2 \quad (4.151)$$

Lagrangeano vstavimo v Lagrangeovo enačbo in najprej odvajamo po prvi posplošeni koordinati  $r(t)$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}(t)} &= m_2 \dot{r}(t) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}(t)} \right) &= m_2 \ddot{r}(t) \\ \frac{\partial L}{\partial r(t)} &= m_2 (r_0 + r(t)) \dot{\theta}_2^2 + m_2 g \cos \theta_2 - k_2 r(t)\end{aligned}\quad (4.152)$$

Zgornje izraze vstavimo v Lagrangeevo enačbo in dobimo prvo gibalno enačbo.

$$m_2 \ddot{r}(t) - m_2 (r_0 + r(t)) \dot{\theta}_2^2 - m_2 g \cos \theta_2 + k_2 r(t) = 0 \quad (4.153)$$

Odvajamo še po drugi posplošeni koordinati  $\theta_2(t)$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_2 (r_0 + r(t))^2 \dot{\theta}_2 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= 2m_2 (r_0 + r(t)) \dot{r}(t) \dot{\theta}_2 + m_2 (r_0 + r(t))^2 \ddot{\theta}_2 \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= -m_2 g (r_0 + r(t)) \sin \theta_2\end{aligned}\quad (4.154)$$

Zgornje izraze vstavimo v Lagrangeevo enačbo in dobimo še drugo gibalno enačbo. S tem smo popolnoma opisali vzmetno nihalo s pomočjo Lagrangeeve metode.

$$m_2 (r_0 + r(t))^2 \ddot{\theta}_2 + 2m_2 (r_0 + r(t)) \dot{r}(t) \dot{\theta}_2 + m_2 g (r_0 + r(t)) \sin \theta_2 = 0 \quad (4.155)$$



# LITERATURA

- [1] Alujevič A., Harl B., *Mehanika I: Založništvo Fakultete za strojništvo*, 2005.
- [2] Bedford A., Fowler W., *Engineering Mechanics: Dynamics*, 5. izdaja. Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall, 2008.
- [3] Beer F. P., Johnston E. R. J., Cornwell P. J., *Vector Mechanics for Engineers: Dynamics*, 9. izdaja. New York: McGraw-Hill, 2009.
- [4] Boltežar M., *Mehanska nihanja 1. del*. Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, 2006.
- [5] Gere J. M., Goodno B. J., *Mechanics of Materials*, 7. izdaja. Stamford: Cengage Learning, 2009.
- [6] Hibbeler R. C., *Engineering Mechanics: Dynamics*, 11. izdaja. Singapore: Pearson Education, 2007.
- [7] Inman D. J., *Engineering Vibration*, 2. izdaja. Upper Saddle River: Prentice Hall International, 2001.
- [8] Kegl M., Vesenjāk M., Harl B., *Mehanika za mehatronike*. Maribor: Založništvo Fakultete za strojništvo, 2011.
- [9] Kuhelj A., *Mehanika: Dinamika*. Ljubljana: Fakulteta za strojništvo, 1998.
- [10] Lozina Ž., *Dinamika*, Split: Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, 2005.
- [11] Meriam J. L., Kraige L. G., *Engineering Mechanics: Dynamics*, 7. izdaja. Danvers: John Wiley & Sons, 2003.
- [12] Mestemacher F., *Grundkurs Technische Mechanik*. Würzburg: Spektrum Akademischer Verlag, 2008
- [13] Muršič M., *Osnove tehniške mehanike 3: Dinamika*. Ljubljana: Akademska založba, 1991.
- [14] Nelson E. W., Best C. L., McLean W. G., Potter M. C., *Engineering Mechanics Dynamics*. New York: McGraw-Hill, 2010.
- [15] Richard H. A., Sander M., *Technische Mechanik Dynamik*. Wiesbaden: Viewegs Fachbücher der Technik, 2008.
- [16] Riley W. F., Sturges L. D., *Engineering Mechanics: Dynamics*, 2. izdaja. New York: John Wiley & Sons, 1996.
- [17] Rusov L., *Mehanika III, Dinamika*. Naučna knjiga, 1979.
- [18] Saje M., *Kinematika in dinamika*. Ljubljana: Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo,

- 1994.
- [19] Stropnik J. *Dinamika*. Ljubljana: Tehniška založba Slovenije, 1990.
  - [20] Stropnik J., *Kinetika: zapiski predavanj*, Ljubljana: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, 1990.
  - [21] Šterk P., *Mehanika: Statika, dinamika in trdnost*, Novo mesto: Šolski center, 2005.
  - [22] Williams J. H. J., *Fundamentals of Applied Dynamics*, Danvers: John Wiley & Sons, 1996.
  - [23] Wohlhart K., Steffan H., *Dynamik*, Graz: Technische Universität Graz, Institut für Mechanik, 2003.
  - [24] Shabana A. A., *Computational Dynamics, Second Edition*, New York: Wiley-Interscience, 2001.
  - [25] Hamill P., *A student's guide to Lagrangians and Hamiltonians*, Cambridge: Cambridge University Press, 2014.

# Stvarno kazalo

- aktivna sila, 32
- centralne glavne vztrajnostne osi telesa, 15
- Coriolisov pospešek točke, 9
- D'Alembertovo načelo, 55
- delo sile, 26
- deviacijski vztrajnostni moment telesa, 15
- diagram prostih teles, 56
- dinamični faktor ojačenja, 47
- disipacijska sila, 32
- dušeno lastno nihanje, 41
- dušeno nihanje, 32
- dušeno vsiljeno nihanje, 48
- dušilna konstanta, 37
- Eulerjevi koti, 10
- fiksna vektorska baza, 3
- frekvenca nihanja, 32
- gibalna količina delca, 18
- gibalne enačbe, 53
- gibanje telesa, 9
- gibanje točke, 7
- gibljava vektorska baza, 4
- glavne vztrajnostne osi telesa, 15
- harmonično vzbujanje sistema, 46
- hitrost točke, 7
- holonomne vezi, 64
- holonomni sistemi, 64
- Huygens-Steinerjevo pravilo, 14
- impulz momenta sile, 23
- impulz sile, 19
- Kartezijev koordinatni sistem, 4
- kinetična energija delca, 27
- kinetična energija telesa, 28
- koeficient kritičnega dušenja, 42
- konservativne sile, 72
- koordinate vektorja, 5
- kotna hitrost, 7
- krajevni vektor točke, 7
- kritično dušenje, 43
- krožna frekvenca vzbujanja sistema, 47
- Lagrangeeva enačba, 83
- lastna krožna frekvenca dušenega nihanja, 42
- lastna krožna frekvenca nedušenega nihanja, 39
- lastna nihajna oblika, 45
- lastno nihanje, 38
- linearna dušilka, 37
- linearna vzmet, 33
- logaritemski dekrement, 43
- lokalne koordinate točke, 7
- masa telesa, 12
- masna matrika sistema, 44
- masni delec, 11
- masno središče telesa, 12
- metoda prerezov, 59
- moč, 27
- nadkritično dušenje, 42
- nadomestna togost vzmeti, 35
- nedušeno lastno nihanje, 38
- nedušeno nihanje, 32
- nedušeno vsiljeno nihanje, 47
- neholonomne vezi, 65
- neholonomni sistemi, 65
- nekonservativne sile, 72
- neodvisne koordinate, 67
- Newton-Eulerjev pristop, 54
- Newtonovi zakoni, 16
- norma vektorja, 5
- normalni pospešek točke, 9
- odvisne koordinate, 67
- osni vztrajnostni moment telesa, 13
- osnovni zakon dinamike, 16
- parametrizacija prostorskih rotacij, 10
- parametrizacija rotacijske matrike, 10
- perioda nihanja, 32
- periodično nihanje, 32
- podkritično dušenje, 43
- pospešek težišča sistema masnih delcev, 17
- pospešek točke, 8
- posplošene koordinate, 62
- posplošene sile, 69
- potencialna energija, 29
- povratna sila, 31
- položaj telesa, 9
- prehodni odziv sistema, 50
- preslikava koordinat tenzorja, 10
- preslikava koordinat vektorja, 10
- prostornina telesa, 12

- prostostne stopnje, 54
- relativna hitrost točke, 8
- relativni pospešek točke, 9
- rheonomne vezi, 64
- rotacijska matrika, 10
- rotacijski psevdovektor, 10
- sistem masnih delcev, 16
- skalarni produkt, 5
- skleronomne vezi, 64
- splošni zakoni dinamike, 18
- stacionarni odziv sistema, 50
- sunek momenta sile, 23
- sunek sile, 19
- tangencialni pospešek točke, 9
- telo fiksne mase, 12
- telo spremenljive mase, 21
- težišče sistema masnih delcev, 17
- težišče telesa, 12
- togost vzmeti, 33
- togostna matrika sistema, 44
- torzijska togost vzmeti, 33
- vektorski produkt, 6
- virtualni pomik, 66
- virtualno delo, 66
- vrtilna količina delca, 22
- vrtilna količina telesa, 23
- vzbujanje sistema, 46
- vzporedna vezava vzmeti, 35
- vztrajnostni tenzor telesa, 15
- zakon akcije in reakcije, 16
- zakon o ohranitvi gibalne količine delca, 19
- zakon o spremembi gibalne količine delca, 19
- zakon o spremembi gibalne količine telesa, 20, 21
- zakon o spremembi kinetične energije delca, 28
- zakon o spremembi kinetične energije telesa, 28
- zakon o spremembi vrtilne količine delca, 23
- zakon o spremembi vrtilne količine telesa, 25
- zakon vztrajnosti, 16
- zaporedna vezava vzmeti, 36
- zasuk telesa, 9
- zvezno telo končnih dimenzij, 18

# DINAMIKA MASNIH SISTEMOV

BOŠTJAN HARL, MARKO KEGL, TIMI KARNER

Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, Maribor, Slovenija  
bostjan.harl@um.si, marko.kegl@um.si, timi.karner@um.si

Učbenik obravnava dinamiko masnih sistemov togih teles. V okviru kinematike je prikazan opis prostorskega gibanja v različnih koordinatnih sistemih, predstavljena je rotacijska matrika in njena parametrizacija ter Eulerjevi koti. Temu sledi dinamika in prikaz zakona o gibalni in vrtilni količini togega telesa. V okviru mehanskih nihanj so obravnavana lastna in vsiljena nihanja sistemov z eno in več prostostnimi stopnjami. Učbenik zaključuje področje analitične mehanike, ki vsebuje prikaz generaliziranih koordinat, virtualnega dela in generaliziranih sil. Predstavljeni so Newton-Eulerjev, Lagrangev in Hamiltonov pristop za tvorbo gibalnih enačb sistemov in njihovo numerično reševanje.

**Ključne besede:**  
togo telo, kinematika,  
dinamika,  
mehanska nihanja,  
analitična mehanika,  
virtualno delo,  
Lagrangev pristop



Univerza v Mariboru

Fakulteta za strojništvo



# **Dinamika masnih sistemov**