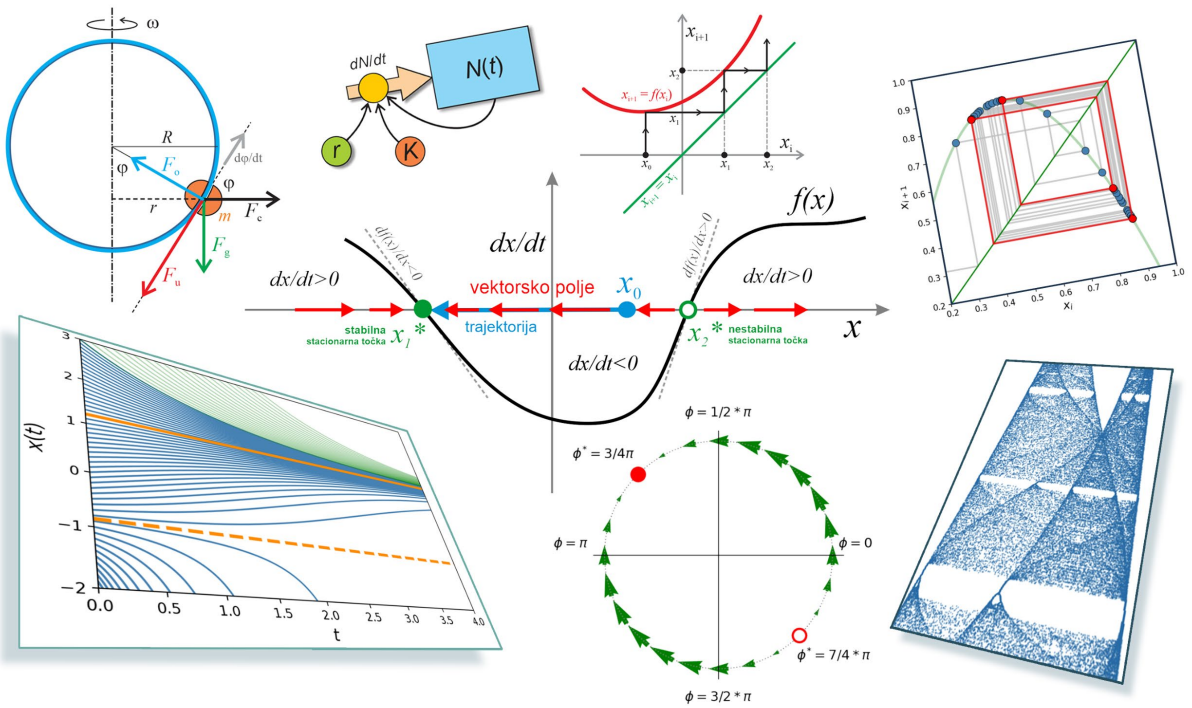




Univerzitetna založba
Univerze v Mariboru

Dinamika enodimenzionalnih sistemov



Avtorja

Vladimir Grubelnik
Marko Marhl

Februar 2024



Univerza v Mariboru

Fakulteta za naravoslovje
in matematiko

Dinamika enodimenzionalnih sistemov

Avtorja
Vladimir Grubelnik
Marko Marhl

Februar 2024

Naslov <i>Title</i>	Dinamika enodimenzionalnih sistemov <i>Dynamics of One-Dimensional Systems</i>		
Avtorja <i>Authors</i>	Vladimir Grubelnik (Univerza v Mariboru, Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko)		
	Marko Marhl (Univerza v Mariboru, Pedagoška fakulteta, Medicinska fakulteta, Fakulteta za naravoslovje in matematiko)		
Recenzija <i>Review</i>	Robert Repnik (Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko)		
	Dean Korošak (Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo)		
	Jerneja Pavlin (Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta)		
Lektoriranje <i>Language editing</i>	Mojca Garantini (Univerza v Mariboru, Filozofska fakulteta)		
Tehnična urednika <i>Technical editors</i>	Vladimir Grubelnik (Univerza v Mariboru, Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko)		
	Jan Perša (Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba)		
Grafične priloge <i>Graphics material</i>	Viri so lastni, razen če ni navedeno drugače. Grubelnik, Marhl (avtorja), 2024		
Oblikovanje ovitka <i>Cover designer</i>	Jan Perša (Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba)		
Grafika na ovitku <i>Cover graphic</i>	Grubelnik, Marhl (avtorja), 2024		
Založnik <i>Published by</i>	Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba Slomškovo trg 15, 2000 Maribor, Slovenija https://press.um.si , zalozba@um.si		
Izdajatelj <i>Issued by</i>	Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko Koroška cesta 160, 2000 Maribor, Slovenija https://fnn.um.si , fnn@um.si		
Izdaja <i>Edition</i>	Prva izdaja	Izdano <i>Published at</i>	Maribor, februar 2024
Vrsta publikacije <i>Publication type</i>	E-knjiga	Dostopno na <i>Available at</i>	https://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/845

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Univerzitetna knjižnica
Maribor

517.93:519.87 (075.8) (0.034.2)

GRUBELNIK, Vladimir
Dinamika enodimenzionalnih sistemov [Elektronski vir] / avtorja Vladimir Grubelnik, Marko Marhl. - 1. izd. - E-knjiga. - Maribor : Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba, 2024

Način dostopa (URL):
<https://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/845>
ISBN 978-961-286-826-0 (Pdf)
doi: 10.18690/um.fnm.1.2024
COBISS.SI-ID 183933187



© Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba
/ University of Maribor, University Press

Besedilo / Text © Grubelnik, Marhl (avtorja), 2024

To delo je objavljeno pod licenco Creative Commons Priznanje avtorstva 4.0 Mednarodna. / *This work is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 International License.*

Uporabnikom je dovoljeno tako nekomercialno kot tudi komercialno reproduciranje, distribuiranje, dajanje v najem, javna priobčitev in predelava avtorskega dela, pod pogojem, da navedejo avtorja izvirnega dela. / *This license allows reusers to distribute, remix, adapt, and build upon the material in any medium or format, so long as attribution is given to the creator. The license allows for commercial use.*

Vsa gradiva tretjih oseb v tej knjigi so objavljena pod licenco Creative Commons, razen če to ni navedeno drugače. Če želite ponovno uporabiti gradivo tretjih oseb, ki ni zajeto v licenci Creative Commons, boste morali pridobiti dovoljenje neposredno od imetnika avtorskih pravic. / *Any third-party material in this book is published under the book's Creative Commons licence unless indicated otherwise in the credit line to the material. If you would like to reuse any third-party material not covered by the book's Creative Commons licence, you will need to obtain permission directly from the copyright holder.*

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

ISBN 978-961-286-826-0 (pdf)

DOI <https://doi.org/10.18690/um.fnm.1.2024>

Cena
Price Brezplačni izvod

Odgovorna oseba založnika
For publisher prof. dr. Zdravko Kačič,
rektor Univerze v Mariboru

Citiranje
Attribution Grubelnik, V., Marhl, M. (2024). *Dinamika enodimenzionalnih sistemov*. Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba. doi: 10.18690/um.fnm.1.2024

Kazalo

1	Uvod v dinamične sisteme	1
1.1	Zgodovinski pregled	1
1.2	Glavne značilnosti dinamičnih sistemov	4
1.2.1	Deterministični in stohastični sistemi	4
1.2.2	Časovno zvezni in diskretni sistemi	6
1.2.3	Linearni in nelinearni sistemi	8
1.2.4	Dimenzija sistemov	11
2	Enodimenzionalni sistemi	15
2.1	Geometrijski pristop reševanja enodimenzionalnih sistemov	17
2.2	Linearna stabilnostna analiza	22
2.3	Potencial	24
3	Fizikalni, biološki in kemijski primeri 1D sistemov	29
3.1	Spreminjanje hitrosti pod vplivom sile	29
3.1.1	Konstantna sila	30
3.1.2	Negativne povratna vezava	31
3.1.3	Konstantna moč	33
3.2	Radioaktivni razpad	35
3.3	Praznjenje in polnjenje kondenzatorja	36
3.3.1	Praznjenje kondenzatorja	37
3.3.2	Polnjenje kondenzatorja	39
3.4	Močno (nadkritično) dušenje	41
3.5	Populacijska dinamika	43
3.5.1	Vpliv rodnosti in omejenih virov na velikost populacije	43
3.5.2	Rast tumorja	45
3.6	Kemijske reakcije	47
3.6.1	Reakcija ničtega reda	48
3.6.2	Reakcija prvega reda	48
3.6.3	Avtokatalitična kemijska reakcija	50
4	Tokovi na krožnici	53
4.1	Monotoni »oscilatorji«	56

4.1.1	Enakomerno kroženje	56
4.1.2	Utripanje	57
4.2	Neenakomerni »oscilatorji«	58
4.2.1	Perioda oscilacij	60
4.2.2	Učinek počasnega prehoda	61
4.3	Močno dušen oscilator s konstantnim zunanjim navorom	63
4.3.1	Zunanji navor prevlada nad navorom teže	64
4.3.2	Zunanji navor uravnovesi maksimalni navor teže	65
4.3.3	Zunanji navor je manjši od maksimalnega navora teže	65
4.4	Sinhronizacija utripanja kresnic	67
4.4.1	Utripanje zunanjih dražljajev	67
4.4.2	Utripanje kresnic	67
4.4.3	Primer sočasnega utripanja	69
4.4.4	Primer utripanja s konstantno fazno razliko	69
4.4.5	Primer utripanja s spreminjajočo se fazno razliko	70
5	Bifurkacije	73
5.1	Sedelno-vozelná bifurkacija	73
5.2	Transkrična bifurkacija	77
5.2.1	Preprost model laserja	78
5.3	Vilična bifurkacija	81
5.3.1	Nadkritična vilična bifurkacija	81
5.3.2	Podkritična vilična bifurkacija	83
5.4	Kroglica na vrtljivem obroču	85
5.5	Gibanje telesa vzdolž palice pod vplivom vzmeti	87
6	Enodimenzionalne preslikave (mape)	91
6.1	Stabilnost stacionarnih točk	92
6.2	Grafična analiza - pajkove mreže (cobweb)	93
6.3	Logistična mapa	95
6.3.1	Stabilnost stacionarnih stanj	96
6.3.2	Podvajanje period	98
6.3.3	Prehod v kaos in kaotično obnašanje	101
Literatura		105
<i>Viri slik</i>		105

Priloga:

Primeri analize dinamičnih sistemov s programom Python	107
A) Časovni potek $x(t)$ kot rešitev enačbe $dx/dt = f(x)$	107
B) Risanje vektorskega polja na premici	108
C) Risanje vektorskega polja na krožnici	110
D) Izračun stacionarnih stanj in risanje bifurkacijskega diagrama	112
E) Konstrukcija »pajkove mreže« 1D mape	114
F) Bifurkacijski diagram 1D mape	116

Predgovor

Učbenik je namenjen študentom naravoslovno-tehniških smeri, ki jih zanima modeliranje sistemske dinamike in se srečujejo z matematičnim modeliranjem enodimenzionalnih dinamičnih sistemov na različnih naravoslovno-tehničnih področjih.

Razumevanje dinamike enodimenzionalnih sistemov je pomembno za razumevanje nekaterih temeljnih načel dinamike dinamičnih sistemov. S preprostimi modeli enodimenzionalnih sistemov lahko analiziramo stacionarna stanja, njihovo stabilnost, bifurkacije in dolgoročno obnašanje sistema, kar nam pomaga razvijati intuicijo za dinamiko bolj kompleksnih več dimenzionalnih sistemov, s katerimi se soočamo v vsakdanjem življenju.

V uvodnem delu opredelimo dinamične sisteme in izpostavimo njihove glavne značilnosti. Nadalje z geometrijskim pristopom reševanja enodimenzionalnih sistemov in linearno stabilnostno analizo ovrednotimo stabilnost stacionarnih stanj. V pomenu vizualizacije dinamike sistemov definiramo tudi potencial. Posebej se osredotočimo na obravnavo konkretnih primerov enodimenzionalnih dinamičnih sistemov s področja fizike, biologije in kemije. Obravnavamo posebna gibanja pod vplivom sil, radioaktivne razpade, pretakanje naboja v električnih vezjih, razne populacijske dinamike in kemijske reakcije. Posebno pozornost posvetimo tudi sistemom s periodično dinamiko hitrostnega polja, ki jo prikažemo z vektorskimi polji na krožnici. V okviru tega obravnavamo tako imenovane neenakomerne oscilatorje, katerih aplikacije poiščemo v fiziki in biologiji. Nadalje na podlagi različnih vrst bifurkacij opredelimo spremembe v dinamiki sistemov zaradi spreminjanja posameznih parametrov. Obravnavamo posamezne vrste bifurkacij z aplikacijami v fiziki. Na koncu se osredotočimo tudi na enodimenzionalne diskretne sisteme, ki omogočajo kompleksnejšo dinamiko, vključno s prehodom v območje kaotičnega obnašanja sistemov.

1 Uvod v dinamične sisteme

Dinamični sistemi predstavljajo področje, ki se ukvarja s preučevanjem časovnih sprememb sistema. Ta raziskovalna disciplina se osredotoča na razumevanje, kako se sistemi spreminjajo in razvijajo glede na posamezne zakonitosti in začetne pogoje. Dinamični sistemi se pojavljajo v številnih vejah znanosti, kot so fizika, matematika, biologija, ekonomija in inženirstvo, ter igrajo ključno vlogo pri opisovanju in analizi naravnih in umetnih pojavov.

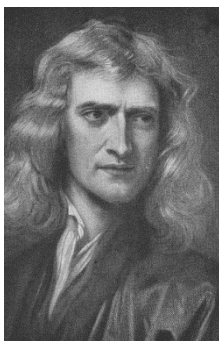
Dinamični sistemi so prisotni v številnih vsakdanjih okoliščinah, kot so gibanje planetov v vesolju, oscilirajoče spreminjanje vremena, obnašanje populacij v ekologiji, gibanje finančnih trgov, oscilacije v električnih krogih in še mnogo drugega. Razumevanje in modeliranje teh sistemov vključuje številne praktične aplikacije, vključno z napovedovanjem, načrtovanjem in optimizacijo procesov ter reševanjem kompleksnih problemov v različnih panogah.

Razumevanje dinamičnih sistemov je tesno povezano z matematičnim modeliranjem, ki od nas zahteva tako imenovan sistemski pristop reševanja problemov. Znati moramo ustrezno definirati sistem, poiskati količine, ki določajo stanje sistema in njihove medsebojne relacije. To zahteva od nas uporabo različnih matematičnih orodij, kot so reševanje diferencialnih enačb, uporabo teorije verjetnosti ter poznavanje orodij za proučevanje kaosa in fraktalne geometrije. Značilnost dinamičnih sistemov je, da so pogosto nelinearni, kar pomeni, da se njihovo obnašanje ne podreja enostavnim linearnim zakonom. Majhne spremembe v začetnih pogojih lahko povzročijo velike in nepredvidljive učinke v prihodnosti, kar je značilno za primere kaotičnega obnašanja sistemov.

1.1 Zgodovinski pregled

V zgodovini so k razumevanju dinamičnih sistemov prispevali različni znanstveniki. V nadaljevanju so omenjeni nekateri pomembni mejniki in osebe, ki so povezane z razvojem dinamičnih sistemov. Omenjeni znanstveniki so prispevali svoje edinstvene poglede in prispevke k razvoju teorije dinamičnih sistemov in so pomembno pripomogli k razumevanju kompleksnih nelinearnih procesov v naravi in družbi. Skupaj z drugimi raziskovalci so obogatili področje dinamičnih sistemov in omogočili njegovo uporabo v številnih aplikacijah in raziskavah.

Isaac Newton (1642–1727)



Slika 1.1: Isaac Newton.

Razvoj dinamike se je začel sredi 17. stoletja, ko je Newton izumil diferencialne enačbe, formuliral zakone gibanja in zakon gravitacije ter v kombinaciji s Keplerjevimi zakoni zapisal gibanje planetov. To je bila osnova za razvoj matematičnega formalizma, ki se uporablja pri opisu dinamičnih sistemov.

Newton je rešil problem gibanja dveh teles, medtem ko je problem gibanja treh teles ostal dolgo časa nerešen. Kasneje so ugotovili, da je problem nerešljiv v pogledu zapisa eksplisicne enačbe za gibanje treh teles.

Primer gibanja dveh teles okoli skupnega težišča

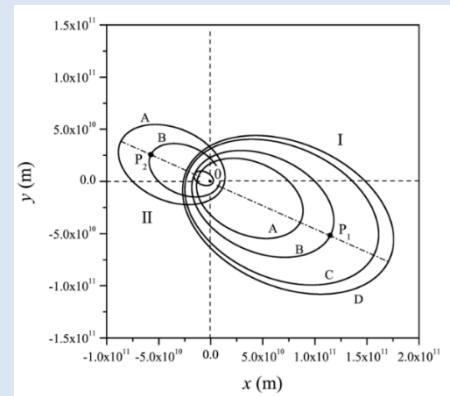
Slika prikazuje tire gibanja dveh teles pri različnem razmerju mas, pri čemer je

$m_1 + m_2 = 2m_0$ in $m_0 = 2 \cdot 10^{30}$ kg. (A) $m_2 / m_1 = 1$, (B) $m_2 / m_1 = 2$, (C) $m_2 / m_1 = 10$, (D) $m_2 / m_1 = 100$.

Začetne vrednosti so $(x_1^0, y_1^0) = (1.5 \cdot 10^{11}, 0 \text{ m})$,

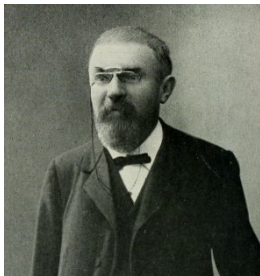
$(x_2^0, y_2^0) = (0, 0)$, $(v_{1,x}^0, v_{1,y}^0) = (0, v_0)$, $(v_{2,x}^0, v_{2,y}^0) = (v_0, 0)$,

$v_0 = 2.3 \cdot 10^4 \text{ m/s}$



Slika 1.2: Tiri gibanja dveh teles z različnima masama.

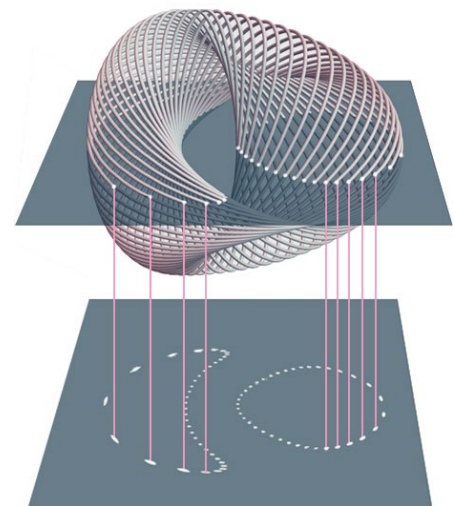
Henri Poincaré (1854–1912)



Slika 1.3: Henri Poincaré.

Poincaré je bil francoski matematik, fizik in filozof, ki je igral ključno vlogo pri razvoju teorije dinamičnih sistemov. Raziskoval je problem stabilnosti sončnega sistema in ugotovil, da je ta problem nelinearen in občutljiv na začetne pogoje.

Poincaré je razvil koncept Poincaréjevih map, ki so ključne za razumevanje obnašanja nelinearnih dinamičnih sistemov. Njegovo delo je sprožilo raziskave v kaosu in nelinearni dinamiki.



Slika 1.4: Poincaréjeva ravnina.

Primer: Gibanje zvezd okoli galaksij (Henon-Heiesov sistem). Zgornji del Slike 1.4 prikazuje trajektorijo v faznem prostoru in točke, kjer trajektorija seka določeno ravnino. Na spodnjem delu slike so prikazana presečišča trajektorije z ravnino. V danem primeru se na ravnini izrišejo tako imenovani torusi, katerih oblika je odvisna od začetnih pogojev in parametrov sistema.

Norbert Wiener (1894–1964)

Wiener je bil matematik in ena izmed ključnih osebnosti pri razvoju teorije stohastičnih procesov in teorije kibernetičnih sistemov. Njegovo delo pomaga razumeti, kako naključnost in šum vplivata na dinamične sisteme ter kako lahko le-to uporabimo za regulacijo in nadzor kompleksnih sistemov.

Andrey Kolmogorov (1903–1987)

Kolmogorov, ruski matematik, je prispeval k razvoju teorije verjetnosti in statistike, kar je ključno za razumevanje dinamičnih sistemov s stohastičnimi komponentami. Njegovo delo na področju stohastičnih diferencialnih enačb pomaga pri modeliranju številnih naravnih pojavov.

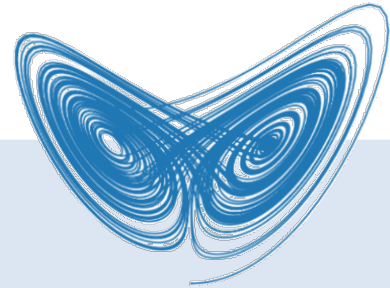
Edward Lorenz (1917–2008)



Slika 1.5: E. Lorenz.

Lorenz je bil ameriški meteorolog in matematik, ki je raziskoval vreme in atmosferske modele. Med svojimi študijami je odkril občutljivost na začetne pogoje v Lorenzovem sistemu diferencialnih enačb. To odkritje je privedlo do koncepta "metode metuljevega učinka" in kaosa.

Lorenzova dela so pokazala, da majhne spremembe v začetnih pogojih lahko povzročijo velike razlike v dolgoročnih napovedih, kar povzroča pomembne posledice za vreme in druge naravne sisteme.



Slika 1.6: Lorenzov atraktor.

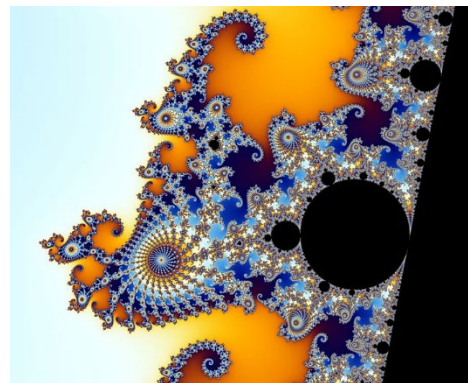
Trajektorija Lorenzovega sistema v faznem prostoru. Sistem sestavljajo tri diferencialne enačbe prvega reda, ki so bile razvite za opis zelo preprostega modela atmosferske konvekcije. Lorenzov sistem je znan po svoji kaotični dinamiki in značilnem atraktorju, prikazanemu na sliki.

Benoît B. Mandelbrot (1924–2010)



Slika 1.7: B. B. Mandelbrot.

Mandelbrot je bil francoski matematik, ki je razvil koncept fraktalov. Odkril je, da v naravi najdemo mnogo fraktalnih oblik. Fraktali so geometrijski objekti, ki se ponavljajo v različnih velikostnih skalah. Izpopolnil je idejo fraktalne dimenzije in iz nje izpeljal pojem "fraktal".



Slika 1.8: Fraktal.

S svojimi raziskavami je pokazal, kako se fraktali lahko uporabljajo za modeliranje in analizo nelinearnih dinamičnih sistemov. Njegovo delo prispeva k razumevanju kompleksnih in nelinearnih vzorcev v naravi, vključno z obliko obal, finančnimi trgi in drugimi dinamičnimi sistemi. Tako je mogoče z različnimi fraktali računalniško modelirati različne oblike v naravi, kot so gorovja, pokrajine, oblaki, jezera ..., kot tudi številne pojave, tako na področju naravoslovnih kot družboslovnih znanosti.

1.2 Glavne značilnosti dinamičnih sistemov

Dinamični sistemi so matematični modeli, ki se uporabljajo za opisovanje sprememb in evolucije sistema v času. Obstaja več glavnih značilnosti dinamičnih sistemov, ki jih lahko razdelimo na več kategorij, kot so deterministični/stohastični, zvezni/diskretni in linearni/nelinearni. V nadaljevanju bomo podrobneje opredelili posamezne lastnosti teh sistemov.

1.2.1 Deterministični in stohastični sistemi

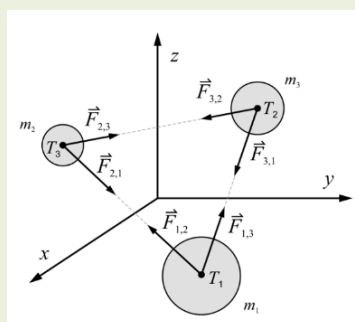
Deterministični in stohastični sistemi sta osnovna tipa dinamičnih sistemov, ki se uporabljata za modeliranje in razumevanje različnih pojavov v naravi, znanosti in inženirstvu. Razlika med njima je v tem, kako obravnavata neznane ali nepredvidljive spremembe v sistemu.

Deterministični sistemi so matematični modeli, v katerih so procesi in spremembe popolnoma določeni in predvidljivi. Njihovo obnašanje sistema je povsem določeno s pomočjo začetnih pogojev in matematičnih enačb, ki opisujejo dinamiko sistema. V takih sistemih ni naključnosti ali verjetnosti. Sistem vedno sledi istim pravilom in generira iste izide ob enakih začetnih pogojih.

Primer determinističnega sistema je matematični model gibanja teles pod vplivom gravitacijske sile, kjer je gibanje teles določeno z gravitacijskimi zakonom in začetnimi pogoji.

$$\vec{F}_{i,j} = G \frac{m_i m_j}{r_{i,j}^2} \hat{r}_{i,j}, \quad i = 1 \dots N, j = 1 \dots N, i \neq j$$

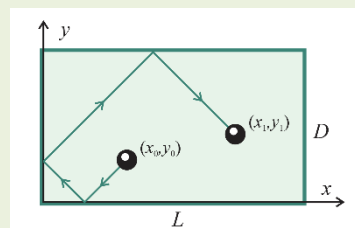
$$\vec{a}_i = \sum_j \vec{F}_{i,j} / m_i.$$



Slika 1.9: Sistem treh teles.

Primer determinističnega sistema je tudi biljardna miza z biljardnimi krogami, kjer gibanje krogel popiše Newtonova mehanika.

$$\sum_i \vec{F}_i(t) = \frac{d\vec{G}}{dt}, \quad \vec{G} = m\vec{v}.$$



Slika 1.10: Gibanje biljardne krogel.

Stohastični sistemi so modeli, ki upoštevajo naključne ali nepredvidljive spremembe v dinamiki sistema. V stohastičnih sistemih so nekatere spremembe sistema opisane z verjetnostmi in naključnimi spremenljivkami. V teh sistemih pričakovano obnašanje sistema opisujemo s pomočjo verjetnostnih porazdelitev in izidi posameznih eksperimentov so naključni.

Primer enostavnega stohastičnega procesa je metanje kocke ali igranje rulete. Obnašanje je naključno in o tem, kakšen bo izid, lahko govorimo le z določeno verjetnostjo.



Slika 1.11: Kockanje.



Slika 1.12: Ruleta.

Stohastične sisteme pogosto uporabljajo za modeliranje naravnih pojavov, ki vključujejo šum, kot so Brownovo gibanje delcev v tekočini ali fluktuacije na finančnih trgih. Primeri stohastičnih sistemov pogosto vključujejo tako imenovane »Markove verige«, ki opisujejo zaporedje dogodkov ali stanj v sistemu, pri čemer se naslednje stanje ali dogodek določi le na podlagi trenutnega stanja sistema. To pomeni, da takšen proces nima spomina.

Za modeliranje zaporedja naključnih števil običajno uporabljamo tako imenovane **linearne kongruentne generatorje (LCG)**. Z njimi ustvarimo zaporedja števil, ki se zdijo naključna, a so v resnici deterministično generirana na naslednji način:

$$N_{i+1} = aN_i + b \pmod{m} \quad \rightarrow \quad \text{oznaka: } LCG(m, a, b, N_o).$$

Število N_{i+1} je torej ostanek pri deljenju števila $aN_i + b$ s številom m , pri čemer je N_o začetna vrednost zaporedja oziroma tako imenovano »seme«.

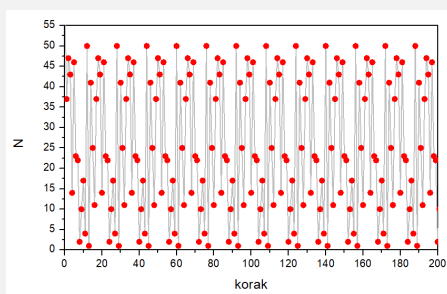
Pri uporabi LCG je pomembno izbrati primerne vrednosti parametrov $LCG(m, a, b, N_o)$ za doseganje zadovoljive kakovosti generiranih števil. V praksi pogosto uporabljajo naslednjo kombinacijo števil:

$$LCG(2^{32}, 69069, 0, 1).$$

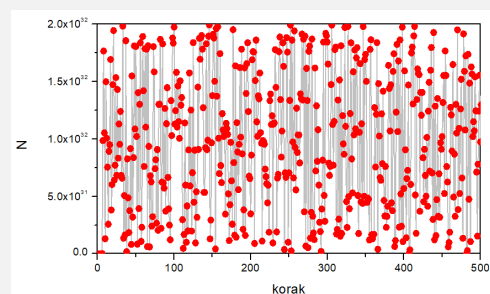
V novejših aplikacijah vse pogosteje uporabljajo bolj zapletene generatorje naključnih števil, ki ponujajo višjo kakovost naključne izbire.

Primer:

Iz spodnjih rezultatov (slika 1.13) vidimo, da dobimo v primeru LCG (51, 71, 21, 62) določeno periodično ponavljanje števil, kar ne doseže zagotovljene kakovosti generiranja naključnih števil. V primeru LCG (2^{32} , 69069, 0, 1) periodičnega ponavljanja števil na tej časovni skali ni mogoče opaziti.



a)



b)

Slika 1.13: Zaporedje naključnih števil. a) LCG (51, 71, 21, 62). b) LCG (2^{32} , 69069, 0, 1).

1.2.2 Časovno zvezni in diskretni sistemi

Časovno zvezni in diskretni sistemi se razlikujejo glede na način, kako obravnavamo čas v njegovi dinamiki. Glavna razlika med njima je, ali je čas zvezen ali diskreten. Razumeti moramo, da je izbira med časovno zveznim in diskretnim pristopom odvisna od narave problema in aplikacije. Nekatere sisteme, kot so elektronska vezja, običajno obravnavajo kot časovno zvezni, medtem ko so nekateri sistemi, kot so digitalni signali, tipično diskretni. Razumevanje teh razlik je ključno pri analizi in modeliranju dinamičnih sistemov.

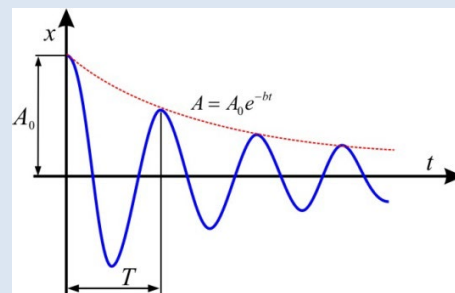
Časovno zvezni sistemi

Ti sistemi obravnavajo čas kot kontinuirano spremenljivko. To pomeni, da lahko spremembe v času spremljamo neprekinjeno. V teh sistemih so vhodni in izhodni signali funkcije časa, ki so opisane z diferencialnimi enačbami. Primeri časovno zveznih sistemov so gibanje planetov v vesolju, električni tokovi v vezjih in spreminjanje koncentracije metabolitov v bioloških procesih.

Primer časovno zveznega sistema je **dušen oscilator**, ki ga opišemo z naslednjo linearno diferencialno enačbo:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0,$$

pri čemer je m masa telesa, b je koeficient dušenja in k je koeficient vzmeti. Rešitev enačbe podaja časovno odvisnost spreminjanje lege nihala $x = x(t)$.

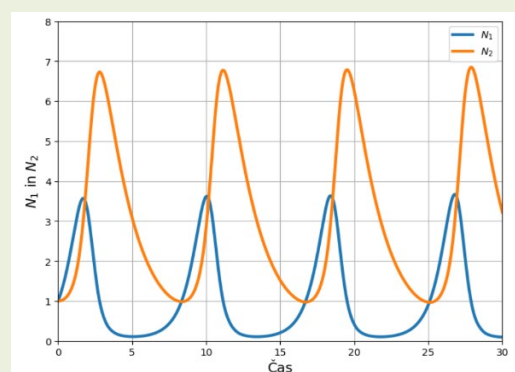


Slika 1.14: Spreminjanje lege nihala $x = x(t)$ pri dušenem nihanju. A_0 – začetna amplituda nihanja.

Primer časovno zveznega sistema je tudi model **Lotka-Volterra**, ki opisuje populacijsko dinamiko dveh živalskih vrst, od katerih je ena plenilec (N_2) druga pa plen (N_1).

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= k_1 N_1 - k_0 N_1 N_2, \\ \frac{dN_2}{dt} &= -k_2 N_2 + k_0 N_1 N_2, \end{aligned}$$

pri tem so k_0 , k_1 in k_2 pozitivne konstante.



Slika 1.15: Populacijska dinamika dveh živalskih vrst.

Kadar imamo opravka tudi s prostorsko odvisnimi spremenljivkami, sisteme opišemo s **parcialnimi diferencialnimi enačbami**.

Primeri parcialnih diferencialnih enačb so:

$$\text{valovna enačba } \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \rightarrow u = u(x, t),$$

$$\text{difuzijska enačba za koncentracijo snovi } \frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \rightarrow c = c(x, t),$$

$$\text{difuzijska enačba za prevajanje toplote } \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \rightarrow T = T(x, t),$$

$$\text{kontinuitetna enačba } \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow v = v(x, t).$$

Diskretni sistemi

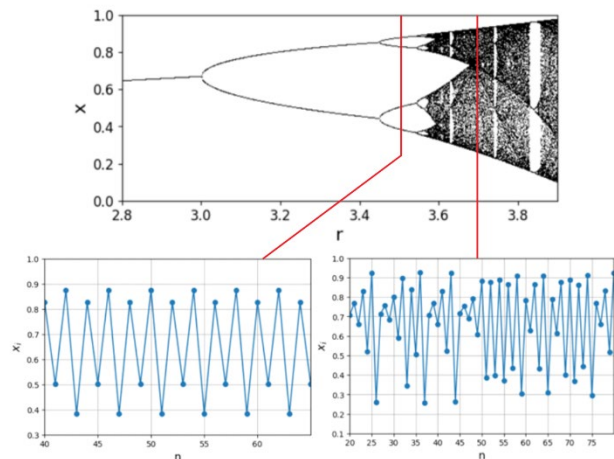
Diskretni sistemi obravnavajo čas kot diskretno spremenljivko, kjer se čas razdeli na določene diskretne korake ali trenutke. Spremembe v sistemu se pojavljajo le ob določenih časovnih točkah, kar običajno opisujemo s pomočjo diskretnih oziroma **diferenčnih enačb**. Primeri diskretnih sistemov na primer vključujejo digitalne računalnike in diskretne časovne vrste zaporednih meritev.

Logistična mapa

Primer preprostega enodimenzionalnega diskretnega sistema, ki ga je proučeval avstralski fizik Robert May. Sistem opisuje razvoj populacije:

$$x_{i+1} = rx_i(1 - x_i),$$

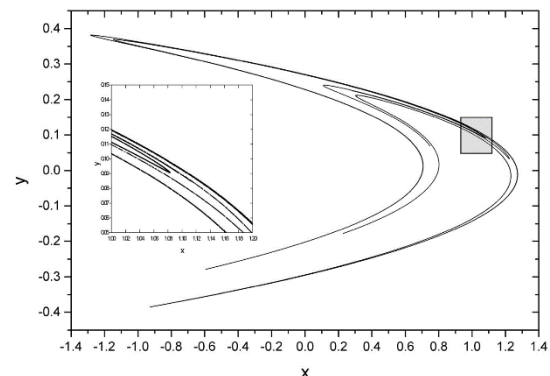
kjer je x število populacije v i -tem času, parameter r pa odraža dinamiko sistema. Enačba je znana tudi kot logistična enačba.



Slika 1.16: Prikaz bifurkacijskega diagrama in vrednosti x_i za $r = 3,5$ in $r = 3,7$.

Henonova preslikava

Henonova preslikava je znan primer diskretnega dinamičnega sistema, ki se uporablja za modeliranje kaotičnega obnašanja. Kaotično obnašanje vključuje občutljivost na začetne pogoje in fraktalne strukture v faznem prostoru, kar je prikazano tudi na sliki 1.17. Je tudi primer sistema, ki je relativno enostaven za numerično raziskovanje in ga pogosto uporabljajo kot učno orodje za razumevanje osnov kaotičnih sistemov.



Slika 1.17: Fraktalne strukture Henonove preslikave.

Henonovo preslikavo zapišemo z raztezanjem in prepogibanjem faznega prostora:

- upogib: $T_1: x' = x, y' = 1 - ax^2 + y,$
- skrčitev: $T_2: x'' = bx', y'' = y',$
- rotacija za $\pi/2$ (zrcaljenje preko y osi): $T_3: x''' = y'', y''' = x''.$

Z združitvijo teh preslikav $T = T_1 \cdot T_2 \cdot T_3$ dobimo diskretni model:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 - y_n, \\ y_{n+1} &= bx_n. \end{aligned}$$

Rezultati modela so prikazani na sliki 1.17.

1.2.3 Linearni in nelinearni sistemi

Delitev dinamičnih sistemov na linearne in nelinearne sisteme je temeljna in pomembna klasifikacija, ki je široko uporabna v znanosti in inženiringu. Razlika med njima temelji na obliki matematičnih enačb, ki opisujejo dinamiko sistema.

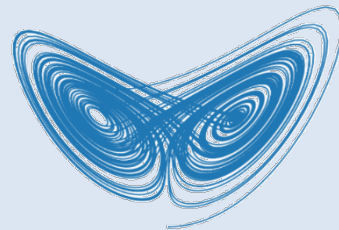
Linearni sistemi so tisti, kjer so matematične enačbe, ki opisujejo dinamiko sistema, linearni odzivi na vhodne spremenljivke ali začetne pogoje. Na splošno lahko linearni dinamični sistem zapišemo v obliki linearnih diferencialnih enačb ali linearnih diferenčnih enačb, odvisno od tega, ali je sistem zvezen ali diskreten. Linearni sistemi so matematično dobro razumljivi in so enostavne rešitve. Njihova prednost je v tem, da se obnašajo predvidljivo in jih lahko analiziramo s pomočjo različnih matematičnih orodij, kot so Laplaceova transformacija in Fouriereva analiza.

Nelinearni sistemi vsebujejo nelinearne enačbe, ki so običajno bolj kompleksne in ne omogočajo enostavne analitične rešitve. Za njihovo analizo pogosto uporabljajo numerične metode in računalniško modeliranje. Nelinearni sistemi so značilni za mnoge realne sisteme v naravi. Vključujejo lahko kompleksne nelinearne vzorce, nepravilne oscilacije in kaotično obnašanje.

Primer nelinearnega sistema je že prej omenjen Lorenzov sistem:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z. \end{aligned}$$

Uporablja se za modeliranje dinamike vremenskega sistema in je postal klasičen primer kaosa v znanosti. Na sliki je prikazan primer trajektorije v faznem prostoru, ki ponazarja tako imenovan "Lorenzov atraktor".



Slika 1.18: Lorenzov atraktor.

Izbira med linearnimi in nelinearnimi modeli je odvisna od narave sistema, ki ga želimo opisati, in namena analize. Linearni modeli so uporabni za preproste sisteme, kjer je linearna aproksimacija primerna. Nelinearni modeli pa so nujni za razumevanje kompleksnih, nelinearnih pojavov, kot je kaos, ki se pojavljajo v številnih naravnih in družbenih sistemih.

Linearni sistemi

Splošen zapis sistema n linearnih enačb z n neznankami:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n, \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Linearna diferencialna enačba (LDE)

LDE ne vsebuje produktov različnih odvodov. Zapišemo jo v obliki:

$$g_n(t) \frac{d^n x}{dt^n} + g_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + g_1(t) \frac{dx}{dt} + g_0(t)x = f(t),$$

kar lahko zapišemo tudi kot sistem linearnih diferencialnih enačb prvega reda.

Primer:

Spreminjanje lege dušenega harmonskega oscilatorja zapišemo kot

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0,$$

kjer je m masa oscilatorja, γ koeficient dušenja in k koeficient vzmeti.

Enačbo lahko zapišemo kot sistem dveh diferencialnih enačb prvega reda:

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad x(0) = x_0,$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\gamma}{m}v - \frac{k}{m}x, \quad v(0) = v_0.$$

Linearizacija nelinearnih sistemov

Kadar nas zanima obnašanje nelinearnega sistema v okolici stacionarnih točk, lahko sistem tudi lineariziramo. Linearizacija je matematični postopek, ki temelji na Taylorjevem razvoju funkcije okoli določene točke. V primeru dinamičnih sistemov je ta točka najpogosteje kot ravnotežna (stacionarna) točka, ker so odvodi sistema v teh točkah enaki nič. Pri tem je treba upoštevati, da je linearizacija veljavna le v bližini teh točk, kjer so odstopanja od njih majhna. V oddaljenih območjih nelinearni vplivi prevladajo in linearizacija ne velja več.

Taylorjeva vrsta (funkcija ene spremenljivke)

Taylorjeva vrsta ene spremenljivke je razvoj funkcije v potenčno vrsto okoli določene točke a . Vsak člen v vrsti predstavlja prispevek različnega odvoda funkcije $f(x)$. Več členov v vrsti vključimo, bolj natančna je aproksimacija funkcije $f(x)$ v okolici točke a .

Razvoj funkcije $f(x)$ v Taylorjevo vrsto okoli točke a zapišemo:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \dots$$

Če funkcijo lineariziramo, vsebuje **linearizirana funkcija** $L(x)$ le konstantni člen $f(a)$ in linearni člen $f'(a)(x - a)$:

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Taylorjeva vrsta (funkcija dveh spremenljivk)

Razvoj funkcije dveh spremenljivk v Taylorjevo vrsto v okolici točke (a, b) je podoben razvoju funkcije ene spremenljivke v Taylorjevo vrsto, vendar zdaj uporabimo delne odvode po posamezni spremenljivki. Splošna oblika funkcije $f(x, y)$ okoli točke (a, b) je:

$$f(x, y) = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) + \frac{1}{2}(f''_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f''_{yy}(a, b)(y - b)^2) + \dots,$$

pri čemer je: $f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}$, $f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ in $f''_{xy} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}$.

Linearizirana funkcije dveh spremenljivk $f(x, y)$ okoli točke (a, b) upošteva le prve odvode po posamezni spremenljivki:

$$L(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b).$$

Primeri:

1. Lineariziraj funkcijo $f(x) = x^2 - 1$ okoli točke $a_1 = 1$ in $a_2 = -1$.

$$L(x) = a^2 - 1 + 2a(x - a),$$

$$a_1 = 1 \rightarrow L_1(x) = 2x - 2,$$

$$a_2 = -1 \rightarrow L_2(x) = -2x + 2.$$

2. Lineariziraj funkcijo $f(x) = \sin(x)$ okoli točke $a = 0$.

$$L(x) = \sin(a) + \cos(a)(x - a),$$

$$a = 0 \rightarrow L(x) = x.$$

3. Lineariziraj enačbo za dušeno matematično nihalo: $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\gamma\frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2 \sin(\varphi) = 0$, pri čemer je φ odklik (zasuk) iz ravnovesne lege, γ koeficient dušenja, ω_0 pa lastna frekvenca nihala.

Zapišimo dve diferencialni enačbi prvega reda:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \frac{d\omega}{dt} = -\omega_0^2 \sin(\varphi) - 2\gamma\omega.$$

Druga enačba je nelinearna in jo lineariziramo. Dobimo sistem dveh linearnih diferencialnih enačb prvega reda:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \frac{d\omega}{dt} = -\omega_0^2 \varphi - 2\gamma\omega.$$

1.2.4 Dimenzija sistemov

Dimenzija dinamičnega sistema se nanaša na **število neodvisnih spremenljivk**, ki so potrebne za popoln opis obnašanja sistema. To je pomembna lastnost, saj pove, kako kompleksen je sistem in koliko informacij je potrebnih za napovedovanje njegove dinamike. Večja dimenzija pomeni, da je sistem bolj kompleksen in zahteva več informacij za napovedovanje njegovega obnašanja.

Kadar imamo pri proučevanju časovnega poteka obnašanja sistema opravka s sistemom N navadnih diferencialnih enačb prvega reda:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_i(0) = x_{0,i}, \quad i = 1, 2, 3 \dots N,$$

je N – dimenzija sistema.

Primer 1:

Enostaven mehanski sistem, kot je nihanje mase na vzmeti vzdolž osi x , ima dimenzijo 2, ker ga lahko opišemo z dvema neodvisnima spremenljivkama: položajem (x) in hitrostjo (v).

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad x(0) = x_0,$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\gamma}{m}v - \frac{k}{m}x, \quad v(0) = v_0,$$

pri čemer je k koeficient vzmeti in γ koeficient dušenja.

Primer 2:

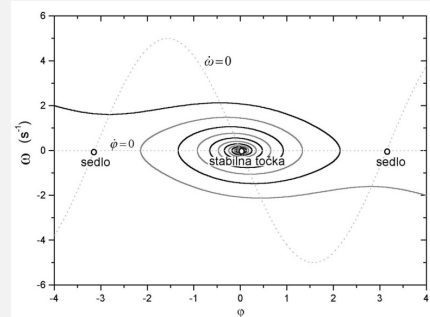
Primer dušenega težnega oscilatorja lahko zapišemo z diferencialno enačbo drugega reda:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\gamma \frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2 \sin(\varphi) = 0.$$

V tem primeru govorimo o **2D sistemu (N = 2)**, saj lahko sistem zapišemo z dvema diferencialnima enačbama prvega reda:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \frac{d\omega}{dt} = -\omega_0^2 \sin(\varphi) - 2\gamma\omega.$$

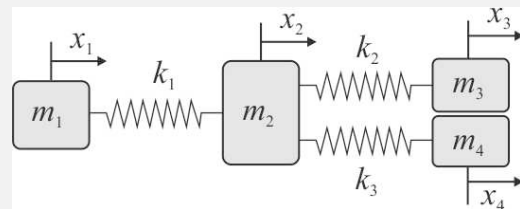
Obnašanje takšnega sistema lahko prikažemo tudi v faznem prostoru. Ker imamo v tem primeru 2D sistem, je fazni prostor ravnina (ω, φ).



Slika 1.19: Fazni diagram dušenega oscilatorja.

Primer 3:

Štiri telesa z masami m_1, m_2, m_3 in m_4 so povezana med seboj z vzmetmi s konstantami k_1, k_2 in k_3 . Telesa izmaknemo iz ravnovesne lege in spustimo, tako da zanihajo vzdolž osi x . Telesa se pri tem gibljejo po podlagi brez trenja.



Slika 1.20: Sistem štirih teles povezanih z vzmetmi.

V tem primeru imamo opravka z **8D sistemom**, saj gibanje opisuje 8 spremenljivk oziroma 8 diferencialnih enačb prvega reda:

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i \quad \text{in} \quad \frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{m} \sum_j F_{ji}; \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Naloge:

1.1 Zgodovinski pregled

N 1.1: Iz zgodovinskega vidika opiši rešitev problema gibanja dveh teles pod vplivom gravitacijske sile.

N 1.2: Iz zgodovinskega vidika opiši razvoj proučevanja gibanja treh teles.

Naloge:**1.2 Glavne značilnosti dinamičnih sistemov****1.2.1 Deterministični in stohastični sistemi**

N 1.3: Opiši en primer determinističnega in en primer stohastičnega dinamičnega sistema.

1.2.2 Časovno zvezni in diskretni sistemi

N 1.4: Opiši primer diskretnega sistema in zapiši enačbe.

1.2.3 Linearni in nelinearni sistemi

N 1.5 Zapiši enačbe za tri primere linearnih in tri primere nelinearnih dinamičnih sistemov.

N 1.6 Lineariziraj funkcijo $f(x) = \sin(x)$ okoli točk:

$$x_0 = 0, x_1 = \pi/2, x_2 = \pi \text{ in } x_3 = 3\pi/2.$$

N 1.7 Lineariziraj funkcijo $f(x) = e^x$ okoli točke $x_0 = 0$.

N 1.8 Odmik delcev iz ravnovesne lege $u(t, x)$ vzdolž osi x opisuje funkcija: $u(t, x) = u_0 \sin(\omega t - kx)$, pri čemer je $\omega = 2\pi/T_0$ in $k = 2\pi/\lambda$. Lineariziraj funkcijo $u(t, x)$ okoli točk: $(0, \lambda/2)$, $(T_0, 0)$, $(0, \lambda/4)$, $(T_0/4, \lambda/4)$.

1.2.4 Dimenzija sistemov

N 1.9 Določi dimenzijo sistemov:

a) $dy/dt = y(2 + y)(3 - y)$,

b) $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2x = 0$,

c) $\dot{x} = -2y + x^3, \dot{y} = -2y + x$.

N 1.10 Telo se giblje vzdolž osi x pod vplivom zunanjih sil. Če poznamo sile, ki delujejo na telo, lahko določimo spreminjanje lege telesa v odvisnosti od časa $x(t)$. Kolikšna je v tem primeru dimenzija sistema?

2 Enodimenzionalni sistemi

Enodimenzionalni dinamični sistemi vključujejo eno spremenljivko, rešitev ki jo dobimo na podlagi ene diferencialne enačbe prvega reda. Te sisteme je pogosto enostavno analizirati in razumeti, saj imajo preprosto geometrijsko interpretacijo v obliki faznega diagrama.

Splošna oblika enodimenzionalnega dinamičnega sistema je:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x(0) = x_0,$$

kjer je $x = x(t)$ spremenljivka, ki opisuje stanje sistema v nekem trenutku.

Razumevanje dinamike enodimenzionalnih sistemov je lahko koristno pri reševanju problemov na različnih področjih, kot so biologija (populacijska dinamika), elektrotehnika (RC vezje), mehanika (gibanje pod vplivom sil) in ekonomija (modeli povpraševanja in ponudbe).

Pomembni so za razumevanje osnovnih principov dinamike dinamičnih sistemih. S preprostimi enodimenzionalnimi modeli lahko analiziramo stabilnost, bifurkacije in dolgoročno obnašanje sistema ter razvijamo intuicijo o dinamiki bolj kompleksnih sistemov. Omogoča učenje, kako spreminjanje parametrov vpliva na obnašanje sistema in kako lahko majhne spremembe v začetnih pogojih vodijo do različnih rezultatov. Tudi če so sistemi, ki jih obravnavamo, dejansko večdimenzionalni, lahko analiza enodimenzionalnih modelov pomaga pri napovedovanju in razumevanju obnašanja sistema v bližini ključnih ravnovesnih stanj ali ob kritičnih spremembah parametrov.

V nadaljevanju si oglejmo primer linearnega in nelinearnega enodimenzionalnega dinamičnega sistema.

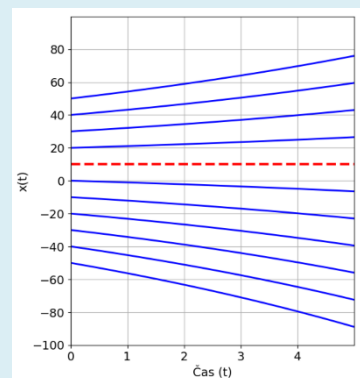
Primer 1:

Podan je linearni enodimenzionalni sistem $\dot{x} = ax + b$, pri čemer je $a = 0,1$ in $b = -1$. Spreminjanje časovnega poteka $x(t)$ za različne začetne pogoje rešimo z integriranjem zgornje enačbe:

$$dt = \frac{1}{ax+b} dx \rightarrow t = \int_{x_0}^x \frac{1}{ax+b} dx \rightarrow t = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{ax+b}{ax_0+b} \right|,$$

$$x = x_0 e^{at} + \frac{b}{a} (e^{at} - 1).$$

Iz diferencialne enačbe lahko razberemo tudi pogoj za stacionarno stanje $\dot{x} = 0 \rightarrow x^* = -b/a$. Časovni poteki za različne začetne pogoje so prikazani na sliki 2.1. Iz slike vidimo, da je pri $x^* = -b/a$ nestabilno stacionarno stanje, saj se pri majhnem odmiku s časom oddaljujemo od tega stanja.



Slika 2.1: Časovni potek $x(t)$ za različne začetne pogoje.

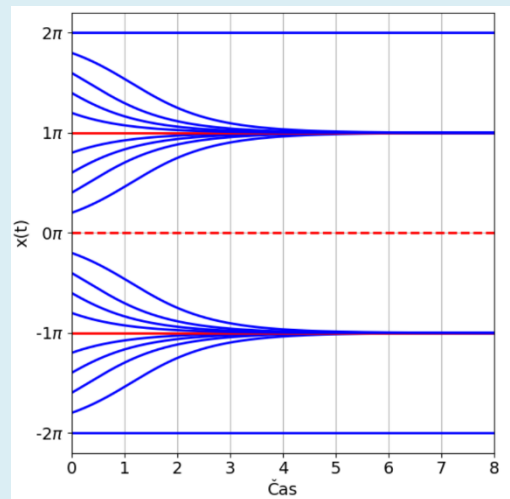
Primer 2:

Imamo nelinearni sistem $\dot{x} = \sin(x)$. Če enačbo integriramo, dobimo:

$$dt = \frac{1}{\sin x} dx \quad \rightarrow \quad t = \int_{x_0}^x \frac{1}{\sin x} dx,$$

$$t = \ln \left| \frac{\frac{1}{\sin x_0} + \frac{1}{\operatorname{tg} x_0}}{\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x}} \right| \quad \rightarrow \quad x = f(t).$$

Na sliki 2.2 je prikazan časovni potek $x(t)$ za različna začetna stanja. Iz rezultatov lahko razberemo, da je pri $x^* = 0$ nestabilno stanje, pri $x^* = \pi$ in $x^* = -\pi$ pa stabilno stacionarno stanje.



Slika 2.2: Časovni potek $x(t)$ za različne začetne pogoje.

Primer programske kode v Pythonu za numerični izračun diferencialne enačbe $dx/dt = ax + b$ po preprosti Eulerjevi metodi in prikaz rezultatov.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parametri diferencialne enačbe
a = 0.1
b = -1

# Časovni korak in interval
dt = 0.01
t = np.arange(0, 10, dt)

# Začetna stanja od -50 do 50 s korakom 10
initial_states = range(-50, 51, 10)

# Nastavitve grafa
plt.figure(figsize=(8, 6))
plt.xlabel("Čas (t)", fontsize=12)
plt.ylabel("x(t)", fontsize=12)
plt.xlim(0,5)

plt.ylim(-100,80)
plt.xticks(np.arange(0, 5, 1), fontsize=12)
plt.yticks(np.arange(-100, 80, 20), fontsize=12)
plt.grid(True)

# Narišemo časovne poti za različna začetna stanja
for x0 in initial_states:
    x = []
    x.append(x0)
    for i in range(1, len(t)):
        x.append(x[-1] + a * x[-1] * dt + b * dt)

    if x0 == 10:
        plt.plot(t, x, 'r--', label=f'x(0)={x0}', lw=3)
    else:
        plt.plot(t, x, label=f'x(0)={x0}', c='blue', lw=2)

# Prikažemo graf
plt.show()
```

2.1 Geometrijski pristop reševanja enodimenzionalnih sistemov

Geometrijski pristop reševanja v matematiki in znanosti pomeni uporabo geometrije (uporaba grafov in diagramov) za analizo, razumevanje in reševanje različnih matematičnih in fizikalnih problemov. Geometrijski pristop pogosto uporabljamo za bolj intuitivno in vizualno predstavitev problemov ter omogoča pregledno razlago obnašanja sistemov.

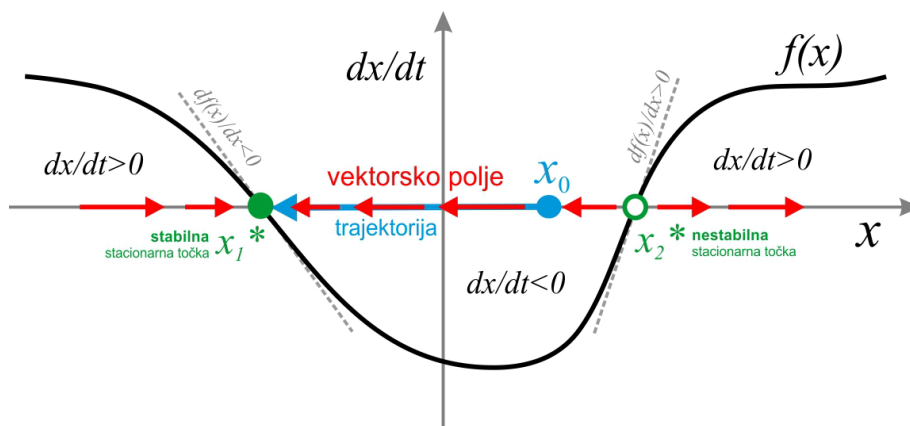
Pri dinamičnih sistemih geometrijski pristop uporabljamo za analizo in razumevanje obnašanja sistema v odvisnosti od časa. Pri enodimenzionalnih dinamičnih sistemih pogosto uporabljamo pri poučevanju in razumevanju osnovnih konceptov dinamičnih sistemov, saj omogoča enostavno vizualizacijo in intuicijo o obnašanju sistema. Če sistem vsebuje ravnotežne točke, lahko geometrijski pristop pomaga tudi pri analizi njihove stabilnosti. Na osi x lahko ugotovimo, ali so ravnotežne točke privlačne (stabilne) ali odbojne (nestabilne).

Pri enodimenzionalnem sistemu iščemo rešitev diferencialne enačbe:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \rightarrow x = f(t).$$

Ker imamo opravka z **enodimenzionalnimi** sistemi, govorimo o prikazu **toka količine na premici** x oziroma o tako imenovanem **vektorskem polju na premici**.

Na spodnji sliki 2.3 vidimo primer vektorskega polja na premici. Rdeče puščice na sliki predstavljajo smeri **hitrostnih vektorjev** spreminjajoče se količine x . Spreminjanje količine x opisuje funkcija $f(x)$, ki predstavlja diferencialno enačbo $\frac{dx}{dt} = f(x)$. Z modro črto je na sliki prikazan primer **trajektorije**, ki se prične v začetnem stanju x_0 . Iz grafa lahko razberemo tudi **stacionarna stanja** x_i^* , za katere velja, da je $f(x_i^*) = 0$. Vidimo tudi območja, kjer se vrednost količine x povečuje ($dx/dt > 0$), in območja, kjer se vrednost x zmanjšuje ($dx/dt < 0$).



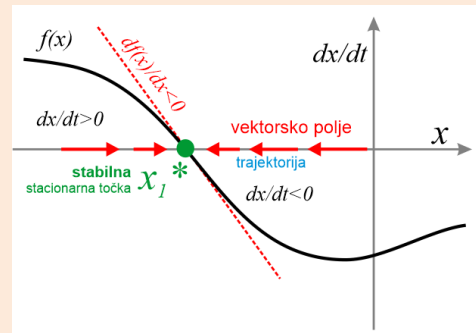
Slika 2.3: Vektorsko polje enodimenzionalnega sistema.

Stabilnost stacionarnih točk

Za stacionarna stanja x_i^* velja $dx/dt = 0$, oziroma $f(x_i^*) = 0$. Vrednost količine x se v tem primeru ne spreminja in ostaja enaka x_i^* . Kadar se nekoliko izmaknemo iz stacionarnih točk, se bo sistem od teh točk oddaljil, ali vrnil nazaj v stacionarno stanje. Glede na to ločimo **stabilna** in **nestabilna** stacionarna stanja.

Za **stabilno stacionarno stanje** je značilno, da se sistem vrne v prvotno stanje, če ga nekoliko izmaknemo iz ravnovesne lege. V vektorskem polju se puščice iz obeh strani približujejo ravnovesni točki, kar lahko vidimo v primeru x_1^* na sliki 2.4. Za to točko tudi velja, da je:

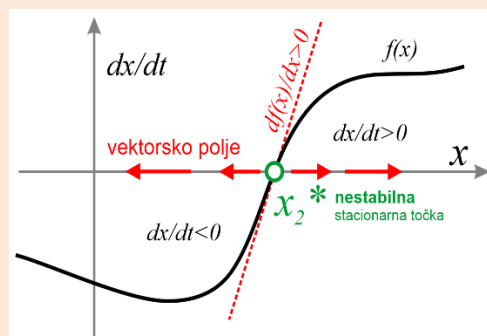
$$\frac{df(x^*)}{dx} < 0.$$



Slika 2.4: Stabilno stacionarno stanje.

Za **nestabilno stacionarno stanje** je značilno, da se sistem ne vrne v prvotno stanje, če ga nekoliko izmaknemo iz ravnovesne lege. V vektorskem polju se puščice iz obeh strani oddaljujejo od ravnovesne točke, kar lahko vidimo v primeru x_2^* na sliki 2.5. Za to točko tudi velja, da je:

$$\frac{df(x^*)}{dx} > 0.$$



Slika 2.5: Nestabilno stacionarno stanje.

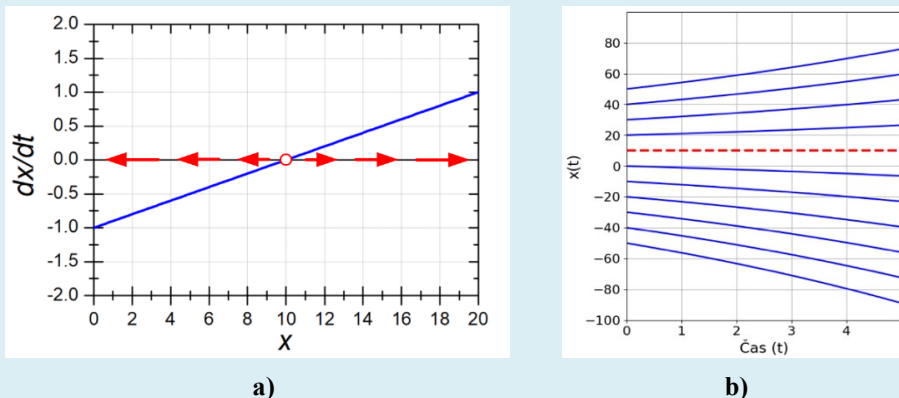
Kadar je $\frac{df(x^*)}{dx} = 0$, iz odvoda ne moremo določiti stabilnosti stacionarnega stanja. To stacionarno stanje je namreč lahko **stabilno**, **nestabilno** ali **polstabilno**. Stabilnost stacionarnega stanja v tem primeru določimo iz vektorskega polja. V primeru pol stabilnega stacionarnega stanja se vektorsko polje iz ene strani približuje iz druge pa oddaljuje od stacionarnega stanja.

Primer 1:

Podan je linearni sistem $\dot{x} = ax + b$. Za vrednosti $a = 0,1$ in $b = -1$ nariši vektorsko polje in časovni potek $x(t)$ za različna začetna stanja. Določi stacionarna stanja in njihovo stabilnost.

Stacionarno stanje $x^* = -b/a$.

Stacionarno stanje je nestabilno: $\frac{df(x^*)}{dx} > 0$.



Slika 2.6: Vektorsko polje (a) in časovni potek $x(t)$ (b) za primer $\dot{x} = ax + b$, vrednost $a = 0,1$ in $b = -1$.

Primer 2:

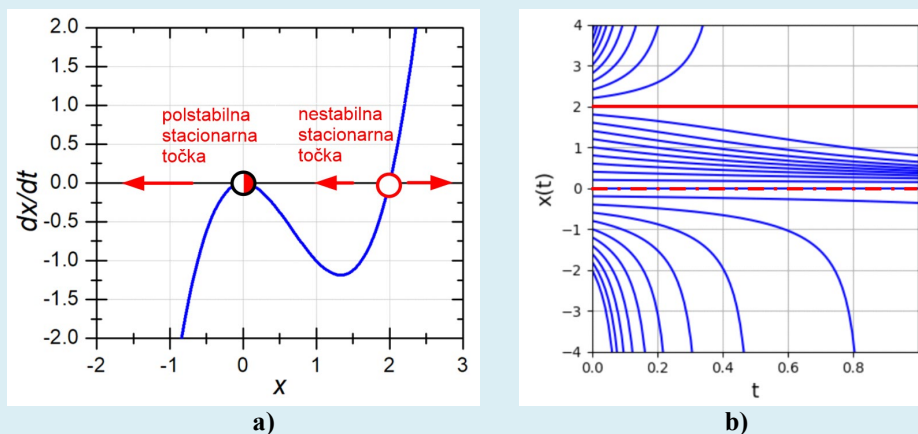
Podan je nelinearni sistem $\dot{x} = x^2(x - 2)$. Nariši vektorsko polje in časovni potek $x(t)$ za različna začetna stanja. Določi stacionarna stanja in njihovo stabilnost.

Stacionarni stanja sta: $x_1^* = 0$ in $x_2^* = 2$. Stabilnost stacionarnih stanj določimo z odvodom: $\frac{df(x)}{dx} = 2x(x - 2) + x^2$.

Za stacionarno stanje x_1^* velja $\frac{df(x_1^*)}{dx} = 0$. Na podlagi vrednosti odvoda ne moremo določiti stabilnosti. Iz vektorskega polja vidimo, da imamo polstabilno stacionarno stanje.

Za stacionarno stanje x_2^* velja $\frac{df(x_2^*)}{dx} > 0$. Na podlagi vrednosti odvoda vemo, da imamo v tem primeru nestabilno stacionarno stanje.

Slika 2.7 prikazuje vektorsko polje s stacionarnimi stanji in časovni potek $x(t)$.



Slika 2.7: Vektorsko polje (a) in časovni potek $x(t)$ (b) za primer $\dot{x} = x^2(x - 2)$.

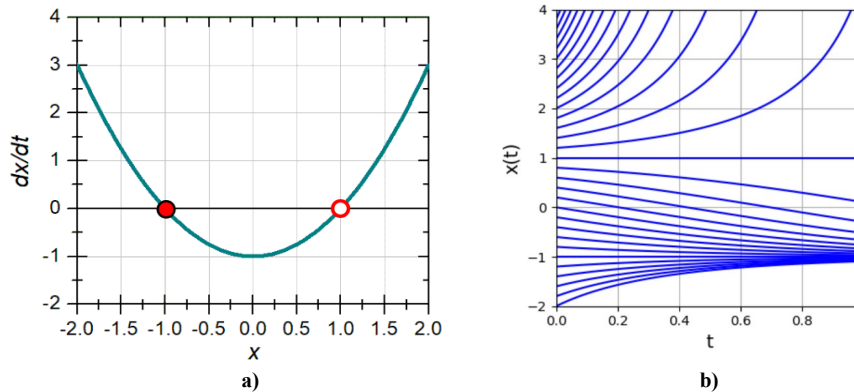
Naloge

Za spodaj naštete primere nariši $dx/dt = f(x)$, poišči stacionarne točke in določi njihovo stabilnost. Nariši tudi časovni potek količin za različna začetna stanja in ga primerjaj z vektorskim poljem.

a) $dx/dt = x^2 - 1$, b) $dy/dt = y(2 + y)(3 - y)$, c) $dz/dt = \ln(z)$.

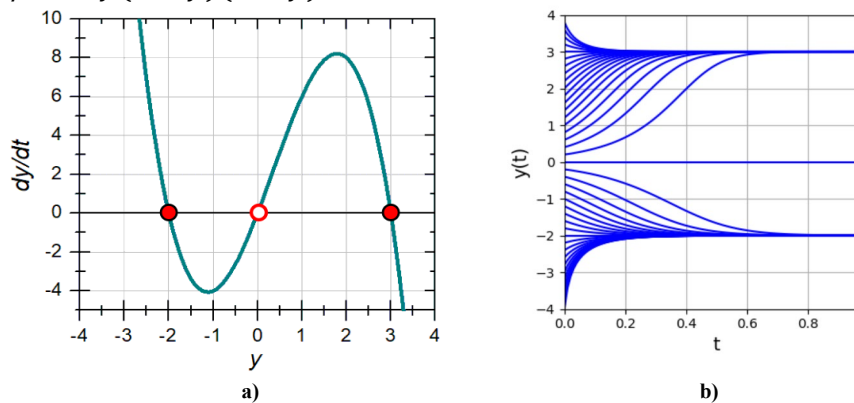
Rešitve:

a) $dx/dt = x^2 - 1$



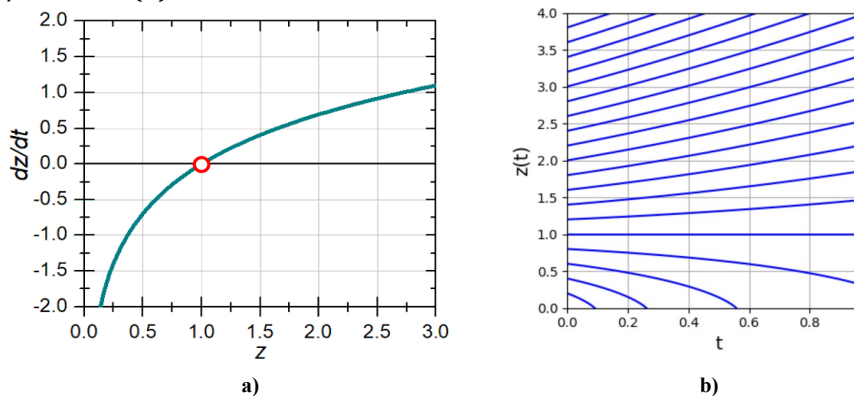
Slika 2.8: Vektorsko polje (a) in časovni potek $x(t)$ (b) za primer $\dot{x} = x^2 - 1$.

b) $dy/dt = y(2 + y)(3 - y)$



Slika 2.9: Vektorsko polje (a) in časovni potek $y(t)$ (b) za primer $\dot{y} = y(2 + y)(3 - y)$.

c) $dz/dt = \ln(z)$



Slika 2.10: Vektorsko polje (a) in časovni potek $z(t)$ (b) za primer $\dot{z} = \ln(z)$.

Naloge:**2.1 Geometrijski pristop reševanja enodimenzionalnih sistemov**

N 2.1.1 Enačba $\dot{x} = v_0(\sin(kx) + b)$ opisuje hitrost delca vzdolž osi x . Pri tem je $v_0 = 1 \text{ m/s}$ in $k = 2\pi/\lambda$, pri čemer je $\lambda = 0,2 \text{ m}$.

a) Za vrednost $b = 0$ poišči stacionarna stanja vzdolž osi x in določi njihovo stabilnost.

b) Za vrednost $b = 0$ približno skiciraj $x(t)$ za različne začetne vrednosti:

$x_0 = 0$, $x_0 = 0,01 \text{ m}$, $x_0 = 0,05 \text{ m}$, $x_0 = 0,10 \text{ m}$ in $x_0 = 0,18 \text{ m}$.

c) Pri katerih vrednostih x ima delec največjo pozitivno hitrost in kolikšna je, če je $b = 1/2$?

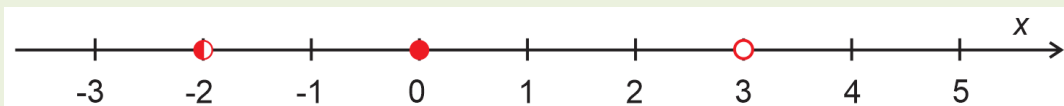
d) Določi stacionarna stanja vzdolž osi x in njihovo stabilnost, če je: $b = 1/2$, $b = -1/2$, $b = 1$ in $b = -1$.

N 2.1.2 Analiziraj sledeče enačbe z geometrijskim pristopom reševanja enodimenzionalnih sistemov. Za vsak primer nariši vektorsko polje na premici, določi stacionarna stanja in njihovo stabilnost ter približno skiciraj $x(t)$ za različna začetna stanja x_0 . Dobljene rezultate primerjaj z numeričnimi rešitvami diferencialnih enačb.

a) $\frac{dx}{dt} = 4x^2 - 16$, b) $\frac{dx}{dt} = 1 + \frac{1}{2} \cos x$, c) $\frac{dx}{dt} = 1 - 2 \cos x$, d) $\frac{dx}{dt} = e^{-x} \sin 2x$.

N 2.1.3 Delec se giblje vzdolž osi z s hitrostjo $v_z = dz/dt = (3z - z^2)(2 + z)^2$. Poišči stacionarna stanja in določi njihovo stabilnost.

N 2.1.4 Slika 2.11 prikazuje stacionarna stanja in njihovo stabilnost. Poišči enačbo $\frac{dx}{dt} = f(x)$, ki ustreza danim stacionarnim točkam in nariši vektorsko polje na premici x .



Slika 2.11: Stacionarna stanja in njihova stabilnost.

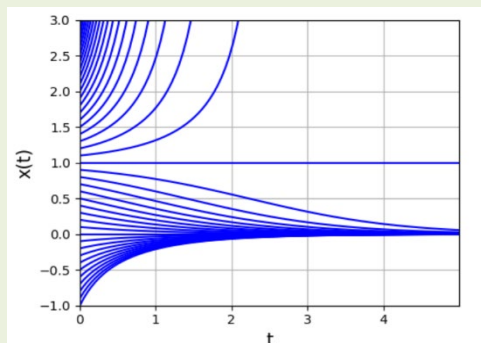
N 2.1.5 Slika 2.12 prikazuje časovni potek spreminjajoče se količine x za različne začetne pogoje.

a) Določi stacionarne točke.

b) Določi stabilnost stacionarnih točk.

c) Nariši vektorsko polje $\dot{x} = f(x)$ in na njem prikaži trajektorijo, ki ustreza začetnemu stanju $x_0 = 0,8$.

d) Zapiši diferencialno enačbo $\dot{x} = f(x)$, katere rešitev $x(t)$ ustreza prikazu na sliki.



Slika 2.12: Časovni potek $x(t)$ za različna začetna stanja x_0 .

2.2 Linearna stabilnostna analiza

Namesto uporabe grafičnih metod za določanje stabilnosti stacionarnih točk želimo pogosto kvantitativno merilo stabilnosti. Takšne informacije lahko pridobimo z **linearno stabilnostno analizo**, s katero ocenimo **stabilnost stacionarnih točk** v dinamičnih sistemih.

Linearna stabilnostna analiza se nanaša na linearni približek sistema v okolici stacionarnih točk.

Naj bo x^* stacionarna točka sistema $\frac{dx}{dt} = f(x)$. Naredimo majhen izmik iz stacionarnega stanja:

$$\eta(t) = x(t) - x^*.$$

Da bi ugotovili, ali se $\eta(t)$ s časom povečuje ali zmanjšuje, moramo izračunati časovni odvod izmika:

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(x(t) - x^*) = \frac{dx}{dt} = f(x) = f(x^* + \eta),$$

pri tem upoštevamo, da je $\frac{dx^*}{dt} = 0$.

Uporabimo Taylorjevo vrsto za razvoj funkcije v okolici stacionarnega stanja:

$$f(x^* + \eta) = f(x^*) + \eta \frac{\partial f(x^*)}{\partial x} + \eta^2 \frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x^2} + \dots$$

Če je člen $\eta \frac{\partial f(x^*)}{\partial x} \neq 0$, lahko člene višjega reda zanemarimo, saj je $\eta \ll 1$. Upoštevajmo tudi, da je $f(x^*) = 0$, in dobimo:

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = f(x^* + \eta) \approx \eta \frac{\partial f(x^*)}{\partial x}.$$

Dobili smo **linearno enačbo prvega reda**, ki kaže, da odmik iz ravnovesne lege $\eta(t)$ eksponentno narašča, če je $\frac{\partial f(x^*)}{\partial x} > 0$, in se eksponentno zmanjšuje, če je $\frac{\partial f(x^*)}{\partial x} < 0$.

Iz tega lahko sklepamo, da $\frac{\partial f(x^*)}{\partial x}$ določa **stabilnost stacionarnega stanja**:

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x} > 0 \rightarrow \text{nestabilno stacionarno stanje,}$$

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x} < 0 \rightarrow \text{stabilno stacionarno stanje.}$$

V primeru, ko je $\frac{\partial f(x^*)}{\partial x} = 0$, višji členi v Taylorjevi vrsti niso več zanemarljivi in stabilnosti ne moremo več določiti na zgoraj omenjen način. V tem primeru moramo upoštevati tudi višje odvode.

Primer:

Klasificirajmo stacionarna stanja za dinamični sistem, ki opisuje logistično rast populacije. Število populacije v tem primeru določa enačba:

$$\frac{dN}{dt} = rN(1 - N/K),$$

pri čemer je r parameter rasti in K parameter, ki omejuje rast populacije ($r > 0$ in $K > 0$).

Stacionarni stanji sta:

$$N_1^* = 0 \quad \text{in} \quad N_2^* = K.$$

Vrednosti odvodov $\frac{\partial f(N)}{\partial N} = r - \frac{2rN}{K}$ v stacionarnih stanjih sta:

$$\frac{\partial f(N_1^*)}{\partial N} = r \quad \text{in} \quad \frac{\partial f(N_2^*)}{\partial N} = -r.$$

Iz rezultatov vidimo, da je $N_1^* = 0$ **nestabilno stacionarno stanje** in $N_2^* = K$ **stabilno stacionarno stanje**.

Naloge:**2.2 Linearna stabilnostna analiza**

N 2.2.1 Uporabi linearno stabilnostno analizo za določitev stabilnosti stacionarnih stanj za sistem:

$$\frac{dx}{dt} = \sin x.$$

N 2.2.2 Na podlagi linearne stabilnostne analize določi stabilnost stacionarnih točk za primer:

$$\frac{dx}{dt} = ax - x^3. \quad \mathbf{a)} \ a > 0. \quad \mathbf{b)} \ a < 0.$$

N 2.2.3 Kaj lahko poveš o stabilnosti stacionarnih točk x^* na podlagi linearne stabilnostne analize, če je $\frac{\partial f(x^*)}{\partial x} = 0$.

N 2.2.4 Določi stabilnost stacionarnih točk za primere (če ne moreš uporabiti linearne stabilnostne analize, uporabi grafični pristop):

$$\mathbf{a)} \ \frac{dx}{dt} = -x^3, \quad \mathbf{b)} \ \frac{dx}{dt} = x^3, \quad \mathbf{c)} \ \frac{dx}{dt} = x^2, \quad \mathbf{d)} \ \frac{dx}{dt} = 0.$$

2.3 Potencial

Prikaz dinamike sistemov lahko ponazorimo tudi s **potencialom**, ki ni nujno energijska funkcija, vendar pomaga razumeti dinamiko sistema.

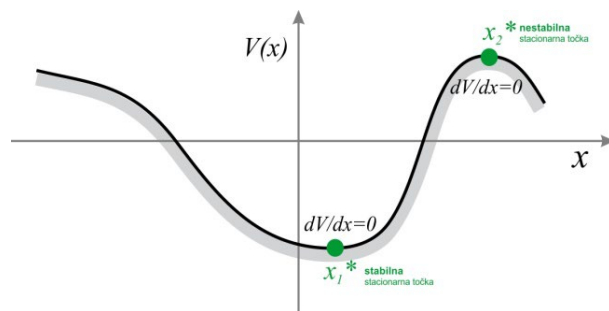
Za obravnavan enodimenzionalni sistem, $\frac{dx}{dt} = f(x)$,
je **potencial** definiran kot: $f(x) = -\frac{dV}{dx}$.

Potencial $V(x)$ je torej povezan z dinamiko sistema $\frac{dx}{dt} = f(x)$ z enačbo:

$$V(x) = -\int f(x)dx + C,$$

kjer je C konstanta, ki vpliva na velikost potenciala $V(x)$, ne vpliva pa na stabilnost stacionarnih točk. Zato običajno za konstanto C vzamemo vrednost nič.

Na sliki 2.13 vidimo primer potenciala $V(x)$. Iz grafa je razvidno, da so stacionarne točke $f(x) = 0$, ko velja $-\frac{dV}{dx} = 0$. Točka x_1^* je v tem primeru stabilna (minimum potenciala), točka x_2^* pa je nestabilna (maksimum potenciala).



Slika 2.13: Potencial $V(x)$.

Telo se giblje proti minimumu potenciala

Sprememba potenciala po spremenljivki $\frac{dV}{dx}$ določa hitrost spreminjanja spremenljivke $\frac{dx}{dt}$. Pokažemo lahko, da se telo giblje proti minimumu potenciala:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dx} f(x) = -\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 \leq 0.$$

Iz dobljene enačbe vidimo, da je $\frac{dV}{dt} \leq 0$. Torej se potencial s časom spreminja tako, da zavzema vedno manjšo vrednost, kar pomeni, da se telo **giblje proti minimumu potenciala**.

Če se telo v zgornjem primeru (slika 2.13) nahaja med stacionarnima stanjema x_1^ in x_2^* , se bo telo gibalo proti x_1^* , saj imamo v tej točki minimum potenciala. Telo se proti točki x_1^* giblje vedno počasneje in jo doseže v neskončnem času.*

Primer 1:

Za dan dinamični sistem $\dot{x} = x^2(x - 2)$ nariši vektorsko polje dx/dt in potencial $V(x)$. Določi stacionarna stanja in njihovo stabilnost.

Stacionarni stanji:

$$x_1^* = 0 \quad \text{in} \quad x_2^* = 2.$$

$$\frac{df(x)}{dx} = 2x(x - 2) + x^2,$$

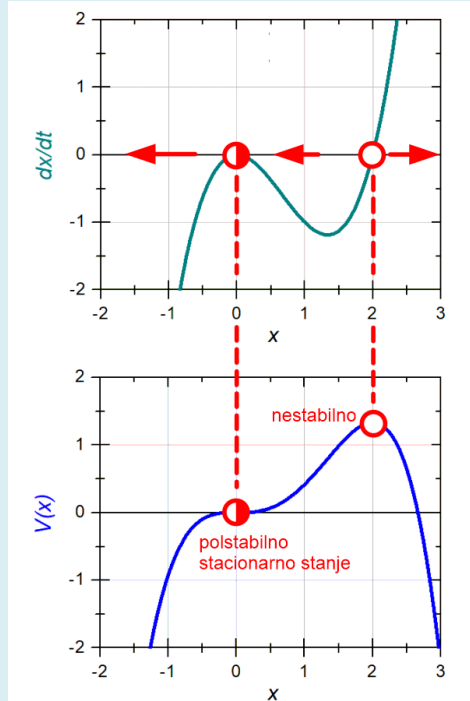
$$\frac{df(x_1^*)}{dx} = 0 \quad (\text{polstabilno}),$$

$$\frac{df(x_2^*)}{dx} > 0 \quad (\text{nestabilno}).$$

Potencial:

$$V(x) = -\int f(x)dx + C,$$

$$V(x) = -\left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}\right) + C.$$



Slika 2.14: Hitrostno polje dx/dt in potencial $V(x)$.

Primer 2:

Podan je dinamični sistem: $\dot{x} = a^2 - x^2$. Določi stabilnost stacionarnih točk za $a = 0$ in $a = 1$ in zapiši potencial $V(x)$.

Stacionarna stanja:

$$x_1^* = -a \quad \text{in} \quad x_2^* = a.$$

$$\frac{df(x)}{dx} = -2x.$$

Za $a > 0$ velja:

$$\frac{df(x_1^*)}{dx} > 0 \quad (\text{nestabilna}) \quad \text{in} \quad \frac{df(x_2^*)}{dx} < 0 \quad (\text{stabilna}).$$

Potencial

$$f(x) = -\frac{dV}{dx} \quad \rightarrow \quad V(x) = -a^2x + \frac{x^3}{3}.$$

Primer 3:

Za dan dinamični sistem $\dot{x} = x(1 - x^2)$ nariši vektorsko polje dx/dt in potencial $V(x)$. Določi stacionarna stanja in njihovo stabilnost.

Stacionarna stanja:

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = 1, \quad x_3^* = -1.$$

$$\frac{df(x)}{dx} = 1 - x^2 + x(-2x) = 1 - 3x^2,$$

$$\frac{df(x_1^*)}{dx} > 0 \text{ (nestabilno),}$$

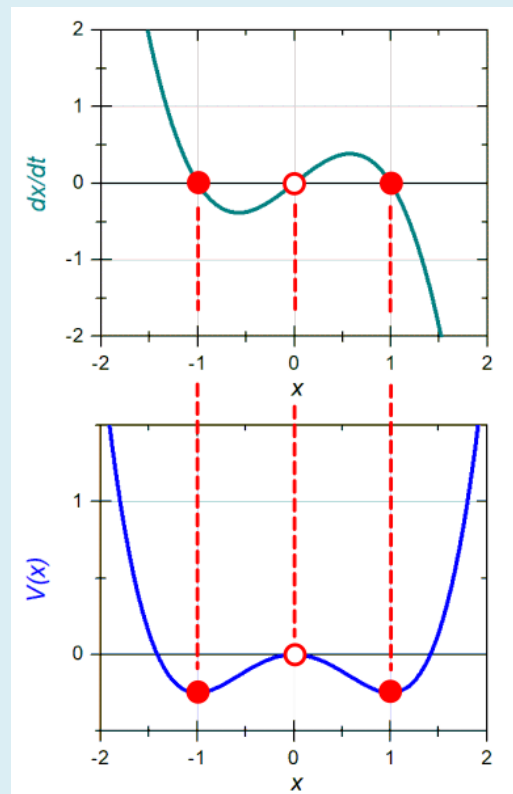
$$\frac{df(x_2^*)}{dx} < 0 \text{ (stabilno),}$$

$$\frac{df(x_3^*)}{dx} < 0 \text{ (stabilno).}$$

Potencial:

$$f(x) = -\frac{dV}{dx},$$

$$V = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + C.$$

Slika 2.15: Hitrostno polje dx/dt in potencial $V(x)$.

Primer programske kode v Pythonu za izris funkcije $f(x) = -x^2/2 + x^4/4$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# funkcija f(x)
def f(x):
    return -x**2/2 + x**4/4

# Interval od -2 do 2 z 400 točkami
x = np.linspace(-2, 2, 400)

# vrednosti funkcije
y = f(x)

# Risanje funkcije
plt.figure(figsize=(8, 6))

plt.plot(x, y, label='$f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$')

# Nastavitve grafa
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('f(x)')
plt.title('Graf funkcije $f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.5)
plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.5)

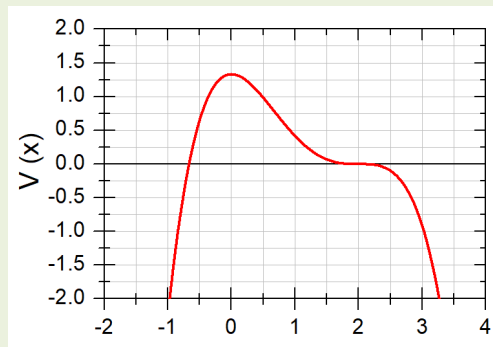
# Prikaz grafa
plt.show()
```

Naloge**2.3 Potencial**

N 2.3.1 Nariši vektorsko polje in potencial za dan primer: $dx/dt = (x^2 - 1)x$. Pokaži, da se telo giblje proti minimumu potenciala.

N 2.3.2 Slika 2.16 prikazuje potencial $V(x)$.

- Poišči stacionarna stanja in določi njihovo stabilnost.
- Za podan potencial $V(x)$ skiciraj vektorsko polje vzdolž osi x .
- Poišči diferencialno enačbo $dx/dt = f(x)$, ki ustreza definiciji potenciala $f(x) = -dV/dx$.



Slika 2.16: Potencial $V(x)$.

N 2.3.3 Podan je potencial $V(x) = a^2x - x^3/3$, kjer je a poljubna konstanta.

- Zapiši funkcijo $f(x)$, če je $\dot{x} = f(x)$.
- Določi stacionarna stanja in njihovo stabilnost za $a = 1$.

3 Fizikalni, biološki in kemijski primeri 1D sistemov

Obravnava dinamičnih sistemov je nepogrešljiv del naravoslovja, saj omogoča razumevanje in modeliranje različnih pojavov in procesov v fiziki, kemiji in biologiji. Običajno so ti procesi kompleksni, tako po svoji strukturi kot tudi dinamiki. Njihova obravnava zahteva tako imenovan sistemski pristop reševanja problemov, ki nas uči ustrezne razgradnje problema in smiselne sestave posameznih členov v ustrezno celoto, ki jo imenujemo model. Pri tem gre za matematično modeliranje, ki se je izkazalo kot uspešna znanstvenoraziskovalna metoda in je v večini primerov skupaj z eksperimentalnim delom podlaga različnim fizikalnim teorijam.

Pri obravnavi procesov v naravi lahko zasledimo tudi veliko aplikacij enodimenzionalnih (1D) dinamičnih sistemov, v katerih se osredotočamo na eno neodvisno spremenljivko, ki se spreminja skozi čas. Fizikalne 1D dinamične sisteme pogosto uporabljajo za modeliranje gibanja delcev, naraščanja in razpad radioaktivnih elementov, polnjenje in praznjenje kondenzatorjev ter številne druge fizikalne pojave. V kemijskih 1D dinamičnih sistemih se osredotočamo na reakcije, pri katerih spremljamo, kako se koncentracije reaktantov in produktov spreminjajo skozi čas. Biološki 1D dinamični sistemi so pogosto povezani z regulacijo bioloških procesov, kot so metabolizem, razmnoževanje celic, širjenje populacij in drugi biološki pojavi.

Čeprav 1D dinamični sistemi v fiziki, biologiji in kemiji ponujajo koristne poenostavitve za analizo in razumevanje dinamike, imajo tudi svoje omejitve in slabosti. Običajno so bolj primerni za preproste primere in specifične okoliščine, kjer je ena neodvisna spremenljivka zadostna za razumevanje sistema. Uporabni so torej za analizo specifičnih pojavov, ki jih je mogoče poenostaviti na eno dimenzijo. Mnogi naravni procesi pa so v resnici večdimenzionalni in zajemajo kompleksnejše večdimenzionalne interakcije.

3.1 Spreminjanje hitrosti pod vplivom sile

Obravnavajmo dinamičen sistem, pri katerem nas zanima hitrost gibanja telesa, ki se giblje vzdolž osi x pod vplivom zunanje sile F . Za obravnavo tega primera uporabimo *II. Newtonov zakon*, ki pravi, da je pospešek telesa sorazmeren s silo, ki deluje na telo.

Na splošno lahko zapišemo:

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = a, \quad a = \frac{F(v,x)}{m},$$

pri čemer je sila lahko odvisna od lege in hitrosti telesa $F(v, x)$.

V tem primeru vidimo, da imamo dve diferencialni enačbi prvega reda, kar priča o tem, da imamo opravka z **2D sistemom**. V posebnem primeru, ko nas zanima le spreminjanje **hitrosti** v odvisnosti od časa $v(t)$ in je sila le funkcija hitrosti $F(v)$, pa se sistem zreducira na **1D sistem**:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} F(v). \quad (1D \text{ sistem})$$

3.1.1 Konstantna sila

Oglejmo si primer gibanja telesa z maso m pod vplivom konstantne sile. Zanima nas spreminjanje hitrosti, kar opisuje naslednja diferencialna enačba:

$$\frac{dv}{dt} = a, \quad a = \frac{F}{m}, \quad v(0) = v_0.$$

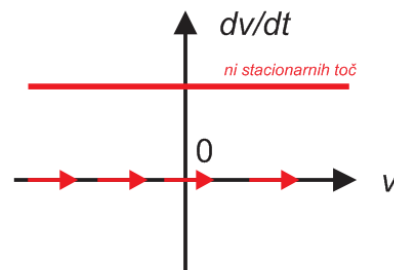
Rešitev diferencialne enačbe kaže, da se hitrost enakomerno spreminja glede na velikost pospeška a :

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt \quad \rightarrow \quad v(t) = v_0 + at.$$

V nadaljevanju so prikazani primeri vektorskega (hitrostnega) polja za tri različne velikosti sile F .

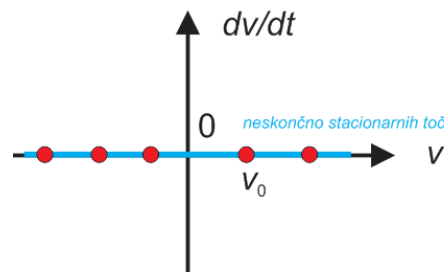
V prvem primeru (A), ko je $a = \frac{F}{m} > 0$, vidimo, da enako velike puščice kažejo v smeri naraščanja hitrosti, pri čemer stacionarna stanja ne obstajajo. Hitrost torej enakomerno narašča od začetne vrednosti v_0 .

$$(A) \quad \frac{F}{m} > 0 \rightarrow \frac{dv}{dt} > 0.$$



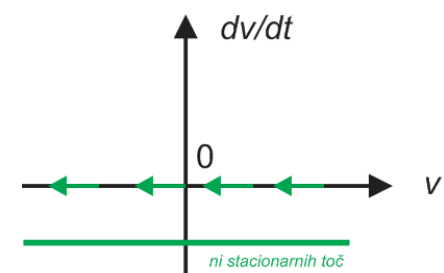
V drugem primeru (B) je $F = 0$ in posledično $a = 0$. V tem primeru imamo neskončno stacionarnih stanj. Vsako začetno stanje je hkrati tudi stacionarno stanje, kar priča o tem, da telo ohranja začetno hitrost v_0 .

$$(B) \quad \frac{F}{m} = 0 \rightarrow \frac{dv}{dt} = 0.$$



V tretjem primeru (C) je pospešek $a = \frac{F}{m} < 0$, kar priča o tem, da hitrost enakomerno pada od začetne vrednosti v_0 . Podobno kot v prvem primeru tudi v tem primeru stacionarna stanja ne obstajajo.

$$(C) \quad \frac{F}{m} < 0 \rightarrow \frac{dv}{dt} < 0.$$



Slika 3.1: Vektorska polja hitrosti.

3.1.2 Negativna povratna zanka

Negativna povratna zanka je v regulacijskem inženiringu in v teoriji sistemov ključna za doseganje **stabilnosti sistema**. Omogoča, da se sistem **ustali pri določeni vrednosti**.

V nadaljevanju si oglejmo primere, ko velikost hitrosti v negativnem pogledu vpliva na spremembo hitrosti:

$$\frac{dv}{dt} = -f(v)\hat{v}.$$

Iz fizikalnega vidika je to znano pri obravnavi **sile upora**.

Primer 1:

Obravnavajmo **linearni zakon upora**, pri katerem je sila linearno odvisna od hitrosti $\mathbf{F}_u = -c_u \mathbf{v}$. Z uporabo II. Newtonovega zakona lahko zapišemo:

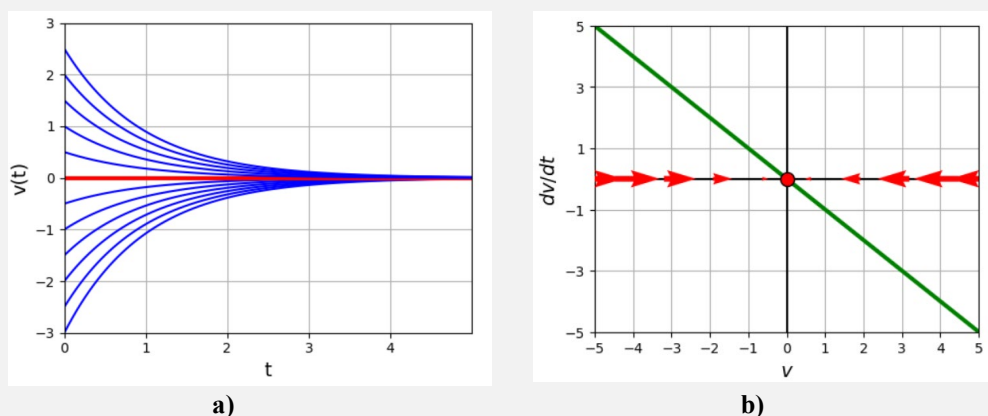
$$\frac{dv}{dt} = -kv, \quad v(0) = v_0,$$

pri čemer je $k = \frac{c_u}{m}$.

Z integracijo enačbe $\int_{v_0}^v \frac{1}{v} dv = -k \int_0^t dt$ dobimo:

$$v(t) = v_0 e^{-kt}.$$

Hitrost eksponentno pada od začetne vrednosti v_0 proti 0. Na spodnji levi sliki je prikazan časovni potek $v(t)$ za različne začetne pogoje, pri čemer je $k = 1 \text{ s}^{-1}$. Na spodnji desni sliki je prikazano tudi vektorsko polje na hitrostni premici, ki predstavlja pospešek telesa $a = dv/dt$. Prikazano je tudi stabilno stacionarno stanje (rdeči krogec) pri $v^* = 0$.

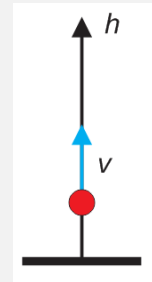


Slika 3.2: Gibanje pod vplivom linearnega zakona upora za primer $k = \frac{c_u}{m} = 1 \text{ s}^{-1}$. **a)** Hitrost v odvisnosti od časa $v(t)$ za različne začetne hitrosti; **b)** Vektorsko polje $a = dv/dt$ na hitrostni premici.

Primer 2:

Obravnavajmo **navpični met**, pri čemer upoštevajmo **kvadratni zakon upora**: $\mathbf{F}_u = -c_u v^2 \hat{\mathbf{v}}$. Zanima nas spreminjanje hitrosti v odvisnosti od časa. Z izbiro koordinatnega sistema, ki kaže v navpični smeri navzgor, in uporabo *II. Newtonovega zakona* lahko zapišemo:

$$\frac{dv}{dt} = -g - kv^2 \cdot \frac{v}{|v|}, \quad v(0) = v_0,$$

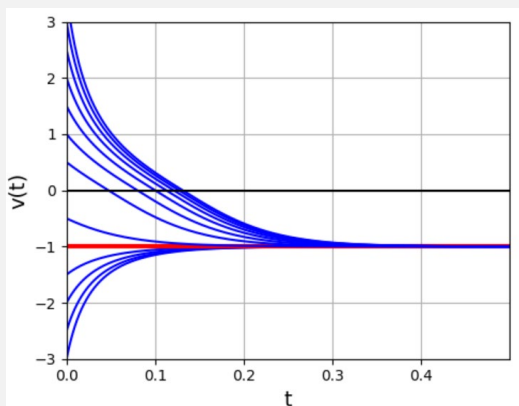


pri čemer je g gravitacijski pospešek in $k = c_u/m$.

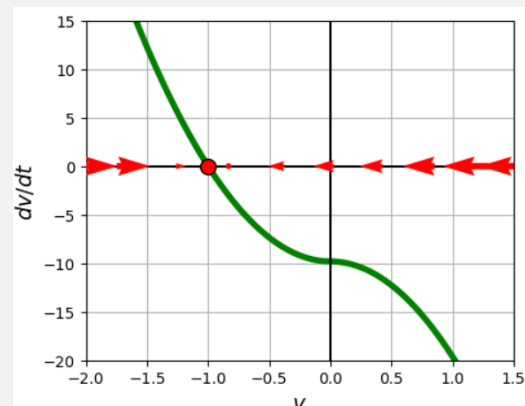
Iz pogoja za stacionarno stanje ($dv/dt = 0$) dobimo, da je:

$$v^* = -\sqrt{g/k}.$$

Na spodnji sliki 3.3a je prikazan časovni potek $v(t)$ za različne začetne pogoje, pri čemer je $v^* = -\sqrt{g/k} = -1 \text{ m/s}$. Slika 3.3b prikazuje tudi vektorsko polje na premici (dv/dt) s stacionarno točko $v^* = -1 \text{ m/s}$. Iz grafa vidimo, da imamo stabilno stacionarno stanje.



a)



b)

Slika 3.3: Navpični met navzgor za primer $v^* = -\sqrt{g/k} = -1 \text{ m/s}$. **a)** Hitrost v odvisnosti od časa $v(t)$ za različne začetne hitrosti; **b)** Vektorsko polje dv/dt na hitrostni premici (rdeč krogec označuje stabilno stacionarno stanje).

V primeru, ko vržemo telo z začetno hitrostjo v_0 navpično navzgor ($v_0 > 0$), se hitrost zmanjšuje, dokler ne doseže vrednosti $v = 0$ (telo je takrat v najvišji legi). Iz grafa dv/dt in zgornje enačbe vidimo, da je takrat $\frac{dv}{dt} = -g$. Telo začne nato padati, pri čemer postaja hitrost vse bolj negativna, dokler ne doseže vrednosti $v^* = -1 \text{ m/s}$.

3.1.3 Konstantna moč

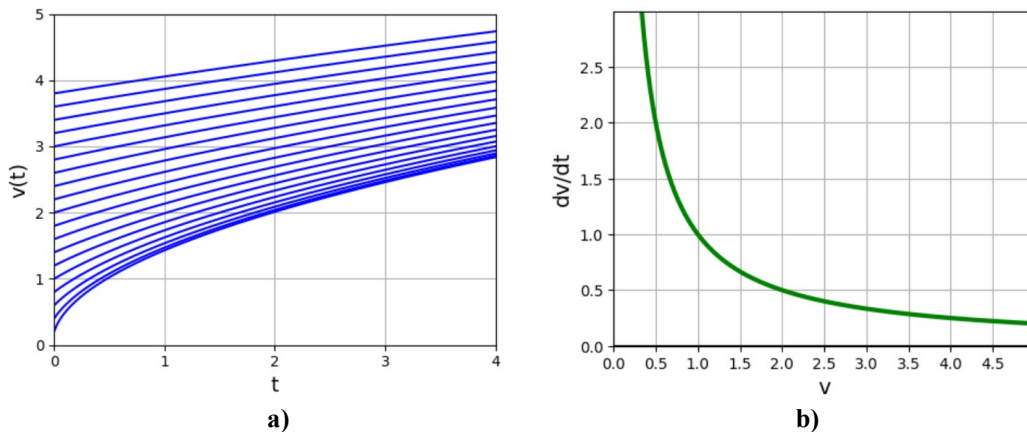
Predpostavimo, da telo z maso m pospešuje s konstantno močjo P . Zanima nas spreminjanje hitrosti telesa v odvisnosti od časa. Sila, ki povzroči pospeševanje telesa, je v tem primeru enaka:

$$P = \frac{dA}{dt} = F \frac{dx}{dt} = Fv, \quad \rightarrow \quad F = \frac{P}{v}.$$

Z uporabo II. Newtonovega zakona lahko zapišemo:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} = \frac{P}{m v}, \quad v(0) = v_0.$$

Rezultati na sliki 3.4 so prikazani za primer, ko velja $\frac{P}{m} = 1 \frac{W}{kg}$. Vidimo lahko, da pri nizkih začetnih hitrostih telo hitro pospeši, nato pa z večanjem hitrosti pospešek telesa pada proti 0, kar pomeni, da hitrost vse bolj enakomerno narašča.

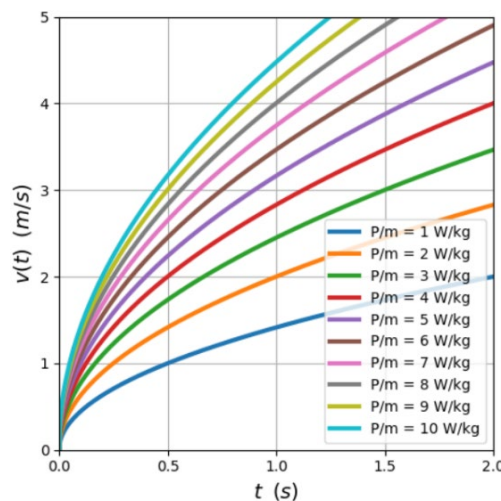


Slika 3.4: Pospeševanje s konstantno močjo za primer $\frac{P}{m} = 1 \frac{W}{kg}$. **a)** Hitrost v odvisnosti od časa $v(t)$ za različne začetne vrednosti; **b)** Velikost pospeška $a = dv/dt$ na hitrostni premici v .

Hitrost, ki jo telo doseže v določenem času, lahko izračunamo tudi na podlagi opravljenega dela: $dA = P dt$ in $dA = F dx = m \frac{dv}{dt} dx = m v dv$. Če enačbi izenačimo in integriramo: $\int_0^t P dt = \int_{v_0}^v m v dv$, dobimo:

$$Pt = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Slika 3.5: Hitrost $v(t)$ pri pospeševanje telesa z mesta za različne vrednosti $\frac{P}{m}$.



Primer:

Obravnavajmo primer gibanja telesa z maso m , ki pospešuje s **konstantno močjo** P ($F = P/v$), pri čemer nanj deluje **linearni zakon upora** $F_u = -c_u v$.

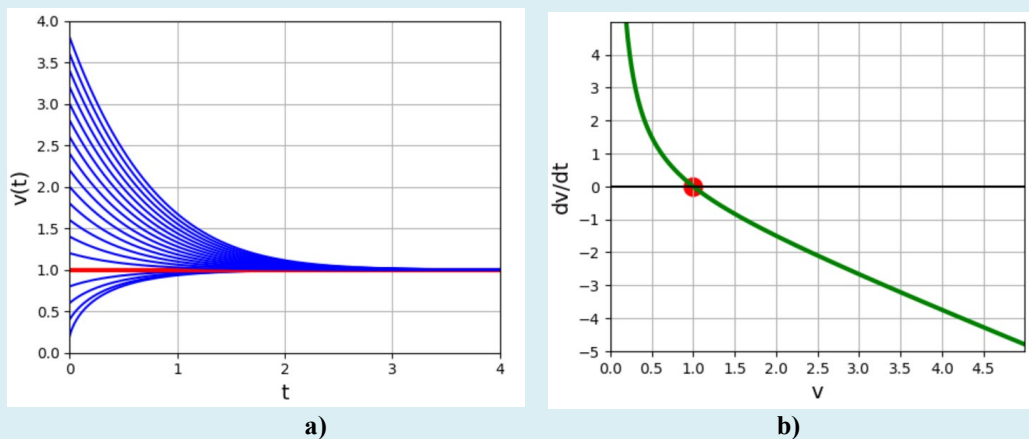
Z uporabo II. Newtonovega zakona zapišemo:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F - F_u}{m} = \frac{P}{m} \frac{1}{v} - \frac{c_u}{m} v.$$

Iz enačbe je razvidno, da nastopi stacionarno stanje $\frac{dv}{dt} = 0$, ko je hitrost telesa enaka:

$$v^* = \sqrt{P/c_u}.$$

Za primer $\frac{P}{m} = 1 \frac{W}{kg}$ in $\frac{c_u}{m} = 1 s^{-1}$ so rezultati prikazani na sliki 3.6. Iz slike lahko razberemo, da je stacionarno stanje pri $v^* = \sqrt{P/c_u} = 1 m/s$. Vidimo lahko, da gre za stabilno stacionarno stanje.



Slika 3.6: Pospeševanje s konstantno močjo z upoštevanjem linearnega zakona upora za primer $v^* = \sqrt{P/c_u} = 1 m/s$. **a)** Časovni potek spreminjanja hitrosti $v(t)$ za različna začetna stanja; **b)** Prikaz pospeška ($a = dv/dt$) na hitrostni premici (v).

Pri majhnih začetnih hitrostih je $F > F_u$, kar pomeni, da hitrost s časom narašča ($dv/dt > 0$), dokler ne doseže stacionarnega stanja v^* , kjer je $F = F_u$.

Za začetne hitrosti $v_0 > v^*$ velja, da je $F < F_u$, kar povzroči zmanjševanje hitrosti ($dv/dt < 0$), dokler se ta ne ustali pri $v^* = \sqrt{P/c_u}$.

3.2 Radioaktivni razpad

Radioaktivni razpad je naključen proces, pri katerem nestabilno jedro preide v bolj stabilno stanje. Časovni potek razpada omogoča napovedovanje, koliko časa bo trajalo, da se določeno število nestabilnih jeder spremeni v stabilnejša jedra.

Merilo za **hitrost radioaktivnega razpada** je **razpadna konstanta**. Opisuje verjetnost, da bo posamezno jedro v določenem časovnem obdobju doživelo razpad. Razpadna konstanta je edinstvena za vsako vrsto radioaktivnega izotopa in se lahko od izotopa do izotopa precej razlikuje. Mera za hitrost radioaktivnega razpada je tudi **razpolovni čas**. Pove nam, v kolikšnem času razpade polovica začetnih jeder.

V spodnji preglednici je nekaj primerov kratkoživih in dolgoživih jeder.

nuklid	t_0	nuklid	t_0 (let)
${}_{84}\text{Po}^{214}$	$1,6 \cdot 10^{-4}$ s	${}_{88}\text{Ra}^{226}$	1620
nevttron	14,7 min	${}_{6}\text{C}^{14}$	5730
${}_{20}\text{Ca}^{45}$	162 dni	${}_{92}\text{U}^{238}$	$4,5 \cdot 10^9$

Časovni potek radioaktivnega razpada opisuje enačba:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N,$$

pri čemer je N število radioaktivnih jeder in λ razpadna konstanta.

Če enačbo preuredimo in integriramo: $\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt$, dobimo:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Vidimo, da število preostalih jeder $N(t)$ eksponentno pada.

Določimo lahko **razpolovni čas** t_0 , v katerem število jeder pade na polovico:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda t_0} \rightarrow t_0 = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Število jeder v določenem času je:

$$N(t) = N_0 2^{-t/t_0},$$

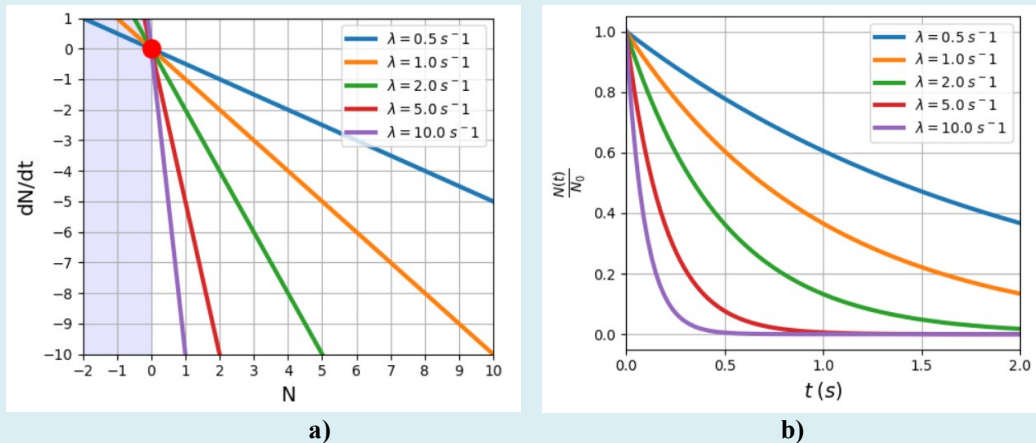
pri čemer je število razpadlih jeder enako:

$$\Delta N(t) = N_0 - N(t) = N_0(1 - 2^{-t/t_0}).$$

Primer:

Za različne vrednosti razpadnih konstant λ narišimo hitrostno polje dN/dt v odvisnosti od N in časovni potek $N(t)$. Rezultate primerjajmo z analitično rešitvijo diferencialne enačbe:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \rightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$



Slika 3.7: Radioaktivni razpad. **a)** Prikaz velikosti vektorskega polja (dN/dt) za različne vrednosti razpadne konstante. **b)** Časovni potek radioaktivnega razpada $N(t)$ za različne vrednosti razpadne konstante.

Iz vektorskega polja (slika 3.7a) je razvidno, da je stabilno stacionarno stanje pri $N^* = 0$ (rdeči krogec). Večja je vrednost konstante λ , hitreje se približujemo stacionarnemu stanju. Območje $N < 0$ je posebej označeno, saj nima realnega pomena, ker število jeder ne more biti negativno.

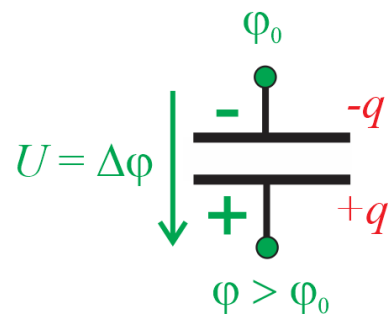
3.3 Praznjenje in polnjenje kondenzatorja

Kondenzatorji so električne komponente, ki jih uporabljamo za shranjevanje električnega naboja. So sestavljeni iz dveh prevodnih plošč, običajno iz kovine, ki sta ločeni s dielektričnim materialom. Kondenzatorji se lahko polnijo in praznijo, kar omogoča njihovo različno uporabo v električnih vezjih.

Na sliki je prikazan primer ploščatega kondenzatorja z dvema ploščama, ki je priključen na napetost U . Zvezo med nabojem q na ploščah kondenzatorja in napetostjo U določa enačba:

$$q = C \cdot U,$$

pri tem je C kapaciteta kondenzatorja.

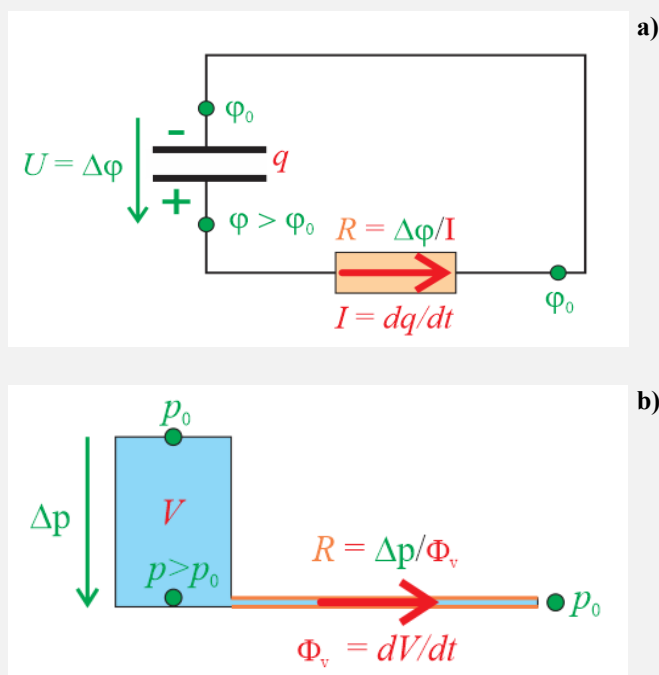


Kondenzatorje uporabljamo za **shranjevanje električne energije**, ki jo lahko nato uporabimo za različne namene. Kot primer hitrega sproščanja energije iz kondenzatorja je delovanje bliskavic. Sproščanje energije iz kondenzatorjev pomaga tudi pri zagonu motorjev, pri čemer kondenzatorji zagotavljajo potrebno pomožno energijo, da motor doseže začetni vrtilni moment.

Kondenzatorje lahko uporabljamo tudi za **filtriranje električnih signalov** z namenom zmanjšanja motenj pri prenašanju signalov. Kondenzatorji pri tem prepuščajo nizkofrekvenčne signale, medtem ko visokofrekvenčne blokirajo. Kondenzatorji uporabljamo tudi za **ustvarjanje časovnih zamikov** v vezjih ter za **uravnavanje frekvenc** in faznih premikov v električnih signalih.

3.3.1 Praznjenje kondenzatorja

Oglejmo si primer praznjenja kondenzatorja in ga primerjajmo s praznjenjem vode iz posode skozi tanko dolgo cevko.



Slika 3.8: a) Praznjenje kondenzatorja je odvisno od napetost na kondenzatorju in upornosti upornika. b) Praznjenje posode z vodo je odvisno od tlačne razlike (višine vode v posodi) in upornosti cevke.

Podobno kot tlačna razlika v posodi Δp poganja vodni tok skozi cevko, razlika električnih potencialov $\Delta\varphi$ oziroma napetost $U = \Delta\varphi$ poganja električni tok skozi upornik z upornostjo R . Tudi cevki, skozi katero teče voda, lahko pripišemo določeno upornost R . Večja je upornost, počasneje se bosta praznila kondenzator in posoda.

Zaradi praznjenja kondenzatorja se naboj na kondenzatorju zmanjšuje $\frac{dq}{dt} = -I$, pri čemer je I električni tok, ki določa hitrost pretakanja električnega naboja. Električni tok poganja razlika potencialov oziroma napetosti na kondenzatorju $U = q/C$, pri čemer je C kapaciteta kondenzatorja. Hkrati je električni tok odvisen tudi od upornosti upornika, pri čemer velja Ohmov zakon: $I = U/R$. Ob upoštevanju omenjenih enačb, lahko zapišemo:

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC}, \quad q(0) = q_0.$$

Dobljena diferencialna enačba predstavlja 1D dinamični sistem, katerega analitično rešitev dobimo z integriranjem enačbe:

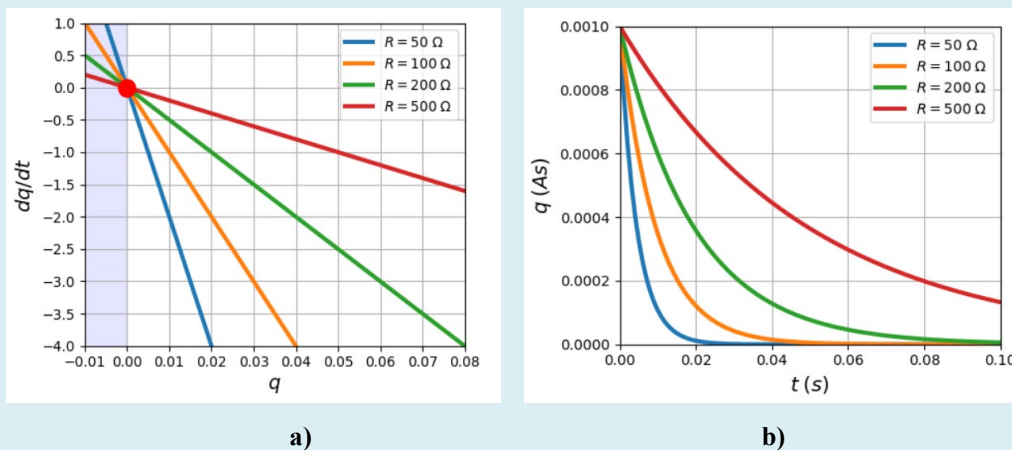
$$\int_{q_0}^q \frac{dq}{q} = -\int_0^t \frac{dt}{RC} \quad \rightarrow \quad q(t) = q_0 e^{-t/RC}.$$

Iz rešitve je razvidno, da naboj na kondenzatorju pada eksponentno s časom. Razpolovni čas, pri katerem naboj pade na polovico, je enak:

$$t_0 = RC \ln 2.$$

Primer:

Skiciraj hitrostno polje dq/dt v odvisnosti od q in časovni potek spreminjanja naboja $q(t)$ pri praznjenju kondenzatorja z začetnim nabojem $q_0 = 10^{-3}$ As. Kapaciteta kondenzatorja je $C = 100 \mu F$. Uporabi različne upornosti upornika: $R_1 = 50 \Omega$, $R_2 = 100 \Omega$, $R_3 = 200 \Omega$, $R_4 = 500 \Omega$.



Slika 3.9: Praznjenje kondenzatorja. **a)** Prikaz vektorskega polja (dq/dt) za različne upornosti. **b)** Časovni potek spreminjanja naboja na kondenzatorju $q(t)$ za različne upornosti.

Iz rezultatov vidimo, da dobimo podobne rešitve kot pri radioaktivnem razpadu. Območje negativnih vrednosti naboja v vektorskem polju lahko v tem primeru predstavlja obrnjeno polariteto na kondenzatorju.

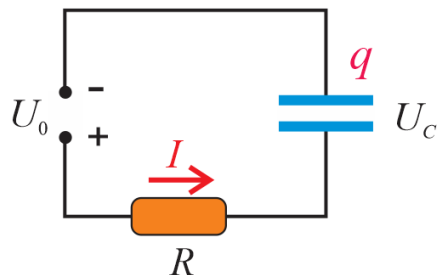
3.3.2 Polnjenje kondenzatorja

V nadaljevanju si oglejmo primer polnjenja kondenzatorja. Kondenzator polnimo z virom napetosti U_0 preko upora z upornostjo R . Dotok naboja na kondenzator je enak električnemu toku, ki teče skozi upornik:

$$\frac{dq}{dt} = I,$$

pri tem je električni tok I odvisen od razlike napetosti vira in napetosti na kondenzatorju ($U_0 - U_C$) ter električne upornosti upornika (R):

$$I = \frac{U_0 - U_C}{R} = \frac{U_0}{R} - \frac{q}{RC}.$$



Spreminjanje naboja na kondenzatorju je v tem primeru enako:

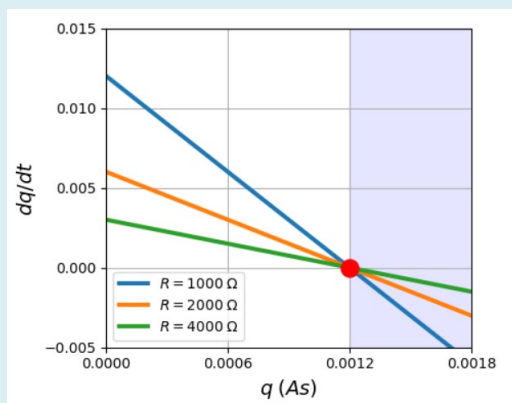
$$\frac{dq}{dt} = \frac{U_0}{R} - \frac{q}{RC}, \quad q(0) = q_0.$$

Z integracijo enačbe dobimo analitično rešitev, ki kaže, da se naboj po določenem času ustali pri vrednosti $q^* = U_0 C$.

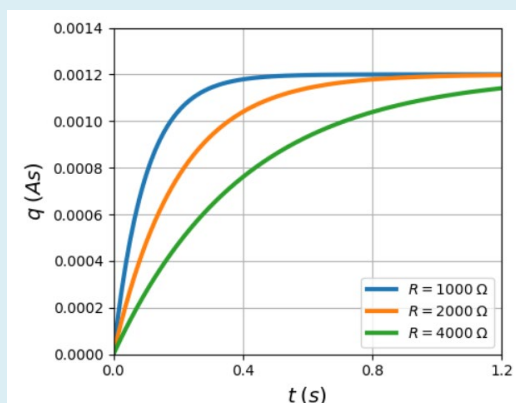
$$q(t) = q^* \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right), \quad q^* = U_0 C.$$

Primer:

Oglejmo si vektorsko polje dq/dt in časovni potek $q(t)$ pri polnjenju kondenzatorja z začetnim nabojem $q_0 = 0$. Kapaciteta kondenzatorja je $C = 100 \mu\text{F}$. Uporabi različne upornosti upornika: $R_1 = 50 \Omega$, $R_2 = 100 \Omega$, $R_3 = 200 \Omega$, $R_4 = 500 \Omega$.



a)



b)

Slika 3.10: Polnjenje kondenzatorja za primer $q^* = U_0 C = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ As}$. **a)** Prikaz vektorskega polja (dq/dt) za različne upornosti. **b)** Časovni potek spreminjanja naboja na kondenzatorju $q(t)$ za različne upornosti.

Iz rezultatov vidimo, da naboj na kondenzatorju narašča, dokler se ne ustali pri vrednosti:

$$q^* = U_0 C = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ As.}$$

Vrednost q^* ni odvisna od upornosti upornika. Upornost vpliva le na hitrost naraščanja naboja na kondenzatorju. Pri manjših vrednostih R se kondenzator hitreje napolni.

Med polnjenem kondenzatorja ne moremo preseči vrednosti naboja q^ . Vrednosti naboja $q > q^*$ lahko imamo le v primeru, če je kondenzator imel takšen naboj že na začetku. V tem primeru se bo kondenzator izpraznil do q^* , kljub temu da ga priklopimo na vir napetosti.*

Primer izrisa vektorskega polja dq/dt pri polnjenju kondenzatorja v Pythonu:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

C=100e-6

x_min=0
x_max=0.0018
y_min=-0.005
y_max=0.015

nx=3
ny=4

q = np.linspace(x_min, x_max, 100)
Parameter = [1000, 2000, 4000]

plt.figure(figsize=(5, 4))

# Narišemo krivulje za različne vrednosti lambda
for pp in Parameter:
    result = 12/pp - q/(pp*C)
    plt.plot(q, result, lw=3, label=f'$R = \{pp\}; \\\Omega$')

plt.scatter(0.0012, 0, color='red', marker='o', s=150,
            zorder=3)

# Nastavitve grafa
plt.xlim(x_min, x_max)
plt.ylim(y_min, y_max)
plt.yticks(np.arange(y_min, y_max+0.001, (y_max-
y_min)/ny))
plt.xticks(np.arange(x_min, x_max+0.0001, (x_max-
x_min)/nx))

plt.axvspan(0.0012, 0.1, color='blue', alpha=0.1)

plt.xlabel('$q;(As)$', fontsize=14)
plt.ylabel('$dq/dt$', fontsize=14)
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.tight_layout()

# Prikaz grafa
plt.show()
```

3.4 Močno (nadkritično) dušenje

Kritično dušenje je koncept s področja nadzora dinamike sistemov, ki se nanaša na **stopnjo dušenja**, ko se sistem zaradi izmika vrača v ravnovesno stanje. Različne velikosti dušenja določajo hitrost in potek vrnitve sistema v ravnovesno stanje. Pri **podkritičnem dušenju**, se amplituda oscilirajočega sistema zmanjšuje, vendar se oscilacije tekom dušenja ohranjajo. Pri kritičnem dušenju dobimo hitrejši povratek v ravnovesno stanje, pri katerem oscilacije izginejo. V kolikor dušenje še povečamo, dobimo **nadkritično dušenje**, pri katerem tudi nimamo oscilirajočega obnašanja sistema, vendar v primerjavi s kritičnim dušenjem sistem potrebuje več časa, da se vrne v prvotno stanje.

Pri **kritičnem dušenju** se sistem najhitreje vrne v ravnovesno stanje.

Oglejmo si primer harmonskega dušenega oscilatorja, katerega odmik iz ravnovesne lege x opisuje enačba:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0, \quad x(0) = x_0, \quad v(0) = v_0,$$

pri tem je m masa oscilatorja, b je koeficient linearnega dušenja in k koeficient vzmeti, ki omogoča oscilirajoče gibanje. Iz enačbe vidimo, da gre za **2D sistem**, ki ga lahko zapišemo z dvema linearnima enačbama prvega reda:


$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}v - \frac{k}{m}x, \quad x(0) = x_0, \quad v(0) = v_0. \quad (2D \text{ sistem})$$

V primeru **močnega (nadkritičnega) dušenja** je sila dušenja ($b\dot{x}$) tako velika, da velja $m\ddot{x} \ll b\dot{x}$. To pomeni, da lahko člen $m\ddot{x}$ v zgornji enačbi zanemarimo in dobimo:

$$b\dot{x} + kx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{k}{b}x, \quad x(0) = x_0. \quad (1D \text{ sistem})$$

S tem smo dobili **1D sistem**, ki dokaj dobro opisuje obnašanje sistema pri močnem dušenju. Večji je koeficient b , bolj se rešitve 1D sistema ujemajo z rešitvami 2D sistema.

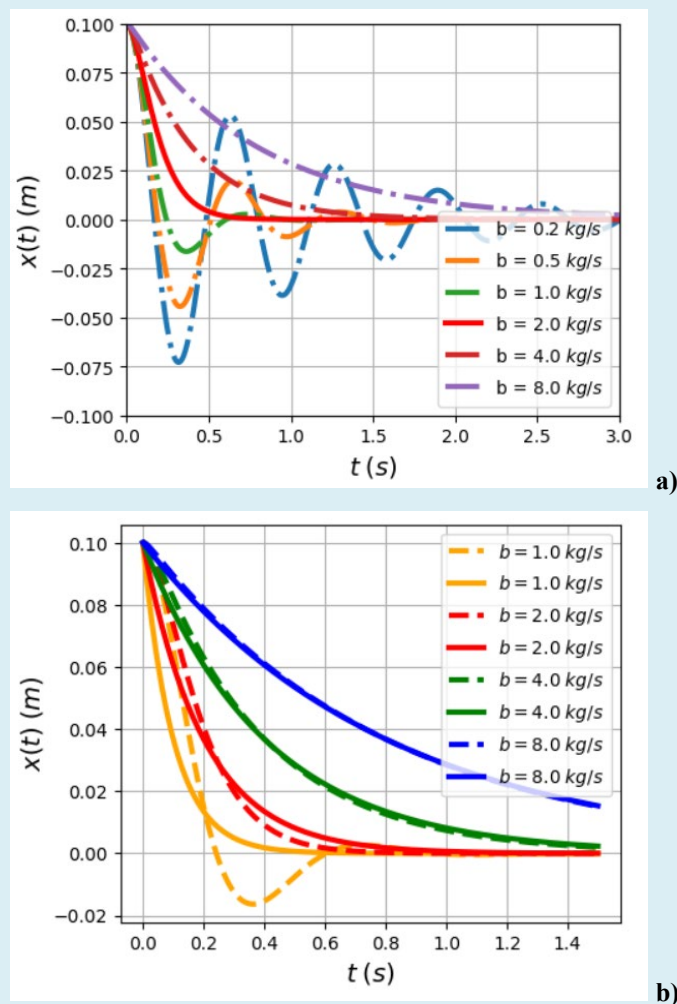
V primeru dobljenega 1D sistema velja omeniti tudi, da **oscilacije v 1D sistemih niso možne**, kar sovpada z rezultati pri močnem dušenju.

Oscilacije v 1D sistemu niso možne, saj se sistem asimptotično približuje stabilnemu stacionarnemu stanju x^* , kjer obmiruje. V primeru oscilacij bi moral sistem spreminjati smer gibanja med $\frac{dx}{dt} > 0$ in $\frac{dx}{dt} < 0$, kar pomeni, da bi moral prečkati stacionarno stanje $\frac{dx}{dt} = 0$, kar v 1D sistemu ni možno. 

Primer:

Slika 3.11 prikazuje lego oscilatorja v odvisnosti od časa $x(t)$ za različne primere dušenja. Masa oscilatorja je $m = 0,1 \text{ kg}$, koeficient vzmeti je $k = 10 \text{ N/m}$. Iz rezultatov na prvi sliki vidimo, da gre za kritično dušenje pri $b = 2 \text{ kg/s}$. Pri tej vrednosti dušenja se telo najhitreje vrne v stacionarno stanje $x^* = 0$.

Iz primerjave rezultatov **2D** (črtkane črte) in **1D** (polne črte) sistema na sliki 3.11b vidimo, da 1D sistem zadovoljivo opiše primere, ko imamo opravka z močnim dušenjem. Večji je koeficient dušenja (b), bolj se rezultati ujemajo. Vidimo, da je primerjava rezultatov zadovoljiva od kritičnega dušenja naprej, medtem ko se pri pod kritičnem dušenju rezultati razlikujejo, saj 2D sistem omogoča oscilacije, ki v 1D sistemu niso možne.



Slika 3.11: Spreminjanje lege $x(t)$ dušenega oscilatorja. Masa oscilatorja je $m = 0,1 \text{ kg}$, koeficient vzmeti je $k = 10 \text{ N/m}$. **a)** Spreminjanje lege $x(t)$ za različna dušenja (2D sistem). Pri vrednosti $b = 2 \text{ kg/s}$ (rdeča črta), dobimo kritično dušenje. **b)** Primerjava rezultatov **2D** (črtkane črte) in **1D** (polne črte) sistema za različne vrednosti dušenja.

3.5 Populacijska dinamika

Populacijska dinamika obravnava spremembe v velikosti in sestavi populacij skozi čas. Pomembna je za razumevanje razvijanja različnih populacij in kako različni dejavniki vplivajo na njihov razvoj. Tako je razumevanje populacijske dinamike ključno za ohranjanje ogroženih vrst in vzdrževanje biotske raznovrstnosti.

Spremljanje populacij omogoča prepoznavanje tveganj in sprejemanje ukrepov za njihovo zaščito. Na področjih, kot so ribištvo, lov in gozdarstvo, je pomembno slediti populacijski dinamiki, da bi zagotovili trajnostno upravljanje naravnih virov. Prekomerno izkoriščanje namreč lahko vodi v izčrpanje populacij.

Na področju matematičnega modeliranja populacijske dinamike obstaja več pristopov, ki vključujejo različno število obravnavanih populacijskih vrst, medsebojne odnose posameznih populacijskih vrst, morebitne prostorske migracije in druge zunanje vplive.

Pri 1D populacijskih sistemih se osredotočimo na dinamiko ene populacijske vrste. Poznamo več takšnih populacijskih sistemov. V nadaljevanju bomo obravnavali nekaj primerov.

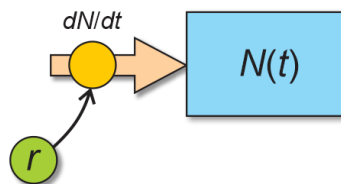
3.5.1 Vpliv rodnosti in omejenih virov na velikost populacije

Na začetku si oglejmo preproste matematične modele za populacijsko dinamiko ene populacijske vrste (N), na katero vpliva različna rodnost in morebitni omejeni viri, ki vplivajo na prekomerno razširitev določene populacijske vrste.

a) Konstantna rodnost

Matematični model, ki obravnava konstantno rodnost (r) lahko zapišemo kot:

$$dN/dt = r, \quad N(0) = N_0.$$

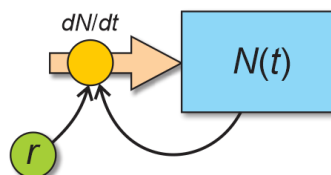


Problem tega modela je, da bo populacija naraščala, tudi če je začetna populacija $N_0 = 0$. Prav tako ta model ne upošteva, da je rodnost populacije dejansko odvisna od števila populacije. Model tudi ne vključuje omejitve prekomerne razširitve določene populacije.

a) Rodnost, odvisna od števila populacije

V tem modelu upoštevamo, da je rodnost odvisna od števila populacije:

$$dN/dt = rN, \quad N(0) = N_0.$$

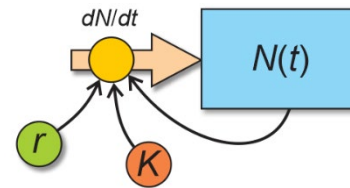


Problem modela je, da populacija ni omejena in zaradi vse večje rodnosti (zaradi vse večje populacije N) populacija vse hitreje narašča. To je realno, ko je število populacije precej manjše, kot je njena maksimalna možna razširitev.

c) Rodnost, odvisna od števila populacije in vpliv omejenih virov

Za razliko od prejšnjih primerov sedaj obravnavajmo populacijsko dinamiko, pri kateri upoštevamo omejene vire. Za ta populacijski model se je uveljavilo ime **logistična rast**, ki jo opisuje enačba:

$$dN/dt = rN(1 - N/K), \quad N(0) = N_0.$$

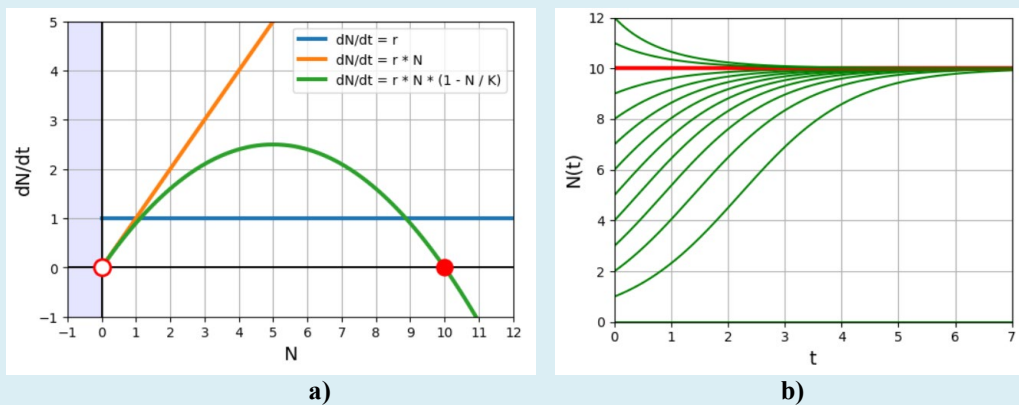


Pri tem je maksimalno število populacije določeno z vrednostjo K .

Primer:

Na spodnji sliki (slika 3.12a) je prikazana hitrost spreminjanja populacije (dN/dt) v odvisnosti od števila populacije N za vse tri prej omenjene primere. Vrednost $r = 1$ in $K = 10$.

V primeru omejitve virov (zeleno črta na sliki 3.12a in slika 3.12b) imamo stabilno stacionarno stanje pri $N^* = K$. Vidimo, da v tem primeru populacija vse hitreje narašča, dokler ne doseže vrednosti $N = N^*/2$, nato hitrost naraščanja začne padati in pade na nič pri $N = N^*$. V kolikor bi se na nekem območju pojavila populacija, katere število bi presegalo N^* , bi se število populacije zmanjševalo, kar lahko razberemo tudi iz spodnjega grafa: $dN/dt < 0$ za $N > N^*$.



Slika 3.12: Populacijska dinamika. Vrednost $r = 1$ in $K = 10$. **a)** Hitrost naraščanja populacije v odvisnosti od števila populacije. Pri konstantni rodnosti ($dN/dt = r$) je hitrost vedno enaka (modra črta). V primeru, ko je rodnost odvisna od populacije (oranžna črta), hitrost linearno narašča ($dN/dt = rN$). V primeru omejitve populacije ($dN/dt = rN(1 - N/K)$) spreminjanje hitrosti prikazuje zelena črta. **b)** Časovni potek spreminjanja populacije $N(t)$ za primer, ko je populacija omejena ($K = 10$).

3.5.2 Rast tumorja

Matematični model rasti rakavih celic, ki ga je razvil **Gompertz**, je pomemben model za opis nelinearne rasti tumorjev in razumevanje, kako se tumorji širijo v telesu. Model temelji na ideji, da se rast tumorja z leti upočasni, kar pogosto opazijo v realnih kliničnih okoliščinah.

Model rasti tumorjev izražamo z naslednjo diferencialno enačbo:

$$\frac{dN}{dt} = -kN \ln(N/N^*), \quad N(0) = N_0,$$

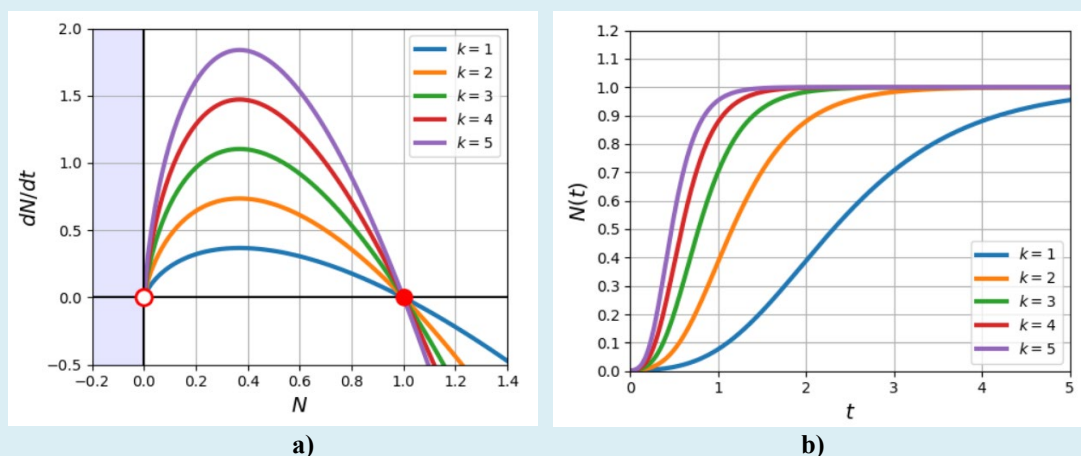
pri čemer je N število rakavih celic v tumorju, N^* je maksimalno število rakavih celic, ki se razvijejo v tumorju, in k je konstanta rasti tumorja.

Ključna značilnost tega modela je, da se rast tumorja začne eksponentno, vendar se s časom upočasni. To je posledica dejstva, da tumor začne dosegati omejitve, kot so pomanjkanje hranil in kisika ter imunski odziv telesa, ki lahko omeji rast rakavih celic.

Ta model se pogosto uporablja v onkologiji za napovedovanje rasti tumorjev, razumevanje poteka bolezni in optimizacijo načrtovanja zdravljenja. Vendar moramo opozoriti, da je to preprost matematični model in da dejanska rast tumorjev v človeškem telesu pogosto odstopa od tega idealiziranega modela zaradi kompleksnosti bioloških dejavnikov in različnih vplivov na rast rakavih celic. Zato uporabljajo tudi več naprednejših modelov za bolj natančno opisovanje rasti in razvoja rakavih tumorjev.

Primer 1:

Za omenjen matematičen model rasti rakavih celic narišimo hitrostno polje dN/dt in časovni potek spreminjanja števila rakavih celic v tumorju za različne vrednosti konstante tumorja ($k = 1, 2, 3, 4, 5$). Vrednost $N^* = 1$. Iz rezultatov na sliki 3.13 vidimo, da večja kot je konstanta k , večjo hitrost naraščanja rakavih celic dosežemo in prej se število celic ustali pri končni vrednosti N^* .

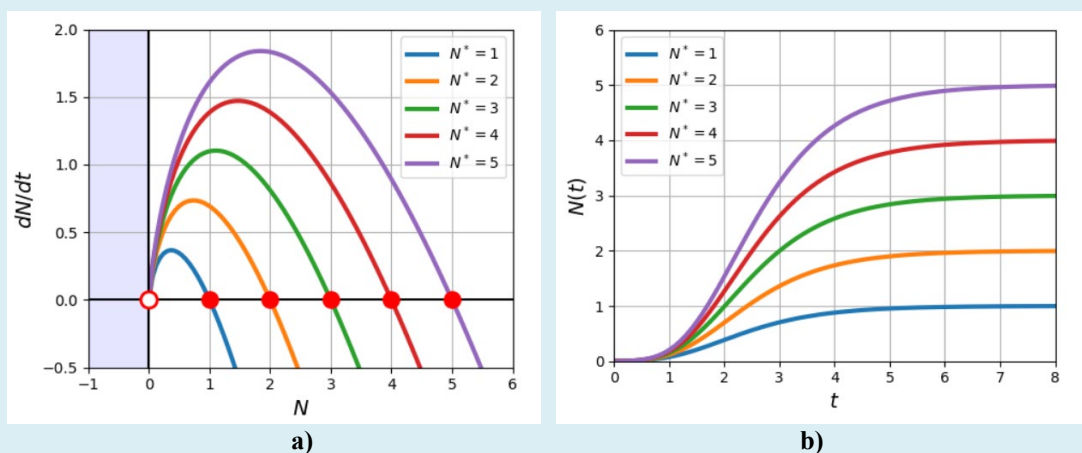


Slika 3.13: Rast rakavih celic v tumorju pri $N^* = 1$ za različne vrednosti hitrostne konstante k . **a)** Hitrostno polje rasti rakavih celic. **b)** Časovni potek naraščanja rakavih celic v tumorju.

Primer 2:

Za Gompertzov model rasti rakavih celic narišimo hitrostno polje dN/dt in časovni potek spreminjanja števila rakavih celic $N(t)$. Pri tem upoštevajmo različna maksimalna števila rakavih celic ($N^* = 1, 2, 3, 4, 5$) in hitrostno konstanto $k = 1$.

Iz rezultatov na sliki 3.14 vidimo, da večja kot je vrednost N^* , pri večji vrednosti se ustali število rakavih celic. Hkrati dosežemo tudi večjo hitrost naraščanja rakavih celic, kar posledično pomeni, da se približamo N^* približno v enakem času.



Slika 3.14: Rast rakavih celic v tumorju za različne vrednosti N^* pri $k = 1$. **a)** Hitrostno polje rasti rakavih celic. **b)** Časovni potek naraščanja rakavih celic v tumorju.

Naloga:

Primerjaj med seboj enačbo za logistično rast:

$$\frac{dN}{dt} = kN \left(1 - \frac{N}{N^*}\right) \text{ in}$$

Gompertzov model rasti rakavih celic:

$$dN/dt = -kN \ln(N/N^*).$$

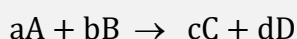
- Opiši podobnosti in razlike, ki jih opaziš v populacijski dinamiki $N(t)$.
- Primerjaj omejitvi maksimalnega števila populacije.
- Od česa sta odvisni maksimalni hitrosti spreminjanja populacije in pri kolikšnem številu populacije N nastopita.
- Nariši časovna poteka $N(t)$ za vrednost konstant $k = 1$ in $N^* = 10$.

3.6 Kemijske reakcije

Kemijske reakcije so procesi, pri katerih se začetne kemijske spojine pretvarjajo v končne kemijske spojine s preoblikovanjem kemijskih vezi med atomi in molekulami. Te reakcije se zgodijo zaradi prenosa, delitve ali povezovanja atomov in molekul, ki sprožijo spremembe v lastnostih in sestavi snovi.

Časovni potek kemijske reakcije običajno zapišemo s pomočjo kinetičnih enačb, ki opisujejo, kako se koncentracije reaktantov in produktov spreminjajo s časom. Za opis hitrosti reakcij uporabljamo diferencialne kinetične enačbe. **Hitrost reakcije** je definirana kot sprememba koncentracije reaktanta ali produkta v enoti časa.

Za splošno kemijsko reakcijo:



je **hitrost reakcije** definirana kot:

$$v = -\frac{1}{a} \frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{b} \frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{c} \frac{d[C]}{dt} = \frac{1}{d} \frac{d[D]}{dt}.$$

V enačbi sta $[A]$ in $[B]$ koncentraciji reaktantov ter $[C]$ in $[D]$ koncentraciji produktov. Vrednosti a , b , c in d predstavljajo število posameznih molekul, tako da je enačba urejena.

Za mnoge reakcije eksperimentalni podatki kažejo, da je hitrost reakcije enaka:

$$v = k[A]^m[B]^n,$$

pri tem je vsota $(m + n)$ **red reakcije**.

Reakcije se glede na število atomov ali molekul, katerih koncentracije vplivajo na njihovo hitrost, razvrščajo v reakcije **ničtega**, **prvega**, **drugega** ali višjega reda.

1D sistemi

Ker se pri kemijskih reakcijah običajno spreminja koncentracija več količin hkrati, moramo te reakcije obravnavati kot **več dimenzionalne sisteme**. Obstajajo pa tudi kemijske reakcije, pri katerih lahko v reakciji upoštevamo **spreminjanje koncentracije le ene količine** $[A]$. V tem primeru govorimo o tako imenovanih **1D sistemih**, pri čemer lahko spreminjanje koncentracije $[A]$ opišemo z eno diferencialno kinetično enačbo:

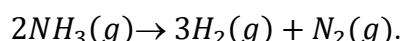
$$\frac{d[A]}{dt} = f[A] \rightarrow [A](t), \quad [A](0) = [A]_0.$$

V nadaljevanju si bomo ogledali nekaj takšnih primerov za različne rede reakcij.

3.6.1 Reakcija ničtega reda

Hitrost reakcije ničtega reda je konstantna in ni odvisna od koncentracije reaktanta $[A]$. Takšna reakcija je precej redka v primerjavi z reakcijami prvega, drugega in višjega reda, saj je odvisna od specifičnih pogojev. Ena od njih je **razpad plinastega amonijaka (NH_3) na segreti površini platine**. Običajni razpad plinastega amonijaka je reakcija prvega reda, medtem ko je razpad plinastega amonijaka (NH_3) na razgreti površini platine poseben primer. V tem primeru gre za reakcijo **ničtega reda**, kjer **hitrost reakcije ni odvisna od koncentracije amonijaka**, temveč predvsem od temperature in površine platine. To je zato, ker površina platine služi kot katalizator in ne vpliva na koncentracijo amonijaka.

Kemijska reakcija za omenjen proces je:



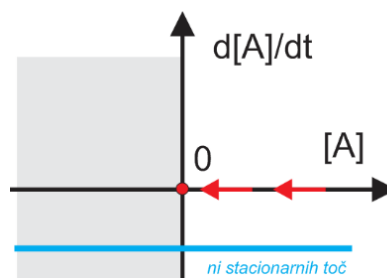
Spreminjanje koncentracije amonijaka $[A] = [NH_3]$ v tem primeru opisuje enačba:

$$\frac{d[A]}{dt} = -k, \quad [A](0) = [A]_0,$$

katere rešitev je:

$$[A](t) = [A]_0 - kt.$$

Slika 3.15 prikazuje vektorsko polje za kemijsko reakcijo ničtega reda. Koncentracija $[A]$ enakomerno pada, dokler ne doseže vrednosti 0. Hitrost padanja določa konstanta k , ki je v omenjenem primeru odvisna od temperature in površine platine.



Slika 3.15: Vektorsko polje za kemijsko reakcijo ničtega reda. $[A]$ je koncentracija snovi.

3.6.2 Reakcija prvega reda

Reakcije prvega reda so precej pogoste v kinetiki kemijskih reakcij. Pojavljajo se v naravi in v številnih industrijskih procesih. Pogosto gre za preproste razgradnje snovi, kot so: razpad vodikovega peroksida (H_2O_2) na vodo (H_2O) in kisik (O_2), razpad vodikovega bromida (HBr) na vodik (H_2) in brom (Br_2) in razpad dušikovega pentoksida (N_2O_5) na dušikov oksid (NO_2) in kisik (O_2). Kot primer reakcije prvega reda je tudi hidroliza estrov, pri čemer se ester razgradi na alkohol in kislino ob prisotnosti vode. Pri tem je hitrost reakcije neposredno odvisna od koncentracije estra, kar je značilno za kemijsko reakcijo prvega reda.

Reakcije prvega reda so značilne po tem, da je hitrost reakcije ($d[A]/dt$) neposredno sorazmerna s koncentracijo reaktanta $[A]$, kar zapišemo kot:

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A], \quad [A](0) = [A]_0.$$

Pri tem je $[A]_0$ začetna koncentracija snovi in k **hitrostna konstanta reakcije**, ki je lahko odvisna od različnih dejavnikov, kot je na primer temperatura.

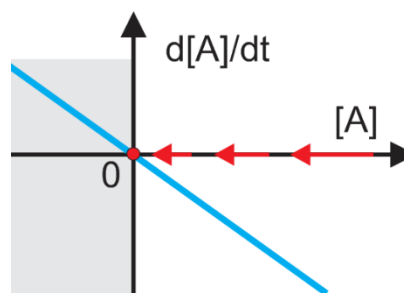
Rešitev diferencialne enačbe je:

$$[A](t) = [A]_0 e^{-kt},$$

kar kaže, da se koncentracija reaktanta zmanjšuje eksponentno s časom v odvisnosti od velikosti konstante k .

Hitrostno konstanto k lahko določimo na podlagi **razpolovnega časa** $t_{1/2}$, v katerem koncentracija $[A]$ pade za polovico:

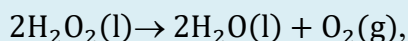
$$k = \frac{1}{t_{1/2}} \ln \left(\frac{[A]_0}{[A]_0/2} \right) = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}.$$



Slika 3.16: Vektorsko polje za kemijsko reakcijo prvega reda. $[A]$ je koncentracija snovi.

Primer:

Kot primer reakcije prvega reda zapišimo **razpad vodikovega peroksida**:



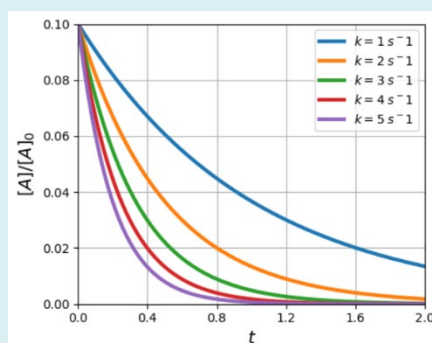
pri čemer je hitrost reakcije odvisna od koncentracije vodikovega peroksida ($2\text{H}_2\text{O}_2$) in temperature T . Pri višji temperaturi se namreč reakcija odvija hitreje. Spreminjanje koncentracije vodikovega peroksida $[A] = [\text{H}_2\text{O}_2]$ v tem primeru zapišemo kot:

$$\frac{d[A]}{dt} = -k[A], \quad k = k(T), \quad [A](0) = [A]_0,$$

katere rešitev je:

$$[A](t) = [A]_0 e^{-k(T)t}.$$

Višja kot je temperatura, večja je vrednost konstante k in hitrejši je razpad vodikovega peroksida. Na sliki 3.17 je prikazan časovni potek razpada za nekaj različnih vrednosti konstante k .



Slika 3.17: Razpad vodikovega peroksida za različne vrednosti konstante k .

V literaturi lahko zasledimo različne odvisnosti $k(T)$ glede na različne reakcijske pogoje. Pogosto podajamo temperaturno odvisnost:

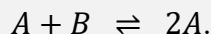
(https://www.chem21labs.com/labfiles/uky_gl12_mnet_lab.pdf)

$$k = A e^{-\frac{E_a}{RT}} \rightarrow \ln k(T) = \ln A - \frac{E_a}{R} \frac{1}{T},$$

pri čemer je: $\ln A = 14,34$ in $\frac{E_a}{R} = 1,25 \cdot 10^4 \text{ K}$.

3.6.3 Avtokatalitična kemijska reakcija

Za avtokatalitične kemijske reakcije je značilno, da molekula A ob prisotnosti molekule B stimulira samo sebe. Takšno reakcijo lahko na splošno zapišemo:



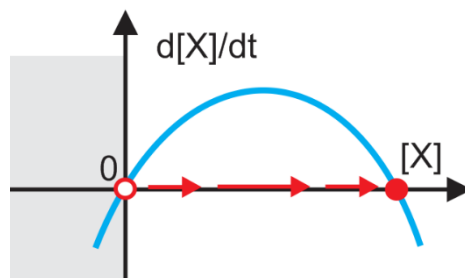
Kadar imamo presežek koncentracije $[B]$, tako da ostaja koncentracija $[B]$ med reakcijo približno konstantna, lahko spreminjanje koncentracije $[A]$ zapišemo z diferencialno enačbo prvega reda:

$$\frac{d[A]}{dt} = k_1[B][A] - k_2[A]^2, \quad [A](0) = [A]_0.$$

Iz enačbe vidimo, da sta dve stacionarni stanji:

$$[A]_1^* = 0 \text{ in } [A]_2^* = k_1/k_2[B].$$

Pri $[A]_1^* = 0$ je *nestabilno* stacionarno stanje, pri $[A]_2^* = k_1/k_2[B]$ pa je *stabilno* stacionarno stanje, kar je razvidno tudi s slike 3.18.



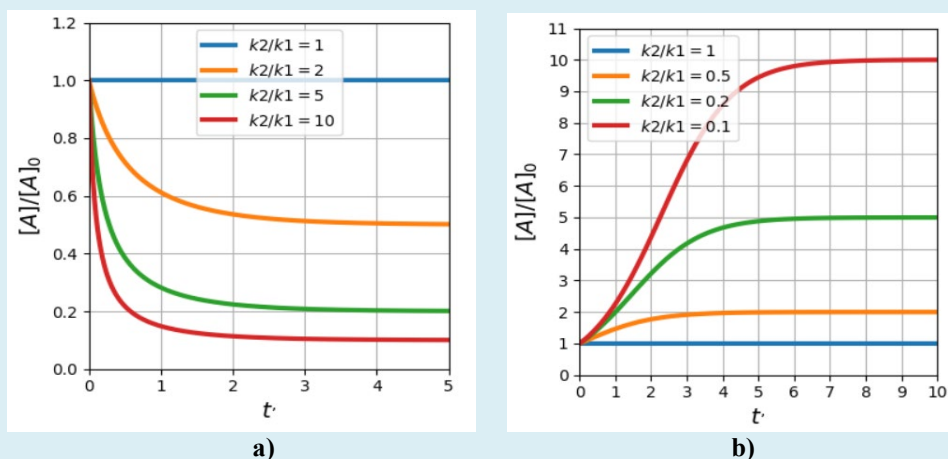
Slika 3.18: Vektorsko polje in stacionarna stanja pri avtokatalitični kemijski reakciji.

Primer:

Enačbo $d[A]/dt = k_1[B][A] - k_2[A]^2$ delimo s k_1 , vpeljemo čas $dt' = k_1 dt$ in razmerje $x = [A]/[A]_0$. Enačbo v tem primeru zapišemo kot:

$$\frac{dx}{dt'} = [B]x - \frac{k_2}{k_1}[A]_0 x^2.$$

Rezultati na sliki 3.19 prikazujejo $x(t)$ za različna razmerja k_2/k_1 . Iz rezultatov za primer $[B] = 1$ in $[A]_0 = 1$ vidimo, da se koncentracija $[A]$ ustali pri nižji vrednosti od $[A]_0$ ($x < 1$) v primeru, ko je $k_2/k_1 > 1$. V primeru $k_2/k_1 < 1$ se vrednost koncentracije ustali pri $[A] > [A]_0$ ($x > 1$).



Slika 3.19: Prikaz $x(t) = [A]/[A]_0$ za različna razmerja k_2/k_1 . $[B] = 1$ in $[A]_0 = 1$. a) $k_2/k_1 > 1$. b) $k_2/k_1 < 1$.

Naloge**3. Fizikalni, biološki in kemijski primeri 1D sistemov**

N 3.1 Zakaj je pri matematičnem nihalu omogočeno oscilirajoče spreminjanje lege nihala vzdolž osi x , če vemo, da oscilacije v 1D sistemi niso možne. Razloži tudi zakaj oscilacije v 1D sistemu niso možne.

N 3.2 Na padalca, ki prosto pada, deluje kvadratni zakon upora $\mathbf{F} = -kv^2\hat{\mathbf{v}}$.

- Definiraj koordinatni sistem in zapiši enačbo $dv/dt = f(v)$.
- Poišči stacionarno stanje in določi njegovo stabilnost.
- Kolikšen je koeficient k pri sili upora, če skakalec z maso $m = 80$ kg med prostim padom doseže maksimalno hitrost 180 km/h?
- Poišči analitično rešitev za spreminjanje hitrosti v v odvisnosti od časa $v(t)$ in jo nariši.

N 3.3 V enačbah, ki opisujejo populacijsko dinamiko, predstavlja N število populacije, r in K pa sta poljubni pozitivni konstanti. Opiši pomen konstant r in K . Za podano populacijsko dinamiko skiciraj vektorsko polje, poišči stacionarna stanja, nariši spreminjanje $N(t)$ za nekaj različnih začetnih pogojev in poišči analitične rešitve.

- $dN/dt = r$,
- $dN/dt = rN$,
- $dN/dt = r(1 - N/K)$,
- $dN/dt = rN(1 - N/K)$.

N 3.4 Za več vrst organizmov je značilno, da je njihova hitrost razmnoževanja največja, ko doseže populacija približno polovično vrednost maksimalne populacije. Dokaži, da primer $\dot{N}/N = r - a(N - b)^2$ ustreza temu, če konstante r , a in b izpolnjujejo določene omejitve, ki jih je potrebno določiti.

4 Tokovi na krožnici

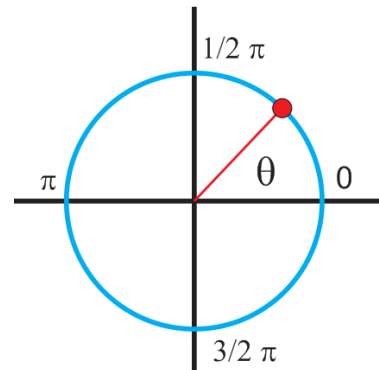
Pri obravnavi 1D dinamičnih sistemov smo se osredotočali na enačbo $\frac{dx}{dt} = f(x)$, ki smo jo vizualizirali kot vektorsko polje na premici. V nadaljevanju se bomo osredotočili na primere, ki privedejo do periodičnih rešitev. V teh primerih je smiseln prikaz vektorskega polja na krožnici:

$$\frac{d\theta}{dt} = f(\theta), \quad \theta(0) = \theta_0.$$

Pri tem θ predstavlja točko na krožnici, $d\theta/dt$ pa je vektor hitrosti v tej točki, določen s pravilom $d\theta/dt = f(\theta)$.

Definicija koordinatnega sistema

Za ponazoritev tokov na krožnici moramo definirati koordinatni sistem. Za izhodišče $\theta = 0$ vzemimo pozitivno vodoravno os, kot je prikazano na sliki 4.1. Smer naraščanja kota $d\theta/dt > 0$ naj bo določena s smerjo, ki je enaka nasprotnemu gibanju urinega kazalca.



Slika 4.1: Tokovi na krožnici. Definicija koordinatnega sistema.

Podobno kot premica je krožnica enodimenzionalna, vendar ima pomembno dodatno lastnost, ki omogoča, da se lahko s tokom v določeni smeri vrnemo na svoje izhodišče, kar je značilno za periodične rešitve.

S tem ko se vrnemo v izhodišče, lahko izračunamo tudi periodo, ki določa čas, potreben za en obrat. Periodo T torej izračunamo z enačbo:

$$T = \int dt = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\dot{\theta}} d\theta,$$

pri čemer je $\dot{\theta} = d\theta/dt = f(\theta)$.

V kolikor je $f(\theta)$ periodična funkcija, velja: $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$.

Krožni tokovi in periodične rešitve so ključni za razumevanje številnih naravnih in inženirskih sistemov, kjer se pojavljajo periodični vzorci in nihanja. Prikaz na krožnici pomaga vizualizirati, kako se ti vzorci oblikujejo in kako se obnašajo v času.

Primer 1:

Narišimo vektorsko polje na krožnici za primer:

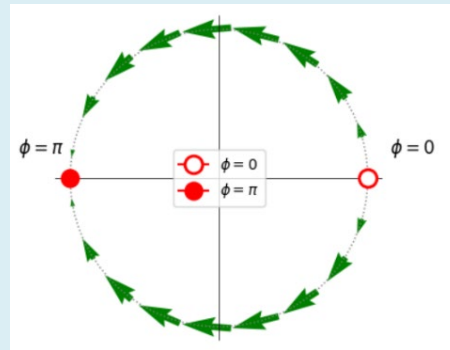
$$\frac{d\theta}{dt} = \sin \theta.$$

Obstajata dve stacionarni stanji:

$$\theta_1^* = 0 \text{ in } \theta_2^* = \pi,$$

pri čemer je $\theta_1^* = 0$ nestabilno in $\theta_2^* = \pi$ stabilno stacionarno stanje.

Največja velikost vektorskega polja je pri $\theta = \pi/2$, kjer je $\frac{d\theta}{dt} > 0$, in pri $\theta = -\pi/2$, kjer je $\frac{d\theta}{dt} < 0$.



Slika 4.2: Vektorsko polje na krožnici za primer $d\theta/dt = \sin \theta$.

Primer 2:

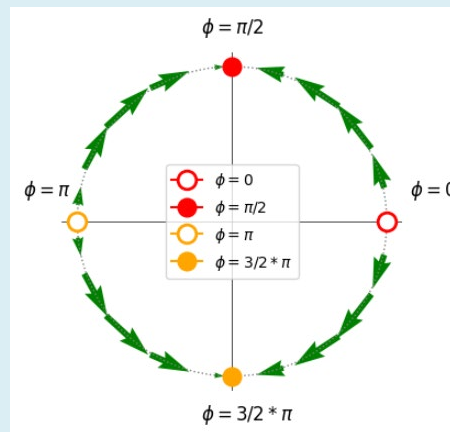
Narišimo vektorsko polje na krožnici za primer:

$$\frac{d\theta}{dt} = \sin 2\theta.$$

Imamo štiri stacionarna stanja:

$$\theta_1^* = 0, \theta_2^* = \frac{\pi}{2}, \theta_3^* = \pi, \theta_4^* = \frac{3}{2}\pi,$$

pri čemer sta $\theta_1^* = 0$ in $\theta_3^* = \pi$ nestabilni ter $\theta_2^* = \frac{\pi}{2}$ in $\theta_4^* = \frac{3}{2}\pi$ stabilni stacionarni stanji.



Slika 4.3: Vektorsko polje na krožnici za primer $d\theta/dt = \sin 2\theta$.

Primer 3:

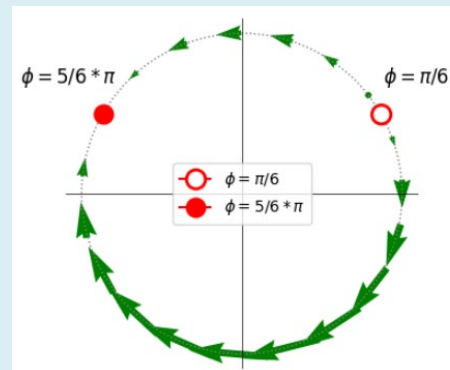
Narišimo vektorsko polje za primer:

$$\frac{d\theta}{dt} = \sin \theta - \theta_0, \theta_0 = \pi/6.$$

Obstajata dve stacionarni stanji:

$$\theta_1^* = \frac{\pi}{6} \text{ in } \theta_2^* = \frac{5}{6}\pi,$$

pri čemer je $\theta_1^* = \frac{\pi}{6}$ nestabilno in $\theta_2^* = \frac{5}{6}\pi$ stabilno stacionarno stanje.

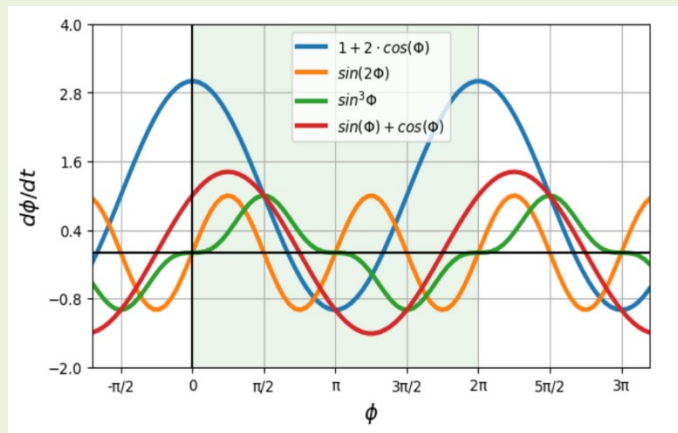


Slika 4.4: Vektorsko polje na krožnici za primer $d\theta/dt = \sin \theta - \pi/6$.

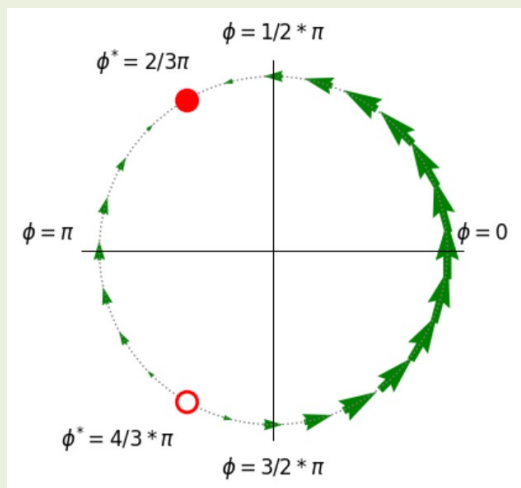
Naloga:

Za našete primere poišči stacionarna stanja, določi njihovo stabilnost in nariši vektorsko polje na krožnici:

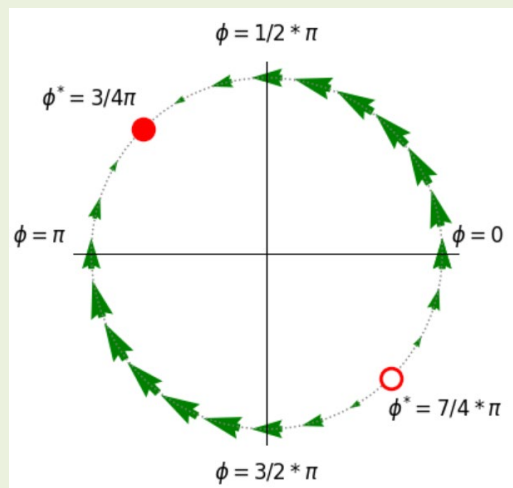
- $\dot{\theta} = 1 + 2 \cos \theta$
- $\dot{\theta} = \sin(2\theta)$
- $\dot{\theta} = \sin^3 \theta$
- $\dot{\theta} = \sin \theta + \cos \theta$

**Rešitve:**

- $\dot{\theta} = 1 + 2 \cos \theta$; $\theta_1^* = 2/3\pi$ (stabilno), $\theta_2^* = 4/3\pi$ (nestabilno).
- $\dot{\theta} = \sin(2\theta)$; $\theta_1^* = 0$ (nestabilno), $\theta_2^* = \pi/2$ (stabilno), $\theta_3^* = \pi$ (nestabilno), $\theta_4^* = 3\pi/2$ (stabilno).
- $\dot{\theta} = \sin^3 \theta$; $\theta_1^* = 0$ (nestabilno), $\theta_2^* = \pi$ (stabilno).
- $\dot{\theta} = \sin \theta + \cos \theta$; $\theta_1^* = 3/4\pi$ (stabilno), $\theta_2^* = 7/4\pi$ (nestabilno).



$$\dot{\theta} = 1 + 2 \cos \theta$$



$$\dot{\theta} = \sin(\theta) + \cos(\theta)$$

4.1 Monotoni »oscilatorji«

Na primeru enakomernega kroženja in utripanja bomo obravnavali primere na krožnici, za katere velja $\frac{d\theta}{dt} = konst.$ Takšne primere imenujemo tudi **monotoni oscilatorji**, čeprav se moramo zavedati, da v tem primeru ne gre za prave oscilacije. Beseda »oscilatorji« izhaja iz dejstva, da se sistem po določenem obhodnem času T vrne v prvotno stanje, pri čemer se dinamika v naslednjem obhodnem času ponovi.

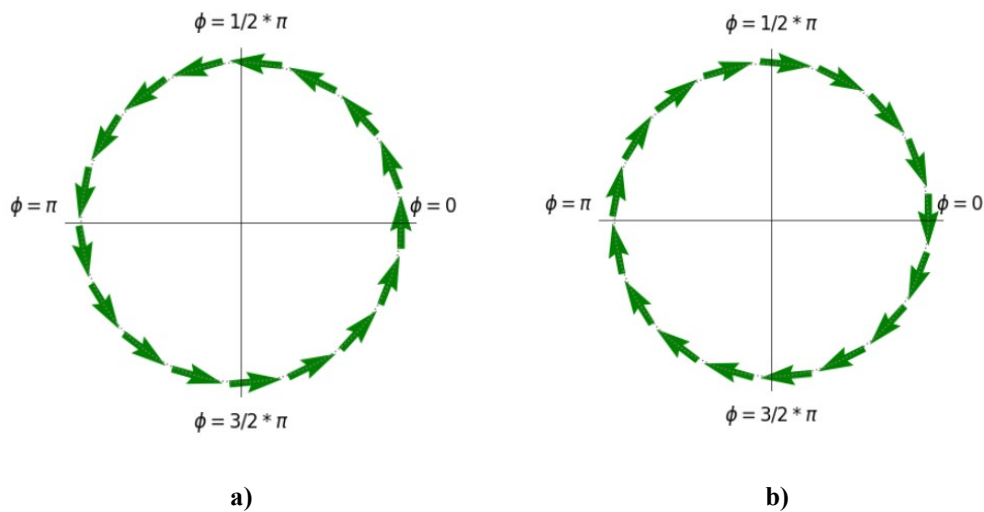
4.1.1 Enakomerno kroženje

Obravnavajmo primer **enakomernega kroženja** s konstantno kotno hitrostjo $\omega = \omega_0$. Za kot zasuka v tem primeru velja:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega, \text{ pri čemer je } \omega = \omega_0 = konst.$$

Rešitev enačbe je: $\theta(t) = \omega_0 t + \theta_0$.

Slika 4.5 prikazujeta **vektorsko polje na krožnici**. Vidimo, da vektorsko polje ne vsebuje stacionarnih stanj, pri čemer enako velike puščice ponazarjajo konstantno kotno hitrost ω_0 .



Slika 4.5: Vektorsko polje na krožnici za primer $d\theta/dt = konst.$ a) $\frac{d\theta}{dt} > 0$. b) $\frac{d\theta}{dt} < 0$.

Perioda

Glede na spreminjanje kota zasuka lahko določimo tudi **periodo**, ki pove, v kolikšnem času naredimo en obrat. V tem primeru je perioda enaka:

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\dot{\theta}} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\omega} d\theta = \frac{2\pi}{\omega}.$$

4.1.2 Utripanje

V nadaljevanju si oglejmo primer kroženja dveh teles. Spreminjanje *faznega kota* (kota zasuka) za prvo in drugo telo opisujeta enačbi:

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \omega_1 \text{ in } \frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2,$$

pri tem sta ω_1 in ω_2 konstantni kotni hitrosti.

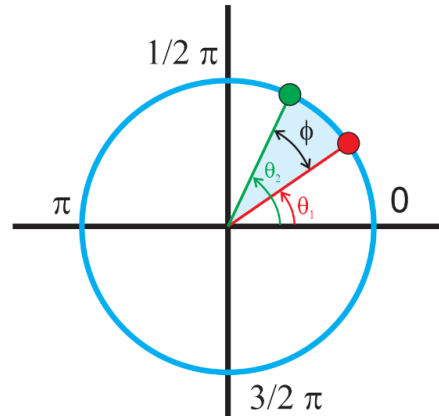
Definirajmo *fazno razliko* med njima kot:

$$\phi = \theta_1 - \theta_2.$$

Če enačbo odvajamo, dobimo:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\theta_1}{dt} - \frac{d\theta_2}{dt} = \omega_1 - \omega_2.$$

Vidimo, da tudi *fazna razlika enakomerno narašča*. Dobimo tako imenovano *utripanje*, ki sledi *povečanju fazne razlike za 2π* .



Slika 4.6: Fazna razlika $\phi = \theta_1 - \theta_2$.

Naloga:

Dva tekača tečeta v krogu. Obhodni čas prvega je T_1 , drugega pa $T_2 > T_1$. Oba štartata istočasno z istega mesta. Čez koliko časa bo prvi prehitel drugega za en krog?

Spreminjanje faznega kota prvega in drugega tekača opisujeta enačbi: $\frac{d\theta_1}{dt} = \omega_1$ in $\frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2$. Definirajmo fazno razliko: $\phi = \theta_1 - \theta_2$ in določimo njeno spreminjanje:

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_1 - \omega_2 = \frac{2\pi}{T_1} - \frac{2\pi}{T_2}.$$

Izračunajmo periodo, ko fazna razlika naraste od 0 do 2π .

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\dot{\phi}} d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} d\phi = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{1}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}}.$$

Perioda T v tem primeru predstavlja čas, ko drugi tekač prehitel prvega za 1 krog.

4.2 Neenakomerni »oscilatorji«

Za razliko od prej omenjenih monotonih oscilatorjev obravnavajmo sedaj primere, ko *spreminjanje faze pri gibanju po krožnici ni enakomerno*. Takšnim sistemov pravimo tudi *neenakomerni oscilatorji*. Podobno kot pri monotonih oscilatorjih velja tudi sedaj omeniti, da pri tem ne gre za prave oscilacije. Oscilirajoče se spreminja le hitrost spreminjanja faze.

Kot primer neenakomernih oscilatorjev se v številnih vejah znanosti in inženirstva pojavlja enačba v obliki:

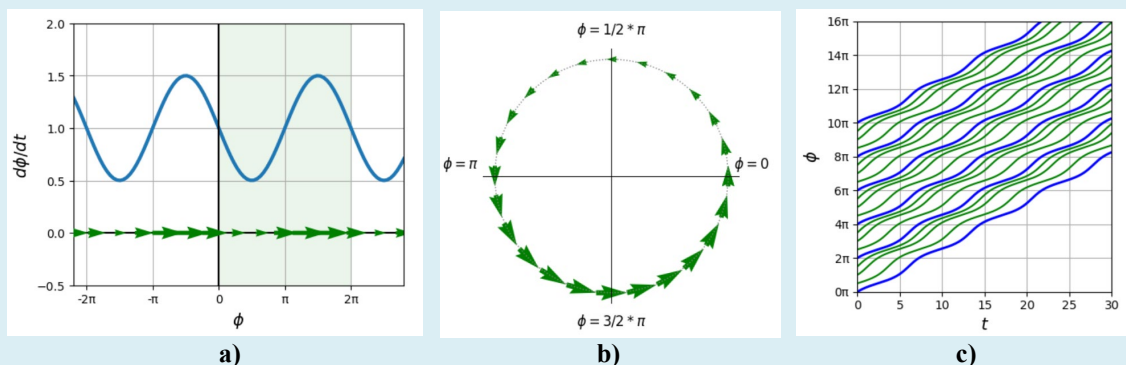
$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 - a \sin \theta, \quad \theta(0) = \theta_0.$$

Enak zapis enačbe lahko zasledimo pri različnih primerih na področju elektronike, biologije, mehanike in drugih področjih, pri čemer je vrednost a v enačbi **mera za neenakomernost**. V primeru, ko je $a = 0$, je to primer monotonega oscilatorja z $\omega = konst.$

Primeri:

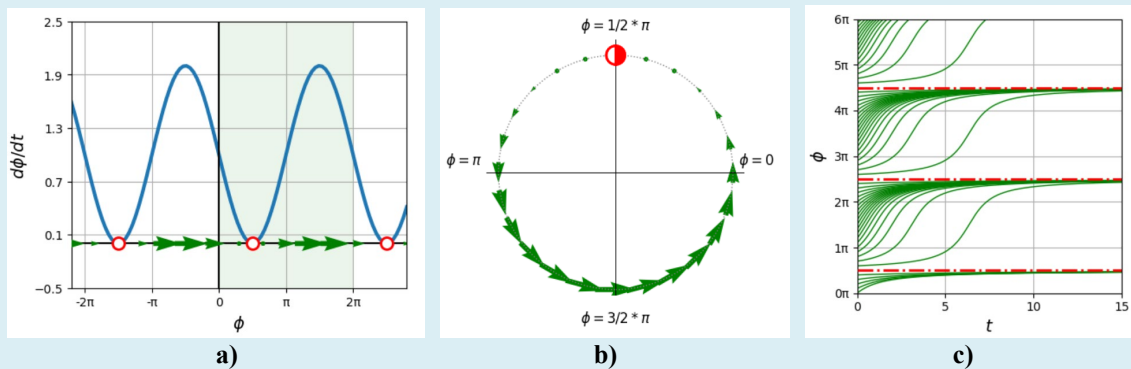
Oglejmo si rešitve enačbe za različne vrednosti konstante a : $a_1 = 0,5$, $a_2 = 1,0$ in $a_3 = 2,0$, pri čemer je $\omega_0 = 1$. Na sliki 4.7 so prikazana vektorska polja na premici in krožnici. Prikazani so tudi časovni poteki $\theta(t)$. Pri vektorskem polju na premici je označeno območje $[0, 2\pi]$, ki se periodično ponavlja in je hkrati narisano tudi na krožnici. Periodično ponavljanje lahko zasledimo tudi iz časovnega poteka $\theta(t)$ za različna začetna stanja.

V prvem primeru ($a_1 = 0,5$) vidimo, da stacionarna stanja ne obstajajo (slika 4.7). Količina θ se ne enakomerno povečuje, pri čemer je največja hitrost pri $\theta = \frac{3}{2}\pi$ in najmanjša pri $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Periodično spreminjanje hitrosti privede do oscilirajočega naraščanja, ki je razvidno iz slike 4.7c. Podobno obnašanje velja za primere, ko je $a^2 < \omega_0^2$.



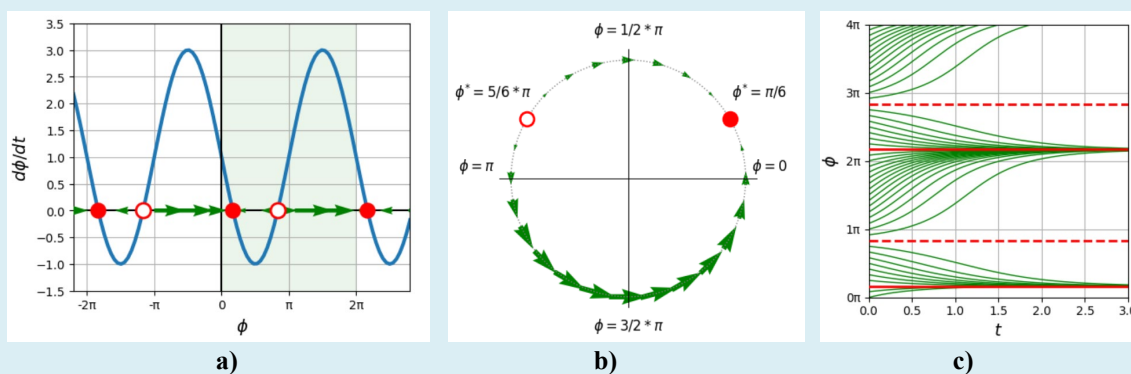
Slika 4.7: Neenakomerni oscilator: $\omega_0 = 1.0$ in $a = 0.5$. **a)** Vektorsko polje na premici. **b)** Vektorsko polje na krožnici. **c)** Časovni poteki $\theta(t)$ za različna začetna stanja. Z modro črto so označeni primeri, katerih začetno stanje je večkratnik števila 2π .

V drugem primeru ($a_2 = 1,0$) vidimo, da se pojavi polstabilno stacionarno stanje pri $\theta^* = \frac{1}{2}\pi$, ki se nato ponavlja po koraku 2π (slika 4.8). Iz časovnega poteka $\theta(t)$ vidimo, kako se iz ene strani približujemo, z druge pa oddaljujemo pol stabilnemu stacionarnemu stanju. Pojav polstabilnega stacionarnega stanja je posledica velikosti konstante a in ω_0 , ki sta v tem primeru enaki: $a = \omega_0$.



Slika 4.8: Neenakomerni oscilator: $\omega_0 = 1,0$ in $a = 1,0$. **a)** Vektorsko polje na premici. **b)** Vektorsko polje na krožnici. **c)** Časovni potek $\theta(t)$ za različna začetna stanja. Z rdečo črto so označena pol stabilna stanja.

V tretjem primeru ($a_3 = 2,0$) se pojavita dve stacionarni stanji, ki se ponavljata za večkratnik števila 2π (slika 4.9). Prvo stacionarno stanje $\theta_1^* = \frac{1}{6}\pi$ je stabilno, drugo stacionarno stanje $\theta_2^* = \frac{5}{6}\pi$ pa nestabilno. Pojav stabilnega in nestabilnega stacionarnega stanja je značilen za primere, ko je $a > 1$ ali $a < -1$.



Slika 4.9: Neenakomerni oscilator: $\omega_0 = 1,0$ in $a = 2,0$. **a)** Vektorsko polje na premici. **b)** Vektorsko polje na krožnici. **c)** Časovni potek $\theta(t)$ za različna začetna stanja. Z rdečo polno črto so označena stabilna stacionarna stanja, z rdečo črtkano pa nestabilna stacionarna stanja.

4.2.1 Perioda oscilacij

Za primere enačbe $\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 - a \sin \theta$, ko je $a^2 < \omega_0^2$, dobimo *oscilirajoče spreminjanje hitrosti* $\frac{d\theta}{dt}$. V tem primeru lahko analitično določimo **periodo oscilacij**, ki predstavlja čas, ko se vrednost θ spremeni za 2π :

$$T = \int dt = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\theta} d\theta,$$

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(d\theta/dt)} d\theta,$$

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\omega_0 - a \sin \theta} d\theta.$$

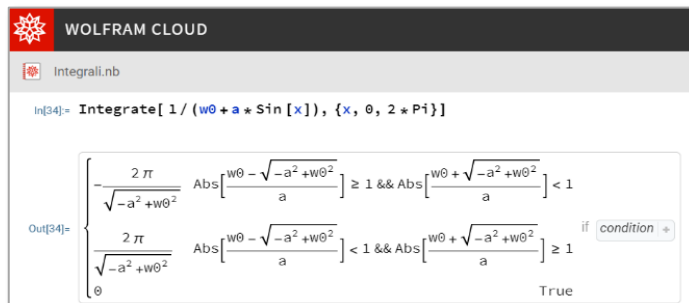
Če dobljeno enačbo integriramo od 0 do 2π (slika 4.10), dobimo:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - a^2}}, \quad a^2 < \omega_0^2.$$

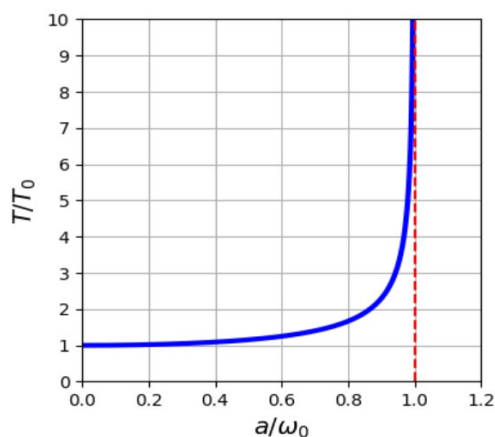
Enačbo preuredimo in zapišemo:

$$\frac{T}{T_0} = \left(1 - \left(\frac{a}{\omega_0}\right)^2\right)^{-1/2}, \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Slika 4.11 prikazuje spreminjanje $\frac{T}{T_0}$ v odvisnosti $\frac{a}{\omega_0}$. Ko se vrednost a približuje vrednosti ω_0 , perioda T narašča proti neskončnosti.



Slika 4.10: Integracija s pomočjo Wolfram cloud. <https://www.wolframcloud.com/>



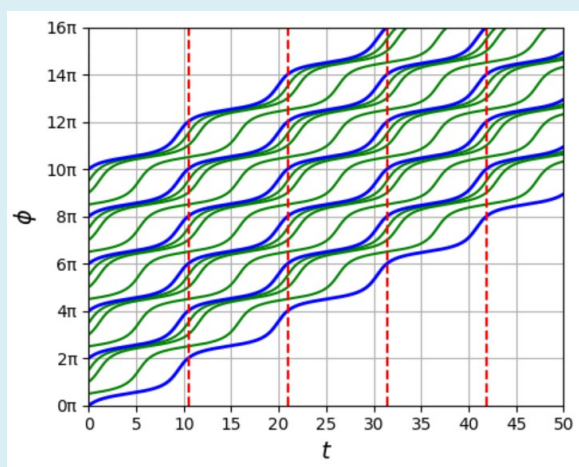
Slika 4.11: Perioda oscilacij (T/T_0) v odvisnosti od razmerja a/ω_0 . $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Primer:

Obravnavajmo primer, ko je $a = 0,8$ in $\omega_0 = 1$. Perioda oscilacij je v tem primeru:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - a^2}} = \underline{10,47 \text{ s}},$$

kar je razvidno tudi iz oscilirajočega spreminjanja hitrosti ($d\theta/dt$) na sliki 4.12. Periodo oscilacij označujejo tudi pokončne črtkane črte.



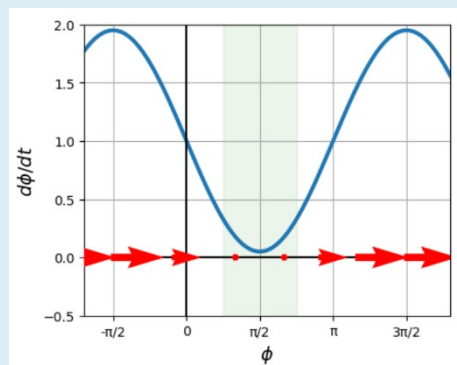
Slika 4.12: Prikaz periode oscilacij ($T = 10,47 \text{ s}$) za primer $a = 0,8$ in $\omega_0 = 1$.

4.2.2 Učinek počasnega prehoda

Počasni prehod (ang. "*slow-passage effect*") je pojav, ki se pojavlja v različnih znanstvenih in tehničnih kontekstih. Gre za okoliščine, kjer nek sistem prehaja skozi kritično točko oziroma tako imenovano »ozko grlo«. Sistem je v tem primeru v bližini faznega prehoda oziroma v bližini »bifurkacijske točke«, pri čemer se *spremenljivka sistema počasi spreminja s časom*.

Primer 1:

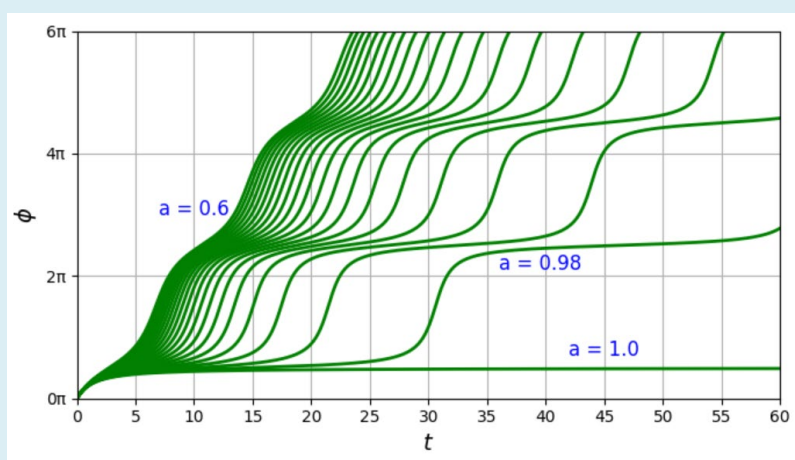
Oglejmo si primer počasnega prehoda za vektorsko polje $\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 - a \sin \theta$. Vrednost $a = 0,95$ in $\omega_0 = 1$. Na sliki 4.13 vidimo, da je počasen prehod pri vrednosti $\theta_p = \pi/2$, saj je hitrostno polje v okolici te točke v primerjavi z ostalim območjem precej majhno. Zaradi periodičnosti funkcije so počasni prehodi prisotni tudi pri $\theta_p + 2k\pi$, kjer je k poljubno celo število.



Slika 4.13: Primer vektorskega polja za počasen prehod. Vrednost $a = 0,95$ in $\omega_0 = 1$.

Primer 2:

Za vektorsko polje $\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 - a \sin \theta$ si oglejmo, kako je dolžina počasnega prehoda odvisna od velikosti parametra a . Na sliki 4.14 so prikazani časovni poteki $\theta(t)$ za različne vrednosti parametra a . Vidimo, da počasen prehod nastopi pri $\theta = \pi/2$ in se veča s približevanjem parametra a vrednosti $\omega_0 = 1$. Zaradi periodičnosti funkcije so počasni prehodi prisotni tudi pri $\theta_p + 2k\pi$, kjer je k poljubno celo število. Ko parameter a doseže vrednost $a = \omega_0$, postane dolžina časovnega prehoda neskončna, saj imamo v tem primeru pri $\theta = \pi/2$ pol stabilno stacionarno stanje.



Slika 4.14: Počasen prehod v odvisnosti od parametra a . $\omega_0 = 1$.

Skaliranje počasnega prehoda s kvadratnim korenem

Določiti želimo čas prehoda, ki je potreben za prehod skozi tako imenovano »ozko grlo«. Pri tem je pomembno hitrostno polje ($d\theta/dt = f(\theta)$) v neposredni bližini minimuma, saj čas gibanja v tem območju prevladuje nad drugimi časovnimi območji.

V bližini minimuma lahko funkcijo $d\theta/dt = f(\theta)$ aproksimiramo s parabolično funkcijo. Pri tem gre za razvoj funkcije $f(\theta)$ v Taylorejvo vrsto, pri čemer višje člene zanemarimo, s tem smo problem bistveno poenostavili.

Z lokalnim preoblikovanjem prostora lahko vektorsko polje v tem primeru zapišemo kot:

$$\frac{dx}{dt} = r + x^2,$$

pri čemer je parameter r sorazmeren oddaljenosti od bifurkacije oziroma pol stabilnega stacionarnega stanja, in s tem predstavlja mero za počasen prehod. Parameter r je majhen ($0 < r \ll 1$), kar pomeni, da so spremembe v sistemu blizu bifurkacije zelo majhna v primerjavi s celotnimi spremembami v sistemu.

Čas prehoda od x_1 do x_2 izračunamo z integracijo:

$$T = \int dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{dx} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{dx/dt} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{r+x^2}.$$

Predpostavimo tudi, da je čas prehoda od x_1 do x_2 približno enak času od $x_1 \rightarrow -\infty$ do $x_2 \rightarrow -\infty$. To upravičimo s kvadratnim naraščanjem hitrost dx/dt z oddaljevanjem od točke prehoda, pri čemer povečana hitrost posledično vpliva na vse krajše časovne intervale, ki jih lahko zanemarimo.

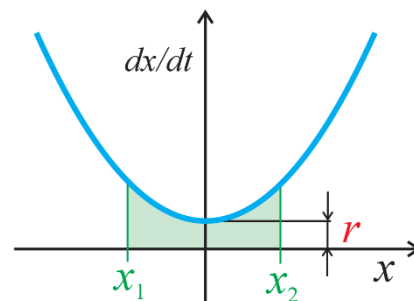
Čas prehoda je v tem primeru približno:

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{r+x^2} \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{r+x^2},$$

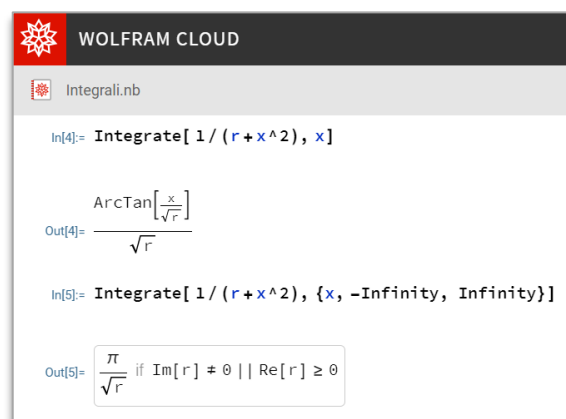
$$T \approx \frac{1}{\sqrt{r}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{r}} \Big|_{-\infty}^{\infty},$$

$$T \approx \frac{1}{\sqrt{r}} \left(\frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{r}} \left(-\frac{\pi}{2} \right),$$

$$T \approx \frac{\pi}{\sqrt{r}}.$$



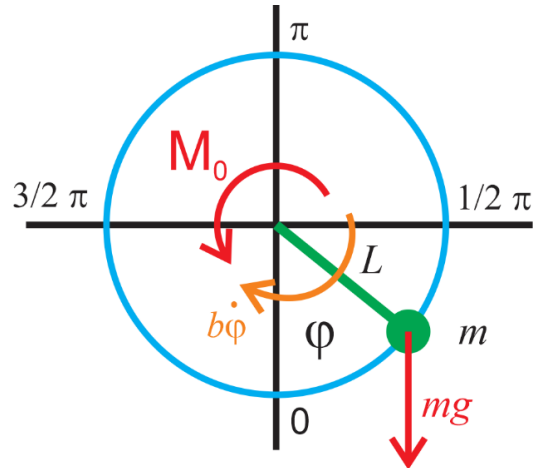
Slika 4.15: Prikaz funkcije: $f(x) = r + x^2$.



Slika 4.16: Integracija s pomočjo Wolfram cloud. <https://www.wolframcloud.com/>

4.3 Močno dušen oscilator s konstantnim zunanjim navorom

Obravnavajmo primer močno dušenega oscilatorja, ki ga poganjamo s konstantnim zunanjim navorom M_0 . Oscilator ima maso m , ki se nahaja na ročici zanemarljive mase z dolžino L . Na telo z maso m deluje teža $F_g = mg$, zunanji navor M_0 in linearni upor, katerega navor je $M_u = b \frac{d\varphi}{dt}$. Pri tem je φ kot zasuka iz ravnovesne lege.



Slika 4.17: Močno dušen oscilator z zunanjim navorom M_0 .

Upoštevajmo II. Newtonov zakon za vrtenje in zapišimo:

$$J\ddot{\varphi} = \sum \mathbf{M},$$

pri čemer je J vztrajnostni moment oscilatorja, $\sum \mathbf{M}$ je vsota vseh zunanjih navorov in φ je kot zasuka oscilatorja iz ravnovesne lege. Vztrajnostni moment oscilatorja je v našem primeru enak $J = \int r^2 dm = mL^2$.

Enačbo gibanja v tem primeru opisuje naslednja diferencialna enačba:

$$mL^2\ddot{\varphi} = -mgL\sin\varphi - b\dot{\varphi} + M_0. \quad (2D \text{ sistem})$$

Predpostavimo še, da imamo **močno dušenje**, pri čemer velja:

$$mL^2\ddot{\varphi} \ll b\dot{\varphi}.$$

Člen $mL^2\ddot{\varphi}$ v enačbi gibanja lahko torej zanemarimo in zapišemo:

$$\frac{b}{mgL}\dot{\varphi} = \frac{M_0}{mgL} - \sin\varphi.$$

Vpeljimo tudi nove spremenljivke kot **brezdimenzijske količine**:

$$\frac{M_0}{mgL} = \gamma, \quad \frac{mgL}{b}t = \tau \quad \rightarrow \quad \frac{mgL}{b}dt = d\tau.$$

Dobili smo enačbo za **neenakomerni oscilator**:

$$d\varphi/d\tau = \gamma - \sin\varphi, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad (1D \text{ sistem})$$

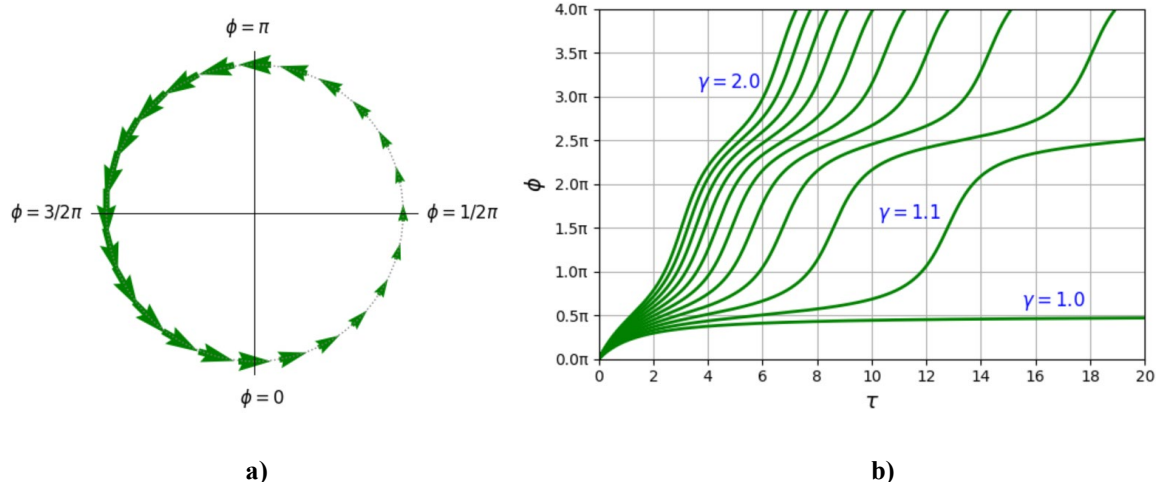
pri čemer parameter γ določa režim gibanja oscilatorja.

V nadaljevanju si bomo podrobneje ogledali posamezne režime gibanja za različne vrednosti parametra γ ($\gamma > 1$, $\gamma = 1$ in $\gamma < 1$).

4.3.1 Zunanji navor prevlada nad navorom teže

Vrednost parametra $\gamma = \frac{M_0}{mgL} > 1$ pomeni, da je zunanji navor M_0 večji od maksimalnega navora teže, ki deluje pri kotu $\varphi = \pi/2$ ($M_g = mgL \sin \varphi = mgL$).

V tem primeru zunanji navor nikoli ni v ravnovesju z navorom teže. Nihalo se nenehno vrti s spreminjajočo se hitrostjo, kot je prikazano na sliki 4.18. Najmanjšo hitrost ima pri kotu $\varphi = \pi/2$, ko gibanju nasprotuje največji navor teže. Vidimo lahko (slika 4.18b), da je s povečevanjem parametra γ obhodni čas vse krajši.



Slika 4.18: Močno dušen oscilator s konstantnim zunanjim navorom M_0 . Koordinatni sistem je izbran skladno s sliko 4.17. **a)** Vektorsko polje na krožnici za primer $\gamma = \frac{M_0}{mgL} = 2$. **b)** Časovni potek $\theta(\tau)$ za različne vrednosti parametra γ .

Obhodni čas

Ker se v primeru $\gamma = \frac{M_0}{mgL} > 1$ nihalo neprestano vrti, lahko izračunamo obhodni čas nihala. Obhodni čas v *brezdimenzijskih enotah* je:

$$\tau_0 = \int d\tau = \int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{d\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{d\varphi/d\tau} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma - \sin\varphi} d\varphi,$$

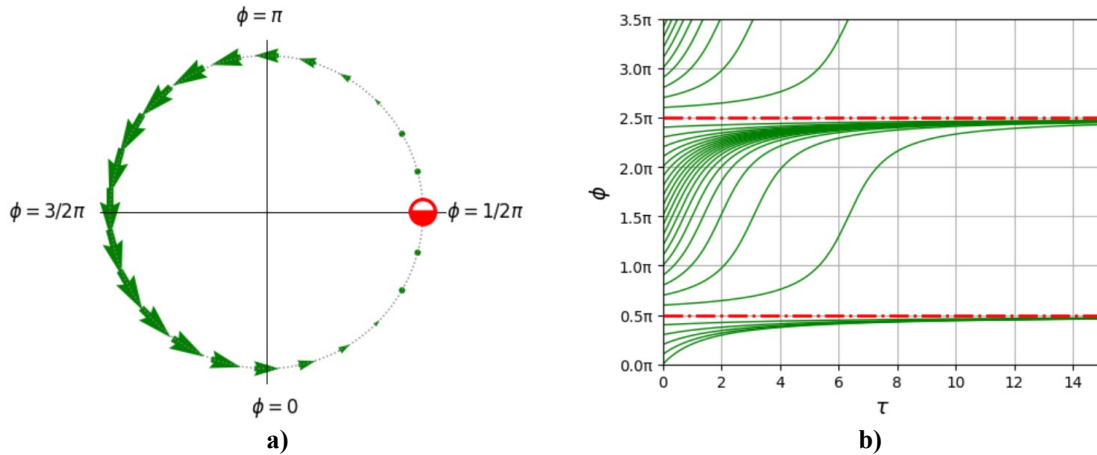
$$\tau_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}.$$

Upoštevajmo sedaj tudi zvezo $\frac{mgL}{b} t = \tau$ in zapišimo obhodni čas kot:

$$T = b \frac{2\pi}{\sqrt{(M_0)^2 - (mgL)^2}}.$$

4.3.2 Zunanji navor uravnovesi maksimalni navor teže

Za vrednost parametra $\gamma = \frac{M_0}{mgL} = 1$ zunanji navor M_0 uravnovesi največji navor teže pri $\varphi = \pi/2$. Posledično se na tem mestu pojavi polstabilno stacionarno stanje ($\varphi^* = \pi/2$), preko katerega se nihalo ne more zavrtet. Na sliki 4.19 vidimo vektorsko polje na krožnici in časovni potek $\theta(\tau)$ za ta primer.



Slika 4.19: Močno dušen oscilator s konstantnim zunanjim navorom M_0 . Koordinatni sistem je izbran skladno s sliko 4.17. **a)** Vektorsko polje na krožnici za primer $\gamma = \frac{M_0}{mgL} = 1$. **b)** Časovni potek $\theta(\tau)$ za različna začetna stanja $\theta(0)$. $\tau = \frac{mgL}{b} t$.

Največja hitrost nihala je pri $\varphi = \frac{3}{2}\pi$. Nihalo se takrat spušča navzdol, pri čemer mu pri gibanju pomagata tako zunanji navor M_0 kot tudi navor teže, ki je pri $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ največji v smeri gibanja ($M_g = mgL \sin \varphi = mgL$). Posledično je na tem mestu tudi največja hitrost nihala.

Najmanjša hitrost nihala ($d\varphi/d\tau = 0$) je pri $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, kjer je največji navor teže v nasprotni smeri gibanja. Navor teže na tem mestu uravnovesi zunanji navor M_0 , kar posledično pomeni, da se nihalo na tem mestu ustavi.

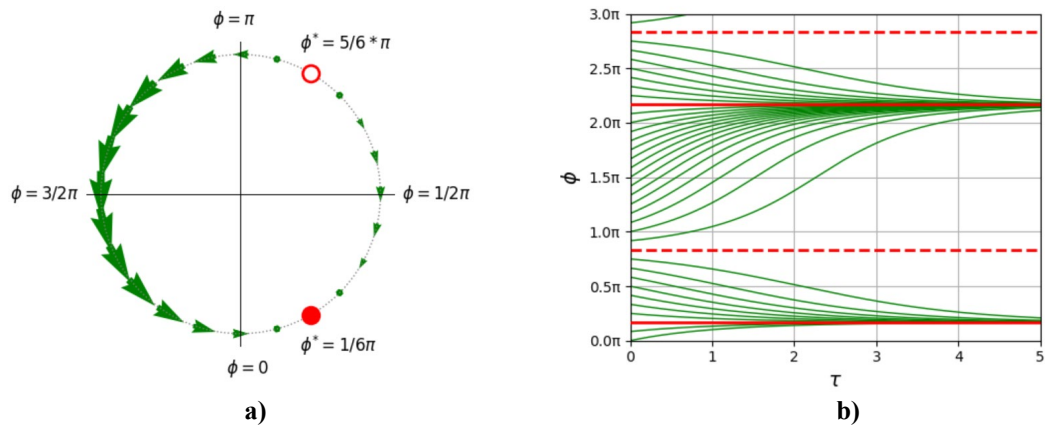
4.3.3 Zunanji navor je manjši od maksimalnega navora teže

V primeru $\gamma = \frac{M_0}{mgL} < 1$ zunanji navor ne more več uravnovesiti največjega navora teže pri $\varphi = \pi/2$. Nihalo se zato ustavi že pri nekoliko manjšem kotu ($\varphi_1^* < \pi/2$), pri katerem velja $\sin \varphi_1^* = \gamma$. Pojavi se še dodatno nestabilno stacionarno stanje ($\varphi_2^* > \pi/2$), pri katerem prav tako velja $\sin \varphi_2^* = \gamma$. V kolikor se nihalo nahaja v položaju $\varphi_1^* < \varphi < \varphi_2^*$, se bo nihalo spustilo do φ_1^* v smeri urinega kazalca. V primeru, ko je $\varphi > \varphi_2^*$, se bo nihalo zavrtelo v nasprotni smeri urinega kazalca, dokler se ne bo ustalilo pri φ_1^* .

Pogoj za **stacionarno stanje** nihala je:

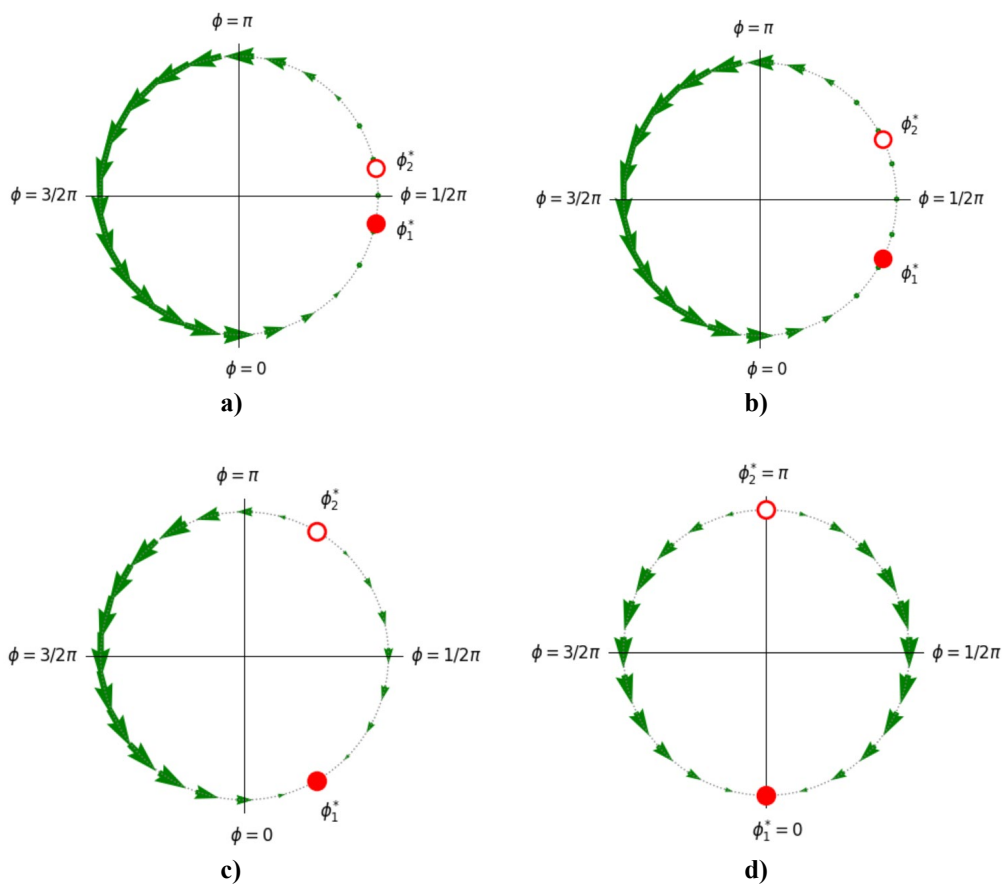
$$\sin \varphi_{1,2}^* = \gamma < 1,$$

pri čemer je $\varphi_1^* < \frac{\pi}{2}$ **stabilno** in $\varphi_2^* > \pi/2$ **nestabilno** stacionarno stanje.



Slika 4.20: Močno dušen oscilator s konstantnim zunanjim navorom M_0 . Koordinatni sistem je izbran skladno s sliko 4.17. **a)** Vektorsko polje na krožnici za primer $\gamma = \frac{M_0}{mgL} = 0,5$. **b)** Časovni potek $\theta(\tau)$ za različna začetna stanja $\theta(0)$.

Če se vrednost γ približuje vrednosti nič ($\gamma \rightarrow 0$), tudi zunanji navor izgine ($M_0 \rightarrow 0$). V tem primeru se stabilno stacionarno stanje premika proti $\varphi_1^* \rightarrow 0$ in nestabilno proti $\varphi_2^* \rightarrow \pi$, kar je razvidno iz slike 4.21.



Slika 4.21: Vektorsko polje močno dušenega oscilatorja. $\gamma = \frac{M_0}{mgL}$. **a)** $\gamma = 0,98$. **b)** $\gamma = 0,8$. **c)** $\gamma = 0,5$. **d)** $\gamma = 0$.

4.4 Sinhronizacija utripanja kresnic

Kresnice (Lampyridae) so člani družine hroščev, ki predstavljajo okoli 2000 različnih znanih vrst. Znane so predvsem po svoji sposobnosti ustvarjanja svetlobe s pomočjo posebnega svetlobnega organa, ki se nahaja v njihovem zadku. Ta značilnost jih postavlja med redke organizme, ki lahko ustvarjajo lastno svetlobo, kar imenujemo bioluminiscenca.



Slika 4.21: Bioluminiscenca kresnic.

Kresnice uporabljajo svojo svetlobo za komunikacijo med seboj. Vsaka vrsta kresnic ima svoj edinstven vzorec utripanja svetlobe, ki ga uporabljajo za prepoznavanje partnerja iste vrste. To je ključno za njihovo razmnoževanje, saj samci in samice iščejo partnerje s pravilnim vzorcem svetlobnih utripov, ki signalizira, da sta primerna za parjenje. Bioluminiscenca kresnic ima tudi zaščitno funkcijo. S svetlobo, ki jo oddajajo, zmedejo potencialne plenilce, kar jim omogoči preživetje.

Kresnice so torej živi primeri, kako narava uporablja edinstvene mehanizme za preživetje, komunikacijo in zaščito. V nadaljevanju si bomo podrobneje ogledali primer sinhronizacije utripanja kresničk. To je kompleksen pojav, ki ga lahko razložimo s pomočjo neenakomernega oscilatorja.

4.4.1 Utripanje zunanjih dražljajev

Utripanje zunanjih dražljajev modeliramo s fazo $\theta(t)$, ki se periodično spreminja od 0 do 2π . Pri tem predpostavimo, da kresnica zazna zunanji signal, ko faza doseže vrednost $\theta(t) = 0$. Spreminjanje faze je enakomerno:

$$\frac{d\theta}{dt} = \Omega,$$

pri čemer je Ω kotna frekvenca svetlobnih dražljajev, ki jih zaznava kresnica.

4.4.2 Utripanje kresnic

Utripanje kresnic modeliramo s pomočjo faze utripanja kresnic $\theta(t)$. Predpostavimo, da kresnica odda signal, ko faza utripanja $\theta(t)$ zavzame vrednost $\theta(t) = 0$.

Kadar nimamo zunanjih dražljajev (zunanjega vzbujanja), se faza utripanja spreminja enakomerno:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_0.$$

Pri tem je ω_0 frekvenca utripanja ob odsotnosti zunanjih dražljajev.

Ob prisotnosti zunanjih dražljajev ($d\Theta/dt = \Omega$) pa lahko kresnice frekvenco utripanja spreminjajo:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega(t),$$

pri čemer spreminjanje frekvence $\omega(t)$ sledi pogoju:

- kresnica v poskusu sinhronizacije signala poveča frekvenco utripanja $\omega(t)$, če utripanje zunanjega dražljaja prehiteva utripanje kresnice:

$$0 < \Theta - \theta < \pi,$$

- kresnica v poskusu sinhronizacije signala zmanjša frekvenco utripanja $\omega(t)$, če utripanje zunanjega signala zaostaja za utripanjem kresnice:

$$-\pi < \Theta - \theta < 0.$$

Preprost model, ki upošteva zgornji predpostavki, je:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega(t) = \omega_0 + A \sin(\Theta - \theta),$$

pri čemer parameter $A > 0$ predstavlja sposobnost prilagajanja frekvence kresnice na zunanje dražljaje.

Določimo spreminjanje **fazne razlike** med utripanjem zunanjega signala in utripanjem kresnice:

$$\phi = \Theta - \theta,$$

$$d\phi/dt = d\Theta/dt - d\theta/dt = \Omega - \omega(t),$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \Omega - \omega_0 - A \sin(\phi).$$

Vpeljemo nove spremenljivke kot **brezdimenzijske količine**:

$$\frac{\Omega - \omega_0}{A} = \mu,$$

$$At = \tau.$$

Dobimo enačbo **neenakomernega oscilatorja**:

$$d\phi/d\tau = \mu - \sin\phi.$$

Podobno kot v prejšnjih primerih tudi za ta primer neenakomernega oscilatorja naredimo analizo obnašanja oscilatorja za različne vrednosti parametra $\mu = \frac{\Omega - \omega_0}{A}$, pri katerih zasledimo različne režime delovanja oscilatorja.

4.4.3 Primer sočasnega utripanja

Oglejmo si primer, ko je parameter μ enak nič:

$$\mu = \frac{\Omega - \omega_0}{A} = 0.$$

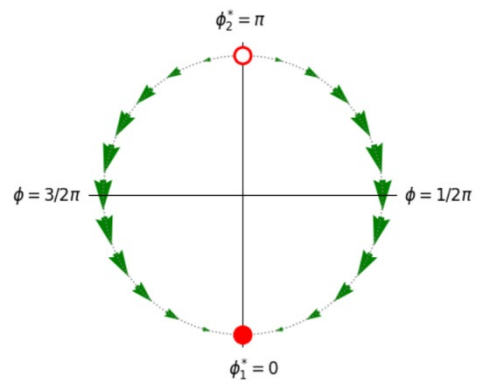
Iz enačbe vidimo, da je v tem primeru frekvenca utripanja zunanjšega dražljaja enaka frekvenci utripanja kresnice ($\Omega = \omega_0$). Spreminjanje fazne razlike je v tem primeru enako:

$$d\phi/d\tau = -\sin\phi.$$

Iz enačbe vidimo, da imamo dve stacionarni stanji:

$$\begin{aligned} \phi_1^* &= 0 \text{ (stabilno stacionarno stanje),} \\ \phi_2^* &= \pi \text{ (nestabilno stacionarno stanje).} \end{aligned}$$

Slika 4.22 prikazuje vektorsko polje na krožnici. Iz vektorskega polja vidimo, da poljubna začetna fazna razlika, razen $\phi = \pi$, privede do stabilnega stacionarnega stanja $\phi_1^* = 0$, kar pomeni, da dobimo **simultano (sočasno) utripanje** kresnic in zunanjih dražljajev. V primeru nestabilnega stacionarnega stanja $\phi_2^* = \pi$ pa je utripanje kresnic v obratni fazi z utripanjem zunanjih dražljajev.



Slika 4.22: Vektorsko polje fazne razlike utripanja kresnic za primer $\mu = 0$.

4.4.4 Primer utripanja s konstantno fazno razliko

V nadaljevanju obravnavajmo primer, za katerega velja ($-1 < \mu < 1$):

$$-1 < \frac{\Omega - \omega_0}{A} < 1.$$

Iz enačbe $d\phi/d\tau = \mu - \sin\phi$ določimo stacionarna stanja fazne razlike utripanja.

Pogoj za **stacionarno stanje** fazne razlike je:

$$-1 < \sin \phi_{1,2}^* = \mu < 1,$$

pri čemer je:

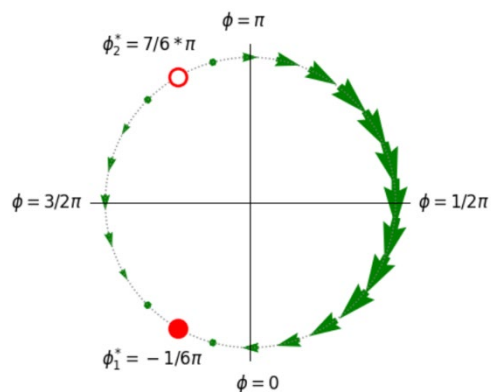
$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} < \phi_1^* < \frac{\pi}{2} & \text{ **stabilno** stacionarno stanje in} \\ \frac{3}{2}\pi > \phi_2^* > \frac{\pi}{2} & \text{ **nestabilno** stacionarno stanje.} \end{aligned}$$

Fazna razlika v tem primeru ni več enaka nič, ampak je »zaklenjena« na fazo utripanja zunanjih dražljajev. Na sliki 4.23 je prikazano vektorsko polje za primer $\mu = -0,5$. Vidimo, da se v tem primeru fazna razlika ustali pri $\phi_1^* < -\frac{1}{6}\pi$.

Konstantna fazna razlika pomeni, da kresnica in zunanji dražljaji utripajo z enako frekvenco, vendar ne sočasno:

$$d\phi/dt = d\Theta/dt - d\theta/dt = 0,$$

$$\Omega - \omega = 0 \quad \rightarrow \quad \Omega = \omega.$$

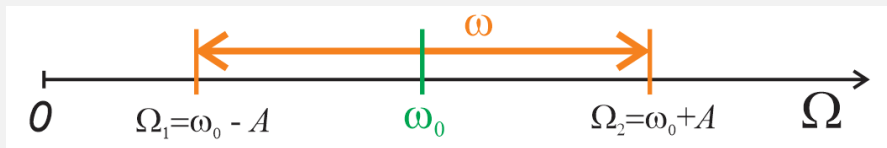


Slika 4.23: Vektorsko polje fazne razlike utripanja kresnic za primer $\mu = -0,5$.

Iz pogoja za stacionarna stanja lahko določimo tudi **frekvenčno območje**, v katerem je kresnica zmožna utripati z enako frekvenco kot zunanji dražljaj ($\Omega_1 < \omega = \Omega < \Omega_2$). Če upoštevamo, da je $\mu = \frac{\Omega - \omega_0}{A}$ in pogoj za stacionarna stanja ($-1 \leq \mu \leq 1$), dobimo:

$$\Omega = \omega_0 + \mu A \quad \rightarrow \quad \Omega_{1,2} = \omega_0 \pm A.$$

Vidimo, da območje prilagajanja določa parameter A .



Slika 4.24: Frekvenčno območje, v katerem lahko kresnica utripa z enako frekvenco kot zunanji dražljaj.

4.4.5 Primer utripanja s spreminjajočo se fazno razliko

V primeru, ko je parameter $-1 > \mu > 1$, stacionarna stanja izginejo. Razlika med frekvenco utripanja kresnice brez prisotnosti zunanjih dražljajev (ω_0) in frekvenco zunanjih dražljajev (Ω) je v tem primeru prevelika:

$$-A > \Omega - \omega_0 > A,$$

da bi kresnica lahko prilagodila frekvenco utripanja (ω) frekvenci zunanjih dražljajev (Ω).

Fazna razlika v tem primeru **ni konstanta**, ampak se neprestano spreminja z **oscilirajočo hitrostjo**.

Za omenjen primer lahko izračunamo **periodo oscilirajoče hitrosti** spreminjanja fazne razlike ($d\phi/dt$).

Perioda oscilacij v brezdimenzijskih količinah je:

$$\tau_0 = \int d\tau = \int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{d\phi} d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{d\phi/d\tau} d\phi,$$

$$\tau_0 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\mu - \sin\phi} d\phi,$$

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu^2 - 1}}.$$

Upoštevajmo tudi zvezo $At = \tau$ in zapišimo periodo oscilacij:

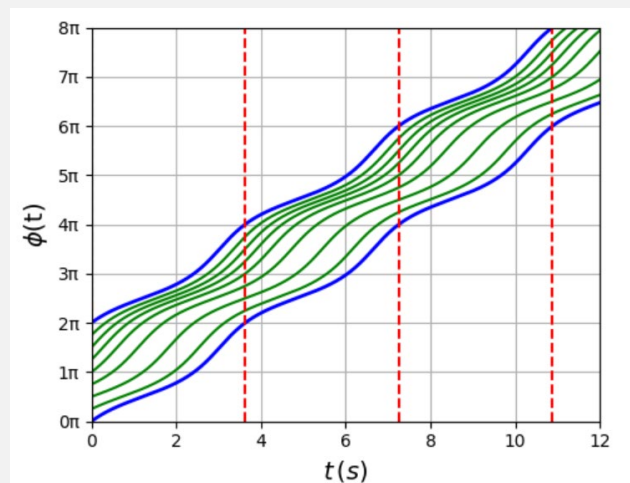
$$T = \tau_0 \frac{1}{A} = \frac{1}{A} \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{\Omega - \omega_0}{A}\right)^2 - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{(\Omega - \omega_0)^2 - (A)^2}}.$$

Primer:

Oglejmo si primer spreminjanja hitrosti fazne razlike za $\Omega - \omega_0 = 2A$, pri čemer je $A = 1$. V tem primeru je $\Omega - \omega_0 > A$, kar pomeni, da imamo oscilirajočo spreminjanje hitrosti, katere perioda je:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{(\Omega - \omega_0)^2 - (A)^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = 3,6 \text{ s}.$$

Na sliki 4.25 je prikazan časovni potek spreminjanja fazne razlike $\phi(t)$ za različna začetna stanja od 0 do 2π . S slike lahko razberemo tudi periodo oscilacij (pokončne rdeče črte).



Slika 4.25: Časovni potek fazne razlike $\phi(t)$ za različna začetna stanja od 0 do 2π . Pokončne rdeče črte označujejo periodo oscilacij hitrosti ($d\phi/dt$). $\Omega - \omega_0 = 2A$, $A = 1$.

Naloge

4. Tokovi na krožnici

N 4.1 Kadar je Mars poravnan z Zemljo in Soncem na isti premici, je razdalja od Marsa do Zemlje najmanjša. Gledano z Zemlje je takrat Mars v opoziciji s Soncem. Obhodni čas Zemlje okoli Sonca je 365,25 dni, obhodni čas Marsa pa 687 dni.

- Koliko časa traja med dvema zaporednima pojavoma, ko je Mars v opoziciji s Soncem?
- Zapiši enačbo, ki ponazarja spreminjanje fazne razlike pri kroženju Zemlje in Marsa okoli Sonca.

N 4.2 Kotno hitrost vrtečega se telesa določa enačba: $\omega = d\varphi/dt = \sin(k\varphi)$. Poišči stacionarna stanja in določi njihovo stabilnost. Nariši vektorsko polje na krožnici za različne vrednosti k :

- $k = 1$, **b)** $k = 2$, **c)** $k = 3$ in **d)** $k = 4$.

N 4.3 Spreminjanje faze nelinearnega oscilatorja določa enačba: $d\varphi/dt = A + B \cos(\varphi + \pi/2)$, pri čemer sta A in B pozitivni konstanti.

- Določi nove spremenljivke tako, da bo enačba zapisana z brez dimenzijskimi količinami.
- Kateri pogoji morajo biti izpolnjeni, da dobimo stacionarna stanja?
- Kolikšna je perioda spreminjanja faze v primeru, ko nimamo stacionarnih stanj?

5 Bifurkacije

Bifurkacije so ključen koncept v teoriji dinamičnih sistemov in igrajo pomembno vlogo pri razumevanju kompleksnih nelinearnih pojavov. Pri bifurkacijah gre za spremembe v dinamiki sistema, ki se pojavijo, ko se spreminja vrednost parametrov sistema.

Pomembni primeri za preučevanje bifurkacij so enodimenzionalni sistemi. Omogočajo vpogled v to, kako lahko majhne spremembe v parametrih sistema povzročijo dramatične spremembe v dinamiki sistema. Pri tem gre za prepoznavanje točk v faznem prostoru, kjer se dinamika sistema bistveno spremeni. To pomeni, da pri določenih vrednostih parametrov sistem preide iz ene vrste vedenja v drugo, pri čemer lahko pride do izginjanja in pojava novih ravnotežnih stanj ter sprememb njihovih stabilnosti.

Obstaja več različnih vrst bifurkacij, od katerih ima vsaka svoje značilnosti. V nadaljevanju bomo podrobneje analizirali posamezne vrste bifurkacij in zapisali njihove značilnosti.

5.1 Sedelno-vozelná bifurkacija

Sedelno-vozelná bifurkacija predstavlja najbolj tipičen mehanizem *nastajanja in izginjanja stacionarnih točk*. To pomeni, da se pri določeni vrednosti *bifurkacijskega parametra*, ki določa *bifurkacijsko točko*, stacionarna stanja pojavijo oziroma izginejo.

Ime "sedelno-vozelná bifurkacija" izhaja iz oblik stacionarnih točk v faznem prostoru. V *2D sistemu* je stacionarno stanje pri bifurkacijski točki lahko *sedlo* ali *vozel*. Bifurkacijska točka v obliki sedla pomeni, da se stacionarnemu stanju v faznem prostoru v eni smeri približujemo, v drugi smeri pa oddaljujemo. V *1D sistemih* je bifurkacijska točka v tem primeru *polstabilno stacionarno stanje*.

Sedelno-vozelnó bifurkacijo v 1D sistemu dobimo, če lahko sistem v bližini bifurkacije zapišemo z *normalno formo*, ki je za sedelno-vozelnó bifurkacijo enaka:

$$\text{a) } \frac{dx}{dt} = r + x^2 \quad \text{ali} \quad \text{b) } \frac{dx}{dt} = r - x^2.$$

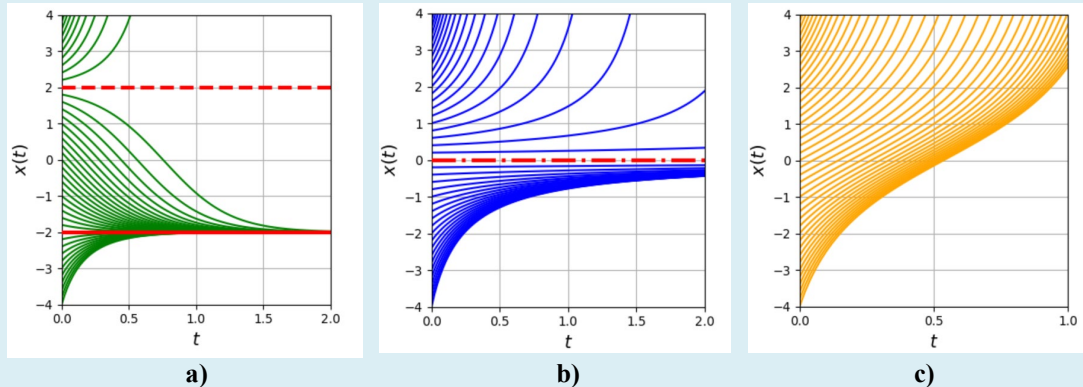
Bifurkacijska točka je v obeh primerih pri $r_c = 0$, kjer je *polstabilno stacionarno stanje*. V primeru **a)** se pojavijo stacionarna stanja, če je $r < 0$, v primeru **b)** pa se pojavijo stacionarna stanja, če je $r > 0$.

Stacionarna stanja so:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } & x_1^* = +\sqrt{-r}, \quad \left(\frac{df(x_1^*)}{dx} > 0 \rightarrow \text{nestabilno}\right), \\ & x_2^* = -\sqrt{-r}, \quad \left(\frac{df(x_2^*)}{dx} < 0 \rightarrow \text{stabilno}\right) \\ \text{b) } & x_1^* = +\sqrt{r}, \quad \left(\frac{df(x_1^*)}{dx} < 0 \rightarrow \text{stabilno}\right), \\ & x_2^* = -\sqrt{r}, \quad \left(\frac{df(x_2^*)}{dx} > 0 \rightarrow \text{nestabilno}\right). \end{array}$$

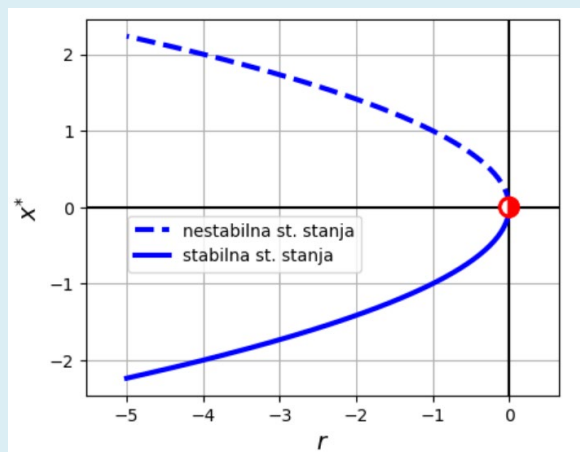
Primer

Dana je enačba: $dx/dt = r + x^2$, ki določa spreminjanje količine $x(t)$ za različne vrednosti parametra r . Na sliki 5.1 vidimo časovni potek $x(t)$ za tri različne režime obnašanja dinamičnega sistema.



Slika 5.1: Časovni potek $x(t)$ za tri različne režime obnašanja dinamičnega sistema $dx/dt = r + x^2$. **a)** $r = -4$. **b)** $r = 0$. **c)** $r = 4$.

Narišimo **bifurkacijski diagram**, ki prikazuje stacionarna stanja x^* za različne vrednosti parametra r . Iz diagrama vidimo, da stacionarna stanja obstajajo za vrednosti parametra $r \leq 0$. Stabilna stacionarna stanja dobimo pri $x^* < 0$ in nestabilna pri $x^* > 0$. Bifurkacijska točka je pri $r = 0$, kjer je polstabilno stacionarno stanje pri $x^* = 0$.



Slika 5.2: Bifurkacijski diagram za sistem $dx/dt = r + x^2$.

Naloga:

Podana je enačba: $dx/dt = r - x^2$.

- a)** Nariši vektorsko polje za $r = -2, -1, 0, 1, 2$.
- b)** Določi bifurkacijsko točko r_c .
- c)** Nariši časovni potek $x(t)$ za različna začetna stanja pri $r = -1$ in $r = 1$.
- d)** Nariši bifurkacijski diagram.

Primer:

Obravnavajmo primer dinamičnega sistema, za katerega velja:

$$\frac{dx}{dt} = r - x - e^{-x}.$$

Za določitev **stacionarnih točk** si pomagamo tako, da funkcijo: $f(x) = r - x - e^{-x}$ razdelimo na dve funkciji:

$$f_1(x) = r - x \text{ in } f_2(x) = -e^{-x}.$$

Za stacionarno stanje velja $\frac{dx}{dt} = f_1(x) + f_2(x) = 0 \rightarrow f_1(x^*) = -f_2(x^*)$.

Ob upoštevanju zveze $f_1(x^*) = -f_2(x^*)$ dobimo:

$$r - x^* = e^{-x^*}.$$

Ker se funkciji v točki x^* dotikata, mora veljati tudi:

$$\frac{d}{dx}(r - x^*) = \frac{d}{dx}(e^{-x^*}).$$

Z odvajanjem dobimo:

$$-1 = -e^{-x^*} \rightarrow x^* = 0.$$

Če vstavimo $x^* = 0$ v enačbo $f(x) = r - x - e^{-x}$, dobimo **bifurkacijsko točko** pri:

$$r_c = 1.$$

Pokažimo tudi, da dinamika v bližini sedelno-vozelne bifurkacije ustreza »**normalni formi**«.

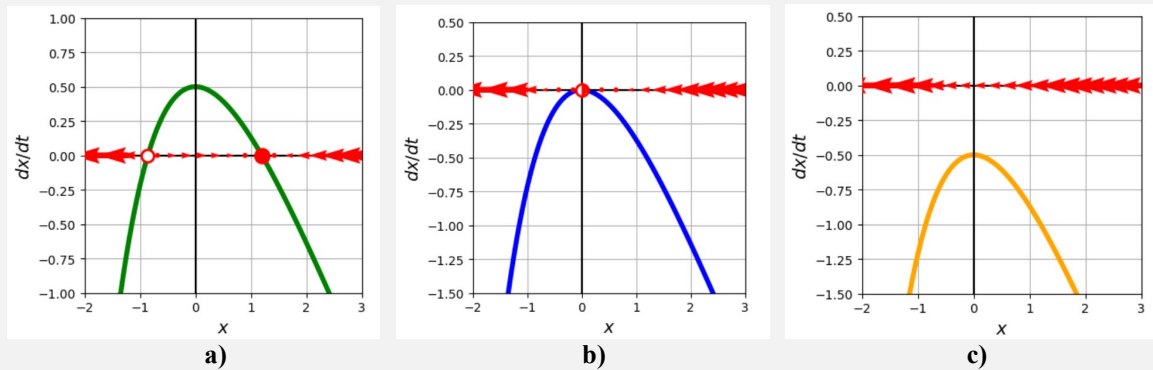
Funkcijo e^{-x} razvijemo v Taylorjevo vrsto okoli točke $x^* = 0$:

$$\frac{dx}{dt} = r - x - e^{-x} = r - x - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots\right) = (r - 1) - \frac{x^2}{2} + \dots$$

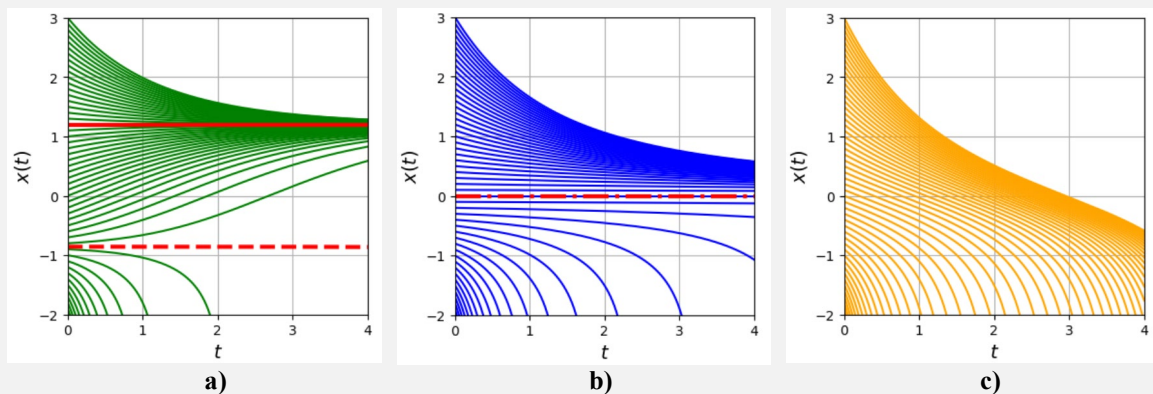
Z uvedbo količin: $r' = r - 1$ in $x' = x/\sqrt{2}$ in $\tau = t/\sqrt{2}$ dobimo:

$$\frac{dx'}{d\tau} = r' - x'^2.$$

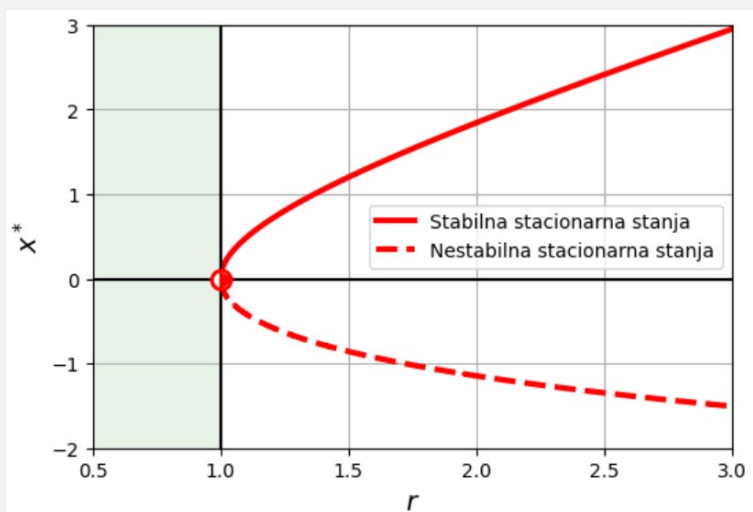
Na sliki 5.3 so prikazana vektorska polja dx/dt , časovni poteki $x(t)$ in **bifurkacijski diagram** za različne vrednosti **bifurkacijskega parametra** r . Vidimo, da se stacionarna stanja pojavijo oziroma izginejo pri **bifurkacijski točki** $r_c = 1$.



Slika 5.3: Vektorsko polje dx/dt za tri različne režime obnašanja dinamičnega sistema. **a)** Parameter $r > r_c$; $r = 1,5$. **b)** Parameter $r = r_c$; $r = 1$. **c)** Parameter $r < r_c$; $r = 0,5$.



Slika 5.4: Časovni potek $x(t)$ za različne začetne vrednosti pri treh različnih režimih obnašanja dinamičnega sistema. **a)** Parameter $r > r_c$; $r = 1,5$. **b)** Parameter $r = r_c$; $r = 1$. **c)** Parameter $r < r_c$; $r = 0,5$.



Slika 5.5: Bifurkacijski diagram v odvisnosti od bifurkacijskega parametra r . Zeleno obarvano območje označuje območje vrednosti parametra r ($r < 1$), pri katerem stacionarna stanja izginejo. Pri bifurkacijski točki $r_c = 1$ nastopi pol stabilno stacionarno stanje.

5.2 Transkritična bifurkacija

Značilnost *transkritične bifurkacije* je, da se *spremeni stabilnost stacionarnega stanja* sistema. Pojavi se, ko določen parameter sistema prečka kritično vrednost r_c , pri kateri stacionarno stanje izmenja stabilnost. Za razliko od sedelno-vozelne bifurkacije v tem primeru fiksna točka ne izgine ali se pojavi, temveč se pri določeni vrednosti parametra le izmenja njena stabilnost (glej sliko 5.6).

Normalna forma za ta transkritično bifurkacijo je:

$$\frac{dx}{dt} = x(r - x) = rx - x^2.$$

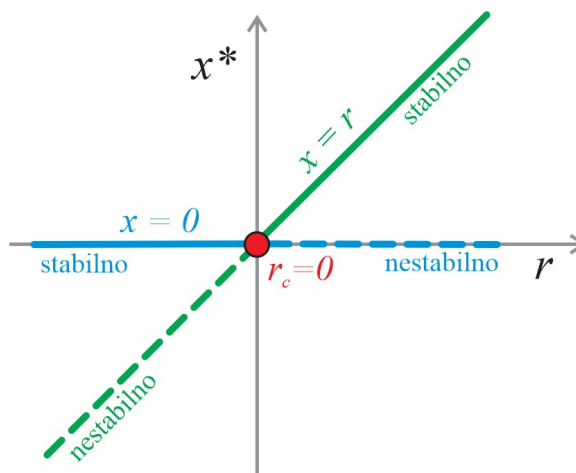
Uporabimo *normalno formo* in pokažimo **izmenjavo stabilnosti med stacionarnimi stanji**. Stacionarna stanja so:

$$x_1^* = 0 \quad \text{in} \quad x_2^* = r.$$

Uporabimo *linearno stabilnostno analizo* in določimo stabilnost stacionarnih točk za različne vrednosti parametra r :

$$\frac{df(x)}{dx} = r - 2x,$$

$$\frac{df(x_1^*)}{dx} = r \quad \text{in} \quad \frac{df(x_2^*)}{dx} = -r.$$



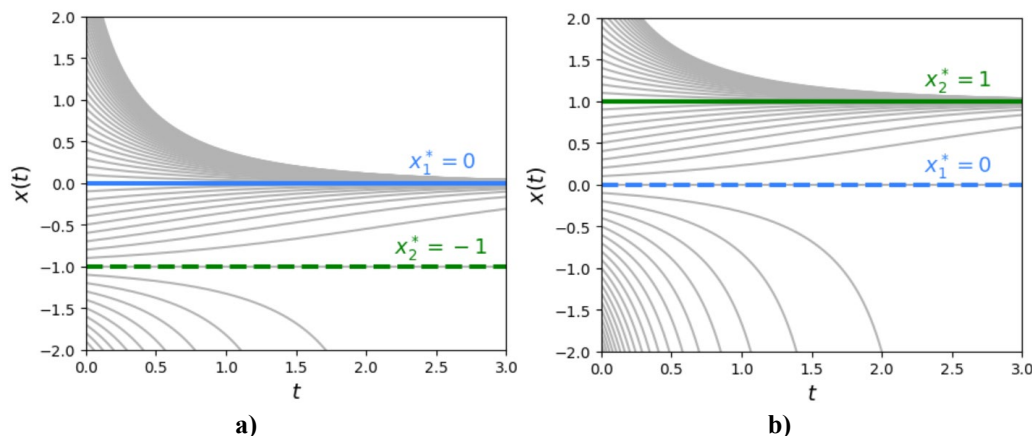
Slika 5.6: Bifurkacijski diagram za transkritično bifurkacijo.

Če je (glej sliko 5.6):

$$r > r_c = 0 \rightarrow x_1^* = 0 \left(\frac{df(x_1^*)}{dx} > 0, \text{ nestabilno} \right), x_2^* = r \left(\frac{df(x_2^*)}{dx} < 0, \text{ stabilno} \right),$$

$$r < r_c = 0 \rightarrow x_1^* = 0 \left(\frac{df(x_1^*)}{dx} < 0, \text{ stabilno} \right), x_2^* = r \left(\frac{df(x_2^*)}{dx} > 0, \text{ nestabilno} \right).$$

Slika 5.7 prikazuje časovni potek $x(t)$ za različna začetna stanja normalne forme transkritične bifurkacije pri dveh različnih vrednostih parametra r .



Slika 5.7: Časovni potek $x(t)$ za različna začetna stanja normalne forme transkritične bifurkacije:

$$\frac{dx}{dt} = rx - x^2. \quad \text{a) Parameter } r = -1. \quad \text{b) Parameter } r = 1.$$

Primer

Za dinamični sistem $\frac{dx}{dt} = r \ln x + x - 1$ pokažimo, da je sistem podvržen **transkritični bifurkaciji** pri določeni vrednosti r .

Stacionarno stanje sistema je $x^* = 1$ za vse vrednosti parametra r .

Vpeljimo novo spremenljivko:

$$y = x - 1, \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = r \ln(1 + y) + y = r \left(y - \frac{1}{2}y^2 + \dots \right) + y.$$

Zanemarimo višje člene pri razvoju v vrsto in zapišimo:

$$\frac{dy}{dt} \approx (r + 1)y - \frac{1}{2}ry^2.$$

Iz enačbe vidimo, da je bifurkacijska točka pri pogoju: $r + 1 = 0$.

Bifurkacijska točka je torej pri:

$$r_c = -1.$$

Če v enačbo $\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} \approx (r + 1)(x - 1) - \frac{1}{2}r(x - 1)^2$ vpeljemo novi spremenljivki $x' = \frac{1}{2}r(x - 1)$ in $r' = r + 1$, dobimo zapis sistema v obliki **normalne forme za transkritično bifurkacijo**:

$$\frac{dx'}{dt} \approx r'x' + x'^2.$$

5.2.1 Preprost model laserja

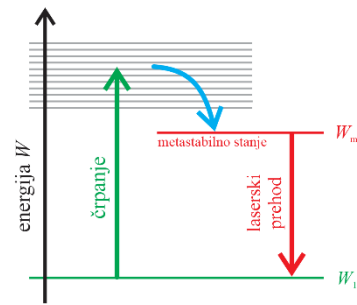
Laser, kar je kratica za »Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation«, je naprava, ki proizvaja intenzivno svetlobo zelo ozkega valovnega pasu in visoke koherentnosti (fazne povezanosti).

Delovanje laserja temelji na principu **stimuliranega sevanja**. Za delovanje laserja uporabimo aktivni medij, kot je rubinov kristal (kristal aluminijevega oksida Al_2O_3). Omenjeni kristal ima poleg množice gosto porazdeljenih vzbujenih stanj še ločeno, ostro določeno **metastabilno vzbujeno stanje** (W_m), ki je tik pod pasom vzbujenih stanj.

Atome vzbujamo z bliskovno lučjo, kar imenujemo **optično črpanje**. Fotoni iz luči prenesejo energijo na atome v kristalu in jih dvignejo na višje energijske nivoje.

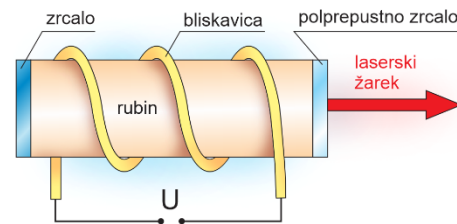
Po vzbujanju na višje energijske nivoje se atomi lahko spontano vrnejo nazaj na nižje energijske nivoje, pri tem pa sevajo fotone. Ta spontana emisija ni koherentna in laser deluje kot običajna svetilka.

Ključno za delovanje laserja je **stimulirana emisija**. Dosežemo ga, ko moč črpalke doseže določen **prag**. V metastabilnem vzbujenem stanju (W_m) imajo atomi tendenco, ostati dlje časa, kar pomeni, da se ne izpraznijo takoj s spontano emisijo. Ko foton z ustreznim energijskim nivojem (W_m) preide blizu atoma v tem stanju, ga lahko **stimulira, da odda foton iste energije in v isti fazi**. To pomeni, da foton stimulira atome, da sevajo fotone, ki so v fazi z njim in se širijo v isti smeri.



Slika 5.8: Energijski nivoji vzbujenih atomov v kristalu pri delovanju laserja.

Stimulirani fotoni se odbijajo med zrcali v resonatorju laserja, in s tem stimulirajo še več fotonov, kar okrepi svetlobni signal, ki na enem kocu prehaja skozi delno prepustno zrcalo. Oddana svetloba je usmerjena in intenzivna, z zelo ozkim spektrom, kar je tudi značilnost laserjev.



Slika 5.9: Shema delovanja laserja.

Število vzbujenih atomov (N):

Kadar laser ne deluje, s črpanjem vzdržujemo fiksno število vzbujenih atomov N_0 . Ko laser začne delovati, fotoni spodbudijo, da vzbujen atom preide v osnovno stanje in odda foton (stimulirana emisija). Število vzbujenih atomov se s tem zmanjšuje:

$$N(t) = N_0 - an,$$

pri tem je n število fotonov in a je verjetnost, da foton spodbudi vzbujen atom (elektron), da le-ta preide v osnovno stanje in odda foton.

Število fotonov v laserju (n):

Število fotonov v laserju (n) je odvisno od nastajanja fotonov v laserju in uhajanja fotonov iz laserja: $dn/dt = J_{n1} - J_{n2}$. Nastajanje fotonov v laserju je pogojeno s srečanjem fotona z vzbujenim atomom ($J_{n1} = GnN$), zmanjševanje fotonov pa z uhajanjem skozi polprepustno zrcalo ($J_{n2} = kn$).

Spreminjanje števila fotonov v laserju lahko torej zapišemo kot:

$$\frac{dn}{dt} = GnN - kn = Gn(N_0 - an) - kn,$$

$$\frac{dn}{dt} = (GN_0 - k)n - aGn^2,$$

pri tem je:

$$\tau = \frac{1}{k} - \text{življenjski čas fotonov v laserju,}$$

$n(t)$ – število fotonov,

$N(t)$ – vzbujeni atomi,

G – koeficient ojačenja,

N_0 – število vzbujenih atomov, ko laser ni aktiven.

Če je:

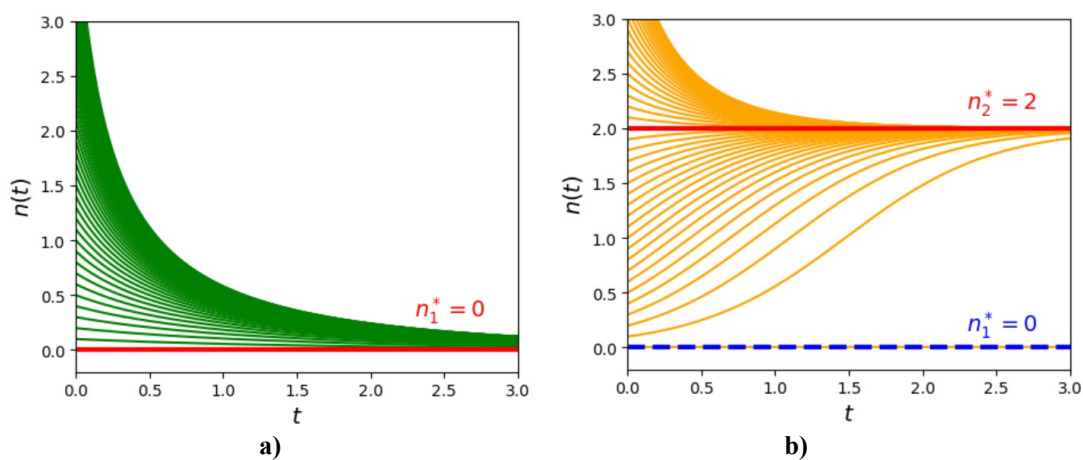
$N_0 < k/G$ - *ni stimulirane emisije* in laser deluje kot svetilo,

$N_0 = k/G$ - prag laserskega delovanja,

$N_0 > k/G$ - dobimo *stimulirano emisijo* ($n_2^* > 0 \rightarrow$ normalno delovanje laserja),

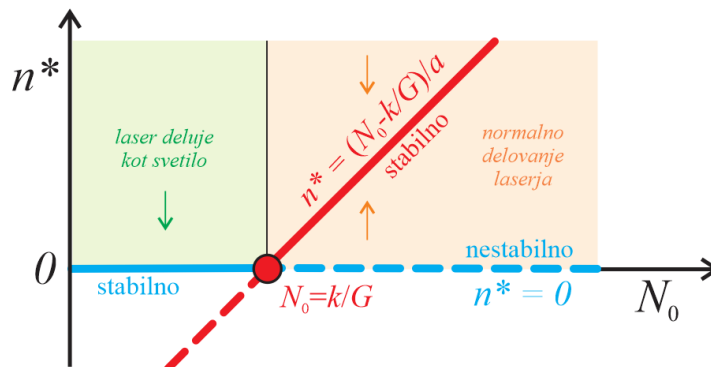
$n_1^* = 0$ (nestabilno), $n_2^* = (GN_0 - k)/aG$ (stabilno).

Slika 5.10 prikazuje časovni potek $n(t)$ za različno število vzbujenih atomov N_0 . Na sliki vidimo primer (a), ko laser deluje kot običajno svetilo ($N_0 < \frac{k}{G}$), in primer (b) normalnega delovanja laserja ($N_0 > k/G$).



Slika 5.10: Časovni potek števila fotonov $n(t)$ za preprost model laserja: $\frac{dn}{dt} = (GN_0 - k)n - aGn^2$, $G = 1, k = 1$ in $a = 1$. **a)** $N_0 = 0.5 < k/G$. **b)** $N_0 = 3 > k/G$.

Slika 5.11 prikazuje bifurkacijski diagram v odvisnosti od števila vzbujenih atomov N_0 , ki jih vzdržujemo s črpanjem, ko laser ne deluje. S slike vidimo, da je bifurkacijska točka pri $N_0 = k/G$. Če je $N_0 < k/G$, ni stimulirane emisije in laser deluje kot običajno svetilo. Pri $N_0 > k/G$ imamo stimulirano emisijo in dobimo stabilno stacionarno stanje pri $n_2^* = (GN_0 - k)/aG$.



Slika 5.11: Bifurkacijski diagram za preprost model laserja: $\frac{dn}{dt} = (GN_0 - k)n - aGn^2$.

5.3 Vilična Bifurkacija

Vilična bifurkacija je vrsta bifurkacije v teoriji dinamičnih sistemov, ki je tipična za fizikalne sisteme s simetrijo. Ko se parameter sistema spreminja čez kritično vrednost, se ena stacionarna točka razcepi na dve ali več novih stacionarnih točk. To razvejanje stacionarnih točk je podobno vilicam, kar je posledično povezano z imenom bifurkacije. V grafu faznega prostora, ki prikazuje dinamiko sistema, je vilična bifurkacija simetrična okoli bifurkacijske točke.

Poznamo dve osnovni vrsti viličnih bifurkacij: *podkritična* in *nadkritična*. Pri podkritični vilični bifurkaciji se nove stacionarne točke pojavijo pod kritično vrednostjo parametra, medtem ko pri nadkritični vilični bifurkaciji nove točke nastanejo nad kritično vrednostjo parametra.

5.3.1 Nadkritična vilična bifurkacija

Za nadkritično bifurkacijo je značilno, da dobimo razvejanje stacionarnih točk nad kritično vrednostjo bifurkacijskega parametra. Normalna forma za ta tip bifurkacije je:

$$\frac{dx}{dt} = rx - x^3.$$

Značilnost prej omenjene simetrije lahko pokažemo tako, da v enačbi zamenjamo spremenljivko x z $-x$ in dobimo enako enačbo. To pomeni, da je vektorsko polje v obe smeri enakovredno.

Ko je parameter $r < 0$, je edino stacionarno stanje:

$$x^* = 0, \quad \frac{\partial f(x^*=0)}{\partial x} = r < 0 \rightarrow \text{stabilno.}$$

V primeru, ko je parameter $r = 0$, je stacionarno stanje $x^* = 0$ še zmeraj stabilno, vendar bolj šibko v primerjavi z negativno vrednostjo parametra r .

Pri vrednosti parametra $r > 0$ še zmeraj ostaja stacionarno stanje pri $x^* = 0$, vendar spremeni svojo stabilnost:

$$x^* = 0, \quad \frac{\partial f(x^*=0)}{\partial x} = r > 0 \rightarrow \text{nestabilno.}$$

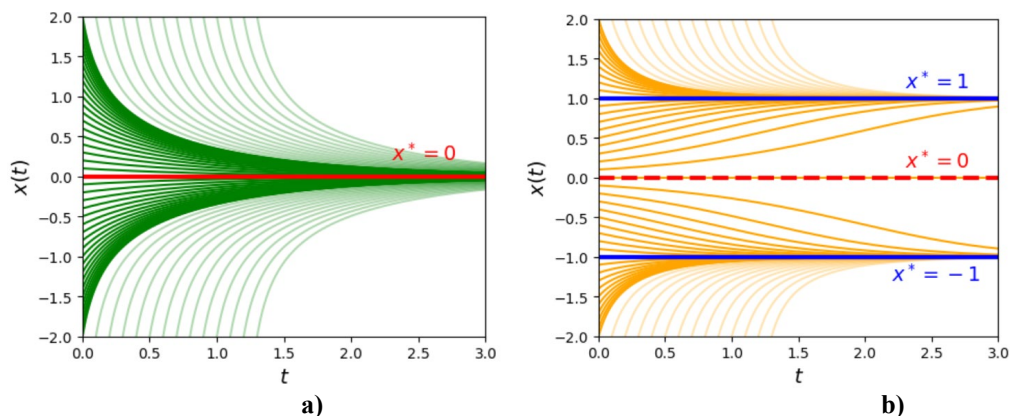
Na obeh straneh izhodišča se pojavita še dve stabilni stacionarni stanji pri:

$$f(x) = x(r - x^2) = 0,$$

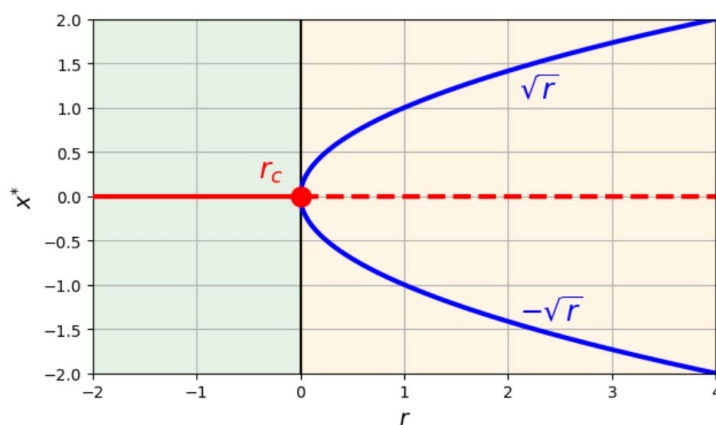
$$x^* = \pm \sqrt{r}, \quad \frac{\partial f(x^*=\pm\sqrt{r})}{\partial x} = -2r < 0 \rightarrow \text{stabilno.}$$

Slika 5.12 prikazuje časovni potek $x(t)$ za dve različni vrednosti parametra r . S slike vidimo, da imamo v primeru (a), ko je $r < r_c = 0$, stabilno stacionarno stanje pri $x^* = 0$. V primeru (b), ko je $r > r_c = 0$, stacionarno stanje $x^* = 0$ postane nestabilno, pojavita se še dve stabilni

stacionarni stanji pri $x^* = \pm\sqrt{r}$, kar je značilno za **nadkritično vilično bifurkacijo**, katere bifurkacijski diagram je narisana na sliki 5.13.



Slika 5.12: Časovni potek $x(t)$ za nad kritično vilično bifurkacijo: $\frac{dx}{dt} = rx - x^3$.
a) $r = -1 < r_c = 0$. **b)** $r = 1 > r_c = 0$.



Slika 5.13: Bifurkacijski diagram za nadkritično vilično bifurkacijo: $\frac{dx}{dt} = rx - x^3$.
 Bifurkacijska točka $r_c = 0$.

Naloga

Dana je funkcija: $\frac{dx}{dt} = rx - x^3$. Zapiši potencial $V(x)$ za $r = 4$ in določi stacionarna stanja.

Potencial

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = -\frac{dV(x)}{dx},$$

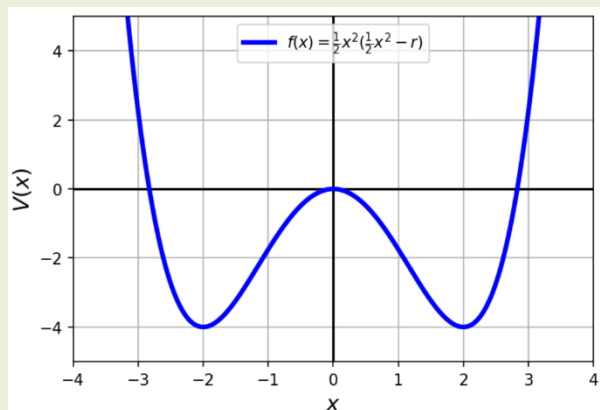
$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - r \right).$$

Stacionarna stanja:

$$x(r - x^2) = 0,$$

$$x^* = 0 \text{ (nestabilno),}$$

$$x^* = \pm\sqrt{r} \text{ (stabilno).}$$



Slika 5.14: Potencial $V(x)$.

5.3.2 Podkritična vilična bifurkacija

Pri podkritični vilični bifurkaciji se nove stacionarne točke pojavijo pod kritično vrednostjo parametra. **Normalna forma** za ta tip bifurkacije je:

$$\frac{dx}{dt} = rx + x^3.$$

Ko je **parameter** $r > 0$, je edino stacionarno stanje:

$$x^* = 0, \quad \frac{\partial f(x^*=0)}{\partial x} = r > 0 \rightarrow \textit{nestabilno}.$$

V primeru, ko je **parameter** $r = 0$, je stacionarno stanje $x^* = 0$ še zmeraj **nestabilno**.

Pri vrednosti **parametra** $r < 0$ še zmeraj ostaja stacionarno stanje pri $x^* = 0$, vendar spremeni svojo stabilnost:

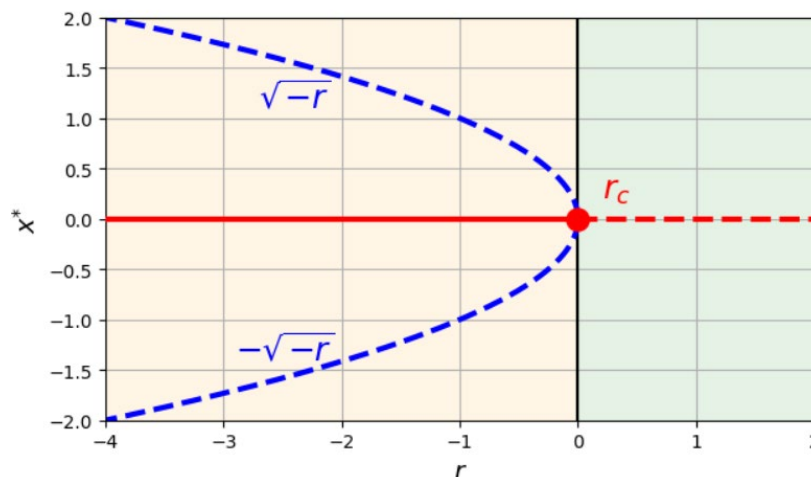
$$x^* = 0, \quad \frac{\partial f(x^*=0)}{\partial x} = r < 0 \rightarrow \textit{stabilno}.$$

Na obeh straneh izhodišča se pojavita še dve stabilni stacionarni stanji pri:

$$f(x) = x(r - x^2) = 0,$$

$$x^* = \pm \sqrt{-r}, \quad \frac{\partial f(x^*=\pm\sqrt{-r})}{\partial x} = -2r > 0 \rightarrow \textit{nestabilno}.$$

Slika 5.15 prikazuje **bifurkacijski diagram** za podkritično vilično bifurkacijo.



Slika 5.15: Bifurkacijski diagram za podkritično vilično bifurkacijo: $\frac{dx}{dt} = rx + x^3$. Bifurkacijska točka $r_c = 0$.

Primer:

Normalna forma za podkritično vilično bifurkacijo je $\frac{dx}{dt} = rx + x^3$, pri čemer člen x^3 vnaša v sistem nestabilnost. V resničnih fizikalnih sistemih takšni nestabilnosti običajno nasprotuje stabilizacijski vpliv členov višjega reda. Ob predpostavki, da je sistem še vedno simetričen ($x \rightarrow -x$), mora biti prvi stabilizacijski člen reda x^5 . Takšen primer sistema s podkritično vilično bifurkacijo je:

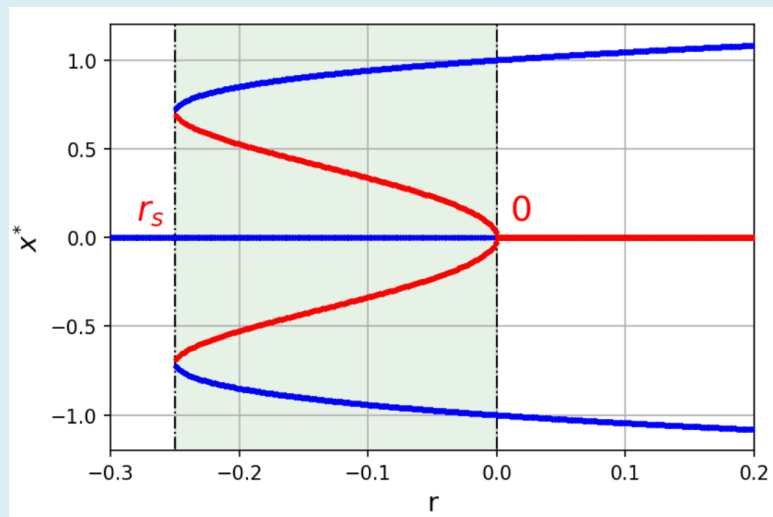
$$\frac{dx}{dt} = rx + x^3 - x^5.$$

Na sliki 5.16 je prikazan bifurkacijski diagram za ta primer. Iz diagrama vidimo, da imamo pri majhnih vrednostih x v bližini bifurkacijske točke $r = 0$ enako sliko kot pri bifurkacijskem diagramu za podkritično vilično bifurkacijo.

Nova značilnost zaradi izraza x^5 je, da se nestabilne »veje« obrnejo in postanejo stabilne pri $r = r_s$, kjer je $r_s < 0$. Te stabilne veje obstajajo za vse $r > r_s$.

Obstoj različnih stabilnih stanj v območju $r_s < r < 0$ dopušča možnost **histereze**.

Če se sistem nahaja v bližini stabilnega stacionarnega stanja $x^* = 0$ in pri tem povečujemo parameter r , bo sistem izgubil stabilnost pri $r \rightarrow 0$ in preskočil na stabilno stacionarno stanje $x^* \neq 0$. Če sedaj parameter r zmanjšujemo, se sistem ne bo takoj vrnil nazaj v stabilno stanje $x^* = 0$, ampak se bo to zgodilo pri $r = r_s < 0$. Temu pojavu, ki je povezan s pomanjkanjem reverzibilnosti pri spreminjanju parametra r , pravimo histereza.

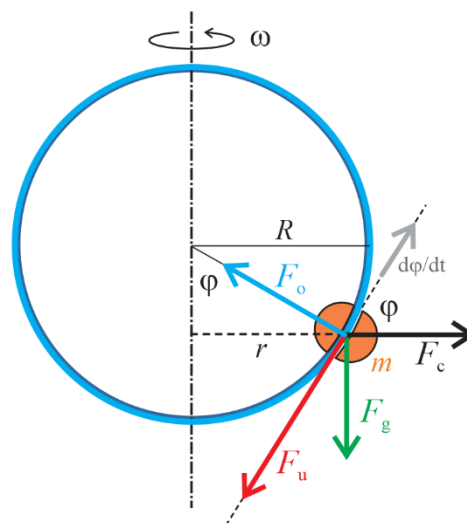


Slika 5.16: Bifurkacijski diagram za dinamični sistem: $\frac{dx}{dt} = rx + x^3 - x^5$. modra barva označuje stabilna stacionarna stanja, rdeča barva pa nestabilna stacionarna stanja. Z zeleno je označeno območje, kjer zaznamo pojav histereze.

5.4 Kroglica na vrtljivem obroču

Oglejmo si primer **bifurkacije** na mehanskem sistemu. Imamo obroč s polmerom R , ki se vrti okoli navpično postavljene osi s kotno hitrostjo ω . Na obroču se nahaja kroglica z maso m , ki lahko pod vplivom sil drsi po obroču (glej sliko 5.17).

Opazujemo gibanje kroglice s koordinatnega sistema, ki se vrti skupaj s kroglico okoli navpične osi (*neinercialni koordinatni sistem*). V tem primeru moramo ob zunanjih silah upoštevati tudi *sistemsko centrifugalno silo* ($F_c = mr\omega^2$), ki kaže navzven, pravokotno na os vrtenja. Na kroglico deluje sila obroča (F_o), teža ($F_g = mg$) in močno viskozno dušenje ($F_u = bv$).



Slika 5.17: Sile na kroglico, ki se giblje na vrtljivem obroču.

Zapišimo *II. Newtonov zakon* za gibanje v **tangentni smeri** glede na obroč:

$$m\vec{a}_t = \sum \vec{F}_t,$$

$$mR \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -b \frac{d\varphi}{dt} - mg \sin \varphi + mr\omega^2 \cos \varphi,$$

$$mR \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -b \frac{d\varphi}{dt} - mg \sin \varphi + mR\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

Upoštevajmo močno dušenje:

$$mR \frac{d^2\varphi}{dt^2} \ll b \frac{d\varphi}{dt}$$

in zapišimo enačbo v obliki:

$$b \frac{d\varphi}{dt} = -mg \sin \varphi + mR\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{mg}{b} \sin \varphi (\gamma \cos \varphi - 1),$$

$$\gamma = \frac{R\omega^2}{g}.$$

Stacionarna stanja:

$$\sin \varphi^* = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi^* = 0 \text{ in } \varphi^* = \pi,$$

$$\gamma \cos \varphi^* = 1 \quad \rightarrow \quad \cos \varphi^* = \frac{1}{\gamma},$$

$$\varphi^* = \pm \cos^{-1} \left(\frac{1}{\gamma} \right), \text{ če je } \gamma = \frac{R\omega^2}{g} \geq 1.$$

Stabilnost stacionarnih točk določimo z linearno stabilnostno analizo:

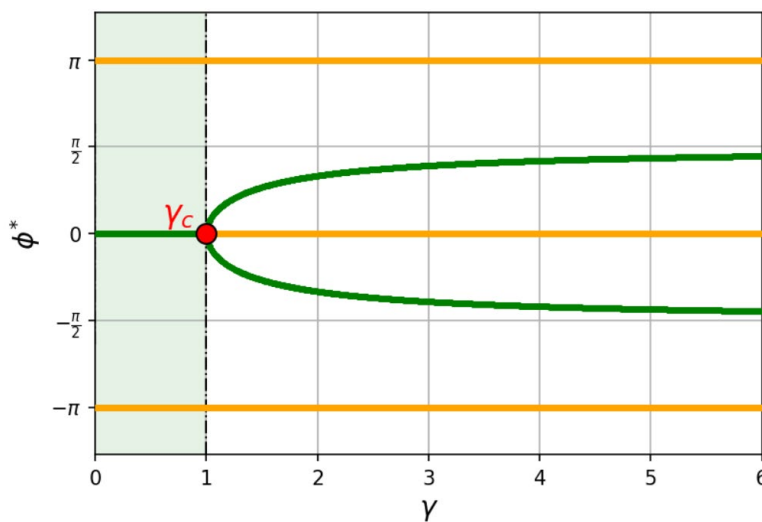
$$\frac{df(\varphi^*)}{d\varphi} > 0 \text{ (nestabilna)}; \frac{df(\varphi^*)}{d\varphi} < 0 \text{ (stabilna)}; \frac{df(\varphi)}{d\varphi} = \frac{mg}{b} (\gamma \cos 2\varphi - \cos \varphi),$$

$$\varphi^* = 0 \begin{cases} \gamma < 1 \rightarrow \text{stabilna} \\ \gamma > 1 \rightarrow \text{nestabilna} \end{cases},$$

$$\varphi^* = \pi \begin{cases} \gamma < 1 \rightarrow \text{nestabilna} \\ \gamma > 1 \rightarrow \text{nestabilna} \end{cases},$$

$$\varphi^* = \pm \cos^{-1}\left(\frac{1}{\gamma}\right) \begin{cases} \gamma < 1 \rightarrow \text{ne obstajajo} \\ \gamma > 1 \rightarrow \text{stabilna} \end{cases}.$$

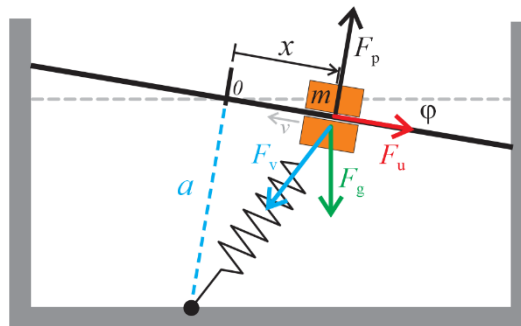
Slika 5.18 prikazuje bifurkacijski diagram za obravnavan problem. Vidimo, da pri vrednosti $\gamma_c = 1$ nastopi **nadkritična vilična bifurkacija**. V primeru, ko je $\gamma = \frac{r\omega^2}{g} < 1$, imamo stabilno stacionarno stanje pri $\varphi^* = 0$. To pomeni, da se obroč vrti prepočasi, da bi se kroglica ustalila pri kotu $\varphi^* > 0$. Poseben primer je $\varphi^* = \pi$, kjer imamo nestabilno stacionarno stanje. Pri vrednosti parametra $\gamma = \frac{r\omega^2}{g} > 1$ pa se obroč vrti dovolj hitro, da se kroglica ustali pri $\varphi^* = \pm \cos^{-1}\left(\frac{1}{\gamma}\right)$. Z večanjem parametra $\gamma \rightarrow \infty$, se stacionarna stanja približujejo vrednosti $\varphi^* = \pm \pi/2$, kjer je kroglica najbolj oddaljena od osi vrtenja.



Slika 5.18: Bifurkacijski diagram za kroglico na vrtljivem obroču. Bifurkacijska točka nastopi pri $\gamma_c = 1$. Zelene črte predstavljajo stabilna stacionarna stanja. Oranžne črte predstavljajo nestabilna stacionarna stanja.

5.5 Gibanje telesa vzdolž palice pod vplivom vzmeti

Obravnavajmo gibanje telesa z maso m vzdolž ravne palice, ki je glede na vodoravnico nagnjena za kot φ . Na telo je pritrjena vzmet s koeficientom k , katere prijemališče je na pravokotni razdalji a od palice (glej sliko 5.19). Dolžina ne napete vzmeti je L , dolžina napete vzmeti pa r .



Slika 5.19: Sile na telo, ki se giblje vzdolž palice.

Na gibajoče se telo deluje sila palice F_p , sila vzmeti $F_v = k(r - L)$, teža $F_g = mg$ in tudi močno viskozno dušenje ($F_u = bv$).

Zapišimo *II. Newtonov zakon* za gibanje telesa z maso m vzdolž palice:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} + mg \sin \varphi - k(r - L) \cos \alpha,$$

pri tem je:

$$r = \sqrt{x^2 + a^2} \quad \text{in} \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}.$$

Upoštevajmo tudi močno dušenje, za katerega velja:

$$b \frac{dx}{dt} \gg m \frac{d^2x}{dt^2},$$

in zapišimo enačbo gibanja v obliki:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{b} \left[\frac{mg}{k} \sin \varphi - x \left(1 - \frac{L}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right) \right].$$

Vpeljimo še *brezdimenzijske količine*:

$$x' = \frac{x}{a}, \quad L' = \frac{L}{a}, \quad t' = \frac{k}{b} t, \quad f' = \frac{mg}{ka} \sin \varphi.$$

Enačba gibanja zapisana z brezdimenzijskimi količinami je v tem primeru:

$$\frac{dx'}{dt'} = f' - x' \left(1 - \frac{L'}{\sqrt{x'^2 + 1}} \right).$$

V nadaljevanju si oglejmo obnašanje sistema za različne vrednosti parametra L' in f' . Poiščimo stacionarna stanja, določimo njihovo stabilnost ter izrišimo *bifurkacijske diagrame* za posamezne primere.

Primer 1:

Obravnavajmo primer, ko je **palica v vodoravnem položaju**. V tem primeru je $\varphi = 0$ in posledično $f' = \frac{mg}{ka} \sin \varphi = 0$. Enačba gibanja, zapisana z brezdimenzijskimi količinami, je:

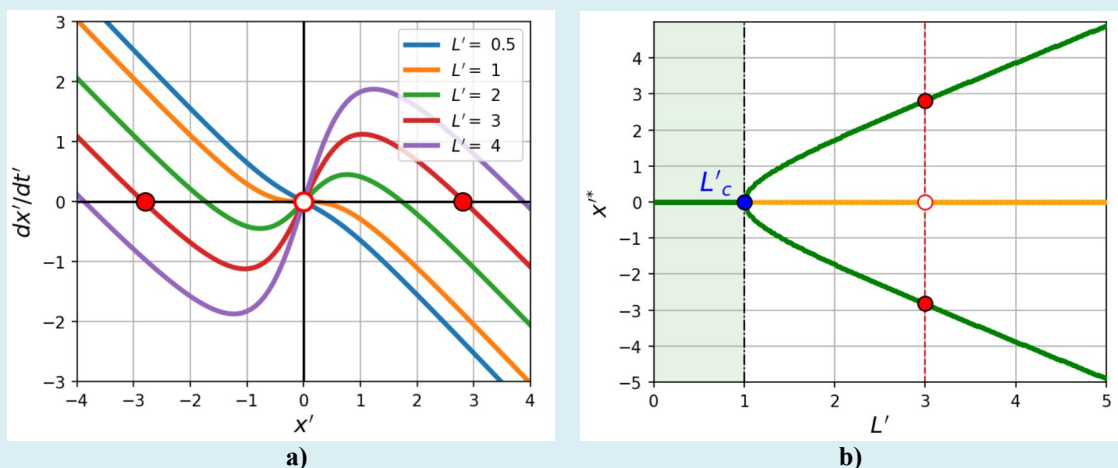
$$\frac{dx'}{dt'} = -x' \left(1 - \frac{L'}{\sqrt{x'^2 + 1}} \right).$$

Na sliki 5.20 je prikazano hitrostno polje $\frac{dx'}{dt'}$ za različne vrednosti L' in bifurkacijski diagram v odvisnosti od L' . Za primer $L' = 3$ sta prikazani še dve stabilni in eno nestabilno stacionarno stanje.

Za vrednosti $L' = \frac{L}{a} < L'_c = 1 \rightarrow L < a$ dobimo stabilno stacionarno stanje pri $x^* = 0$. Ko telo izmaknemo iz ravnovesne lege, vzmet še dodatno raztegnemo, saj je vzmet raztegnjena že v izhodišču ($L < a$). Posledično vzmet vleče telo nazaj v izhodišče.

V primeru, ko je $L' = \frac{L}{a} > L'_c = 1 \rightarrow L > a$, je vzmet v izhodišču stisnjena, kar pomeni, da ob majhnem izmiku vzmet potisne telo iz ravnovesne lege. Posledično je stacionarno stanje $x^* = 0$ nestabilno. Hkrati zaradi simetrije problema nastaneta še dve stabilni stacionarni stanji pri:

$$x'^* = \pm \sqrt{L'^2 - 1} \rightarrow x^* = \pm \sqrt{L^2 - a^2}.$$



Slika 5.20: Gibanje telesa po vodoravni palici. $x' = x/a$, $L' = L/a$, $t' = \frac{k}{b}t$. **a)** Hitrostno polje $\frac{dx'}{dt'}$ za različne vrednosti L' . **b)** Bifurkacijski diagram v odvisnosti od parametra L' ($L'_c = 1$). Zelene črte predstavljajo stabilna stacionarna stanja, oranžne črte pa nestabilna stacionarna stanja.

Primer 2:

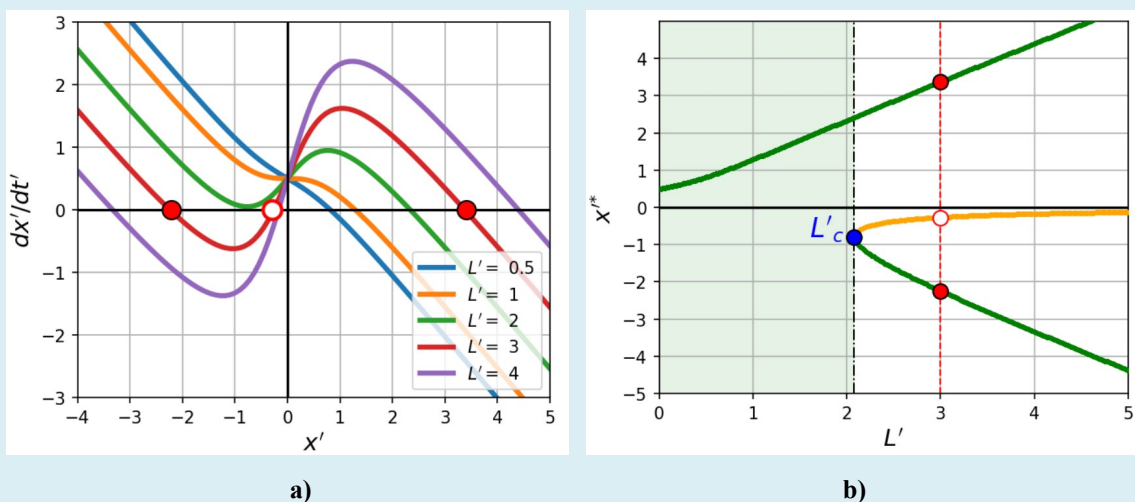
Obravnavajmo primer, ko je **palica nagnjena** za kot $\varphi = 30^\circ$. Vrednost $\frac{mg}{ka} = 1$ in posledično $f' = \frac{mg}{ka} \sin \varphi = \sin \varphi$. Enačba gibanja, zapisana z brezdimenzijskimi količinami, je v tem primeru:

$$\frac{dx'}{dt'} = \sin \varphi - x' \left(1 - \frac{L'}{\sqrt{x'^2 + 1}} \right).$$

Slika 5.21 prikazuje hitrostno polje $\frac{dx'}{dt'}$ za različne vrednosti L' (a) in bifurkacijski diagram v odvisnosti od L' (b). Za primer $L' = 3$ sta prikazani še dve stabilni in eno nestabilno stacionarno stanje.

Za vrednosti $L' = \frac{L}{a} < L'_c = 2,08$ dobimo stabilno stacionarno stanje pri $x^* > 0$. To je posledica delovanja teže, ki premakne telo iz lege $x = 0$ v pozitivni smeri.

V primeru, ko je $L' = \frac{L}{a} > L'_c = 2,08$, se pojavi še dodatno stabilno in nestabilno stacionarno stanje. Če se sistem nahaja v stabilnem stacionarnem stanju $x'^* < 0$ in pri tem zmanjšujemo parameter L' , pride pri L'_c do preskoka (na $x'^* > 0$). Takšnemu preskoku v bifurkacijskem diagramu pravimo tudi **katastrofa**.



Slika 5.21: Gibanje telesa po nagnjeni palici za kot $\varphi = 30^\circ$. $x' = x/a$, $L' = L/a$, $t' = \frac{k}{b}t$.

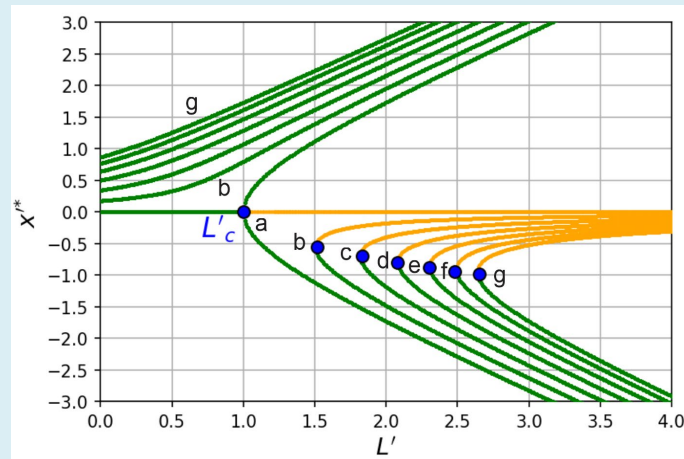
a) Hitrostno polje $\frac{dx'}{dt'}$ za različne vrednosti L' . b) Bifurkacijski diagram v odvisnosti od parametra L' ($L'_c = 2,08$). Zelene črte predstavljajo stabilna stacionarna stanja, oranžne črte pa nestabilna stacionarna stanja.

Primer 3:

Za obravnavan primer:

$$\frac{dx'}{dt'} = \sin \varphi - x' \left(1 - \frac{L'}{\sqrt{x'^2 + 1}} \right)$$

narišimo bifurkacijski diagram v odvisnosti od L' . Za različne vrednosti naklona palice φ . Iz rezultatov na sliki 5.22 vidimo, da se z večanjem kota φ bifurkacijska točka L'_c pomika proti večjim vrednostim.

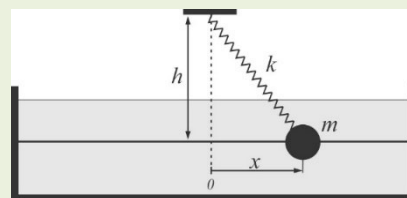


Slika 5.22: Bifurkacijski diagram za različne naklone palice φ . a) $\varphi = 0^\circ$. b) $\varphi = 10^\circ$. c) $\varphi = 20^\circ$. d) $\varphi = 30^\circ$. e) $\varphi = 40^\circ$. f) $\varphi = 50^\circ$. g) $\varphi = 60^\circ$.

Naloge:

N 5.1 Spreminjanje naklona vrteče se palice določa enačba, zapisana z brez dimenzijskimi količinami: $d\varphi/dt = A - B \sin(\varphi)$. Pri tem sta A in B poljubni brez dimenzijski konstanti. Nariši bifurkacijski diagram stacionarnih naklonov, iz katerega je razvidna stabilnost stacionarnih stanj v odvisnosti od: a) parametra A za vrednosti $B = 1$ in $B = -2$; b) parametra B za vrednosti $A = 1$ in $A = -2$.

N 5.2 Telo z maso m , ki je pripeto na vzmet s koeficientom k in dolžino L_0 , se lahko giblje vzdolž prečke (x -osi). Telo se giblje v viskozni tekočini, pri čemer je sila upora $\vec{F}_u = -b\dot{x}$. Predpostavimo močno dušenje, pri čemer velja $m\ddot{x} \ll b\dot{x}$.



- Zapiši enačbo, ki ponazarja hitrost telesa v odvisnosti od njegove lege $\frac{dx}{dt} = f(x)$.
- Dolžina vzmeti je $L_0 = 6$ cm. Nariši bifurkacijski diagram, ki ponazarja stacionarna stanja x^* v odvisnosti od razdalje h (razdalja med pritrdiščem vzmeti in osjo x) za $0 < h < 10$ cm.
- Razdalja $h = 3$ cm. Nariši bifurkacijski diagram, ki ponazarja stacionarna stanja x^* v odvisnosti od dolžine vzmeti L_0 za $0 < L_0 < 5$ cm.

6 Enodimenzionalne preslikave (mape)

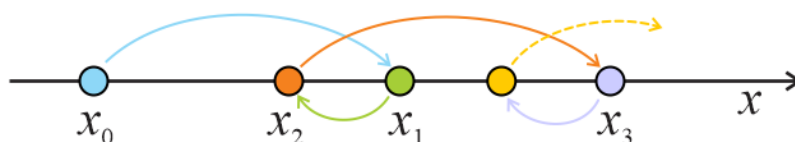
Diskretni sistemi obravnavajo stanje sistema le ob določenih časovnih točkah, kar omogoča boljši vpogled v diskretno naravo številnih naravnih in družbenih pojavov. Ob tem so lahko diskretni sistemi bolj primerni za modeliranje okoliščin, kjer se dogodki zgodijo v diskretnih korakih, kot na primer reprodukcija populacije v biologiji ali spreminjanje cen v ekonomiji.

Vendar moramo upoštevati, da diskretni sistemi morda niso vedno najboljša izbira za vsak scenarij, saj ne morejo natančno opisati vseh kontinuirnih procesov. Ob tem so občutljivi na začetne pogoje in parametre, kar lahko povzroči kaotično obnašanje. Njihovo kaotično obnašanje lahko izkoristimo tudi za proučevanje kaosa.

Obravnavajmo **1D preslikavo**:

$$x_{i+1} = f(x_i).$$

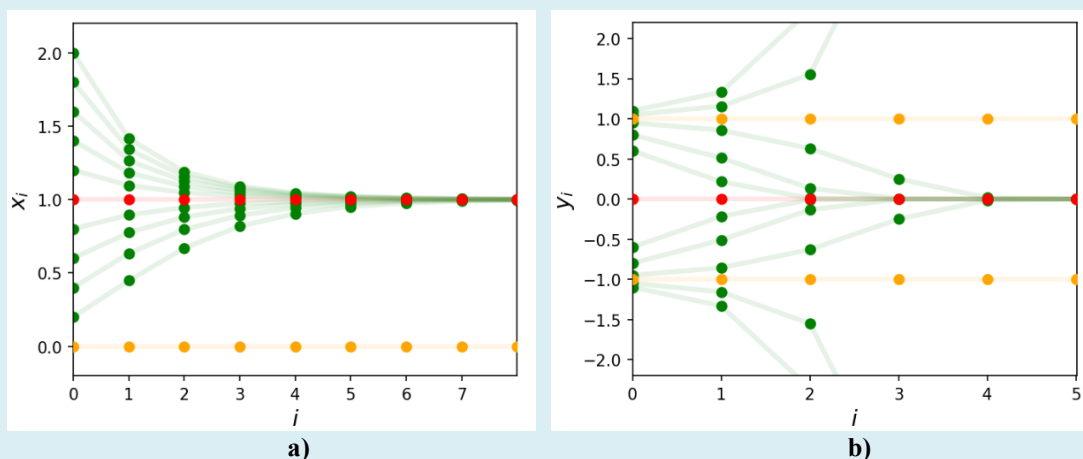
Pri tem je f funkcija, ki prekriva točke x_0, x_1, x_2, \dots . To vrsto imenujemo tudi **orbita**.



Slika 6.1. Prikaz orbite $x_{i+1} = f(x_i)$ na osi x .

Primer:

Podani sta preslikavi: **a)** $x_{i+1} = \sqrt{x_i}$ in **b)** $y_{i+1} = y_i^3$. Nariši orbite glede na korak iteracije i za različna začetna stanja x_0 in y_0 , pri čemer je $x_0 \geq 0$.



Slika 6.2. Prikaz orbit glede na korak iteracije i . Stabilno stacionarno stanje je označeno z rdečo orbito, nestabilno pa z oranžno. **a)** $x_{i+1} = \sqrt{x_i}$. $x^* = 1$ (stabilno) in $x^* = 0$ (nestabilno) **b)** $y_{i+1} = y_i^3$. $x^* = \pm 1$ (nestabilno) in $x^* = 0$ (nestabilno).

6.1 Stabilnost stacionarnih točk

Za **analizo stabilnosti stacionarnih točk** v dinamičnih sistemih vključno z 1D preslikavami se pogosto uporablja **linearna stabilnostna analiza**, ki temelji na razvoju Taylorjeve vrste okoli stacionarne točke in preučuje lastnosti **lineariziranega sistema**.

Za **stacionarna stanja** preslikave $x_{i+1} = f(x_i)$ velja:

$$x^* = f(x^*).$$

Zanima nas, kako se **orbita** obnaša v **bližini** x^* . Naredimo majhen izmik η_i iz stacionarnega stanja:

$$x_i = x_i^* + \eta_i, x_{i+1} = x_{i+1}^* + \eta_{i+1}.$$

Vstavimo zgornji enačbi v enačbo $x_{i+1} = f(x_i)$ in dobimo:

$$x_{i+1}^* + \eta_{i+1} = f(x_i^* + \eta_i).$$

Funkcijo $f(x)$ razvijemo okoli x_i^* :

$$x_{i+1}^* + \eta_{i+1} = f(x_i^*) + f'(x_i^*)\eta_i + \dots$$

Upoštevajmo, da velja: $x_{i+1}^* = f(x_i^*)$, in dobimo:

$$\eta_{i+1} = f'(x_i^*)\eta_i + \dots$$

Če ostale člene zanemarimo, dobimo **linearizirano mapo**:

$$\eta_{n+1} = f'(x^*)\eta_n.$$

Pri čemer je $\lambda = f'(x^*)$ **lastna vrednost** oziroma **multiplikator**:

$$\eta_1 = \lambda \eta_0, \eta_2 = \lambda \eta_1, \eta_3 = \lambda \eta_2 \quad \rightarrow \quad \eta_N = \lambda^N \eta_0.$$

Stacionarna točka x^* je **stabilna**, če velja:

$$|\lambda| = |f'(x^*)| < 1.$$

Stacionarna točka x^* je **nestabilna**, če velja:

$$|\lambda| = |f'(x^*)| > 1.$$

Če je $|\lambda| = |f'(x^*)| = 1$, stabilnosti stacionarne točke **ne moremo določiti z linearno analizo**.

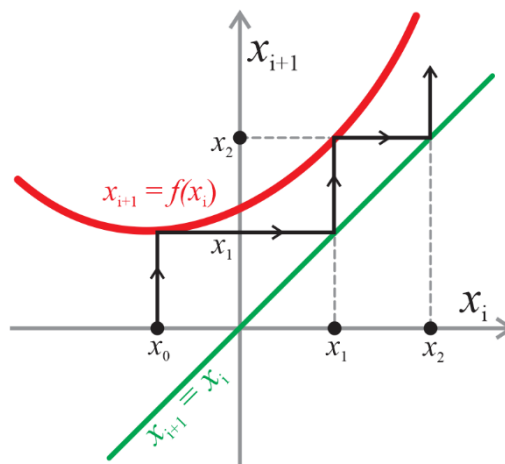
Za $\lambda < 0$ je značilno **oscilirajoče približevanje** (dušen oscilator), za $\lambda > 0$ pa **monotono približevanje** sistema stabilnemu stacionarnemu stanju.

6.2 Grafična analiza – pajkove mreže (cobweb)

Pajkova mreža, ki se s tujko imenuje "cobweb", je grafična tehnika, ki se pogosto uporablja pri analizi diskretnih časovnih preslikav ali 1D map. Je močno orodje za grafično analizo in vizualizacijo iterativnih procesov, ki se pojavljajo v različnih aplikacijah.

Postopek uporabe pajkove mreže vključuje naslednje korake (glej sliko 6.3):

- Za določeno 1D preslikavo $x_{i+1} = f(x_i)$, ki opisuje dinamiko sistema, izberemo začetno točko x_0 , ki predstavlja začetni pogoj sistema.
- Z iteracijo določimo naslednjo vrednost $x_1 = f(x_0)$, ki jo grafično dobimo tako, da iz točke x_0 na abscisni osi potegnemo navpično črto do funkcije $f(x)$.
- Dobljeno vrednost x_1 prezrcalimo na abscisno os, tako da potegnemo vodoravno črto do premice $x_{i+1} = x_i$.
- Nato iz točke x_1 postopek ponovimo in ga nadalje iterativno ponavljamo, tako da dobimo vrsto oziroma orbito: $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$



Slika 6.3: Konstrukcija pajkove mreže.

S pomočjo pajkove mreže lahko opazujemo, ali sistem *divergira* oziroma *konvergira* k stacionarnim točkam, *oscilira* med različnimi vrednostmi ali kaže *kaotično obnašanje*. Omogočajo vpogled v globalno obnašanje sistema, kar je še posebej pomembno, ko linearna stabilnostna analiza ni mogoča.

Primer 1:

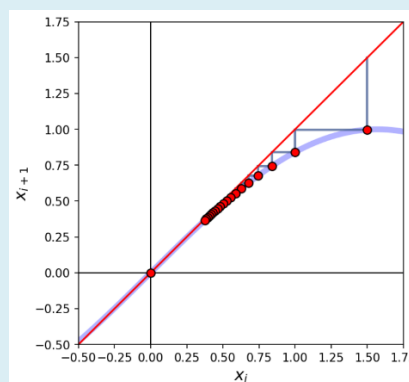
Obravnavajmo preslikavo:

$$x_{i+1} = \sin x_i.$$

Stacionarno stanje je $x^* = 0$.

Z linearno stabilnostno analizo določimo multiplikator: $\lambda = f'(x^*) = \cos(x^*) = \cos(0) = 1$. Ker je $\lambda = 1$, s to metodo ne moremo določiti stabilnosti stacionarne točke.

Stabilnost stacionarnega stanja lahko določimo z uporabo pajkove mreže. Na sliki 6.4 vidimo, da se orbita približuje stacionarnemu stanju $x^* = 0$. Podobno bi dobili, če bi začeli z negativno začetno vrednostjo, kar priča, da je $x^* = 0$ stabilno stacionarno stanje.



Slika 6.4: Konstrukcija pajkove mreže: $x_{i+1} = \sin x_i$.

Primer 2

Obravnavajmo preslikavo:

$$x_{i+1} = \cos x_i.$$

Iz orbite za $x_0 = 1$ vidimo, da imamo opravka z dušenimi oscilacijami s stacionarnim stanjem pri:

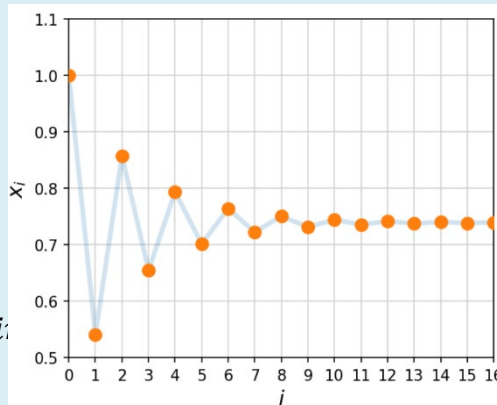
$$x^* = 0,739.$$

Z uporabo linearne stabilnostne analize:

$$\lambda = f'(x^*) = -\sin(x^*) < 0 \text{ in}$$

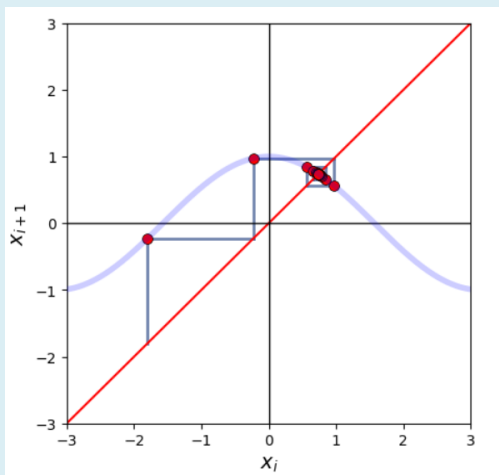
$$|f'(x^*)| = |-\sin(x^*)| < 1$$

ugotovimo, da je x^* stabilno stacionarno stanje, kateremu se oscilirajoče približujemo ($\lambda < 0$), kar je razvidno tudi iz prikaza orbite na sliki 6.5.

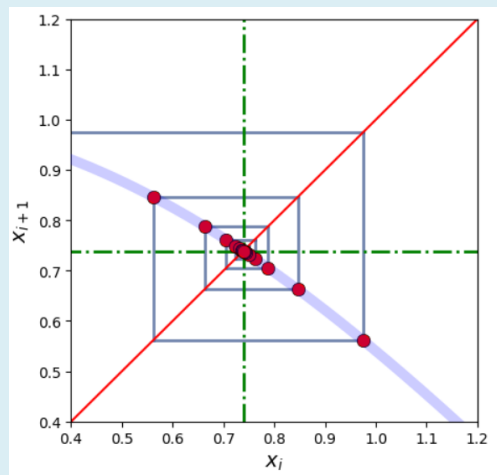


Slika 6.5: Orbita za: $x_{i+1} = \cos x_i$. $x_0 = 1$.

Na sliki 6.6 je prikazana konstrukcija pajkove mreže za obravnavan primer. Iz mreže je razvidno, da se oscilirajoče približujemo stabilnemu stacionarnemu stanju $x^* = 0,739$.



a)



b)

Slika 6.6. Konstrukcija pajkove mreže za primer $x_{i+1} = \cos x_i$. a) $x_0 = -1,8$. Število iteracij: $N = 20$ ($i = 0,1,2 \dots N$). a) Podrobnejši prikaz za $i = 2 \dots N$. $x^* = 0,739$.

6.3 Logistična mapa

Logistična mapa je matematični model, ki ga uporabljamo za opis populacijske dinamike v diskretnem času. Ta model pogosto uporabljamo tudi za raziskovanje številnih drugih sistemov. Logistično mapo lahko uporabimo kot preprost primer dinamičnega sistema v teoriji kaosa.

Logistična mapa je definirana z naslednjo diskretno enačbo:

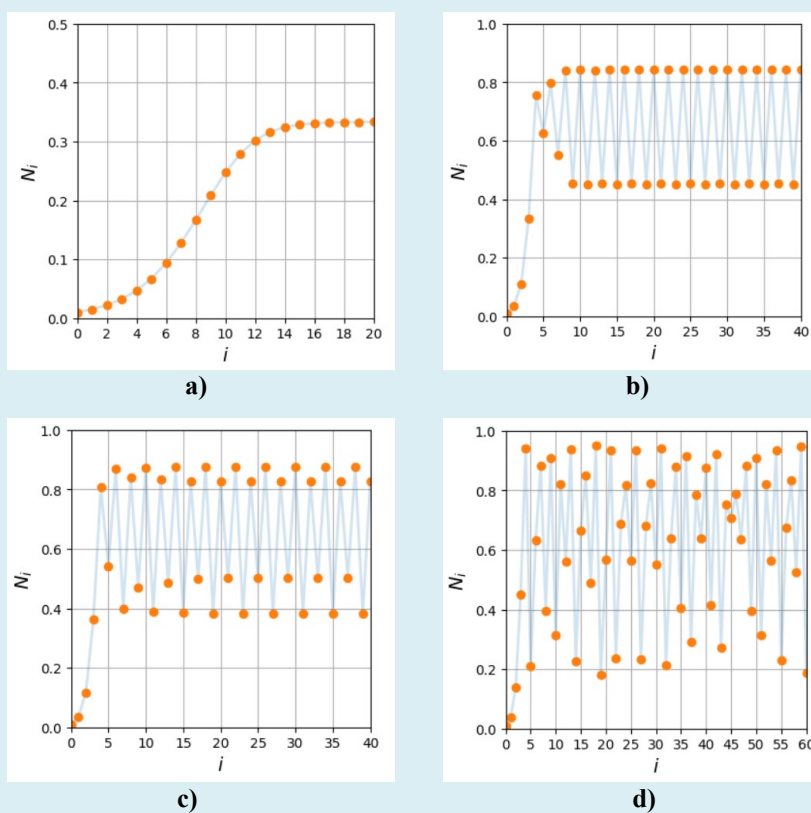
$$N_{i+1} = rN_i(1 - N_i), \quad i = 0, 1, 2, 3 \dots,$$

pri čemer je r parameter, ki nadzoruje obnašanje sistema in se imenuje *parameter rasti*. Različne vrednosti parametra določajo različne oblike dinamike.

Primer:

Na podlagi logistične mape $N_{i+1} = rN_i(1 - N_i)$ prikažimo velikost populacije po posameznih časovnih korakih za različne vrednosti parametra rasti (r).

Iz rezultatov na sliki 6.7 vidimo, da se pri $r = 1,5$ populacija ustali, medtem ko pri $r = 3,4$ dobimo oscilirajoče obnašanje populacije. Pri vrednosti $r = 3,5$ se perioda oscilacij podvoji, pri vrednosti $r = 3,8$ pa opazimo neperiodično oscilirajoče obnašanje, ki je značilno za kaotično obnašanje.



Slika 6.7: Prikaz populacijske dinamike po posameznih časovnih korakih za različne vrednosti parametra r . **a)** $r = 1,5$. **b)** $r = 3,4$. **c)** $r = 3,5$. **d)** $r = 3,8$.

6.3.1 Stabilnost stacionarnih stanj

Za **stacionarna stanja** diskretnega sistema $N_{i+1} = f(N_i)$ velja:

$$N_{i+1} = N_i = N^*.$$

Z **linearno stabilnostno analizo** lahko določimo **stabilnost stacionarnih točk**.

Stacionarna točka je stabilna, če za diskretni sistem $N_{i+1} = f(N_i)$ velja:

$$-1 < \frac{df(N_i)}{dN} < 1 \quad (\text{pogoj za stabilno stacionarno stanje}).$$

Za stacionarna stanja **logistične mape** velja pogoj:

$$N^* = rN^*(1 - N^*).$$

Iz zapisanega pogoja dobimo dve stacionarni stanji:

$$N_1^* = 0 \quad \text{in} \quad N_2^* = 1 - 1/r,$$

katerih stabilnost določimo na podlagi linearne stabilnostne analize:

$$\frac{df(N^*)}{dN} = r - 2rN^*.$$

Ugotovimo, da je $N_1^* = 0$ stabilno stacionarno stanje, če velja:

$$\frac{df(N_1^*)}{dN} = r \rightarrow r < 1.$$

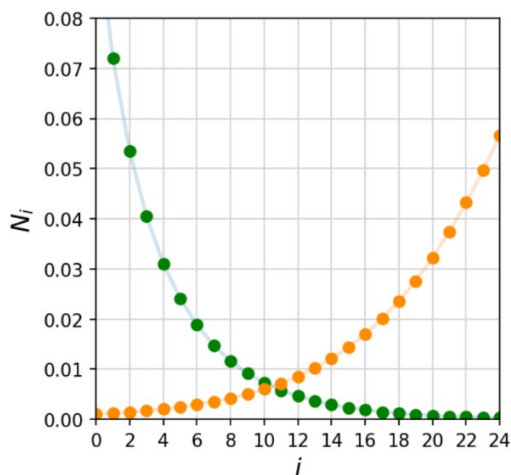
Iz časovnih potekov (orbit) na sliki 6.8 vidimo, da je za vrednost $r = 1,2 > 1$ stacionarno stanje $N_1^* = 0$ nestabilno, za vrednost $r = 0,8 < 1$ pa je to stacionarno stanje stabilno.

Stacionarno stanje $N_2^* = 1 - 1/r$ je stabilno, če velja:

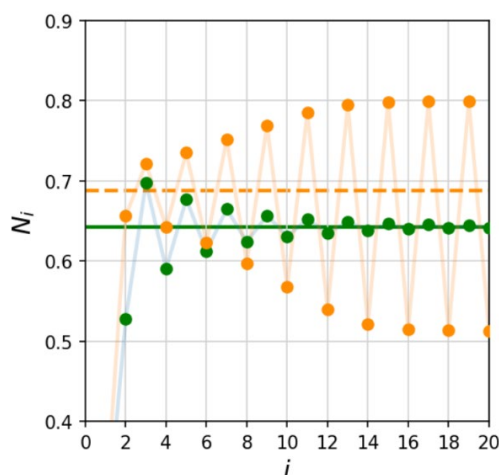
$$\frac{df(N_2^*)}{dN} = r - 2r\left(1 - \frac{1}{r}\right) = 2 - r,$$

$$|2 - r| < 1 \rightarrow 1 < r < 3.$$

Iz časovnih potekov (orbit) na sliki 6.9 vidimo, da za vrednosti $r = 3,2 > 3$ dobimo oscilacije v okolici nestabilnega stacionarnega stanja $N_2^* = 0,6875$. V primeru $r = 2,8 < 3$ dobimo oscilirajoče približevanje stacionarnemu stanju $N_2^* = 0,6429$.



Slika 6.8: Orbita za: $N_{i+1} = rN_i(1 - N_i)$. $r = 0,8$; $N_0 = 0,1$ (zeleni točke). $r = 1,2$; $N_0 = 10^{-3}$ (oranžne točke).



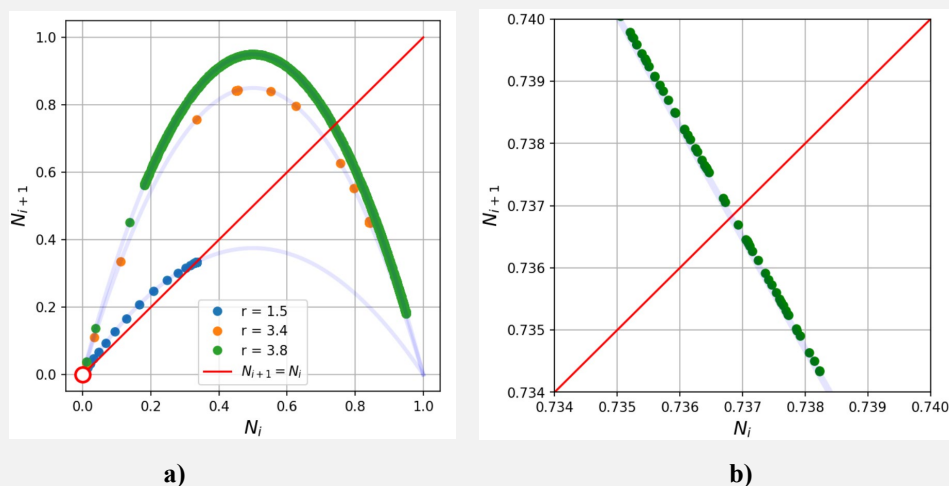
Slika 6.9: Orbita za: $N_{i+1} = rN_i(1 - N_i)$. $r = 2,8$; $N_0 = 0,1$ (zeleni točke). $r = 3,2$; $N_0 = 0,1$ (oranžne točke).

Primer

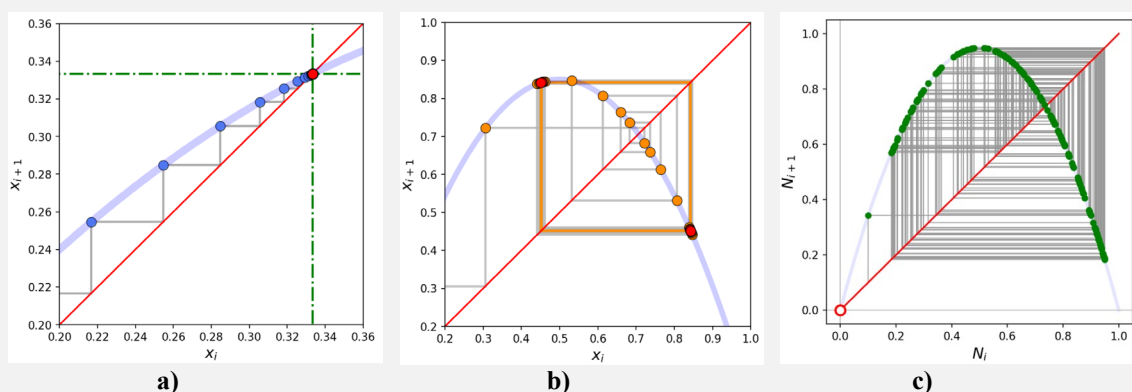
Naredimo grafično analizo logistične mape za različne vrednosti parametra r . Na spodnjem grafu (slika 6.10) je prikazano spreminjanje števila populacije v odvisnosti od števila populacije v predhodnem koraku:

$$N_{i+1}(N_i) = rN_i(1 - N_i).$$

Pri vrednosti $r = 1,5$ (modri krogi) populacija N_i narašča, dokler ne doseže stacionarnega stanja, kjer je $N_{i+1} = N_i$. V primeru $r = 3,4$ (oranžni krogi) dobimo oscilirajoče se spreminjanje v okolici nestabilnega stacionarnega stanja. Pri $r = 3,8$ (zeleni krogi) imamo prav tako nestabilno stacionarno stanje, kjer povečava na sliki 6.10b pokaže, da sistem po velikem številu iteracij ($i = 10^5$) ne preide v stacionarno stanje $N_{i+1} = N_i$.



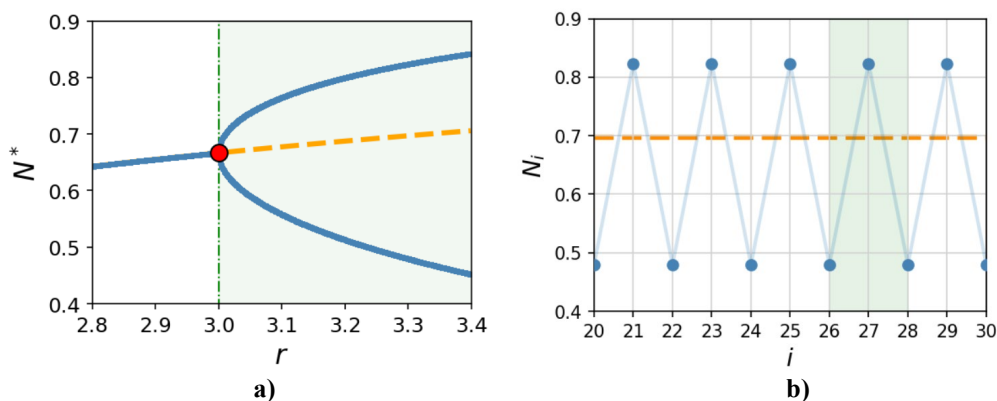
Slika 6.10: Prikaz populacije: $N_{i+1} = rN_i(1 - N_i)$. **a)** Prikaz za različne vrednosti parametra r . **b)** Povečan izsek za vrednost parametra $r = 3,8$.



Slika 6.11: Konstrukcija pajkove mreže za $N_{i+1} = rN_i(1 - N_i)$. **a)** $r = 1,5$, $N^* = 1,333$. **b)** $r = 3,4$. Dobimo oscilacije med: $N_1 = 0,4520$ in $N_2 = 0,8422$. **c)** $r = 3,8$. Dobimo neperiodične oscilacije ($N_0 = 0,1$, $i = 0 \dots 200$).

6.3.2 Podvajanje period

Iz linearne stabilnostne analize smo ugotovili, da pri logistični mapi za vrednosti parametra $r > 3$ dobimo **nestabilno stacionarno stanje** pri $N_2^* = 1 - 1/r$. Slika 6.12a prikazuje bifurkacijski diagram. Prikaz orbite na sliki 6.12b kaže, da dobimo oscilirajoče gibanje okoli nestabilnega stacionarnega stanja. Ker se vrednost N_i ponavlja na vsako drugo iteracijo, takšen tip oscilacij imenujemo **2-ciklična perioda**.



Slika 6.12: Pojav 2-ciklične periode. **a)** Bifurkacijski diagram (zeleno območje označuje pojav 2-ciklične periode). Stabilna stacionarna stanja (modre črte). Nestabilna stacionarna stanja (oranžna črtkana črta). Bifurkacijska točka $r_c = 3$. **b)** Orbita za $r = 3,3$. Vrednost N_i se ponavlja na vsako drugo iteracijo (2-ciklična perioda).

Pokažimo, da ima logistična mapa **2-ciklično periodo** za $r > 3$. Ta obstaja, če obstajata dve točki p in q , za kateri velja:

$$f(p) = q \quad \text{in} \quad f(q) = p,$$

kar posledično pomeni, da je:

$$f(f(p)) = p \quad \text{in} \quad f(f(q)) = q.$$

Iz tega sledi, da sta p in q fiksni točki v mapi $f^2(N) = f(f(N))$. Na sliki 6.13 vidimo grafični prikaz funkcije $f^2(N)$ s **stabilnima stacionarnima stanjema** p in q za vrednost parametra $r = 3,4$. Stacionarno stanje N^* je nestabilno in je hkrati tudi stacionarno stanje funkcije $f(N)$.

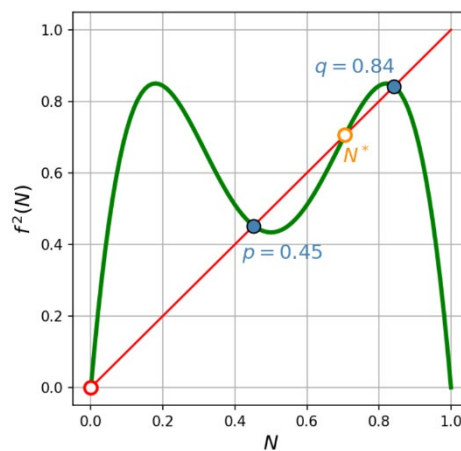
Za stacionarni stanji p in q velja $f^2(N) = N$, pri čemer je $f(N) = rN(1 - N)$.

Zapišemo lahko:

$$f^2(N) = r^2 N(1 - N) \left(1 - (rN(1 - N)) \right)$$

in ob upoštevanju $f^2(N) = N$ rešimo kvadratno enačbo:

$$f^2(N) - N = 0.$$



Slika 6.13: Prikaz funkcije $f^2(N)$ za $r = 3,4$. Stabilni stacionarni stanji sta označeni s p in q , ne stabilno pa z N^* .

Rešitvi kvadratne enačbe $f^2(N) - N = 0$ sta stacionarni stanji p in q :

$$p, q = \frac{r+1 \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}.$$

Iz rešitve vidimo, da sta p in q realni števili za $r > 3$.

2-ciklična perioda je stabilna, če sta p in q **stabilni stacionarni stanji** v $f^2(N)$. Pogoj za stabilni stacionarni stanji p in q je:

$$\left| \frac{d}{dN} (f^2(N)) \right|_{N=p,q} < 1,$$

$$\frac{d}{dN} (f(f(p))) = f'(f(p))f'(p) = f'(q)f'(p),$$

$$f(N) = rN(1-N), \quad \rightarrow \quad f'(N) = r - 2rN = r(1-2N),$$

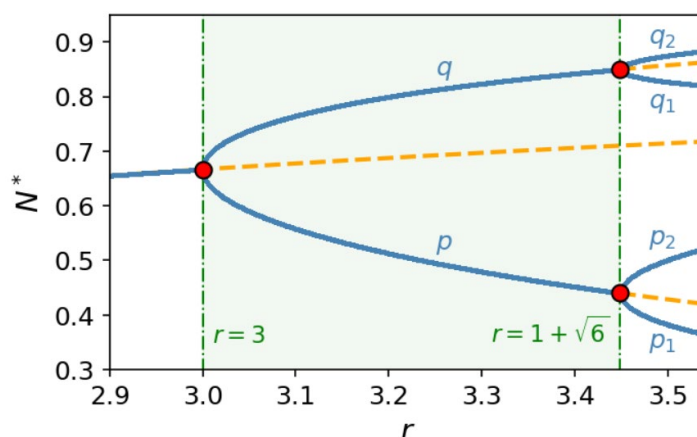
$$\frac{d}{dN} (f^2(p)) = r(1-2q)r(1-2p) = r^2(1-2(p+q) + 4pq) = 4 + 2r - r^2,$$

$$|4 + 2r - r^2| < 1.$$

Iz dobljenega pogoja lahko določimo območje parametra r , v katerem obstaja **2-ciklična perioda**:

$$3 < r < 1 + \sqrt{6} = 3,449 \dots$$

Na sliki 6.14 je prikazan bifurkacijski diagram, ki prikazuje območje **2-cikličnih period**. Iz diagrama vidimo, da s povečevanjem parametra r nastopi bifurkacija pri $r = 3$, kjer se pojavita dve dodatni stabilni stacionarni stanji p in q . Pri vrednosti parametra $r = 1 + \sqrt{6}$ nastopita novi bifurkacijski točki, pri čemer p in q postaneta nestabilni stacionarni stanji. Pojavijo pa se nova stabilna stacionarna stanja (p_1, p_2, q_1, q_2).

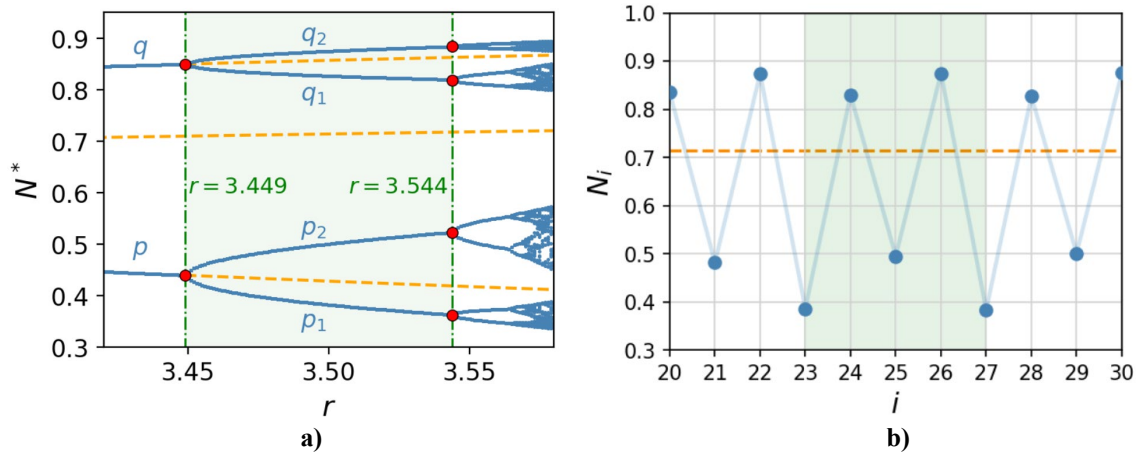


Slika 6.14: Bifurkacijski diagram logistične mape. Zeleno območje označuje pojav 2-cikličnih period.

S pojavom novih stacionarnih stanj (p_1, p_2, q_1, q_2) pri $r > 1 + \sqrt{6}$ se **perioda oscilacij podvoji**. Dobimo tako imenovane **4-ciklične periode**.

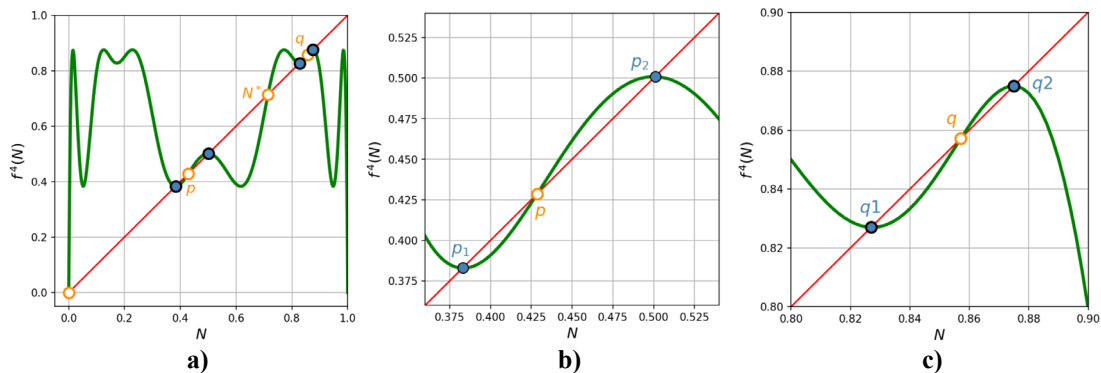
Na sliki 6.15 je prikazan bifurkacijski diagram in časovni potek za **4-ciklično periodo**. Vidimo, da se vrednost N_i ponavlja na vsako četrto iteracijo. Pri vrednosti parametra $r =$

3,544 ... nastopi nova bifurkacija, pri kateri imamo ponovno **podvojitve periode**, pri čemer nastanejo **8-ciklične periode**. Te so prisotne v območju $3,544 \dots < r < 3,564 \dots$



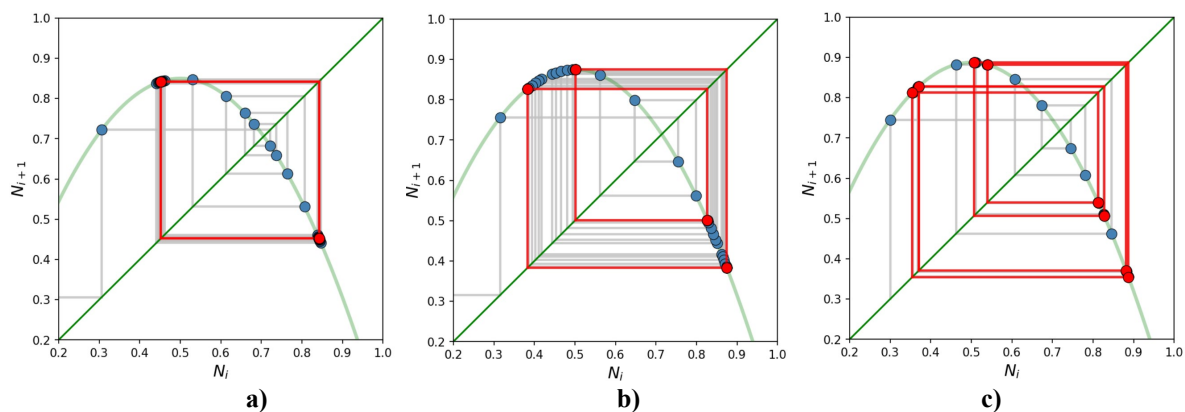
Slika 6.15: 4-ciklična perioda. **a)** Bifurkacijski diagram logistične mape. Zeleno območje označuje pojav 4-cikličnih period. **b)** Orbita za $r = 3,5$. Vrednost N_i se ponavlja na vsako četrto iteracijo (4-ciklična perioda).

Prisotnost **4-ciklične periode** za vrednost parametra $r = 3,5$ lahko razberemo tudi s slike 6.16, kjer je prikazana funkcija $f^4(N) = f(f(f(f(N))))$. Stabilna stacionarna stanja funkcije $f^4(N)$ določajo vrednosti p_1, q_1, p_2, q_2 , ki predstavljajo zaporedne vrednosti 4-ciklične periode.



Slika 6.16: Prikaz funkcije $f^4(N)$ pri vrednosti parametra $r = 3,5$. **a)** Stabilna (modri krogi) in nestabilna (oranžni krogi) stacionarna stanja. **b)** Stabilni stacionarni stanji p_1 in p_2 . **c)** Stabilni stacionarni stanji q_1 in q_2 .

Več ciklične periode si oglejmo še na primeru konstrukcije **pajkove mreže**. Na sliki 6.17 so za posamezne vrednosti parametra r prikazane: 2-ciklična, 4-ciklična in 8-ciklična perioda. S slike vidimo, da se sistem po določenem številu iteracij ustali na posameznih več cikličnih periodah, ki so označene z rdečo barvo. V kolikor sistem izmakemo iz ustaljene periode, se bo ta po določenem številu iteracij ponovno ustalil na več ciklični periodi, saj posamezna stanja znotraj n -ciklične periode predstavljajo stabilna stacionarna stanja funkcije $f^n(N)$.



Slika 6.17: Konstrukcija pajkove mreže. **a)** 2-ciklična perioda pri $r = 3,4$. $N_0 = 0,1$. **b)** 4-ciklična perioda pri $r = 3,5$. $N_0 = 0,1$. **c)** 8-ciklična perioda pri $r = 3,55$. $N_0 = 0,3$.

6.3.3 Prehod v kaos in kaotično obnašanje

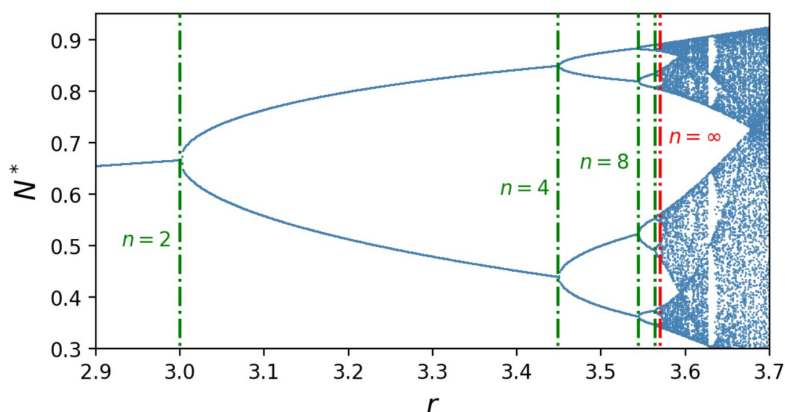
S povečevanjem bifurkacijskega parametra r prihaja do podvajanja period. V prejšnjem razdelku smo podrobneje opisali bifurkacijske točke (vrednosti parametra r), pri katerih pride do 2-ciklične, 4-ciklične in 8-ciklične periode. Z nadaljnjim povečevanjem parametra pride do nadaljnjih podvojitvev period.

Na splošno lahko zapišemo, da nastane $n = 2^k$ -ciklična perioda pri vrednosti parametra r_k . Pri tem se izkaže, da prihaja do zaporednih bifurkacij vedno hitreje, kar pomeni, da se razdalja med r_k in r_{k-1} manjša.

V naslednji preglednici so podane bifurkacijske točke (r_k), ki omejujejo posamezna območja 2^k -cikličnih period. Vrednosti so določene na podlagi numeričnih izračunov. Vidimo, da so posamezna območja vedno manjša, pri čemer vrednost r_k konvergira proti vrednosti $r_\infty = 3,5699 \dots$

Preglednica 6.1: Območje n -cikličnih period

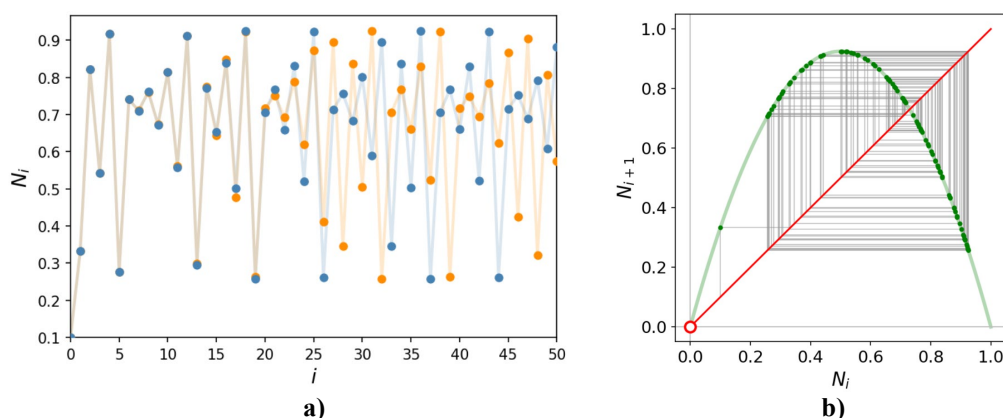
n -ciklična perioda	območje: $r_k < r < r_{k+1}$
2-ciklična perioda	$3 < r < 3,449 \dots$
4-ciklična perioda	$3,449 \dots < r < 3,544 \dots$
8-ciklična perioda	$3,544 \dots < r < 3,564 \dots$
16-ciklična perioda	$3,564 \dots < r < 3,568 \dots$
...	...
∞ -ciklična perioda	$r_\infty = 3,5699 \dots$



Slika 6.18: Bifurkacijski diagram s prikazom mejnih vrednosti parametra r za posamezne n -ciklične periode (glej preglednico 6.1).

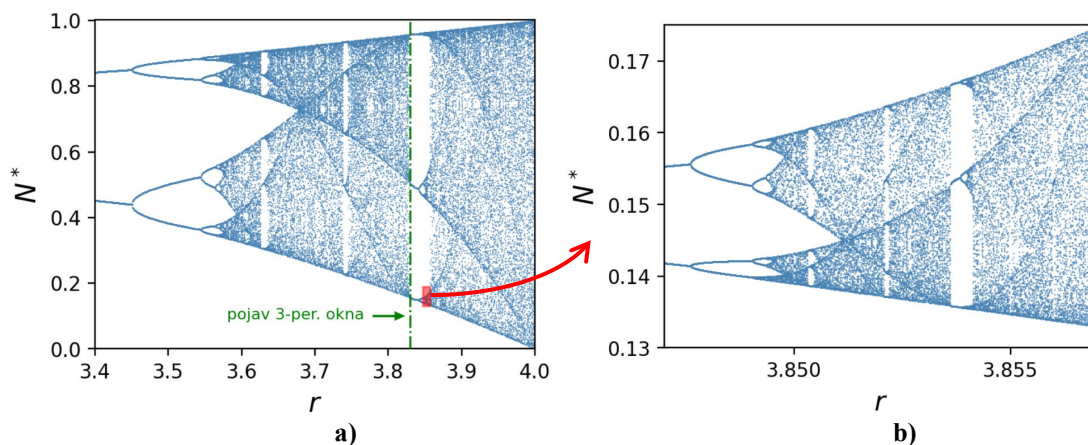
Za vrednosti parametra $r > r_\infty$ se sistem za večino primerov nikoli ne ustali pri določeni stacionarni vrednosti ali periodični orbiti. Izkaže se, da je za večino primerov dolgoročno obnašanje **neperiodično** in **občutljivo na začetne pogoje**, kar je značilno za tako imenovane **kaotične sisteme**.

Na sliki 6.19 je prikazan primer neperiodičnega obnašanja za $r = 3,7$. Slika 6.19a prikazuje orbito N_i , iz katere razberemo neperiodično obnašanje in občutljivost na začetne pogoje. Modri krogi prikazujejo vrednosti za začetno stanje $N_0 = 0,10000$, oranžni pa vrednosti za začetno stanje $N_0 = 0,10001$. Kljub temu da se začetni stanja razlikujeta le za $\varepsilon = 10^{-5}$, vidimo, da se orbiti začneta razlikovati po približno 20 iteracijah, kar priča o občutljivosti orbite na začetne pogoje. Slika 6.19b prikazuje tudi konstrukcijo pajkove mreže za začetno stanje $N_0 = 0,1$ in 100 iteracij. Vidimo, da se sistem ne ujame na več ciklično periodo, kar priča o neperiodičnem obnašanju sistema.



Slika 6.19: **a)** Časovni orbiti za $r = 3,7$ in dve različni začetni stanji. $N_0 = 0,10000$ (oranžni krogi) in $N_0 = 0,10001$ (modri krogi). **b)** Konstrukcija pajkove mreže za $N_0 = 0,1$ in $i = 0 \dots 100$.

Za vrednosti parametra $r > r_\infty$ se ob neperiodičnem (kaotičnem) obnašanju pojavljajo tudi **periodična okna** (glej sliko 6.20), kje je gibanje urejeno z določeno ciklično periodo. S slike 6.20a vidimo, da se pri vrednosti $r \approx 3,83$ prične periodično okno, ki vsebuje **3-ciklično periodo**. S povečevanjem parametra r to okno s podvajanjem period ponovno preide v območje kaotičnega obnašanja sistema (slika 6.20b). Vidimo lahko skoraj popolnoma enako kopijo bifurkacijskega diagrama na manjši skali. Takšne **kopije sistema na različnih skalah** so značilne za **fraktalne strukture**, ki jih lahko zasledimo v kaotičnih sistemih.



Slika 6.20: Bifurkacijski diagram logistične mape. **a)** Bifurkacijski diagram za območje $3,4 < r < 4,0$. Zelena črta označuje pojav 3-periodičnega okna pri $r \approx 3,83$. Rdečo območje označuje izsek, katerega povečava je prikazana v **b)** razdelku.

Lyapunov eksponent

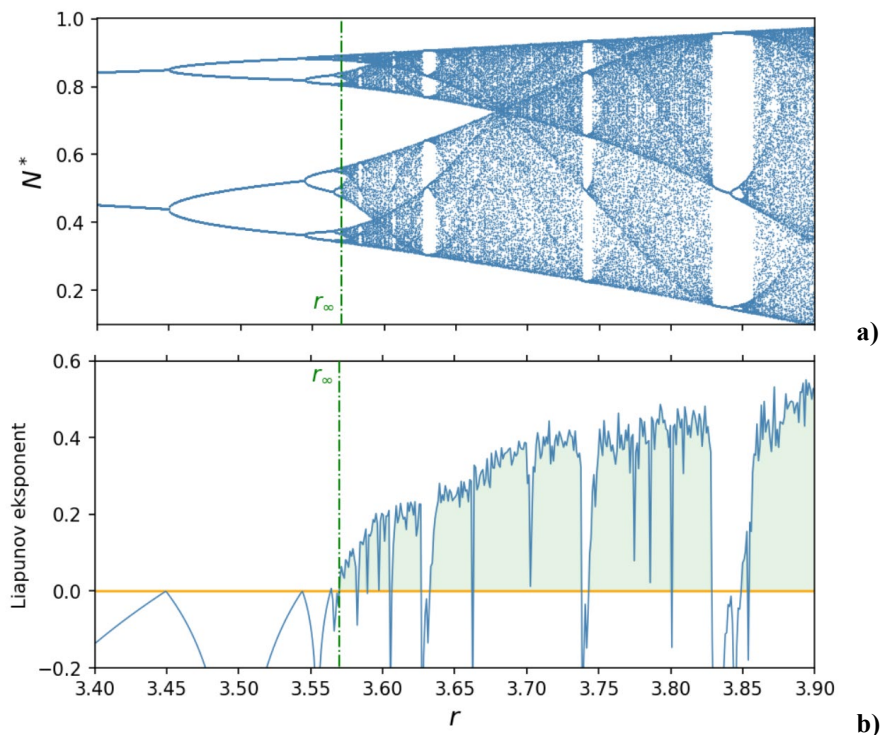
Spoznali smo, da se orbita logistične mape za vrednosti parametra $r > r_\infty$ v večini primerov obnaša neperiodično in je občutljiva na začetne pogoje (glej sliko 6.19). **Občutljivost na začetne pogoje** se odraža v eksponentnem povečevanju razdalje dveh bližnjih sosednjih orbit v faznem prostoru, kar lahko opišemo z **Lyapunovim eksponentom** (λ). V primeru pozitivnega Lyapunovega eksponenta ($\lambda > 0$) je sistem občutljiv na začetne pogoje, v primeru negativnega eksponenta ($\lambda < 0$) pa sosednje orbite konvergirajo k določenemu stacionarnemu stanju.

Izračun Lyapunovega eksponenta sledi naslednjim korakom:

- izberemo začetno točko in naredimo toliko iteracij, da se sistem ustali v določenem območju faznega prostora;
- izberemo dodatno točko, ki je izmaknjena za majhno razdaljo d_0 ;
- za obe točki izračunamo naslednji stanji sistema in določimo novo razdaljo d_1 med njima;
- izračunamo logaritem razdalj: $\ln|d_1/d_0|$;
- normiramo razdaljo d_1 na d_0 , da se orbite preveč ne oddaljita;
- predhodne tri korake večkrat (n -krat) ponovimo in izračunamo povprečno vrednost izraza $\ln|d_1/d_0|$. Dobljena vrednost predstavlja eksponentno oddaljevanje dveh sosednjih orbit oziroma Lyapunov eksponent, ki ga v primeru diskretnih sistemov zapišemo:

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{d_1}{d_0} \right|.$$

Slika 6.21 prikazuje bifurkacijski diagram in vrednost Lyapunovega eksponenta (λ). Posebej so označena območja za $r > r_\infty$, kjer je sistem občutljiv na začetne pogoje ($\lambda > 0$).



Slika 6.21: a) Bifurkacijski diagram za $3,4 < r < 3,9$. Zelena črta označuje mejo r_∞ (glej preglednico 6.1), pri kateri sistem postane neperiodičen in občutljiv na začetne pogoje. b) Lyapunov eksponent. Z zeleno so označena območja, kjer je sistem občutljiv na začetne pogoje in sledi kaotičnemu obnašanju ($\lambda > 0$).

Literatura

Betounes, D. (2001). One-Dimensional Systems. In: *Differential Equations: Theory and Applications*. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4971-7_4

Hannon, B. in Ruth, M. (1997). *Modeling Dynamic Biological Systems*, Springer, New York.

Hannon, B. in Ruth, M. (2001). *Dynamic Modeling*, Springer, New York.

Rodrigues, A. (2021). One-Dimensional Dynamical Systems: An Example-Led Approach. *Chapman and Hall/CRC*. <https://doi.org/10.1201/9781003144618>

Schecker, H. P. (1998). *Physik-Modellieren, Grafikorientierte Modellbildungssysteme im Physikunterricht*, Ernst Klett Verlag, Stuttgart.

Smith, C.A., & Campbell, S.W. (2012). *A First Course in Differential Equations, Modeling, and Simulation*. CRC Press. <https://doi.org/10.1201/b16525>

Stephen L. (2018) *Dynamical Systems with Applications using Python*. Birkhauser, Springer Nature Switzerland AG. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-78145-7>

Strogatz, S.H. (2015). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9780429492563>

Viri slik

Slike, ki nimajo posebej navedenega vira, so generirane s pomočjo računalniškega programa Python in so avtorsko delo avtorjev učbenika. Slike z navedenim virom so našteje spodaj. Slike, ki niso avtorsko delo avtorjev učbenika, so pod »Creative Commons« licenco.

[Slika 1.1] Gottfried Kneller. https://snl.no/Isaac_Newton

[Slika 1.3] E. Flammarion. <https://www.flickr.com/photos/internetarchivebookimages/20674627100/>

[Slika 1.5] https://en.wikipedia.org/wiki/File:Edward_lorenz.jpg

[Slika 1.7] Rama, Own work. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Benoit_Mandelbrot_mg_1804b.jpg

[Slika 1.8] Wolfgang Beyer. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mandel_zoom_03_seehorse.jpg

[Slika 1.11] Rawpixel. <https://www.rawpixel.com/image/5939639/yahtzee>

[Slika 1.12] Rawpixel. <https://www.rawpixel.com/image/5924951/free-public-domain-cc0-photo>

[Slika 4.21] Terry Priest. <https://www.flickr.com/photos/artfarmer/537625050>

Priloga: Primeri analize dinamičnih sistemov s programom Python

V nadaljevanju so predstavljeni primeri analize dinamičnih sistemov s programom **Python**. Za pisanje in izvajanje skripte je bilo uporabljeno okolje **Colab**.

Google Colaboratory  <https://colab.research.google.com/>

A) Časovni potek $x(t)$ kot rešitev enačbe $dx/dt = f(x)$

Primer risanja časovnega poteka $x(t)$ pri različnih začetnih stanjih x_0 za rešitev enačbe $\frac{dx}{dt} = f(x)$. Kot primer je uporabljena enačba $f(x) = \sin x$, rešitev katere je določena z Eulerjevo numerično metodo reševanja diferencialnih enačb.

```
# Uporaba knjižnic
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Definiramo diferencialno enačbo
def dx_dt(x):
    return np.sin(x)

# Nastavitev začetnih pogojev (x0)
zacetne_vrednosti = np.arange(-3 * np.pi, 3 * np.pi + 0.2 * np.pi, 0.1 * np.pi)

# Časovna os
cas = np.linspace(0, 10, 1000)

# Velikost grafa
plt.figure(figsize=(6, 5), dpi=150)

# Narišemo časovne potek x(t) za različne začetne pogoje
for x_0 in zacetne_vrednosti:
    x = [x_0]
    for t in cas[:-1]:
        x_new = x[-1] + dx_dt(x[-1]) * (cas[1] - cas[0])
        x.append(x_new)
    if x_0 in [-2*np.pi, 0, 2*np.pi]:
        plt.plot(cas, x, '--', c='darkorange', lw=2, zorder=2)
    elif x_0 in [-np.pi, np.pi]:
        plt.plot(cas, x, c='darkorange', lw=2, zorder=2)
    else:
        plt.plot(cas, x, c='steelblue', lw=2, zorder=1)
```

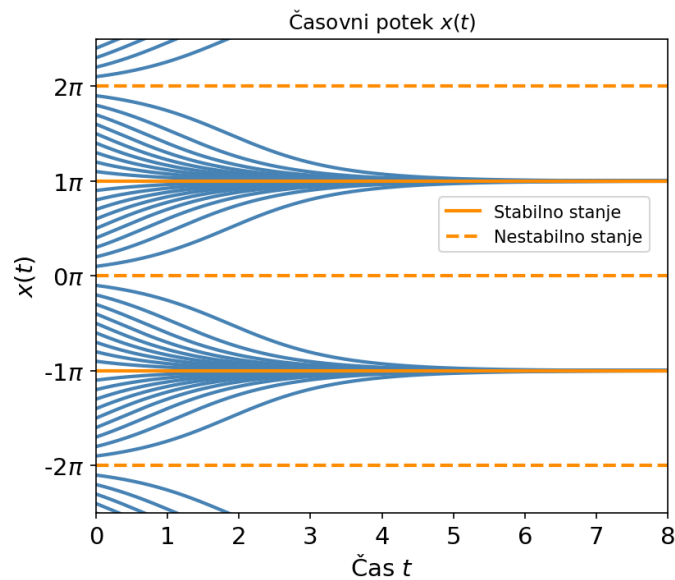
```

# ustavrjanje legende
plt.plot([], [], 'darkorange', ls='-', lw=2, label='Stabilno stanje')
plt.plot([], [], 'darkorange', ls='--', lw=2, label='Nestabilno stanje')
plt.legend(loc=(0.6,0.55))

# Nastavitve grafa
plt.title('Časovni potek  $x(t)$ ')
plt.xlim(0,8)
plt.ylim(-2.5*np.pi, 2.5*np.pi)
plt.xlabel('Čas  $t$ ', fontsize=14)
plt.ylabel('x(t)', fontsize=14)
plt.xticks(np.arange(0, 9, 1), fontsize=14)
plt.yticks(np.arange(-2*np.pi, 3*np.pi, np.pi), labels=[f'{n}\pi' for n in range(-2, 3)], fontsize=14)

# Prikaz grafa
plt.show()

```



Slika A: Časovni potek $x(t)$ pri različnih začetnih stanjih x_0 za rešitev enačbe $\frac{dx}{dt} = \sin x$.

B) Risanje vektorskega polja na premici

Za primer diferencialne enačbe $\frac{dN}{dt} = f(N)$, pri čemer je $f(N) = N(3 - N)$, narišemo funkcijo $f(N)$, stabilna in nestabilna stacionarna stanja in vektorsko polje na premici.

```

# Uporaba knjižnic
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Določanje vrednosti za N
x_min = -1

```



```
x_max = 4
N = np.linspace(x_min, x_max, 100)

# Definiranje funkcije f(N)
def f(N):
    return N*(3-N)

# Določanje grafa
fig, ax = plt.subplots(figsize=(6, 4), dpi=150)

# Risanje funkcije f(N)
ax.plot(N, f(N), label='$dN/dt = N(3-N)$', linestyle='-', color='steelblue', lw=3, zorder=2)

# Risanje stabilnih in nestabilnih stacionarnih stanj
plt.scatter(3, 0, marker='o', facecolors='red', edgecolor='red', label='stabilno st. stanje',
linewidth=2, s=100, zorder=4)
plt.scatter(0, 0, marker='o', facecolors='white', edgecolor='red', label='nestabilno st. stanje',
linewidth=2, s=100, zorder=4)

s_dolzina = 0.03
s_debelina = 0.015

# Risanje vektorskega polja

# Število puščic na premici
n_puscic = 20
Np = np.linspace(x_min, x_max, n_puscic)

# Velikost puščic
f_Np = f(Np)
dolzina_puscic = s_dolzina * f_Np
dx = dolzina_puscic
dy = 0

# Risanje vektorskega polja
plt.quiver(Np, 0, dx, dy, color='green', pivot='middle', scale=1, width=s_debelina, zorder=3)
plt.text(0.8, 0.4, 'vektorsko polje', color='green', fontsize=12)

# Parametri grafa
x_min_g=-1
x_max_g=4
y_min_g=-3
y_max_g=3

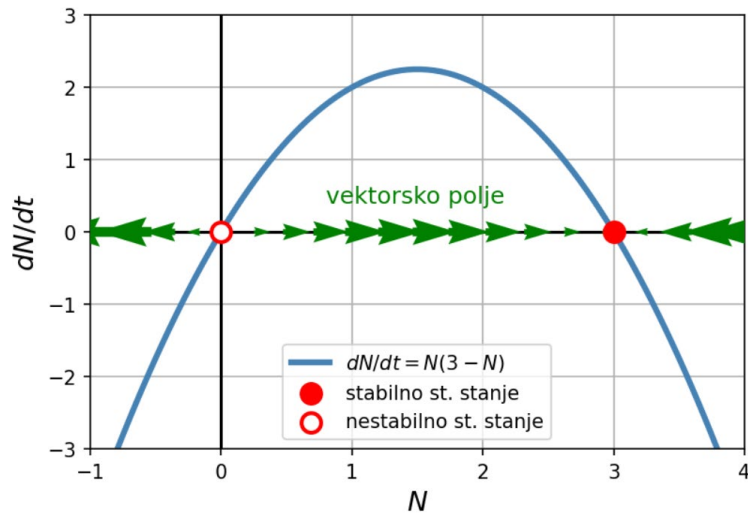
ax.set_xlim(x_min_g-0.001,x_max_g+0.001)
ax.set_ylim(y_min_g-0.001,y_max_g+0.001)
ax.set_xticks(np.arange(x_min_g, x_max_g+0.001, 1))
ax.set_yticks(np.arange(y_min_g,y_max_g+0.001, 1))
ax.axhline(0, color='black', linewidth=1.5, zorder=2)
```

```

ax.axvline(0, color='black', linewidth=1.5, zorder=2)
ax.set_xlabel('$N$', fontsize=14)
ax.set_ylabel('$dN/dt$', fontsize=14)
ax.grid()

plt.legend(loc='lower center')
plt.show()

```



Slika B: Vektorsko polje na premici za primer $dN/dt = N(3 - N)$.

C) Risanje vektorskega polja na krožnici

Prikaz vektorskega polja na krožnici za primer $\frac{d\phi}{dt} = \sin 2\phi$.

```

# Uporaba knjižnic
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Definiranje funkcije f(fi)
def f(fi):
    return np.sin(2*fi)

# Skaliranje debeline in dolžine puščic
s_dolzina = 0.17
s_debelina = 0.018

# Število točk na krožnici
n_tock = 19

# Radij in koti točk na krožnici
r = np.ones(n_tock)
kot_n = np.linspace(0, 2 * np.pi, n_tock)

```

```

# Velikost vektorskega polja
velikost_vp = f(kot_n)

# Dolžina puščic
dolzina_puscic = s_dolzina * (velikost_vp)
dx = dolzina_puscic * np.cos(kot_n + np.pi/2)
dy = dolzina_puscic * np.sin(kot_n + np.pi/2)

# Ustvarimo graf in osi
fig, ax = plt.subplots(figsize=(4, 4), dpi=150)

# Krožnica
circle = plt.Circle((0, 0), 1, fill=False, color='gray', ls='dotted', lw=2, zorder=1)
ax.add_patch(circle)

# Risanje puščic
plt.quiver(np.cos(kot_n), np.sin(kot_n), dx, dy, color='green', pivot='middle', scale=1,
width=s_debelina, zorder=2)

# Oznake na grafu
rs1=1
rs2=1.25
fis1=0
fis2=1/2*np.pi
fis3=2/2*np.pi
fis4=3/2*np.pi

ax.plot(rs1*np.cos(fis1), rs1*np.sin(fis1), marker='o', markersize=12, color='red',
mfc='white', mew=2, label=r'$\phi=0$', zorder=3)
ax.plot(rs1*np.cos(fis2), rs1*np.sin(fis2), marker='o', markersize=12, color='red',
markerfacecolor='red', label=r'$\phi=\pi/2$', zorder=3)
ax.plot(rs1*np.cos(fis3), rs1*np.sin(fis3), marker='o', markersize=12, color='orange',
mfc='white', mew=2, label=r'$\phi=\pi$', zorder=3)
ax.plot(rs1*np.cos(fis4), rs1*np.sin(fis4), marker='o', markersize=12, color='orange',
markerfacecolor='orange', label=r'$\phi=3/2*\pi$', zorder=3)

ax.text(rs2*np.cos(fis1)-0.1, rs2*np.sin(fis1)+0.2, r'$\phi=0$', fontsize=12, va='center')
ax.text(rs2*np.cos(fis2)-0.2, rs2*np.sin(fis2), r'$\phi=\pi/2$', fontsize=12, va='center')
ax.text(rs2*np.cos(fis3)-0.1, rs2*np.sin(fis3)+0.2, r'$\phi=\pi$', fontsize=12, va='center')
ax.text(rs2*np.cos(fis4)-0.2, rs2*np.sin(fis4), r'$\phi=3/2*\pi$', fontsize=12, va='center')

# Nastavitve grafa
ax.set_xlim(-1.5, 1.5)
ax.set_ylim(-1.5, 1.5)
ax.axis('equal')
ax.axhline(0, color='black', lw=0.5)
ax.axvline(0, color='black', lw=0.5)

```

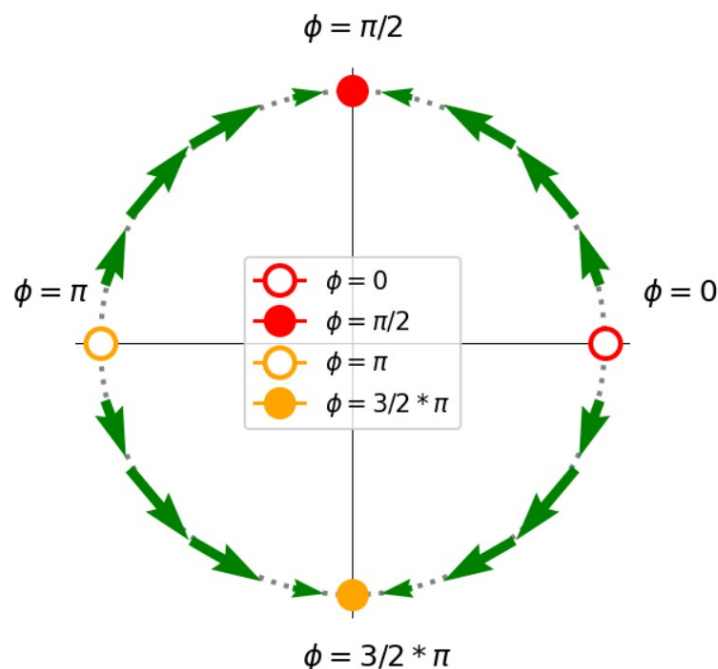
```

# Brez oznak grafa
ax.set_xticks([])
ax.set_yticks([])

# Brez okvirja grafa
ax.spines['top'].set_visible(False)
ax.spines['right'].set_visible(False)
ax.spines['bottom'].set_visible(False)
ax.spines['left'].set_visible(False)

# Prikaz grafa
plt.legend(loc='center')
plt.show()

```



Slika C: Vektorsko polje na krožnici za primer $\frac{d\phi}{dt} = \sin 2\phi$.

D) Izračun stacionarnih stanj in risanje bifurkacijskega diagrama

Za primer $\frac{dx}{dt} = f(r, x)$, pri čemer je $f(r, x) = rx + x^3 - x^5$, narišemo bifurkacijski diagram v odvisnosti od bifurkacijskega parametra r . Pri tem ločeno pokažemo stabilna in nestabilna stacionarna stanja.

```

# Uporaba knjižnic
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

```

```
from scipy.optimize import fsolve

# Definicija funkcije in njenega odvoda
def enacba(x, r):
    return r * x + x**3 - x**5

def odvod(x, r):
    return r + 3 * x**2 - 5 * x**4

# Bifurkacijski parameter
r_bif = np.linspace(-0.3, 0.2, 200)

# Začetna stanja
x0 = np.linspace(-1.5, 1.5, 50)

# Funkcija za izračun stacionarnih stanj
def poisci_stacionarna_stanja(r_bif, x0, tol=1e-6):
    stacionarna_stanja = []
    for r in r_bif:
        for x_zacetni in x0:
            # Uporabimo fsolve za iskanje stacionarnih stanj
            x_resitev = fsolve(enacba, x_zacetni, args=(r,))
            for x in x_resitev:
                if abs(enacba(x, r)) < tol:
                    stacionarna_stanja.append((r, x))
    return stacionarna_stanja

# Določitev stacionarnih stanj
stacionarna_stanja = poisci_stacionarna_stanja(r_bif, x0)

# Funkcija za določitev stabilnosti stacionarnih stanj
def stabilno_stanje(r, x):
    vrednost_odvoda = odvod(x, r)
    return vrednost_odvoda < 0

# Določitev stabilnih in nestabilnih stanj
x_stabilno = []
x_nestabilno = []
r_stabilno = []
r_nestabilno = []

for r, x in stacionarna_stanja:
    if stabilno_stanje(r, x):
        r_stabilno.append(r)
        x_stabilno.append(x)
    else:
        r_nestabilno.append(r)
        x_nestabilno.append(x)
```

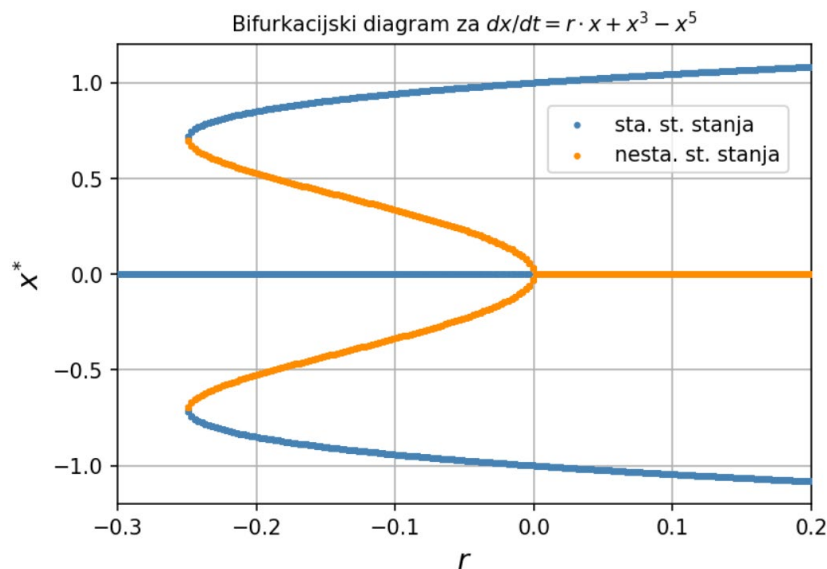
```

# Bifurkacijski diagram
plt.figure(figsize=(6, 4), dpi=150)

plt.scatter(r_stabilno, x_stabilno, s=20, c='steelblue', marker='.', label='sta. st. stanja', zorder=3)
plt.scatter(r_nestabilno, x_nestabilno, s=20, c='darkorange', marker='.', label='nesta. st. stanja',
zorder=3)

plt.xlim(-0.3, 0.2)
plt.ylim(-1.2, 1.2)
plt.xlabel('$r$', fontsize=14)
plt.ylabel('$x^{*}$', fontsize=14)
plt.title('Bifurkacijski diagram za $dx/dt = r \cdot x + x^3 - x^5$', fontsize=10)
plt.grid()
plt.legend(loc=(0.62,0.72))
plt.show()

```



Slika D: Bifurkacijski diagram za primer $dx/dt = rx + x^3 - x^5$.

E) Konstrukcija »pajkove mreže« 1D mape

Za primer logistične mape $x_{i+1} = rx(1 - x)$ narišemo funkcijo $f(x) = rx(1 - x)$ in za določeno število iteracij narišemo točke $x_{i+1}(x_i)$. Na graf dodamo tudi konstrukcijo tako imenovane »pajkove mreže« in jo posebej označimo, ko se orbita ustali na 4-ciklični periodi.

```

# Uporaba knjižnic
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Mapa
def mapa(r,x):

```

```
    return r*x*(1-x)

# Parametri
r = 3.5
x0 = 0.1
st_iteracij = 50
z_iteracij = 4

# Orbita
def Orbita(r, x, st_iteracij):
    x_vrednost = [x]
    for _ in range(st_iteracij):
        x = mapa(r,x)
        x_vrednost.append(x)
    return x_vrednost

# Določitev grafa
plt.figure(figsize=(5, 5), dpi=150)

# Risanje funkcije f(x)
x_vrednost = np.arange(-1, 1, 0.01)
y_vrednost = [mapa(r,x) for x in x_vrednost]
plt.plot(x_vrednost, y_vrednost, color='green', lw=3, alpha=0.3, zorder=2)

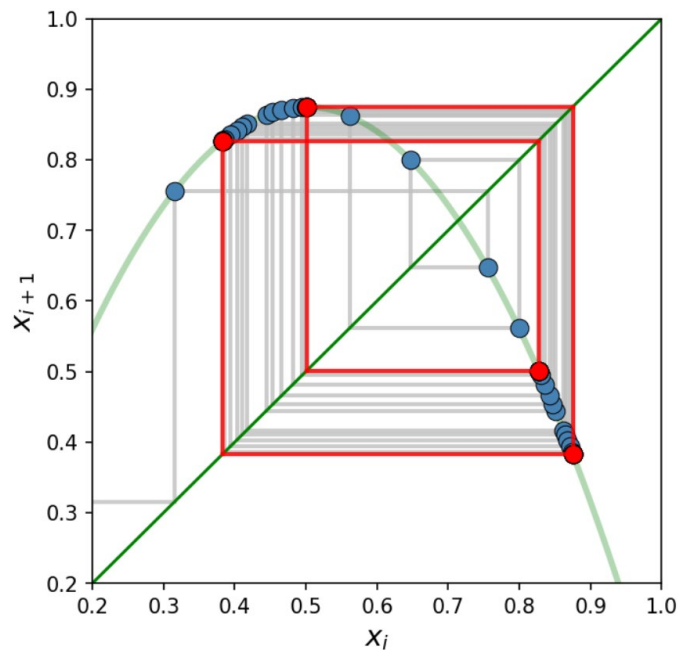
# Risanje točk na f(x)
casovna_vrsta = Orbita(r, x0, st_iteracij)
plt.scatter(casovna_vrsta[:-1], casovna_vrsta[1:], marker='o', facecolors='steelblue',
            edgcolor='black', linewidth=0.5, s=80, zorder=3)

# Črta  $x(i+1) = x(i)$ 
plt.plot([-3, 3], [-3, 3], '-', color='green', label='x(i+1) = x(i)', zorder=2)

# Risanje mreže
for i in range(st_iteracij - z_iteracij):
    plt.plot([casovna_vrsta[i], casovna_vrsta[i]], [casovna_vrsta[i], casovna_vrsta[i+1]], '-',
            color='silver', lw=2, alpha=0.8, zorder=1)
    plt.plot([casovna_vrsta[i], casovna_vrsta[i+1]], [casovna_vrsta[i+1], casovna_vrsta[i+1]], '-',
            color='silver', lw=2, alpha=0.8, zorder=1)

# Risanje mreže za zadnjih z_iteracij
i_z = st_iteracij - z_iteracij
for i in range(i_z, st_iteracij):
    plt.plot([casovna_vrsta[i], casovna_vrsta[i]], [casovna_vrsta[i], casovna_vrsta[i+1]], '-',
            color='red', lw=2, alpha=0.8, zorder=5)
    plt.plot([casovna_vrsta[i], casovna_vrsta[i+1]], [casovna_vrsta[i+1], casovna_vrsta[i+1]], '-',
            color='red', lw=2, alpha=0.8, zorder=5)
plt.scatter(casovna_vrsta[i_z-1:st_iteracij-1], casovna_vrsta[i_z:st_iteracij], marker='o',
            facecolors='red', edgcolor='black', linewidth=0.5, s=80, zorder=4)
```

```
# nastavitve grafa
plt.xlim(0.2, 1)
plt.ylim(0.2, 1)
plt.xlabel('$x_i$', fontsize=14)
plt.ylabel('$x_{i+1}$', fontsize=14)
plt.grid(False)
plt.show()
```



Slika E: Konstrukcija pajkove mreže za primer logistične mape $x_{i+1} = rx(1 - x)$ pri $r = 3,5$. $x_0 = 0,1$.

F) Bifurkacijski diagram 1D mape

Za primer logistične mape $x_{i+1} = rx(1 - x)$ narišemo bifurkacijski diagram v odvisnosti od bifurkacijskega parametra r .

```
# Uporaba knjižnic
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from matplotlib import rcParams

# Določitev mape
def mapa(r, x):
    return r * x * (1 - x)

# parametri
r1_bif=1
r2_bif=3.9
stevilo_bif = 1000
stevilo_tock = 100
x0 = 0.1

# vrednosti bifurkacijskega parametra r
r_vrednost = [r/stevilo_bif for r in range(int(r1_bif*stevilo_bif), int(r2_bif*stevilo_bif))]
```


Točke bifurkacijskega diagrama

```
def bifurkacijski_diagram(r_vrednost, x0, stevilo_bif, stevilo_tock):
    x = x0
    rezultat = []
    for r in r_vrednost:
        for _ in range(stevilo_bif):
            x = mapa(r, x)
        for _ in range(stevilo_tock):
            x = mapa(r, x)
            rezultat.append((r, x))
    return rezultat
```

```
bifurcation_data = bifurkacijski_diagram(r_vrednost, x0, stevilo_bif, stevilo_tock)
rs, xs = zip(*bifurcation_data)
```

Določitev grafa

```
plt.figure(figsize=(7,4), dpi=150)
```

Risanje bifurkacijskega diagrama

```
#plt.plot(rs, xs, ',', alpha=1, markersize=80)
plt.plot(rs, xs, 'o', color='steelblue', markersize=0.8, markeredgewidth=0, alpha=1)
```

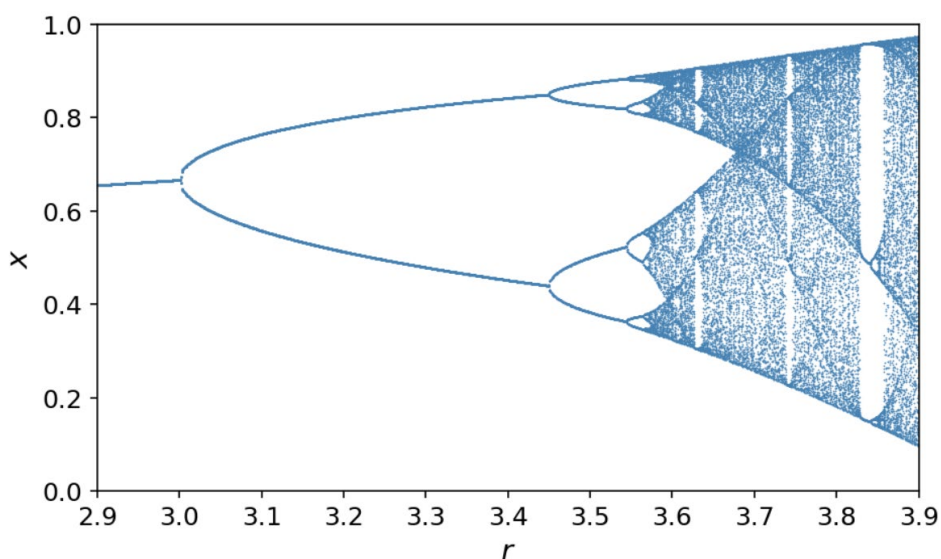
nastavitve grafa

```
plt.xlabel('$r$', fontsize=14)
plt.ylabel('$x$', fontsize=14)

plt.xticks(fontsize=12)
plt.yticks(fontsize=12)

plt.xlim(2.9,3.9)
plt.xticks(np.arange(2.9, 3.9+0.01, 0.1))
plt.ylim(0,1)

plt.show()
```



Slika F: Bifurkacijski diagram logistične mape $x_{i+1} = rx(1 - x)$.

DINAMIKA ENODIMENZIONALNIH SISTEMOV

VLADIMIR GRUBELNIK,¹ MARKO MARHL²

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko, Maribor, Slovenija
vlado.grublenik@um.si

² Univerza v Mariboru, Pedagoška fakulteta, Medicinska fakulteta, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Maribor, Slovenija
marko.marhl@um.si

Učbenik obravnava enodimenzionalne dinamične sisteme z elementarnim pristopom. Cilj je študentom omogočiti boljše razumevanje temeljnih načel dinamike sistemov, kot so določitev stacionarnih stanj, stabilnostna analiza, bifurkacije in dolgoročno obnašanje sistemov. Učbenik je zasnovan predvsem za študente fizike, vendar je uporaben tudi za druge smeri, kjer je matematično modeliranje dinamičnih sistemov del učnega načrta. Vsebinski sklopi učbenika zajemajo osnovne značilnosti dinamičnih sistemov, geometrijski pristop reševanja enodimenzionalnih sistemov, tokove na krožnici, bifurkacije in njihove značilnosti, enodimenzionalne preslikave (mape) ter številne primere enodimenzionalnih sistemov v fiziki, biologiji in kemiji. Primeri so izbrani tako, da študentom pomagajo razvijati intuicijo za dinamiko bolj kompleksnih več dimenzionalnih sistemov, s katerimi se soočajo v vsakdanjem življenju.

DOI

[https://doi.org/
10.18690/um.fnm.1.2024](https://doi.org/10.18690/um.fnm.1.2024)

ISBN

978-961-286-826-0

Ključne besede:

dinamika sistemov,
povratne zanke,
stabilnostna analiza,
bifurkacije,
logistična mapa,
kaos



Univerzitetna založba
Univerze v Mariboru

DOI

[https://doi.org/
10.18690/um.fnm.1.2024](https://doi.org/10.18690/um.fnm.1.2024)

ISBN

978-961-286-826-0

DYNAMICS OF ONE-DIMENSIONAL SYSTEMS

VLADIMIR GRUBELNIK,¹ MARKO MARHL²

¹ University of Maribor, Faculty of Electrical Engineering and Computer Science, Maribor, Slovenia
vlado.grublenik@um.si

² University of Maribor, Fac. of Educ., Fac. of Med., Fac. of Nat. Sci. & Math., Maribor, Slovenia
marko.marhl@um.si

Keywords:

system dynamics,
feedback loops,
stability analysis,
bifurcations,
logistic map,
chaos

The textbook addresses one-dimensional dynamic systems with an elementary approach. The goal is to enable students to better understand the fundamental principles of system dynamics, such as identifying stationary states, stability analysis, bifurcations, and the long-term behavior of systems. The textbook is primarily designed for physics students, but it is also useful for other disciplines where mathematical modeling of dynamic systems is part of the curriculum. The content sections of the textbook cover the basic characteristics of dynamic systems, the geometric approach to solving one-dimensional systems, flows on a circle, bifurcations and their characteristics, one-dimensional mappings (maps), and numerous examples of one-dimensional systems in physics, biology, and chemistry. The examples are selected to help students develop intuition for the dynamics of more complex multi-dimensional systems they encounter in everyday life.





Univerza v Mariboru

Fakulteta za naravoslovje
in matematiko