

Tina  
**SOVIČ**

Simon  
**ŠPACAPAN**



Univerzitetna založba  
Univerze v Mariboru

# **VEKTOSKA ANALIZA**





Univerza v Mariboru

---

Fakulteta za strojništvo

# Vektorska analiza

Avtorja

**Tina Sovič**

**Simon Špacapan**

Julij 2023

<b>Naslov</b> <i>Title</i>	<b>Vektorska analiza</b> <i>Vector Calculus</i>	
<b>Avtorja</b> <i>Authors</i>	Tina Sovič (Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo)	
	Simon Špacapan (Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo)	
<b>Recenzija</b> <i>Review</i>	Irena Kosi Ulbl (Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo)	
	Ria Erveš (Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo)	
	Vesna Iršič (Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko)	
<b>Lektoriranje</b> <i>Language editing</i>	Dejan Vegič (Taia d.o.o.)	
<b>Tehnična urednika</b> <i>Technical editors</i>	Simon Špacapan (Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo)	Jan Perša (Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba)
<b>Grafične priloge</b> <i>Graphics material</i>	Sovič, Špacapan, 2023	
<b>Oblikovanje ovitka</b> <i>Cover designer</i>	Jan Perša (Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba)	
<b>Grafika na ovitku</b> <i>Cover graphic</i>	Dear Dears Stars, avtor: 5187396, pixabay.com, CC0, 2023	
<b>Založnik</b> <i>Published by</i>	<b>Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba</b> Slomškovo trg 15, 2000 Maribor, Slovenija <a href="https://press.um.si">https://press.um.si</a> , <a href="mailto:zalozba@um.si">zalozba@um.si</a>	
<b>Izdajatelj</b> <i>Issued by</i>	<b>Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo</b> Smetanova ulica 17, 2000 Maribor, Slovenija <a href="https://fs.um.si">https://fs.um.si</a> , <a href="mailto:fs@um.si">fs@um.si</a>	
<b>Izdaja</b> <i>Edition</i>	Prva izdaja	<b>Izdano</b> <i>Published at</i> Maribor, julij 2023
<b>Vrsta publikacije</b> <i>Publication type</i>	E-knjiga	
<b>Dostopno na</b> <i>Available at</i>	<a href="https://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/798">https://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/798</a>	

CIP - Kataložni zapis o publikaciji  
Univerzitetna knjižnica Maribor

514.742.4 (075.8) (0.034.2)

SOVIČ, Tina, 1986-  
Vektorska analiza [Elektronski vir] / avtorja Tina Sovič, Simon Špacapan. - 1. izd. - E-knjiga. - Maribor : Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba : Fakulteta za strojništvo, 2023

Način dostopa (URL):  
<https://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/798>  
ISBN 978-961-286-764-5 (PDF)  
doi: 10.18690/um.fs.2.2023  
COBISS.SI-ID 159473411



© Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba  
/ University of Maribor, University Press

**Besedilo** / *Text* © Sovič, Špacapan, 2023

To delo je objavljeno pod licenco Creative Commons Priznanje avtorstva 4.0 Mednarodna. / *This work is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 International License.*

Uporabnikom je dovoljeno tako nekomercialno kot tudi komercialno reproduciranje, distribuiranje, dajanje v najem, javna priobčitev in predelava avtorskega dela, pod pogojem, da navedejo avtorja izvirnega dela.

Vsa gradiva tretjih oseb v tej knjigi so objavljena pod licenco Creative Commons, razen če to ni navedeno drugače. Če želite ponovno uporabiti gradivo tretjih oseb, ki ni zajeto v licenci Creative Commons, boste morali pridobiti dovoljenje neposredno od imetnika avtorskih pravic.

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

**ISBN** 978-961-286-764-5 (pdf)

**DOI** <https://doi.org/10.18690/um.fs.2.2023>

**Cena**  
*Price* Brezplačni izvod

**Odgovorna oseba založnika**  
*For publisher* prof. dr. Zdravko Kačič,  
rektor Univerze v Mariboru

**Citiranje**  
*Attribution* Sovič, T., Špacapan, S. (2023). *Vektorska analiza*. Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba. doi: 10.18690/um.fs.2.2023



# Kazalo

<b>1</b>	<b>Vektorske funkcije ene spremenljivke</b>	<b>3</b>
1.1	Zveznost vektorske funkcije . . . . .	5
1.2	Operacije na polju vektorskih funkcij . . . . .	7
1.3	Limita vektorske funkcije . . . . .	7
1.4	Odvod vektorske funkcije . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Krivulje v <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>11</b>
2.1	Ločna dolžina krivulje . . . . .	13
2.2	Naravni parameter . . . . .	15
2.3	Tangenta, glavna normala in binormala . . . . .	16
2.4	Fleksijska ukrivljenost krivulje . . . . .	20
2.5	Torzijska ukrivljenost krivulje . . . . .	22
2.6	Uporaba v fiziki . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Vektorske funkcije več spremenljivk</b>	<b>25</b>
3.1	Odvod vektorske funkcije . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Ploskve v <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>29</b>
4.1	Primeri ploskev . . . . .	32
4.1.1	Krožni valj . . . . .	32
4.1.2	Eliptični valj . . . . .	32
4.1.3	Stožec . . . . .	33
4.1.4	Sfera . . . . .	34
4.1.5	Elipsoid . . . . .	35
4.1.6	Paraboloid . . . . .	35
4.1.7	Hiperbolični paraboloid . . . . .	36
4.1.8	Enodelni hiperboloid . . . . .	38
4.1.9	Dvodelni hiperboloid . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Krivočrtne koordinate</b>	<b>41</b>
<b>6</b>	<b>Operator <math>\nabla</math></b>	<b>47</b>
6.1	Gradient . . . . .	47

6.2	Divergenca . . . . .	50
6.3	Rotor . . . . .	50
<b>7</b>	<b>Integral s parametrom</b>	<b>53</b>
<b>8</b>	<b>Dvojni integral</b>	<b>55</b>
8.1	Vpeljava dvojnega integrala . . . . .	55
8.2	Povezava z dvakratnim integralom . . . . .	57
8.3	Vpeljava novih spremenljivk v dvojni integral . . . . .	61
8.3.1	Polarne koordinate . . . . .	61
8.4	Uporaba dvojnega integrala . . . . .	64
8.4.1	Ploščina lika . . . . .	64
8.4.2	Volumen pod ploskvijo . . . . .	64
8.4.3	Statični moment . . . . .	64
8.4.4	Masa . . . . .	65
8.4.5	Težišče . . . . .	66
8.4.6	Vztrajnostni moment . . . . .	67
<b>9</b>	<b>Trojni integral</b>	<b>69</b>
9.1	Vpeljava trojnega integrala . . . . .	69
9.2	Povezava s trikratnim integralom . . . . .	70
9.3	Vpeljava novih spremenljivk v trojni integral . . . . .	72
9.3.1	Cilindrične koordinate . . . . .	72
9.3.2	Sferične koordinate . . . . .	75
9.4	Uporaba trojnega integrala . . . . .	78
9.4.1	Volumen . . . . .	78
9.4.2	Statični moment . . . . .	78
9.4.3	Masa . . . . .	79
9.4.4	Težišče . . . . .	80
9.4.5	Vztrajnostni moment . . . . .	82
<b>10</b>	<b>Krivuljni integral</b>	<b>85</b>
10.1	Krivuljni integral skalarne funkcije . . . . .	85
10.1.1	Definicija krivuljnega integrala . . . . .	85
10.1.2	Uporaba krivuljnega integrala skalarne funkcije . . . . .	87
10.2	Krivuljni integral vektorske funkcije . . . . .	91
10.2.1	Definicija krivuljnega integrala vektorske funkcije . . . . .	92
10.2.2	Uporaba krivuljnega integrala vektorske funkcije . . . . .	94
10.2.3	Krivuljni integral potencialnega vektorskega polja . . . . .	95
<b>11</b>	<b>Ploskovni integral</b>	<b>97</b>
11.1	Ploskovni integral skalarne funkcije . . . . .	97
11.1.1	Definicija ploskovnega integrala skalarne funkcije . . . . .	97

11.1.2	Uporaba ploskovnega integrala skalarne funkcije . . . . .	98
11.2	Ploskovni integral vektorske funkcije . . . . .	104
11.2.1	Definicija ploskovnega integrala vektorske funkcije . . . . .	104
11.2.2	Uporaba ploskovnega integrala vektorske funkcije . . . . .	106
<b>12</b>	<b>Povezave med integrali različnih tipov</b>	<b>109</b>
12.1	Gaussov izrek . . . . .	109
12.2	Stokesov izrek . . . . .	110





# Predgovor

Učbenik je namenjen študentom drugega letnika univerzitetnega študijskega programa Strojništvo Univerze v Mariboru. Vsebina učbenika obsega vektorske funkcije ene in več spremenljivk, krivulje in ploskve v prostoru ter mnogoterni, krivuljni in ploskovni integral. Poglavja sledijo učnemu načrtu predmeta Vektorska analiza. Učbenik je primeren tudi za primerljive študijske programe tehniških smeri. Študent naj uporablja učbenik pri učenju in utrjevanju snovi. Izpeljave posameznih formul in dokazi nekaterih izrekov in trditve se podrobneje izvedejo v okviru predavanj pri predmetu Vektorska analiza.

Učbenik je razdeljen na 12 poglavij. V vsakem poglavju na začetku definiramo nove pojme, nato pa navedemo formule, osnovne izreke in trditve, ki so izpeljani in obrazloženi študentu na razumljiv način. Pri tem je razlaga snovi podkrepljena s številnimi grafičnimi prikazi. Razlagi sledijo zgledi rešenih nalog. Večina poglavij je zaključenih s primeri nerešenih nalog, s pomočjo katerih študent lahko preveri in uporabi pridobljeno teoretično znanje.

Vsebina, ki jo zajema ta učbenik je obravnavana tudi v literaturi [1], [2] in [3], kjer bralec lahko najde dodatne naloge, primere in razlago tematike.



# Poglavje 1

## Vektorske funkcije ene spremenljivke

Doslej smo se pri matematiki večinoma ukvarjali s funkcijami, ki slikajo iz množice realnih števil v množico realnih števil. Takšno funkcijo zapišemo kot

$$f : D \rightarrow \mathbb{R},$$

kjer je  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Pri vektorski analizi se ukvarjamo tudi s funkcijami, katerih domena in kodomena sta lahko večdimenzionalna vektorska prostora. Predstavili bomo funkcije, ki slikajo iz podmnožice ravnine  $\mathbb{R}^2$  v ravnino  $\mathbb{R}^2$ , ali iz podmnožice prostora  $\mathbb{R}^3$  v prostor  $\mathbb{R}^3$ . Takšne funkcije imenujemo vektorske funkcije. Posebno mesto med njimi zasedajo vektorske funkcije ene spremenljivke, s katerimi opišemo krivulje v prostoru  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ .

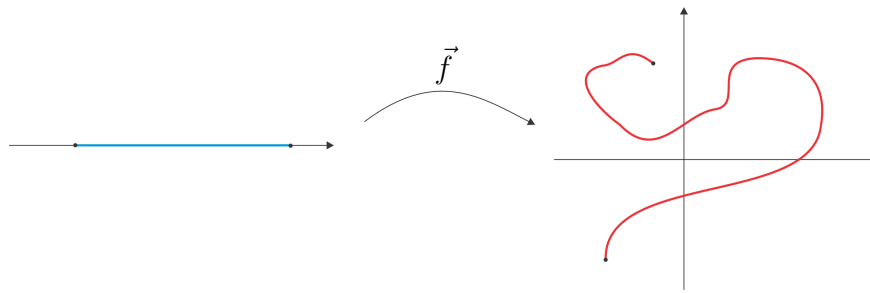
**Definicija 1.1.** *Vektorska funkcija ene spremenljivke je funkcija  $\vec{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , kjer je  $D \subseteq \mathbb{R}$  in  $n \geq 2$ .*

**Opomba 1.2.** *Medtem ko (skalarno) funkcijo včasih imenujemo skalarno polje, vektorsko funkcijo imenujemo tudi vektorsko polje.*

Tukaj se zastavi vprašanje, kako si lahko predstavljamo vektorsko funkcijo ene spremenljivke, kaj je njena slika in v kakšnem kontekstu se takšne funkcije pojavljajo v drugih znanstvenih disciplinah. Če želimo odgovoriti na to vprašanje, se spoprimemo s pojmom *zveznosti* vektorskih funkcij. Tega bomo podrobneje predstavili v naslednjem poglavju, vendar lahko že tukaj povemo naslednje.

**Opomba 1.3.** *Če je vektorska funkcija  $\vec{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  zvezna, preslika vsak interval  $I \subseteq D$  v neko krivuljo v  $\mathbb{R}^3$ .*

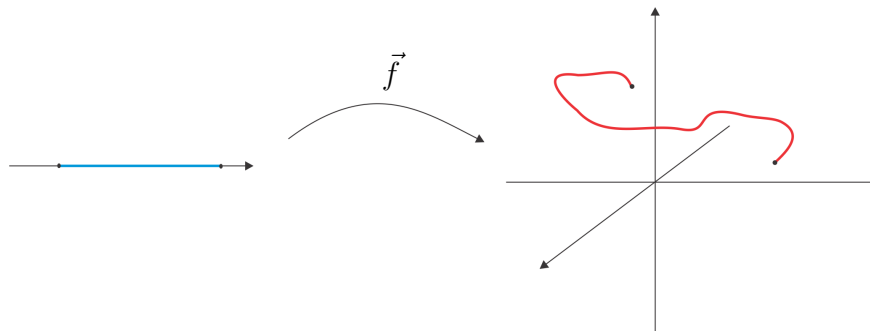
Tako lahko navedemo, da dovolj lepe (beri zvezne) vektorske funkcije predstavljajo krivulje. To je hkrati tudi osnovno razumevanje teh funkcij in osnovna predstava, kako so te funkcije oz. njihove slike videti.



Slika 1.1: Slika zvezne funkcije  $\vec{f}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

**Zgled 1.** Slika zvezne funkcije  $\vec{f}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , kjer je  $I \subseteq \mathbb{R}$  interval, je krivulja v ravnini  $\mathbb{R}^2$  (glej sliko 1.1).

**Zgled 2.** Slika zvezne funkcije  $\vec{f}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , kjer je  $I \subseteq \mathbb{R}$  interval, je krivulja v prostoru  $\mathbb{R}^3$  (glej sliko 1.2).



Slika 1.2: Slika zvezne funkcije  $\vec{f}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

**Vaja 1.** Zapiši konkreten primer vektorske funkcije  $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^2$  in  $\vec{g}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

**Definicija 1.4.** Naravno definicijsko območje funkcije  $\vec{f}$  je množica vseh  $x \in \mathbb{R}$  za katere je predpis  $\vec{f}$  definiran. Naravno definicijsko območje funkcije  $\vec{f}$  označimo z  $D_{\vec{f}}$ . Zaloga vrednosti funkcije  $\vec{f}$  je množica

$$Z_{\vec{f}} = \{\vec{f}(x) \mid x \in D_{\vec{f}}\}.$$

**Zgled 3.** Določimo definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije  $\vec{f}$  s predpisom  $\vec{f}(t) = (t^2 + 1, \ln t)$ .

Ker je predpis  $t^2 + 1$  definiran za vsa realna števila in predpis  $\ln t$  za vsa pozitivna realna števila, je definicijsko območje funkcije  $\vec{f}$  enako množici pozitivnih realnih števil, torej  $D_{\vec{f}} = (0, \infty)$ . Zaloga vrednosti pa je tako enaka množici  $Z_{\vec{f}} = \{(t^2 + 1, \ln t) \mid t \in (0, \infty)\}$ .



**Vaja 2.** Določi  $D_{\vec{f}}$  in  $Z_{\vec{g}}$  za funkciji  $\vec{f}$  in  $\vec{g}$ , kjer je

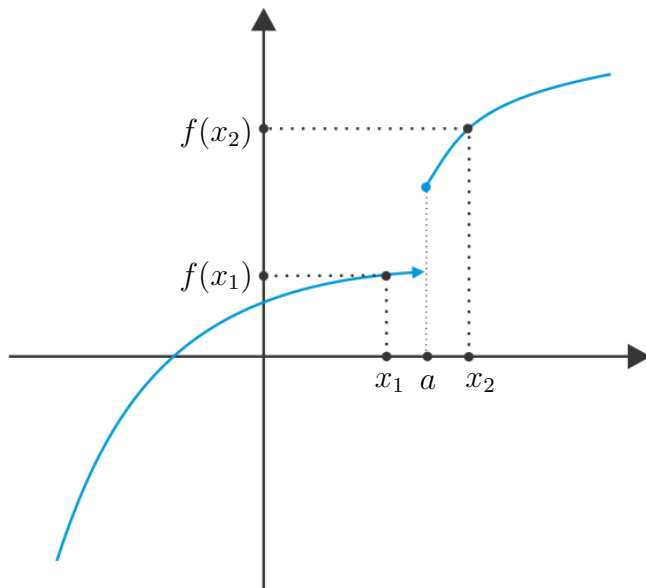
a)  $\vec{f}(t) = (1 - t^2, \sqrt{1 - t^2}, \sqrt{t})$

b)  $\vec{g}(t) = (a \cos t, a \sin t)$

## 1.1 Zveznost vektorske funkcije

Zveznost funkcij  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , kjer je  $D \subseteq \mathbb{R}$ , smo pogosto opisovali tako, da smo rekli “funkcija je zvezna, če se njen graf nikjer ne pretrga”. Tako si lahko predstavljamo zveznost, vendar ta intuitivni opis zveznosti v splošnem ne zadošča. Posebej pa velja, da tak opis ne more biti primeren za vektorske funkcije, katerih grafov ne znamo narisati. Takšni so na primer grafi funkcij, ki slikajo v  $\mathbb{R}^4$ . Kako bomo torej ugotovili, ali se graf te funkcije ‘pretrga’ ali ‘ne pretrga’ glede na to, da grafa ne znamo niti narisati?

Oglejmo si najprej definicijo zveznosti realne funkcije  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , nato pa ugotovitve posplošimo na poljubne vektorske funkcije. Razmislimo, zakaj funkcija na sliki 1.3 ni zvezna in kako bi to natančno matematično opisali.



Slika 1.3: Nezvezna funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

S slike je razvidno, da sta točki  $x_1$  in  $x_2$  blizu skupaj, njuni slike (oz. njuni funkcijski vrednosti)  $f(x_1)$  in  $f(x_2)$ , pa sta daleč narazen. Velja celo več, točki  $x_1$  in  $x_2$  lahko na osi  $x$  izberemo poljubno blizu skupaj (lahko bi rekli neskončno blizu skupaj), njuni funkcijski vrednosti pa bosta kljub temu daleč narazen. Velja namreč, da je za vsak  $x_1 < a$  in  $x_2 > a$  razlika med  $f(x_1)$  in  $f(x_2)$  vsaj tolikšna, kot je velik funkcijski skok v točki  $a$ . Zapisan je razlog, zakaj funkcija  $f$  ni zvezna.

**Opomba 1.5.** Funkcija  $f$  ni zvezna, če obstajata točki  $x_1$  in  $x_2$ , ki sta lahko poljubno blizu skupaj, njuni funkcijski vrednosti  $f(x_1)$  in  $f(x_2)$  pa sta ‘daleč’ narazen (več kot neka določena konstanta).

Pri zveznih funkcijah se to ne zgodi. Pravzaprav je zveznost nasprotje tega, kar je zapisano v zgornji opombi. Zveznost bi torej lahko opisali takole.<sup>1</sup>

**Opomba 1.6.** Funkcija  $f$  je zvezna, če za vsaki točki  $x_1$  in  $x_2$ , ki sta dovolj blizu skupaj, velja, da sta njuni funkcijski vrednosti  $f(x_1)$  in  $f(x_2)$  poljubno blizu skupaj.

Kot smo videli v zgornjih opombah, smo pri opisu zveznosti in nezveznosti uporabili besedi ‘blizu’ in ‘daleč’. Razpravljali smo o razdalji med  $x_1$  in  $x_2$  ter o razdalji med  $f(x_1)$  in  $f(x_2)$ . Če želimo razložiti kaj je zvezna vektorska funkcija, je treba najprej povedati, kaj je razdalja med dvema točkama v  $\mathbb{R}^n$ .

V vektorskem prostoru  $\mathbb{R}^n$  definiramo razdaljo med točkama  $x = (x_1, \dots, x_n)$  in  $y = (y_1, \dots, y_n)$  tako

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

**Definicija 1.7.** Funkcija  $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  je zvezna v točki  $t_0 \in \mathbb{R}$ , če velja:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : d(t, t_0) < \delta \implies d(\vec{f}(t), \vec{f}(t_0)) < \varepsilon.$$

**Opomba 1.8.** Znak  $\forall$  se bere ‘za vsak’ in znak  $\exists$  se bere ‘obstaja’. Neenačba  $d(t, t_0) < \delta$  se bere ‘razdalja med  $t$  in  $t_0$  je manj od delta’ in neenačba  $d(\vec{f}(t), \vec{f}(t_0)) < \varepsilon$  se bere ‘razdalja med  $\vec{f}(t)$  in  $\vec{f}(t_0)$  je manj od epsilon’.

**Opomba 1.9.** Zgoraj zapisano pomeni, če je  $t$  blizu  $t_0$ , je  $\vec{f}(t)$  blizu  $\vec{f}(t_0)$ . Pri zvezni funkciji majhna sprememba neodvisne spremenljivke povzroči majhno spremembo funkcijske vrednosti.

**Definicija 1.10.** Funkcija  $\vec{f}$  je zvezna na intervalu  $I$ , če je zvezna v vsaki točki intervala  $I$ .

**Opomba 1.11.** Funkcijo  $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}$  lahko zapišemo kot

$$\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n),$$

kjer je  $f_i: D_i \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_i \subseteq \mathbb{R}$  za vsak  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Izrek 1.12.** Funkcija  $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  je zvezna na intervalu  $I$  natanko tedaj, ko so na  $I$  zvezne funkcije  $f_1, f_2, \dots, f_n$ .

<sup>1</sup>Opis zveznosti v opombi 1.6 je dejansko definicija pojma *enakomerne zveznosti*. Za naše potrebe bo takšno razumevanje zveznosti zadostovalo.

## 1.2 Operacije na polju vektorskih funkcij

Podobne operacije, kot jih poznamo na množici vektorjev, lahko vpeljemo tudi na množici vektorskih funkcij:

1. Seštevanje:  $(\vec{f} + \vec{g})(t) = \vec{f}(t) + \vec{g}(t)$
2. Skalarni produkt:  $(\vec{f} \cdot \vec{g})(t) = \vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)$
3. Produkt vektorske funkcije  $\vec{f}$  s skalarno funkcijo  $\varphi$ :  $(\varphi \cdot \vec{f})(t) = \varphi(t) \cdot \vec{f}(t)$
4. Vektorski produkt (če sta  $\vec{f}, \vec{g} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}$ ):  $(\vec{f} \times \vec{g})(t) = \vec{f}(t) \times \vec{g}(t)$

**Izrek 1.13.** Če so funkcije  $\varphi, \vec{f}$  in  $\vec{g}$  zvezne na intervalu  $I$ , so na  $I$  zvezne tudi funkcije  $\vec{f} + \vec{g}$ ,  $\vec{f} \cdot \vec{g}$ ,  $\varphi \cdot \vec{g}$  in  $\vec{f} \times \vec{g}$ .

**Vaja 3.** Naj bo  $\vec{f}(t) = (t^2 + 1, t, 1)$ ,  $\vec{g}(t) = (\sin t, \cos t, 2t)$  in  $\varphi(t) = e^t$ . Zapiši predpise funkcij  $\vec{f} + \vec{g}$ ,  $\vec{f} \cdot \vec{g}$ ,  $\varphi \cdot \vec{f}$  in  $\vec{f} \times \vec{g}$ .

## 1.3 Limita vektorske funkcije

**Definicija 1.14.** Naj bo  $t_0$  realno število. Vektor  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  je limita vektorske funkcije  $\vec{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  v točki  $t_0$ , če velja

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\vec{f}(t) - \vec{a}| = 0.$$

Zapisano pomeni, da funkcija  $\vec{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  konvergira proti vektorju (točki)  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ , ko gre  $t$  proti  $t_0$ , če za vsa števila  $\epsilon$ , ki so dovolj blizu 0 (vendar ne enaka 0) velja, da je  $\vec{f}(t)$  blizu  $\vec{a}$ .

**Izrek 1.15.** Za funkcijo  $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  velja

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \left( \lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t), \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t), \dots, \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t) \right).$$

**Zgled 4.**

$$\lim_{t \rightarrow 1} \left( \frac{1}{t}, 2, \frac{1+t^2}{2-t^2} \right) = \left( \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{t}, \lim_{t \rightarrow 1} 2, \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1+t^2}{2-t^2} \right) = (1, 2, 2)$$

**Vaja 4.** Izračunaj limito vektorske funkcije

- a)  $\lim_{t \rightarrow 5} (2t + 1, t - 1, 1 + t^2)$
- b)  $\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\sin t}{t}, \frac{1 - \cos t}{t^2}, \frac{1 - e^t}{t}, 1 + t^2 \right)$

$$\text{c) } \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{e^t - 1}{t}, \frac{\sqrt{1+t} - 1}{t}, \frac{3}{1+t} \right)$$

**Izrek 1.16.** Če je funkcija  $\vec{f}$  v točki  $t_0$  zvezna, velja

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}(t_0).$$

## 1.4 Odvod vektorske funkcije

**Definicija 1.17.** Funkcija  $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}$  je v točki  $t \in D$  odvedljiva, če obstaja limita diferenčnega količnika

$$\dot{\vec{f}}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h}.$$

To limito imenujemo odvod funkcije  $\vec{f}$  v točki  $t$ .

**Definicija 1.18.** Če je funkcija  $\vec{f}$  odvedljiva v vsaki točki intervala  $I$  in je njen odvod  $\dot{\vec{f}}$  na  $I$  zvezna funkcija, rečemo, da je  $\vec{f}$  zvezno odvedljiva na  $I$ .

**Opomba 1.19.** Odvod funkcije bomo označevali s piko ali s črtico, odvisno od tega katera oznaka je v dani situaciji bolj prikladna.

**Izrek 1.20.** Za funkcijo  $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  velja

$$\dot{\vec{f}}(t) = (f'_1(t), f'_2(t), \dots, f'_n(t)).$$

**Zgled 5.** Odvod vektorske funkcije  $\vec{f}(t) = (3t + 2, \sin t, 3 \cos t)$  je enak vektorski funkciji  $\dot{\vec{f}}(t) = (3, \cos t, -3 \sin t)$ .

**Vaja 5.** Izračunaj odvod vektorske funkcije  $\vec{f}$

a)  $\vec{f}(t) = (t^{\frac{1}{3}}, 3t^2, \sin t)$

b)  $\vec{f}(t) = (\ln(t^2 + 1), \sqrt{t^2 + 1}, \frac{2t}{t^2 + 1})$

Pravila za odvajanje vektorskih funkcij sledijo pravilom za odvajanje skalarnih funkcij.

**Izrek 1.21.** Naj bosta  $\vec{f}, \vec{g}$  vektorski funkciji in  $\varphi$  skalarna funkcija. Tedaj velja

1.  $(\vec{f}(t) + \vec{g}(t))' = \dot{\vec{f}}(t) + \dot{\vec{g}}(t)$
2.  $(\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t))' = \dot{\vec{f}}(t) \cdot \vec{g}(t) + \vec{f}(t) \cdot \dot{\vec{g}}(t)$
3.  $(\varphi(t) \cdot \vec{f}(t))' = \varphi'(t) \cdot \vec{f}(t) + \varphi(t) \cdot \dot{\vec{f}}(t)$



$$4. (\vec{f}(t) \times \vec{g}(t))' = (\dot{\vec{f}}(t) \times \vec{g}(t)) + (\vec{f}(t) \times \dot{\vec{g}}(t)), \text{ kjer je } n = 3$$

$$5. (\vec{f}(\varphi(t)))' = \dot{\vec{f}}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

Lastnost odvoda vektorske funkcije, ki je zapisana v izreku 1.22, bomo potrebovali v naslednjem poglavju, kjer obravnavamo krivulje v  $\mathbb{R}^3$ .

**Izrek 1.22.** Naj bo  $\vec{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , kjer je  $n \geq 2$  in  $I$  interval. Če ima vektor  $\vec{f}(t)$  konstantno dolžino, torej  $|\vec{f}(t)| = c$  za vsak  $t \in I$ , sta vektorja  $\vec{f}(t)$  in  $\dot{\vec{f}}(t)$  pravokotna za vsak  $t \in I$ .

#### 1.4. ODVOD VEKTORSKE FUNKCIJE

---

## Poglavje 2

# Krivulje v $\mathbb{R}^3$

Pojem krivulje nam je intuitivno blizu, vendar zgolj intuitivna predstava pri njihovi obravnavi ni dovolj. V tem poglavju bomo krivulje opisali z vektorskimi funkcijami ene spremenljivke, ki smo jih spoznali v predhodnem poglavju.

**Definicija 2.1.** Krivulja v prostoru  $\mathbb{R}^3$  je slika zvezne vektorske funkcije

$$\vec{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

kjer je  $I \subseteq \mathbb{R}$  interval.

**Opomba 2.2.** Pogosto kar funkcijo  $\vec{r}$  iz zgornje definicije imenujemo krivulja. V tem smislu pod pojmom krivulja razumemo tako sliko funkcije  $\vec{r}$ , kot tudi funkcijo  $\vec{r}$  samo.

Spomnimo se, kako zapišemo enačbo premice, ki jo določata točki  $A(a_1, a_2, a_3)$  in  $B(b_1, b_2, b_3)$  v prostoru  $\mathbb{R}^3$ . Krajevni vektor poljubne točke, ki leži na tej premici, lahko zapišemo v obliki

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_A + t\vec{AB} = (a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2), a_3 + t(b_3 - a_3)), \quad (2.1)$$

kjer je  $t \in \mathbb{R}$  in  $\vec{r}_A$  označuje krajevni vektor točke  $A$ . Komponente funkcije  $\vec{r}$  so  $x(t) = a_1 + t(b_1 - a_1)$ ,  $y(t) = a_2 + t(b_2 - a_2)$  in  $z(t) = a_3 + t(b_3 - a_3)$ . V zgornjem primeru je  $\vec{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  vektorska funkcija ene spremenljivke, množica točk  $\{(x(t), y(t), z(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$  pa je premica. Zapis (2.1) imenujemo *parametrični zapis* premice. Na podoben način definiramo parametrični zapis poljubne krivulje.

**Definicija 2.3.** Kadar so podane zvezne funkcije  $x(t), y(t)$  in  $z(t)$  in je krivulja  $\vec{r}$  zapisana v obliki

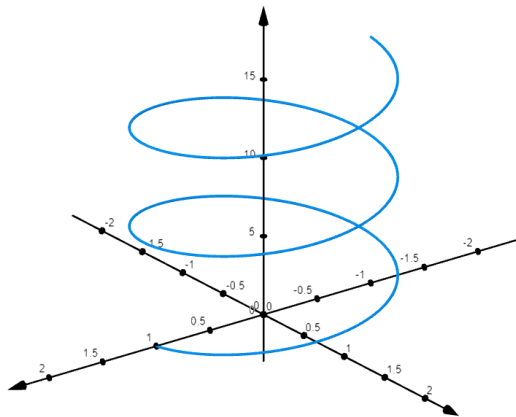
$$\boxed{\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I}$$

pravimo, da je krivulja zapisana v parametrični obliki. Funkcijo  $\vec{r}$  v tem primeru imenujemo tudi parametrizacija krivulje, spremenljivki  $t$  pa parameter.

**Opomba 2.4.** Vektorsko funkcijo, ki opisuje krivuljo, ponavadi označimo s črko  $\vec{r}$  (namesto  $\vec{f}$ ), tako kot je to zapisano zgoraj.

**Zgled 6.** Vijačnica na sliki 2.1 je krivulja s parametrizacijo  $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ,  $t \in [0, 5\pi]$ .

**Zgled 7.** Preprost primer krivulje v prostoru je tudi daljica med točkama  $A$  in  $B$  v  $\mathbb{R}^3$ . Njena parametrizacija je  $\vec{r}(t) = \vec{r}_A + t\vec{AB}$ , kjer  $t \in [0, 1]$ .



Slika 2.1: Vijačnica  $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ .

**Vaja 6.** S pomočjo poljubnega programskega orodja skiciraj krivuljo s parametrizacijo

a)  $\vec{r}(t) = (t^3 - t, t^2 - 1, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$

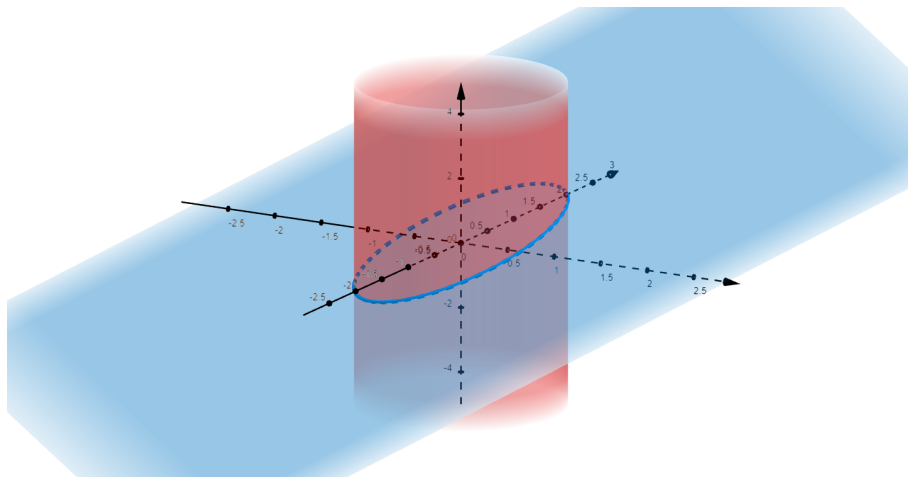
b)  $\vec{r}(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$ ,  $t \in [0, 6\pi]$

Čeprav krivulje ponavadi obravnavamo v parametrični obliki, so lahko podane tudi kot presek dveh ploskev v  $\mathbb{R}^3$ :

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0\}$$

Takšen zapis imenujemo *implicitni zapis* krivulje.

**Opomba 2.5.** Enačbi  $F(x, y, z) = 0$  in  $G(x, y, z) = 0$  predstavljata ploskvi in prostoru  $\mathbb{R}^3$ , kar bo podrobneje predstavljeno v poglavju 4.



Slika 2.2: Presek valja  $x^2 + y^2 = 1$  in ravnine  $x + y - z = 0$ .

**Zgled 8.** Krivulja, ki jo dobimo kot presek valja  $x^2 + y^2 = 1$  in ravnine  $x + y - z = 0$  je elipsa s parametrizacijo  $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, \cos t + \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Glej sliko 2.2.

**Vaja 7.** Krivuljo, ki je presek ploskev

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6 \text{ in } x + y + z = 0,$$

skiciraj in zapiši v parametrični obliki.

**Definicija 2.6.** Gladka krivulja je slika zvezno odvedljive vektorske funkcije

$$\vec{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

kjer je  $I \subseteq \mathbb{R}$  interval.

Kot velja za krivulje v splošnem, besedno zvezo ‘gladka krivulja’ uporabljamo tako za sliko kot za funkcijo  $\vec{r}$  samo.

## 2.1 Ločna dolžina krivulje

V tem poglavju bomo najprej po korakih vpeljali pojem dolžine loka krivulje med njenima poljubno izbranimi točkama, nato pa bomo pokazali, kako takšno dolžino izračunamo.

1. Naj bosta  $A$  in  $B$  točki na krivulji  $\vec{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  in naj bo

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [\alpha, \beta]$$

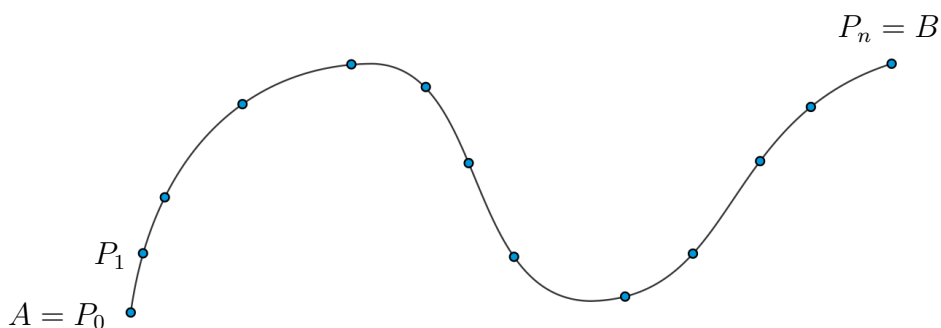
parametrizacija loka te krivulje od točke  $A$  do točke  $B$ , kjer je  $\vec{r}(\alpha) = A$  ter  $\vec{r}(\beta) = B$ .

## 2.1. LOČNA DOLŽINA KRIVULJE

---

2. Na krivulji izberemo točke  $A = P_0, P_1, \dots, P_n = B$  na način, kot kaže slika 2.3 in definiramo

$$\Delta s_k = |\overline{P_{k-1}P_k}|.$$

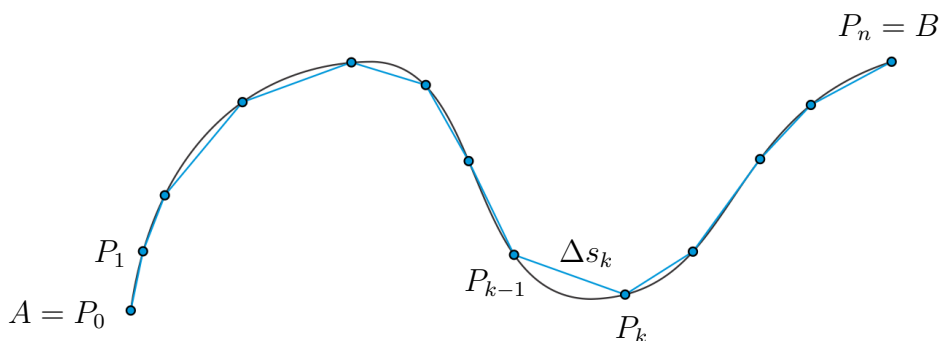


Slika 2.3: Na krivulji izberemo točke  $P_0, P_1, \dots, P_n$ .

3. Dolžino krivulje aproksimiramo z dolžino lomljene črte, ki zaporedoma povezuje izbrane točke in je enaka

$$\sum_{k=1}^n \Delta s_k,$$

glej sliko 2.4. Več kot je izbranih točk in manjša kot je razdalja med njimi,



Slika 2.4: Zaporedne točke na krivulji povežemo z daljicami.

boljša bo aproksimacija.

4. Dolžino loka krivulje od točke  $A$  do  $B$  definiramo kot

$$\ell = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta s_k,$$

kjer je  $\Delta = \max_k \Delta s_k$ .

Izpeljava, ki jo na tem mestu izpuščamo, pokaže, da dolžino loka gladke krivulje

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [\alpha, \beta]$$

lahko izračunamo po formuli

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\vec{r}}(t)| dt.$$

**Zgled 9.** Dolžina krivulje  $\vec{r}(t) = (1 - 3t^2, 5, t^2)$ ,  $t \in [0, 1]$  je enaka

$$\int_0^1 \sqrt{(-6t)^2 + (0)^2 + (2t)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{40t^2} dt = 2\sqrt{10} \int_0^1 t dt = \sqrt{10}.$$

**Vaja 8.** Izračunaj dolžino krivulje

a)  $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 3t)$ ,  $t \in [-\pi, \pi]$

b)  $\vec{r}(t) = (\cos 2t, \sin^2 t, \frac{\sqrt{5}}{2} \sin 2t)$  od točke  $A(1, 0, 0)$  do točke  $B(-1, 1, 0)$

## 2.2 Naravni parameter

Zapis krivulje v parametrični obliki ni enolično določen. Med vsemi različnimi možnimi parametrizacijami je najlepša in za računanje najbolj prikladna parametrizacija  $\vec{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , pri kateri je dolžina intervala  $I$  enako dolga kot dolžina krivulje. Takšno parametrizacijo imenujemo naravna parametrizacija, ki je natančno opredeljena v spodnji definiciji.

**Definicija 2.7.** Naj bo  $\vec{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  in naj bosta  $a, b \in I$ . Če je dolžina loka krivulje od točke  $\vec{r}(a)$  do točke  $\vec{r}(b)$  enaka  $b - a$ , torej

$$\int_a^b |\dot{\vec{r}}(s)| ds = b - a,$$

parametrizacijo  $\vec{r}$  imenujemo naravna parametrizacija. Parameter v tem primeru imenujemo naravni parameter in ga ponavadi označimo s črko  $s$ , torej  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ .

**Izrek 2.8.** Parametrizacija  $\vec{r}(s)$ ,  $s \in I$  je naravna parametrizacija natanko tedaj, ko je  $|\dot{\vec{r}}(s)| = 1$  za vsak  $s \in I$ .

**Vaja 9.** Preveri, ali je podana parametrizacija naravna parametrizacija:

$$\vec{r}(t) = (e^t, \ln t, t^2), t \in [1, 7].$$

V nadaljevanju je po korakih opisan postopek, s katerim poljubni parametrizaciji krivulje  $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  priredimo naravno parametrizacijo:

1. Naj bo  $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

2. Izračunamo

$$s = \int_a^t |\dot{\vec{r}}(x)| dx$$

in dobimo  $s = s(t)$ .

3. Poiščemo inverz funkcije  $s$  in dobimo

$$t = t(s).$$

4. Naravna parametrizacija je enaka  $\vec{r} = \vec{r}(t(s))$ ,  $s \in [0, s(b)]$ .

**Zgled 10.** Sledimo zgoraj opisanemu postopku in krivuljo

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t), t \in [2\pi, 4\pi]$$

zapišimo z naravnim parametrom.

Najprej izračunamo

$$s = \int_a^t |\dot{\vec{r}}(x)| dx = \int_{2\pi}^t \sqrt{2} dx = \sqrt{2}(t - 2\pi),$$

nato pa izračunamo inverz funkcije  $s(t) = \sqrt{2}(t - 2\pi)$  in dobimo  $t(s) = \frac{\sqrt{2}}{2}s + 2\pi$ . Naravna parametrizacija je enaka

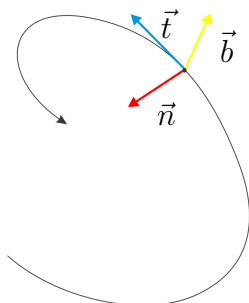
$$\vec{r}(s) = \left( \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 2\pi\right), \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}s + 2\pi\right), \frac{\sqrt{2}}{2}s + 2\pi \right), s \in [0, 2\sqrt{2}\pi].$$

**Vaja 10.** Krivuljo  $\vec{r}(t) = (4(\sin t - t \cos t), 4(\cos t + t \sin t), \frac{3}{2}t^2)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  zapiši z naravnim parametrom.

## 2.3 Tangenta, glavna normala in binormala

Pomembno vlogo pri opisu krivulje v prostoru ima trojica med seboj pravokotnih vektorjev  $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ , ki jih lahko priredimo gladki krivulji  $\vec{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  v poljubni točki  $\vec{r}(t)$ , glej sliko 2.5. Če te vektorje normiramo, dobimo tri med seboj pravokotne, enotske vektorje  $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ , ki jih imenujemo *spremljajoči trieder* ali *trirob*. Vsak





Slika 2.5: Vektorji  $\vec{t}$ ,  $\vec{n}$  in  $\vec{b}$  v poljubno izbrani točki krivulje.

vektor spremljajočega triroba določa premico v svoji smeri in ravnino, na katero je pravokoten. Prvi je *tangentni vektor*, ki ima smer prvega odvoda:

$$\vec{t}(t) = \dot{\vec{r}}(t),$$

oziroma

$$\vec{T}(t) = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|}.$$

Premica, ki poteka skozi točko  $\vec{r}(t)$  v smeri vektorja  $\vec{t}(t)$ , se imenuje *tangenta* na krivuljo  $\vec{r}$  v točki  $\vec{r}(t)$ . Ravnina, ki poteka skozi točko  $\vec{r}(t)$  in je pravokotna na tangento v točki  $\vec{r}(t)$ , se imenuje *normalna ravnina* na krivuljo  $\vec{r}$  v točki  $\vec{r}(t)$ . Vsaka premica, ki poteka skozi točko  $\vec{r}(t)$  in leži v normalni ravnini, se imenuje *normalna premica* na krivuljo  $\vec{r}$  v točki  $\vec{r}(t)$ .

Ker je  $|\vec{T}(t)| = 1$ , t.j. vektor  $\vec{T}(t)$  ima konstantno dolžino, po izreku 1.22 iz prejšnjega poglavja velja

$$\vec{T}(t) \perp \dot{\vec{T}}(t)$$

za vsak  $t \in I$ . Tako dobimo drugi vektor spremljajočega trikotnika:

$$\vec{n}(t) = \dot{\vec{T}}(t)$$

oziroma

$$\vec{N}(t) = \frac{\dot{\vec{T}}(t)}{|\dot{\vec{T}}(t)|},$$

ki ga imenujemo *smerni vektor glavne normale*. Premica, ki poteka skozi točko  $\vec{r}(t)$  v smeri vektorja  $\vec{n}(t) = \dot{\vec{T}}(t)$ , se imenuje *glavna normala* na krivuljo  $\vec{r}$  v točki  $\vec{r}(t)$ . Ravnina, ki je pravokotna na glavno normalo, se imenuje *rektifikacijska ravnina*.

### 2.3. TANGENTA, GLAVNA NORMALA IN BINORMALA

---

Tudi tretji vektor:

$$\vec{b}(t) = \vec{t}(t) \times \vec{n}(t)$$

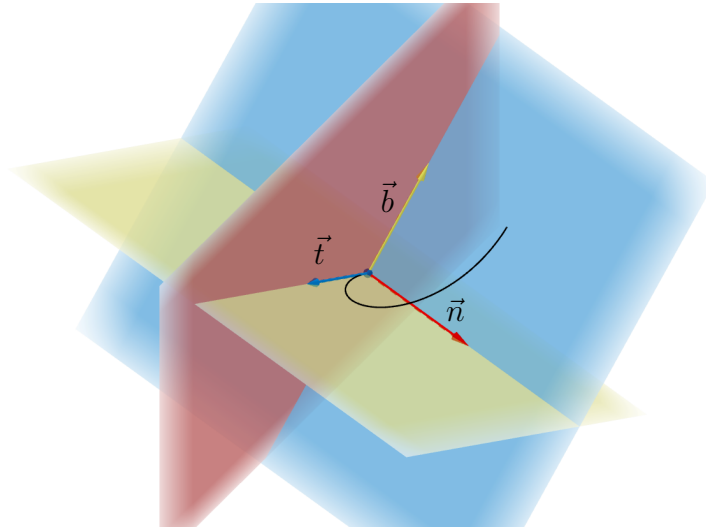
oziroma

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$$

je pravokoten na tangento in zato leži v normalni ravnini. Imenujemo ga *binormalni vektor*. Premica, ki poteka skozi točko  $\vec{r}(t)$  v smeri  $\vec{b}(t) = \vec{t}(t) \times \vec{n}(t)$ , se imenuje *binormala* na krivuljo  $\vec{r}$  v točki  $\vec{r}(t)$ . Ravnina, ki je pravokotna na binormalo, se imenuje *pritisnjena ravnina*.

**Opomba 2.9.** Z besedami tangenta, glavna normala in binormala večkrat poleg premic mislimo tudi na njihove smerne vektorje, tj. vektorje spremljajočega triroba.

**Opomba 2.10.** Tangenta in glavna normala ležita v pritisnjeni ravnini, glavna normala in binormala ležita v normalni ravnini, rektifikacijska ravnina pa vsebuje tangento in binormalo (glej sliko 2.6).



Slika 2.6: Pritisnjena (rumena), normalna (modra) in rektifikacijska (rdeča) ravnina.

Pri računanju tangente, glavne normale in binormale uporabljamo formule

$$\vec{t} = \dot{\vec{r}}, \quad \vec{b} = \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}, \quad \vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$$

in

$$\vec{T}(t) = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|}, \quad \vec{B}(t) = \frac{\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)|}, \quad \vec{N}(t) = \vec{B}(t) \times \vec{T}(t)$$

**Zgled 11.** Zapišimo koordinate enotskih vektorjev spremljajočega triroba krivulje  $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 2t)$  v točki s parametrom  $t = 0$ .

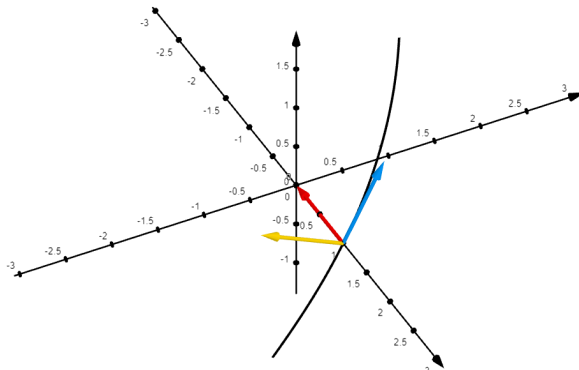
Najprej izračunamo prvi in drugi odvod funkcije  $\vec{r}$  v  $t = 0$  ter njun vektorski produkt

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) &= (-\sin t, \cos t, 2), \quad \dot{\vec{r}}(0) = (0, 1, 2), \\ \ddot{\vec{r}}(t) &= (-\cos t, -\sin t, 0), \quad \ddot{\vec{r}}(0) = (-1, 0, 0), \\ \dot{\vec{r}}(0) \times \ddot{\vec{r}}(0) &= (0, -2, 1).\end{aligned}$$

Uporabimo zapisane formule ter dobimo

$$\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, 2), \quad \vec{B} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, -2, 1) \quad \text{in} \quad \vec{N} = (-1, 0, 0),$$

glej sliko 2.7.



Slika 2.7: Vektorji  $\vec{T}$  (modra),  $\vec{B}$  (rumena) in  $\vec{N}$  (rdeča) krivulje  $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 2t)$  v točki s parametrom  $t = 0$ .

**Vaja 11.** Zapiši vektorje spremljajočega triedra krivulje

$$\vec{r}(t) = (t^2, t + 1, 3t^3 - 2)$$

v točki  $t = 1$ .

**Vaja 12.** Zapiši enačbo tangente, glavne normale in binormale ter enačbe normalne, rektifikacijske in pritisnjene ravnine na krivuljo, ki je podana kot presek ploskev

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6 \quad \text{in} \quad x^2 - y^2 + z^2 = 4,$$

v točki  $P(0, 1, \sqrt{5})$ .

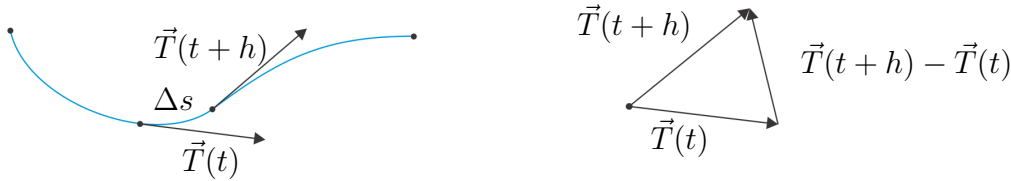
## 2.4 Fleksijska ukrivljenost krivulje

Fleksijska ukrivljenost je splošno sprejeta mera za ukrivljenost krivulje v konkretni točki. To je mera, ki sovпада z intuicijo, ki nam pove, da je krožnica z večjim polmerom v vseh svojih točkah manj ukrivljena kot krožnica z manjšim polmerom.

Ustrezno merilo za ukrivljenost krivulje  $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  v točki  $\vec{r}(t)$  je

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s},$$

kjer je  $\Delta s$  dolžina loka krivulje med točkama  $\vec{r}(t)$  in  $\vec{r}(t+h)$ ,  $\Delta\varphi$  pa sprememba kota tangente na krivuljo med točkama  $\vec{r}(t)$  in  $\vec{r}(t+h)$ , glej sliko 2.8.



Slika 2.8: Tangenti na krivuljo v točkah  $\vec{r}(t)$  in  $\vec{r}(t+h)$ .

Merilo pove, kako hitro se spreminja kot tangente na krivuljo.  $\Delta\varphi$  je enak dolžini krožnega loka enotske krožnice, ki ga odsekata enotska vektorja  $\vec{T}(t)$  in  $\vec{T}(t+h)$  in ga lahko aproksimiramo z dolžino vektorja  $\vec{T}(t+h) - \vec{T}(t)$ , glej sliko 2.8, desno. Torej

$$\Delta\varphi \approx |\vec{T}(t+h) - \vec{T}(t)|.$$

Ločna dolžina krivulje med točkama  $\vec{r}(t)$  in  $\vec{r}(t+h)$  je  $s(t+h) - s(t)$ , kjer je

$$s(t) = \int_a^t |\dot{\vec{r}}(x)| dx$$

dolžina krivulje od začetne točke  $\vec{r}(a)$  do točke  $\vec{r}(t)$ . *Fleksijska ukrivljenost*  $k(t)$  krivulje  $\vec{r}$  v točki  $\vec{r}(t)$  je definirana tako:

$$k(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\vec{T}(t+h) - \vec{T}(t)|}{|s(t+h) - s(t)|}. \quad (2.2)$$

Izpeljava, ki jo izpuščamo, pokaže, da za računanje fleksijske ukrivljenosti gladke krivulje lahko uporabljamo formulo, ki je podana v naslednjem izreku.

**Izrek 2.11.** *Fleksijska ukrivljenost krivulje  $\vec{r}$  v točki  $\vec{r}(t)$  je*

$$k(t) = \frac{|\ddot{\vec{r}}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)|}{|\dot{\vec{r}}(t)|^3}.$$

**Vaja 13.** Izračunaj fleksijsko ukrivljenost krivulje

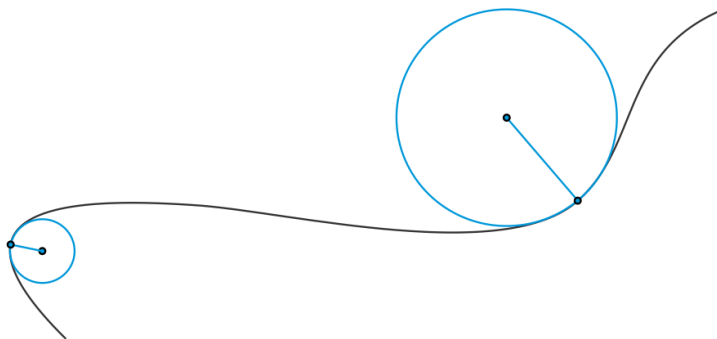
$$\vec{r}(t) = \left( 4(\sin t - t \cos t), 4(\cos t + t \sin t), \frac{3}{2}t^2 \right)$$

za vsak  $t \in \mathbb{R}$ .

Fleksijsko ukrivljenost lahko interpretiramo tudi drugače. Krivulji  $\vec{r}$  lahko v vsaki točki  $\vec{r}(t)$  priredimo krožnico, ki se ji v okolici točke  $\vec{r}(t)$  najbolj prilega. Ta krožnica se imenuje *pritisnjena krožnica* na krivuljo  $\vec{r}$  v točki  $\vec{r}(t)$ . Fleksijska ukrivljenost krivulje  $\vec{r}$  v točki  $\vec{r}(t)$  je enaka

$$k(t) = \frac{1}{R(t)},$$

kjer je  $R(t)$  polmer pritisnjene krožnice na krivuljo  $\vec{r}$  v točki  $\vec{r}(t)$ . Glej sliko 2.9.



Slika 2.9: Pritisnjene krožnici v dveh točkah krivulje.

**Opomba 2.12.** Glavna normala  $\vec{N}(t)$  na krivuljo  $\vec{r}$  v točki  $\vec{r}(t)$  kaže v smeri proti središču  $S$  pritisnjene krožnice v točki  $\vec{r}(t)$ , torej

$$\vec{r}_S = \vec{r}(t) + R(t)\vec{N}(t).$$

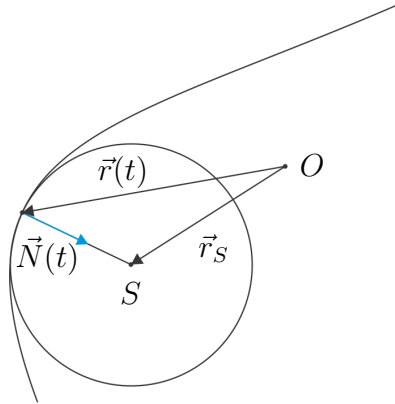
Glej sliko 2.10.

**Opomba 2.13.** Fleksijska ukrivljenost premice v poljubni točki je enaka 0, fleksijska ukrivljenost krožnice s polmerom  $r$  pa je v vsaki od njenih točk enaka  $\frac{1}{r}$ .

**Vaja 14.** Določi polmer in središče pritisnjene krožnice na krivuljo

$$\vec{r}(t) = (2t^4, 3t, t^2)$$

v točki  $\vec{r}(1)$ .



Slika 2.10: Glavna normala kaže v smeri proti središču pritisnjene krožnice.

## 2.5 Torzijska ukrivljenost krivulje

Ko govorimo o ukrivljenosti krivulje, ponavadi mislimo na ukrivljenost, definirano v prejšnjem poglavju, vendar ni nujno vedno tako. Obravnavana krivulja lahko ima ‘veliko’ fleksijsko ukrivljenost v vseh svojih točkah, vendar kljub temu v celoti leži v neki ravnini. V tem poglavju obravnavamo drugo vrsto ukrivljenosti, imenujemo jo torzijska ukrivljenost, ki meri, kako zelo je dana krivulja zvita oz. kako zelo se izmika (pritisnjeni) ravnini.

Fleksijsko ukrivljenost krivulje smo definirali z enačbo (2.2), iz katere sledi

$$k(t) = \frac{|\dot{\vec{T}}(t)|}{|\dot{\vec{r}}(t)|}.$$

Medtem ko fleksijska ukrivljenost meri, kako hitro se pri premiku po krivulji spreminja kot tangente, torzijska ukrivljenost meri, kako hitro se spreminja kot binormale na krivuljo. Zato jo definiramo analogno kot fleksijsko ukrivljenost, le da vektor tangente nadomesti vektor binormale.

Torzijska ukrivljenost  $\tau(t)$  krivulje  $\vec{r}$  v točki  $\vec{r}(t)$  je po absolutni vrednosti enaka

$$|\tau(t)| = \frac{|\dot{\vec{B}}(t)|}{|\dot{\vec{r}}(t)|}. \quad (2.3)$$

Ker binormala določa pritisnjeno ravnino na krivuljo, ‘majhna’ torzijska ukrivljenost krivulje v neki točki pomeni, da je krivulja v tej točki ‘zelo ravninska’. Krivulja, ki leži v ravnini, ima ničelno torzijsko ukrivljenost v vsaki točki. ‘Velika’ torzijska ukrivljenost v neki točki pa pomeni, da krivulja v tej točki zelo ‘hitro’ uhaja iz pritisnjene ravnine.

V enačbi (2.3) smo definirali absolutno vrednost torzijske ukrivljenosti v poljubni točki krivulje. Če želimo definirati tudi predznak torzijske ukrivljenosti, najprej povejmo, da sta vektorja  $\vec{B}(t)$  in  $\vec{N}(t)$  vzporedna za vsako vrednost parametra  $t$ , zato obstaja takšno število  $\tau(t)$ , da velja

$$\frac{\dot{\vec{B}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|} = \tau(t)\vec{N}(t). \quad (2.4)$$

Torzijsko ukrivljenost  $\tau(t)$  definira enačba (2.4), iz katere hkrati izhaja tudi  $|\tau(t)|$ , ki je opredeljen v enačbi (2.3).

Izpeljava, ki jo izpuščamo, pokaže, da za računanje torzijske ukrivljenosti gladke krivulje lahko uporabljamo formulo, ki je podana v naslednjem izreku.

**Izrek 2.14.** *Torzijska ukrivljenost krivulje  $\vec{r}$  v točki  $\vec{r}(t)$  je*

$$\tau(t) = \frac{(\dot{\vec{r}}(t), \ddot{\vec{r}}(t), \ddot{\vec{r}}(t))}{|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)|^2}.$$

**Vaja 15.** *Izračunaj torzijsko ukrivljenost krivulj*

$$\vec{r}_1(t) = (\cos t, \sin t, t) \text{ in } \vec{r}_2(t) = (\sin t, \cos t, t)$$

za vsak  $t \in \mathbb{R}$ .

**Vaja 16.** *Preveri, ali je krivulja  $\vec{r}(t) = (t^2 + t, 1 - t, 2t)$  ravninska.*

**Opomba 2.15.** *Iz ničelne fleksijske ukrivljenosti sledi ničelna torzijska ukrivljenost, obrat pa ne velja.*

## 2.6 Uporaba v fiziki

Krivulje in njihov zapis s pomočjo vektorskih funkcij se izkažejo kot zelo uporabne pri opisu in obravnavi gibanja masnih točk v prostoru  $\mathbb{R}^3$ .

Denimo, da se masna točka giblje po krivulji  $\vec{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $t \in I$ . V tem primeru parameter  $t$  predstavlja čas, vrh vektorja  $\vec{r}(t_0)$  pa položaj masne točke v trenutku, ko je  $t = t_0$ . Ko  $t$  preteče celotni interval  $I$ , masna točka prepotuje celotno krivuljo  $\vec{r}$ , ki jo imenujemo tudi tir gibanja masne točke. V tem kontekstu vektor  $\vec{r}(t)$  imenujemo vektor položaja ob času  $t$ , njegovi odvodi pa imajo naslednji pomen.

Prvi odvod vektorja  $\vec{r}(t)$  ob času  $t$  predstavlja vektor hitrosti ob času  $t$ :

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t),$$

Absolutna vrednost hitrosti ob času  $t$ , ki jo včasih imenujemo tudi brzina, pa predstavlja dolžino vektorja hitrosti, torej  $v(t) = |\vec{v}(t)|$ .

Drugi odvod vektorja  $\vec{r}(t)$  ob času  $t$  predstavlja vektor pospeška ob času  $t$ :

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$$

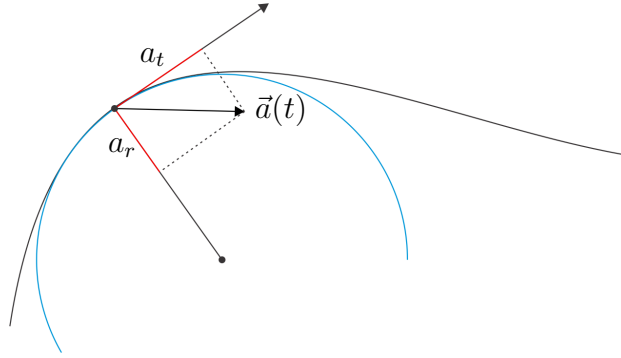
Absolutna vrednost pospeška ob času  $t$  predstavlja dolžino vektorja pospeška, torej  $a(t) = |\vec{a}(t)|$ .

Izkaže se, da vektor pospeška  $\vec{a}(t)$  z vektorjem hitrosti  $\vec{v}(t)$ , leži v pritisnjeni ravnini krivulje v točki  $\vec{r}(t)$ .

Če pospešek razstavimo na dve med seboj pravokotni komponenti, kjer prva poteka v smeri hitrosti oz. tangente, druga pa v smeri glavne normale, dobimo

1. tangencialno komponento pospeška  $a_t = \text{proj}_{\vec{v}} \vec{a}$  in

2. radialno ali normalno komponento pospeška  $a_r = \sqrt{|\vec{a}|^2 - a_t^2}$



Slika 2.11: Tangencialna in radialna komponenta pospeška.

**Vaja 17.** Masni delec se giblje po krivulji  $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$ ,  $t \in [0, \infty)$ .

- a) V kateri točki je delec ob času  $t = 0$ ?
- b) Zapiši vektor hitrosti in pospeška ob poljubnem času  $t$ .
- c) Izračunaj velikost hitrosti in pospeška ob poljubnem času  $t$ .
- č) Ali je pospešek kdaj pravokoten na hitrost?
- d) Ali velikost hitrosti v trenutku  $t = \pi$  narašča ali pojemata?
- e) Izračunaj tangencialno in radialno komponento pospeška v točki  $A(1, 0, 0)$ .



## Poglavje 3

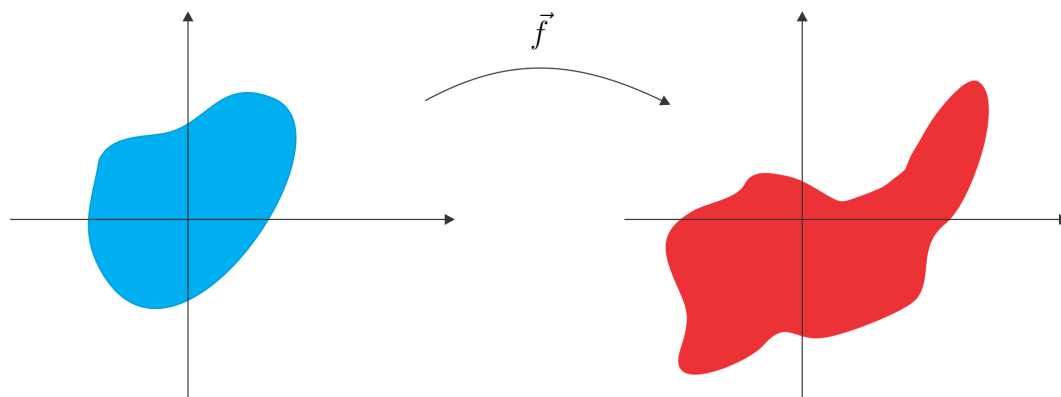
# Vektorske funkcije več spremenljivk

V prvem poglavju smo obravnavali vektorske funkcije, katerih domena je bila podmnožica realnih števil, medtem ko bo domena funkcij, ki jih obravnavamo v tem poglavju, podmnožica večdimenzionalnega vektorskega prostora  $\mathbb{R}^m$ .

**Definicija 3.1.** Vektorska funkcija več spremenljivk je funkcija  $\vec{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ , kjer je  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  in  $m, n \geq 2$ .

Ker je graf vektorske funkcije  $\vec{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  vsebovan v  $\mathbb{R}^{m+n}$ , ga za  $m, n \geq 2$  ne znamo narisati. Lahko pa si predstavljamo kam takšna funkcija preslika neko območje prostora  $\mathbb{R}^n$ , če sta  $m, n \leq 3$ .

**Zgled 12.** Vektorska funkcija  $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  preslika vsako območje v ravnini v neko območje v ravnini (glej sliko 3.1).

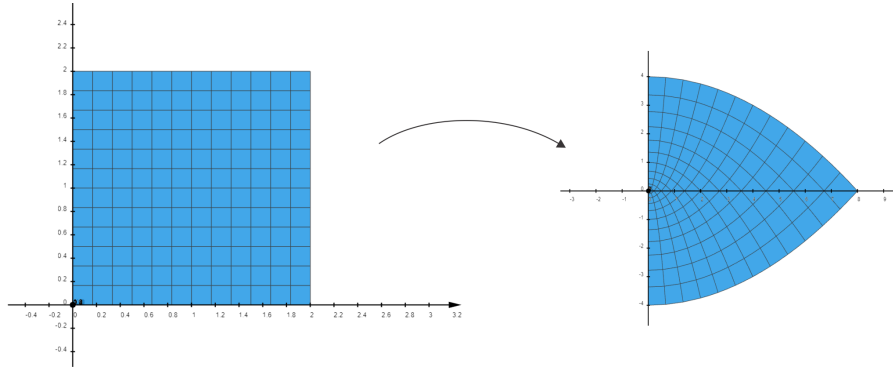


Slika 3.1: Funkcija  $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

**Zgled 13.** Oglejmo si funkcijo  $\vec{r}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  s predpisom

$$\vec{r}(u, v) = (2uv, u^2 - v^2)$$

in razmislimo, kam ta funkcija preslika kvadrat  $[0, 2] \times [0, 2]$ .



Slika 3.2: Kvadrat  $[0, 2] \times [0, 2]$  in njegova slika glede na funkcijo  $\vec{r}(u, v) = (2uv, u^2 - v^2)$ .

Najprej izračunamo funkcijske vrednosti v vseh štirih ogliščih kvadrata:

$$\vec{r}(0, 0) = (0, 0), \vec{r}(2, 0) = (0, 4), \vec{r}(0, 2) = (0, -4), \vec{r}(2, 2) = (8, 0).$$

Če definiramo  $x = 2uv$  in  $y = u^2 - v^2$ , lahko iz prve enačbe izrazimo  $u$  in posebej  $v$ :

$$u = \frac{x}{2v} \text{ in } v = \frac{x}{2u}.$$

To vstavimo v drugo enačbo ter dobimo

$$y = \frac{x^2}{4v^2} - v^2 \text{ in } y = u^2 - \frac{x^2}{4u^2}.$$

Torej, če fiksiramo  $v = v_0 \neq 0$ , dobimo parabolo

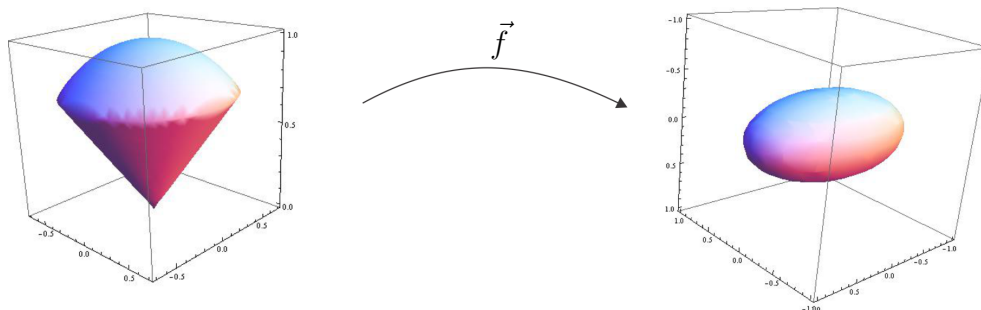
$$y = \frac{x^2}{4v_0^2} - v_0^2$$

in če fiksiramo  $u = u_0 \neq 0$ , dobimo parabolo

$$y = u_0^2 - \frac{x^2}{4u_0^2}.$$

Iz tega sklepamo, da se vsaka vodoravna daljica v kvadratu  $[0, 2] \times [0, 2]$ , ki jo določa enačba  $v = v_0$ , preslika v konveksno parabolo, ter vsaka navpična daljica v kvadratu  $[0, 2] \times [0, 2]$ , ki jo določa enačba  $u = u_0$ , v konkavno parabolo. Enostavno je videti tudi, da se daljici  $\{0\} \times [0, 2]$  in  $[0, 2] \times \{0\}$  preslikata v daljici  $\{0\} \times [-4, 0]$  in  $\{0\} \times [0, 4]$ . Glej sliko 3.2.

**Zgled 14.** Vektorska funkcija  $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  preslika vsako območje v prostoru v neko območje v prostoru (glej sliko 3.3).


 Slika 3.3: Funkcija  $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

### 3.1 Odvod vektorske funkcije

V tem poglavju obravnavamo odvod vektorske funkcije  $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ . Najprej definiramo Jacobijevo matriko funkcije  $\vec{f}$ , ki ima pri obravnavi odvoda pomembno vlogo.

**Definicija 3.2.** Za vektorsko funkcijo več spremenljivk  $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , s predpisom

$$\vec{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

matriko

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

imenujemo Jacobijeva matrika.

**Vaja 18.** Zapiši Jacobijevo matriko funkcije  $\vec{f}(x, y, z) = (5x^2y, xy - z, x^2 + z^2)$  v točki  $T(1, 1, 2)$ .

**Definicija 3.3.** Vektorska funkcija  $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  je v točki  $\vec{x} \in D$  diferenciable, če obstaja matrika  $J$  dimenzije  $m \times n$ , tako da velja

$$\vec{f}(\vec{x} + \vec{h}) = \vec{f}(\vec{x}) + J\vec{h} + \vec{o}(\vec{h}),$$

kjer je

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{\vec{o}(\vec{h})}{|\vec{h}|} = \vec{0}.$$

Matriko  $J$  imenujemo odvod funkcije  $\vec{f}$  v točki  $\vec{x}$ , produktu  $J\vec{h}$  pa diferencial v tej točki. Odvod označujemo z

$$\frac{d\vec{f}}{d\vec{x}} = J.$$

### 3.1. ODVOD VEKTORSKE FUNKCIJE

---

Spomnimo se, da je (skalarna) funkcija več spremenljivk zvezno parcialno odvedljiva, če so njeni parcialni odvodi zvezne funkcije.

**Izrek 3.4.** Naj bo  $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , vektorska funkcija s predpisom

$$\vec{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

in naj bodo funkcije  $f_1, \dots, f_m$  zvezno parcialno odvedljive. Potem je Jacobijeva matrika funkcije  $\vec{f}$  enaka odvodu funkcije  $\vec{f}$ . Torej

$$\frac{d\vec{f}}{d\vec{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

**Definicija 3.5.** Če je vektorska funkcija  $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , diferenciable in so funkcije, ki nastopajo v njeni Jacobijevi matriki zvezne, pravimo, da je  $\vec{f}$  zvezno parcialno odvedljiva.

## Poglavje 4

# Ploskve v $\mathbb{R}^3$

Podobno kot pojem krivulje je intuitivno razumljiv tudi pojem ploskve. Kot bomo videli pozneje, se kot najuporabnejši način opisovanja ploskev izkaže zapis z vektorskimi funkcijami dveh spremenljivk. Ploskev lahko podamo v naslednjih oblikah:

1. *Implicitna oblika*

$$F(x, y, z) = 0,$$

kjer je  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$  in  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ .

2. *EksPLICITna oblika*

$$z = f(x, y),$$

kjer je  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  in  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ .

3. *Parametrična oblika*

$$\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

kjer je  $\vec{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  in  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ .

**Opomba 4.1.** Ko bo obravnavana ploskev zapisana v parametrični obliki, t.j.  $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , bomo funkciji  $\vec{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  rekli parametrizacija ploskve, spremenljivkama  $u$  in  $v$  pa parametra. Besedo ploskev uporabljamo tako za vektorsko funkcijo  $\vec{r}$  kot tudi za njeno sliko.

**Definicija 4.2.** Gladka ploskev je zvezno parcialno odvedljiva funkcija  $\vec{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , kjer je  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , vektorja  $\vec{r}_u(u, v)$  in  $\vec{r}_v(u, v)$  pa sta linearno neodvisna za vsak  $(u, v) \in D$ .

---

**Definicija 4.3.** Glede na koordinato, ki jo fiksiramo, lahko definiramo dva tipa koordinatnih krivulj ploskve  $\vec{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ :

1. Koordinatna krivulja  $u = u_0$  ploskve  $\vec{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  je krivulja

$$\vec{r}(u_0, v), v \in I_1,$$

kjer je  $I_1 = \{v \mid (u_0, v) \in D\}$  interval.

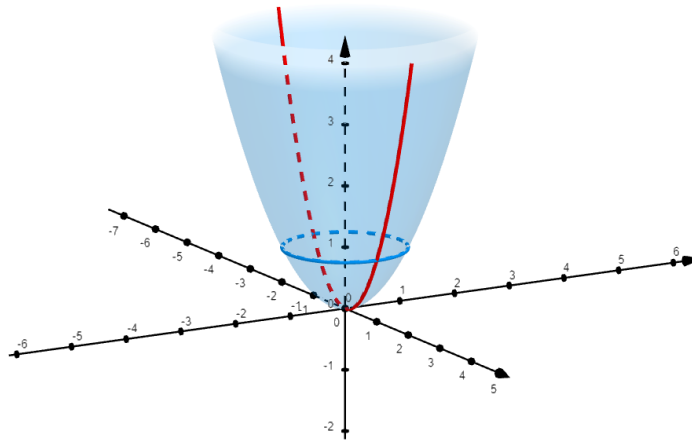
2. Koordinatna krivulja  $v = v_0$  ploskve  $\vec{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  je krivulja

$$\vec{r}(u, v_0), u \in I_2,$$

kjer je  $I_2 = \{u \mid (u, v_0) \in D\}$  interval.

**Zgled 15.** Primer koordinatnih krivulj ploskve  $\vec{r}(\varphi, r) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, r^2)$ , glej sliko 4.1:

1. krivulja rdeče barve:  $\vec{r}(0, r) = (r, 0, r^2)$ ,  $r \in [0, \infty)$
2. krivulja modre barve:  $\vec{r}(\varphi, 1) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 1)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$



Slika 4.1: Koordinatni krivulji na paraboloidu.

**Opomba 4.4.** Naj bo  $\vec{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  gladka ploskev. Parcialna odvoda

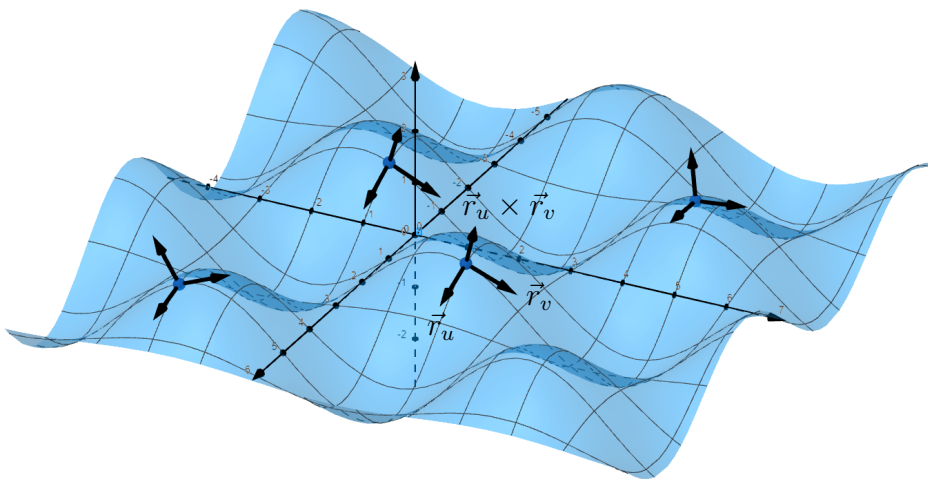
$$\vec{r}_u(u, v) \quad \text{in} \quad \vec{r}_v(u, v)$$

določata smerna vektorja dveh tangent na ploskev  $\vec{r}$  v točki  $\vec{r}(u, v)$ .

**Definicija 4.5.** Naj bo  $\vec{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  gladka ploskev. Vektor

$$\vec{n} = \vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)$$

se imenuje normalni vektor ali normala na ploskev  $\vec{r}$  v točki  $(u, v)$ . Glej sliko 4.2.



Slika 4.2: Gladka ploskev in vektorji  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  in  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ .

*Tangentna ravnina* na ploskev  $\vec{r}$  v točki  $\vec{r}(u, v)$  je ravnina, ki vsebuje točko  $\vec{r}(u, v)$ , njen normalni vektor pa ima smer normalnega vektorja ploskve  $\vec{r}$  v tej točki.

**Izrek 4.6.** Če je ploskev podana v eksplisitni obliki

$$z = f(x, y),$$

normalo izračunamo s formulo

$$\vec{n} = (-p, -q, 1),$$

kjer je  $p = f_x(x, y)$  in  $q = f_y(x, y)$ .

**Vaja 19.** Dana je sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

- Sfero zapiši v parametrični obliki  $\vec{r}(\varphi, \theta)$ .
- Zapiši koordinatni krivulji  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  in  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .
- Zapiši tangenti na koordinatni krivulji v točki  $\vec{r}(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3})$ , ter izračunaj normalo na sfero v isti točki.

**Definicija 4.7.** Naj bo  $\vec{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  gladka ploskev. Ploščina paralelograma, ki ga napenjata vektorja  $\vec{r}_u du$  in  $\vec{r}_v dv$  se imenuje diferencial površine na ploskvi  $\vec{r}$  in ga označujemo z  $dP$ :

$$dP = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv.$$

**Izrek 4.8.** Diferencial površine na ploskvi je enak

$$dP = \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

kjer je  $E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u$ ,  $G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v$  in  $F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$ .

**Izrek 4.9.** Če je ploskev podana v eksplicitni obliki  $z = f(x, y)$  je diferencial površine enak

$$dP = \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy,$$

kjer je  $p = f_x(x, y)$  in  $q = f_y(x, y)$ .

**Vaja 20.** Izračunaj diferencial površine na sferi s polmerom  $a$ .

K ploskvam se bomo vrnili v poglavju, ki obravnava ploskovni integral, s pomočjo katerega bomo med drugim izračunali tudi površino dane gladke ploskve.

## 4.1 Primeri ploskev

V naslednjem razdelku je podanih nekaj tipičnih primerov ploskev, zapisanih v implicitni in parametrični obliki.

### 4.1.1 Krožni valj

1. Implicitna oblika:  $x^2 + y^2 = a^2$
2. Parametrična oblika:  $\vec{r}(\varphi, z) = (a \cos \varphi, a \sin \varphi, z)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ,  $z \in \mathbb{R}$

**Zgled 16.** Na sliki 4.3 je krožni valj s parametrizacijo

$$\vec{r}(\varphi, z) = (2 \cos \varphi, 2 \sin \varphi, z), \varphi \in [0, 2\pi], z \in [0, 4].$$

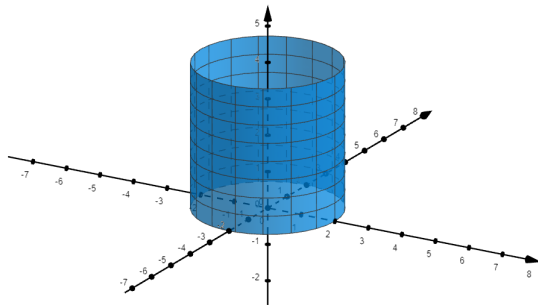
### 4.1.2 Eliptični valj

1. Implicitna oblika:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
2. Parametrična oblika:  $\vec{r}(\varphi, z) = (a \cos \varphi, b \sin \varphi, z)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ,  $z \in \mathbb{R}$

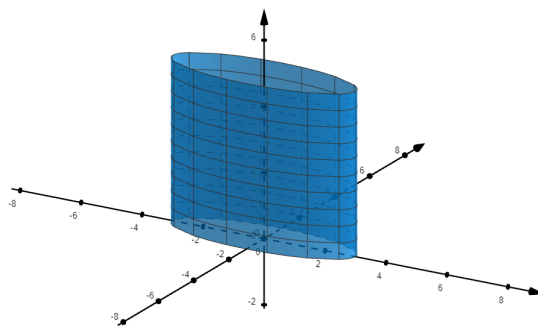
**Zgled 17.** Na sliki 4.4 je eliptični valj s parametrizacijo

$$\vec{r}(\varphi, z) = (3 \cos \varphi, \sin \varphi, z), \varphi \in [0, 2\pi], z \in [0, 5].$$





Slika 4.3: Krožni valj.



Slika 4.4: Eliptični valj.

### 4.1.3 Stožec

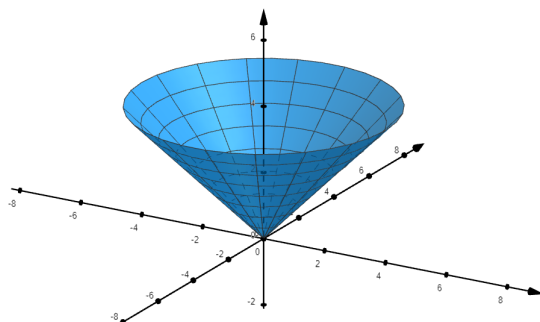
1. Implicitna oblika:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$
2. Parametrična oblika:  $\vec{r}(\varphi, z) = (\frac{a}{c}z \cos \varphi, \frac{b}{c}z \sin \varphi, z)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ,  $z \in \mathbb{R}$

**Zgled 18.** Na sliki 4.5 in 4.6 sta stožca s parametrizacijo

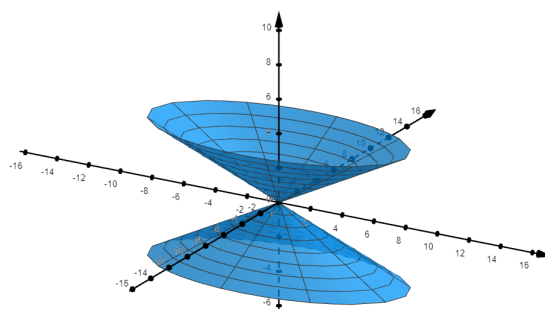
$$\vec{r}(\varphi, z) = (z \cos \varphi, z \sin \varphi, z), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad z \in [0, 4]$$

in

$$\vec{r}(\varphi, z) = (2z \cos \varphi, z \sin \varphi, z), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad z \in [-4, 4].$$



Slika 4.5: Stožec.



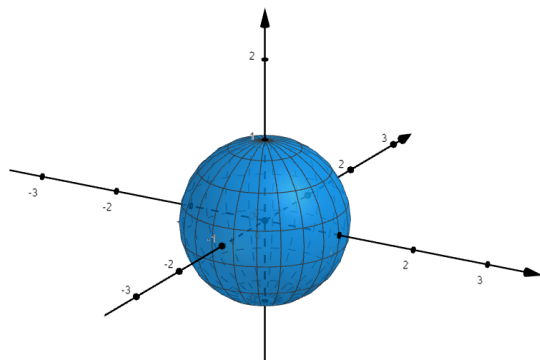
Slika 4.6: Eliptični stožec.

#### 4.1.4 Sfera

1. Implicitna oblika:  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$
2. Parametrična oblika:  $\vec{r}(\varphi, \theta) = (a \cos \varphi \cos \theta, a \sin \varphi \cos \theta, a \sin \theta)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ,  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

**Zgled 19.** Na sliki 4.7 je sfera s parametrizacijo

$$\vec{r}(\varphi, \theta) = (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, \sin \theta), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$



Slika 4.7: Sfera.

#### 4.1.5 Elipsoid

1. Implicitna oblika:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
2. Parametrična oblika:

$$\vec{r}(\varphi, \theta) = (a \cos \varphi \cos \theta, b \sin \varphi \cos \theta, c \sin \theta), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

**Zgled 20.** Na sliki 4.8 je elipsoid s parametrizacijo

$$\vec{r}(\varphi, \theta) = (4 \cos \varphi \cos \theta, 2 \sin \varphi \cos \theta, \sin \theta), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

#### 4.1.6 Paraboloid

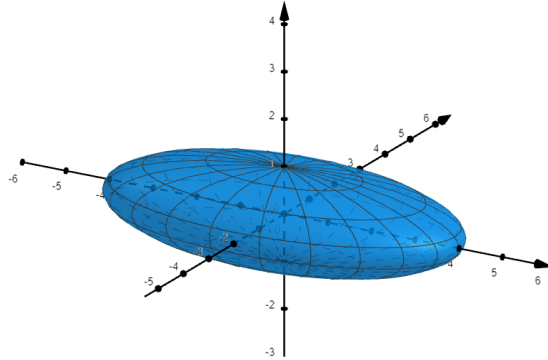
1. Implicitna oblika:  $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$
2. Parametrična oblika:  $\vec{r}(\varphi, r) = (ar \cos \varphi, br \sin \varphi, cr^2), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, \infty)$

**Zgled 21.** Na sliki 4.9 in 4.10 sta paraboloida s parametrizacijo

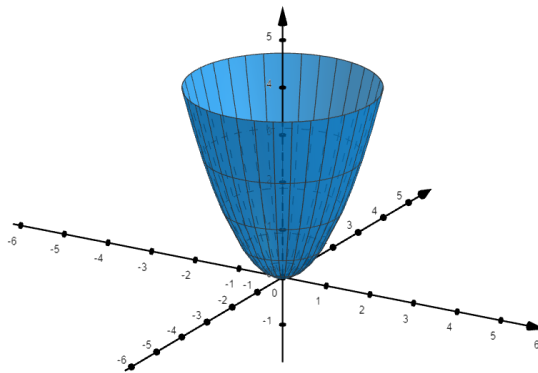
$$\vec{r}(\varphi, r) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, r^2), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, 2]$$

in

$$\vec{r}(\varphi, r) = (3r \cos \varphi, r \sin \varphi, r^2), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, 2].$$



Slika 4.8: Elipsoid.



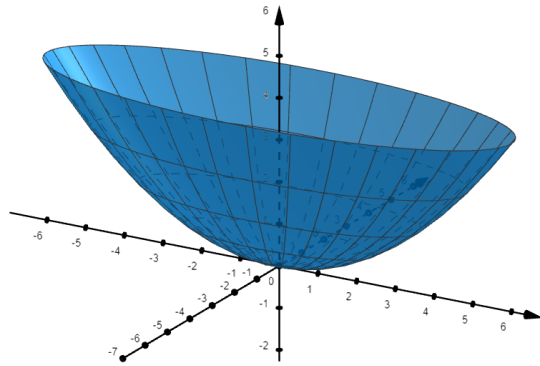
Slika 4.9: Paraboloid.

### 4.1.7 Hiperbolični paraboloid

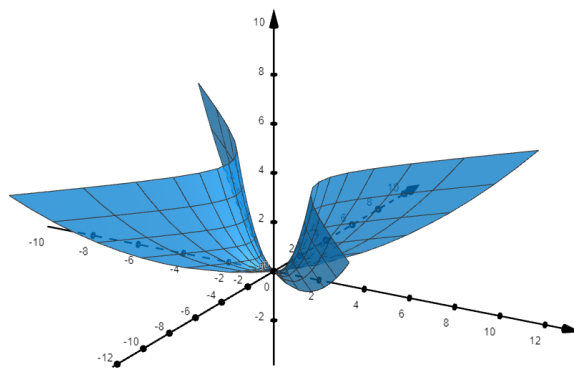
1. Implicitna oblika:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$
2. Parametrična oblika:  $\vec{r}(u, t) = (a u \cosh t, b u \sinh t, u^2 c)$ ,  $u, t \in \mathbb{R}$

**Zgled 22.** Na sliki 4.11 je hiperbolični paraboloid s parametrizacijo

$$\vec{r}(u, t) = (u \cosh t, u \sinh t, u^2), \quad u, t \in [-2, 2].$$



Slika 4.10: Eliptični paraboloid.



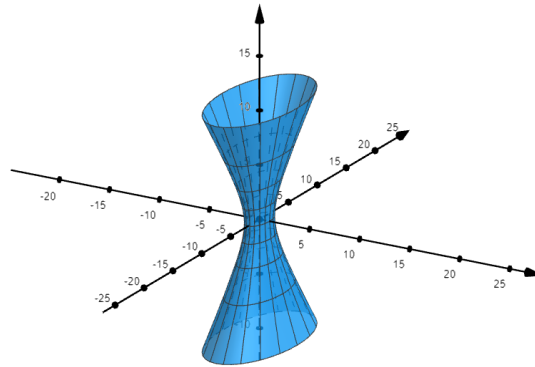
Slika 4.11: Hiperbolični paraboloid.

### 4.1.8 Enodelni hiperboloid

1. Implicitna oblika:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
2. Parametrična oblika:  $\vec{r}(\varphi, t) = (a \cosh t \cos \varphi, b \cosh t \sin \varphi, c \sinh t), \varphi \in [0, 2\pi], t \in \mathbb{R}$

**Zgled 23.** Na sliki 4.12 je enodelni hiperboloid s parametrizacijo

$$\vec{r}(\varphi, t) = (\cosh t \cos \varphi, 2 \cosh t \sin \varphi, 3 \sinh t), \varphi \in [0, 2\pi], t \in [-2, 2].$$



Slika 4.12: Enodelni hiperboloid.

### 4.1.9 Dvodelni hiperboloid

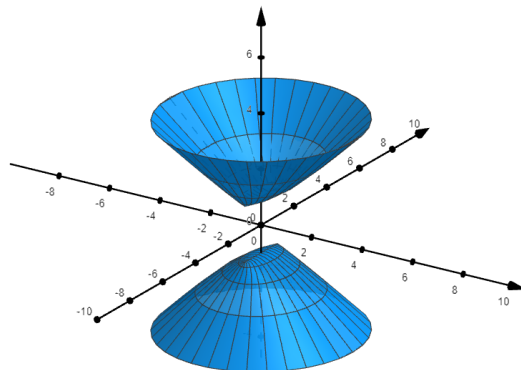
1. Implicitna oblika:  $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
2. Parametrična oblika:  $\vec{r}(\varphi, t) = (a \sinh t \cos \varphi, b \sinh t \sin \varphi, \pm c \cosh t), \varphi \in [0, 2\pi], t \in \mathbb{R}$

**Zgled 24.** Na sliki 4.13 je dvodelni hiperboloid s parametrizacijo

$$\vec{r}(\varphi, t) = (\sinh t \cos \varphi, \cosh t \sin \varphi, \pm \cosh t), \varphi \in [0, 2\pi], t \in [-2, 2].$$

**Vaja 21.** Ploskev parametriziraj in skiciraj v koordinatni sistem.

a)  $x^2 + y^2 = 100, 0 \leq z \leq 8$



Slika 4.13: Dvodelni hiperboloid.

- b)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1, 0 \leq z \leq 2$
- c)  $x^2 + y^2 = 9z^2, 0 \leq z \leq 3$
- č)  $x^2 + y^2 + z^2 = 36$
- d)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$
- e)  $z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 9$

#### 4.1. *PRIMERI PLOSKEV*

---



## Poglavje 5

# Krivočrtne koordinate

Funkcija  $\vec{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ , ki jo zapišemo tako

$$\vec{r}(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

preslika trirazsežno območje v prostoru v neko drugo trirazsežno območje (če je determinanta pripadajoče Jacobijeve matrike različna od 0). Če izberemo ustrezno funkcijo  $\vec{r}$ , potem lahko dosežemo, da se neko ‘lepo’ območje v prostoru s to funkcijo preslika v ‘grdo’ območje. Na primer z ustrezno funkcijo  $\vec{r}$  lahko preslikamo kvader v kroglo, elipsoid, stožec ali valj.

Takšne funkcije  $\vec{r}$  postanejo uporabne pri računanju trojnih integralov. Trojni integral po kvadru je namreč zelo enostavno izračunati (in zato kvader smatramo za ‘lepo’ območje), hkrati pa je trojni integral po krogli, elipsoidu, stožcu ali valju težko neposredno izračunati (in jih tako smatramo za ‘grda’ območja). Zato, kadar želimo izračunati trojni integral po npr. krogli, integracijsko območje s pomočjo ustrezne funkcije  $\vec{r}$  prevedemo na kvader. V tem smislu vidimo uporabno vrednost takšnih funkcij  $\vec{r}$  oziroma krivočrtnih koordinat, ki so z njimi določene.

Za izbrana števila  $u, v$  in  $w$  je  $\vec{r}(u, v, w)$  neka točka v  $\mathbb{R}^3$ . Števila  $u, v, w$  imenujemo *krivočrtne koordinate* točke  $\vec{r}(u, v, w)$ .

**Vaja 22.** Naj bo

$$\vec{r}(a, \varphi, \theta) = (a \cos \varphi \cos \theta, a \sin \varphi \cos \theta, a \sin \theta).$$

- a) Kam funkcija  $\vec{r}$  preslika kvader  $[0, 1] \times [0, \pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ ?
- b) Kaj so krivočrtne koordinate točke  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{2})$ ?

**Definicija 5.1.** Ploskve, ki jih dobimo, če fiksiramo eno koordinato funkcije  $\vec{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ , imenujemo koordinatne ploskve.

Glede na koordinato, ki jo fiksiramo, ločimo tri tipe koordinatnih ploskev:

1. Če fiksiramo  $u$ , torej  $u = u_0$ , dobimo ploskev  $\vec{r}(u_0, v, w)$ .

---

2. Če fiksiramo  $v$ , torej  $v = v_0$ , dobimo ploskev  $\vec{r}(u, v_0, w)$ .

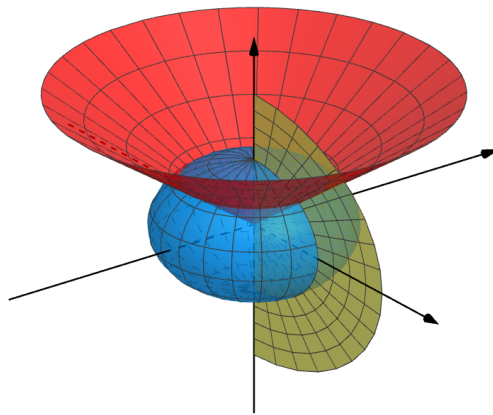
3. Če fiksiramo  $w$ , torej  $w = w_0$ , dobimo ploskev  $\vec{r}(u, v, w_0)$ .

**Zgled 25.** Naj bo  $\vec{r}(\varphi, \theta, r) = (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta)$ . Tedaj so eni možnih primerov koordinatnih ploskev naslednji (glej sliko 5.1):

1. ploskev rumene barve:  $\vec{r}(0, \theta, r)$ ;  $\varphi = 0$ ,  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $r \in [0, 2]$

2. ploskev rdeče barve:  $\vec{r}(\varphi, 0, r)$ ;  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ,  $\theta = 0$ ,  $r \in [0, 2]$

3. ploskev modre barve :  $\vec{r}(\varphi, \theta, 1)$ ;  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ,  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $r = 1$



Slika 5.1: Koordinatne ploskve.

**Definicija 5.2.** Krivulje, ki jih dobimo, če fiksiramo dve koordinati funkcije  $\vec{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ , imenujemo koordinatne krivulje.

Glede na koordinati, ki ju fiksiramo, ločimo tri tipe koordinatnih krivulj:

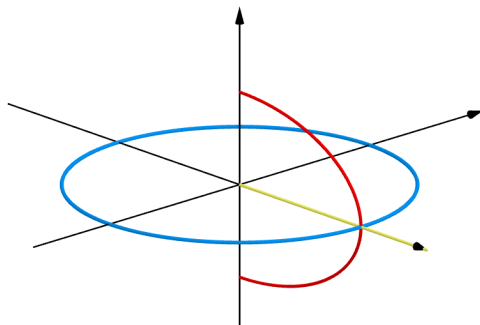
1. Če fiksiramo  $u$  in  $v$ , torej  $u = u_0$  in  $v = v_0$ , dobimo krivuljo  $\vec{r}(u_0, v_0, w)$ .

2. Če fiksiramo  $u$  in  $w$ , torej  $u = u_0$  in  $w = w_0$ , dobimo krivuljo  $\vec{r}(u_0, v, w_0)$ .

3. Če fiksiramo  $v$  in  $w$ , torej  $v = v_0$  in  $w = w_0$ , dobimo krivuljo  $\vec{r}(u, v_0, w_0)$ .

**Zgled 26.** Naj bo  $\vec{r}(\varphi, \theta, r) = (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta)$ . Tedaj so eni možnih primerov koordinatnih krivulj naslednji (glej sliko 5.2):

1. krivulja rumene barve:  $\vec{r}(0, 0, r)$ ;  $\varphi = 0, \theta = 0, r \in [0, 2]$
2. krivulja rdeče barve:  $\vec{r}(0, \theta, 1)$ ;  $\varphi = 0, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], r = 1$
3. krivulja modre barve :  $\vec{r}(\varphi, 0, 1)$ ;  $\varphi \in [0, 2\pi], \theta = 0, r = 1$



Slika 5.2: Koordinatne krivulje.

Koordinatnim krivuljam funkcije  $\vec{r}$  lahko določimo tangente v poljubni točki. Smerni vektorji teh tangent so parcialni odvodi  $\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_w$ .

**Definicija 5.3.** Naj bo  $\vec{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ , kjer je

$$\vec{r}(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)).$$

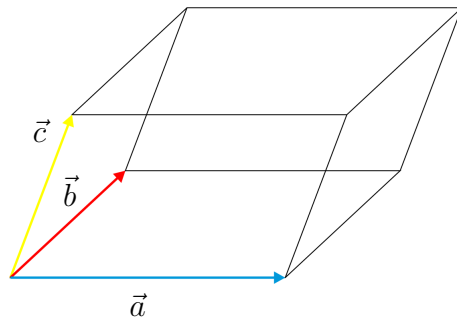
Vektorji

$$\vec{a} = \vec{r}_u du, \quad \vec{b} = \vec{r}_v dv, \quad \vec{c} = \vec{r}_w dw$$

napenjajo telo, ki ga imenujemo paralelepiped. Volumen tega paralelepipeda (glej sliko 5.3) imenujemo diferencial volumna za krivočrtne koordinate  $u, v, w$ .

**Izrek 5.4.** Diferencial volumna lahko izrazimo z determinanto Jacobijeve matrike funkcije  $\vec{r}(u, v, w)$  tako

$$dV = |J| du dv dw.$$



Slika 5.3: Diferencial volumna je enak volumnu paralelepipeda.

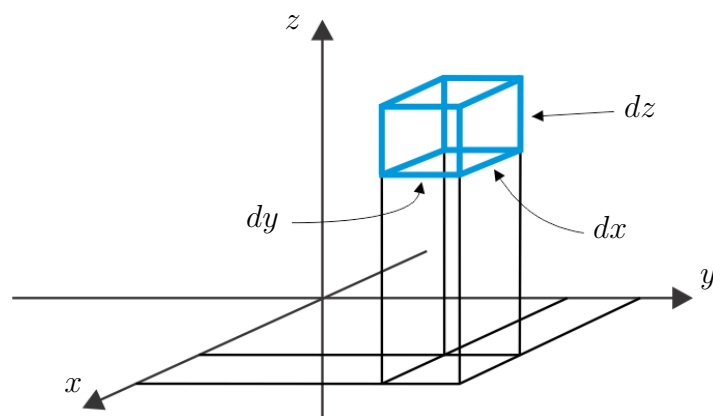
Za opis in obravnavo različnih območij v  $\mathbb{R}^3$  lahko izberemo različne krivočrtne koordinate. Najbolj standardne med njimi so, poleg dobro znanih kartezičnih koordinat, tudi tako imenovane cilindrične in sferične koordinate. Podrobneje jih bomo obravnavali v poglavju o trojnem integralu. V tem poglavju jih zgolj omenimo in predstavimo njihov diferencial volumna.

1. *Kartezične koordinate*

$$\vec{r}(x, y, z) = (x, y, z)$$

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$dV = 1 \, dx \, dy \, dz, \text{ glej sliko 5.4}$$

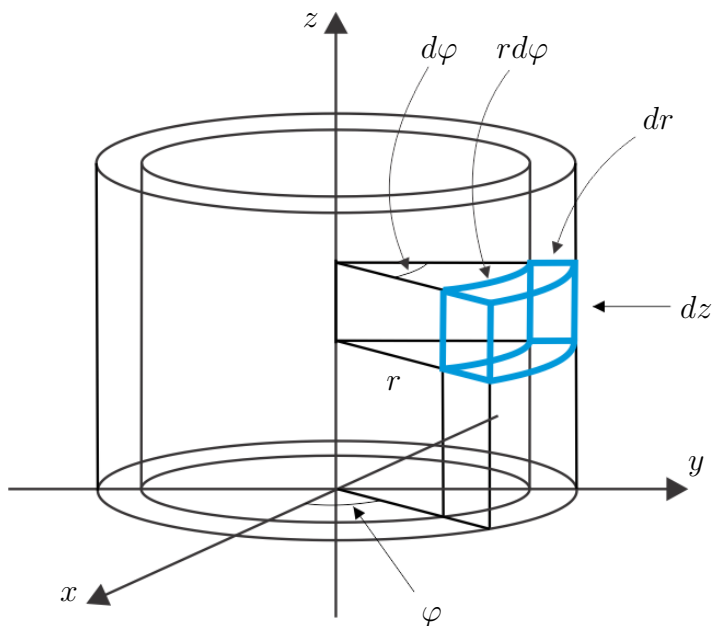


Slika 5.4: Diferencial volumna za kartezične koordinate.

2. *Cilindrične koordinate*

$$\vec{r}(r, \varphi, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$$

$$\varphi \in [0, 2\pi], r \in [0, \infty), z \in \mathbb{R}$$



Slika 5.5: Diferencial volumna za cilindrične koordinate.

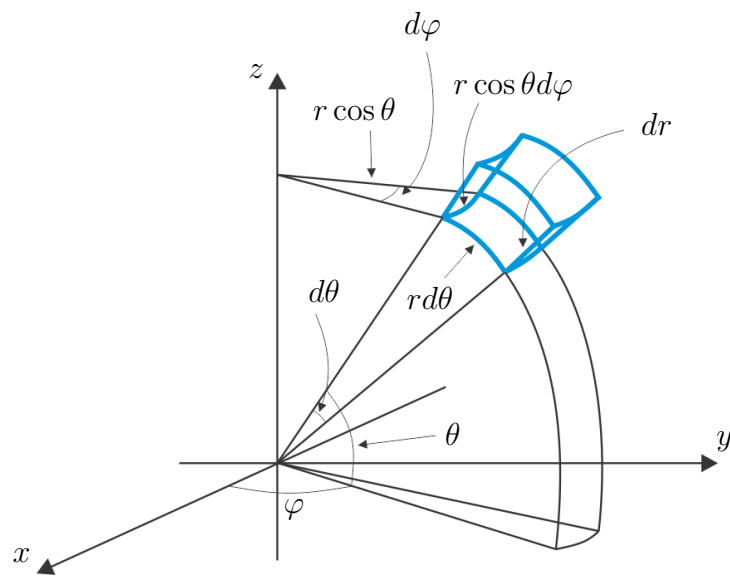
$$dV = r d\varphi dr dz, \text{ glej sliko 5.5}$$

### 3. Sferične koordinate

$$\vec{r}(r, \varphi, \theta) = (r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$\varphi \in [0, 2\pi], \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], r \in [0, \infty)$$

$$dV = r^2 \cos \theta d\varphi d\theta dr, \text{ glej sliko 5.6}$$



Slika 5.6: Diferencial volumna za sferične koordinate.

## Poglavje 6

# Operator $\nabla$

V tem poglavju bomo z operatorjem nabra

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

vpeljali gradient skalarne polja ter divergenco in rotor vektorskega polja, ki jih bomo potrebovali v naslednjih poglavjih.

### 6.1 Gradient

Gradient skalarne polja je vektorsko polje, ki pove, v kateri smeri dano skalarne polje najhitreje narašča.

**Definicija 6.1.** Naj bo  $f(x, y, z)$  skalarne funkcije, ki je odvedljiva na  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ . Potem je gradient funkcije  $f$

$$\boxed{\text{grad}(f) = \nabla f = (f_x, f_y, f_z).}$$

**Definicija 6.2.** Naj bo  $f(x, y, z)$  skalarne funkcije, ki je odvedljiva na  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $T_0 \in D$  točka v prostoru in  $\vec{v}$  poljuben vektor. Odvod funkcije  $f$  v točki  $T_0$  v smeri vektorja  $\vec{v}$ , ki ga imenujemo tudi smerni odvod, je

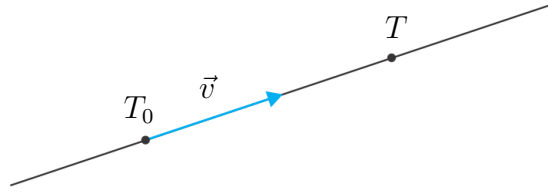
$$D_{\vec{v}}(f) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(T) - f(T_0)}{s},$$

kjer je  $T$  spremenljiva točka, ki leži na premici v smeri vektorja  $\vec{v}$  ter  $s$  razdalja med  $T$  in  $T_0$  (glej sliko 6.1).

Smerni odvod izračunamo s pomočjo gradienta, kot kaže naslednji izrek.

**Izrek 6.3.** Odvod funkcije  $f$  v smeri vektorja  $\vec{v}$  je

$$\boxed{D_{\vec{v}}(f) = \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v} \cdot \text{grad}(f).}$$



Slika 6.1: Smerni odvod.

**Opomba 6.4.** Naj bo  $f$  zvezno parcialno odvedljiva skalarna funkcija. Potem  $\text{grad}(f)$  v točki  $T_0$  predstavlja smer maksimalnega odvoda funkcije v tej točki, ki je torej enak

$$D_{\text{grad}(f)}(f) = |\text{grad}(f)|.$$

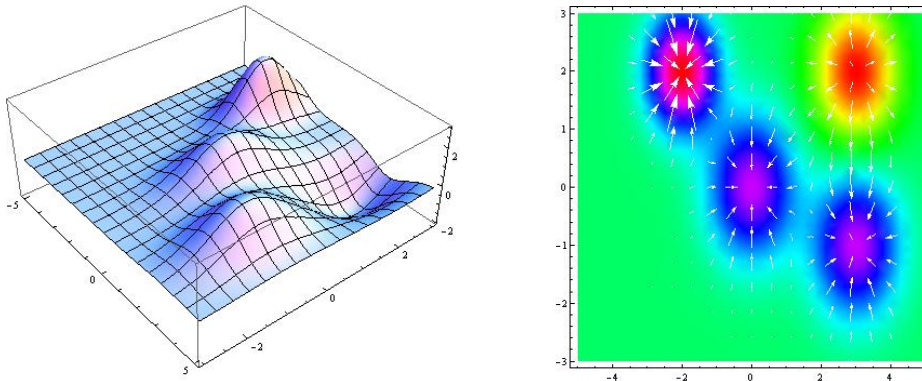
Z drugimi besedami,  $\text{grad}(f)$  v točki  $T_0$  je vektor, ki kaže v smeri največjega (najhitrejšega) naraščanja funkcije  $f$  v tej točki.

**Vaja 23.** Naj bo  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) = 3x^2 - 2ye^z$ .

a) Izračunaj odvod funkcije  $f$  v smeri  $\vec{v} = (1, 2, 3)$  v točki  $T_0(1, 1, 0)$ .

b) Izračunaj maksimalni odvod funkcije  $f$  v točki  $T_0(1, 1, 0)$ .

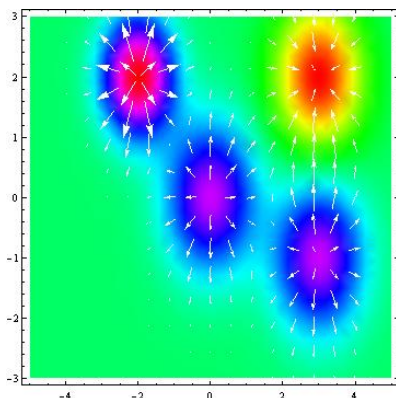
**Zgled 27.** Naj bo  $z = f(x, y)$  skalarna funkcija, katere graf je prikazan na sliki 6.2, levo. Njen gradient je vektorska funkcija  $\text{grad}(f) = (f_x, f_y)$ , ki kaže v smeri največjega naraščanja in je predstavljena na sliki 6.2, desno.

Slika 6.2: Graf funkcije  $f$  in njen gradient.

Ker gradient kaže v smeri največjega naraščanja,  $-\text{grad}(f) = (-f_x, -f_y)$  kaže smer najhitrejšega padanja (glej sliko 6.3).

**Izrek 6.5.** Naj bo  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , kjer je  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ , parcialno odvedljiva skalarna funkcija, in naj bo  $T$  točka na ploskvi  $f(x, y, z) = 0$  (zapisani v implicitni obliki). Potem je  $\text{grad}(f)$  v točki  $T$  normalni vektor na ploskev  $f(x, y, z) = 0$  v točki  $T$ .





Slika 6.3: Vektorsko polje  $-\text{grad}(f)$ .

**Vaja 24.** Na ploskvi  $2x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$  poišči tiste točke, v katerih je tangentska ravnina vzporedna z ravnino  $2x + y + z = 0$ .

Posebno vlogo med vektorskimi polji imajo tako imenovana potencialna vektorska polja, ki jih definiramo s pomočjo gradienta. Njihovo uporabno vrednost bomo spoznali pozneje.

**Definicija 6.6.** Za vektorsko polje  $\vec{F}$  pravimo, da je potencialno, če obstaja skalarna funkcija  $f$ , tako da velja

$$\vec{F} = \text{grad}(f).$$

Funkcijo  $f$  imenujemo potencial vektorskega polja  $\vec{F}$ .

**Zgled 28.** Primer potencialnega vektorskega polja je gravitacijsko polje zemlje, ki ga lahko zapišemo kot

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{-GmM\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

oziroma

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{-GmM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y, z),$$

kjer je  $M$  masa zemlje,  $m$  masa objekta, in  $G$  gravitacijska konstanta. Potencial gravitacijskega polja  $\vec{F}$  je skalarno polje  $f$  s predpisom

$$f(x, y, z) = f(\vec{r}) = \frac{GmM}{|\vec{r}|} = \frac{GmM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

**Vaja 25.** Preveri, ali je polje  $\vec{F}(x, y, z) = (x + 2y + 3z, x - 3y - z, 4x - y + 2z)$  potencialno.

**Vaja 26.** Izračunaj potencial vektorskega polja

$$\vec{F}(x, y, z) = (2xy, x^2 + z^2, 2yz).$$

## 6.2 Divergenca

Gradient skalarnemu polju priredi vektorsko polje. Z divergenco pa je ravno obratno. Divergenca vektorskega polja je skalarno polje, ki je pomembno predvsem pri računanju pretokov vektorskih polj skozi zaključeno ploskev.

**Definicija 6.7.** Naj bo  $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ,

$$\vec{F}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$$

diferenciabilna vektorska funkcija. Divergenca funkcije  $\vec{F}$  je enaka

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}.$$

Denimo, da dano vektorsko polje predstavlja smer in hitrost gibanja fluida. Divergenca takšnega vektorskega polja je enaka razliki odhodnih in prihodnih tokov fluida na danem območju.

**Definicija 6.8.** Vektorsko polje, katerega divergenca je enaka nič, se imenuje solenoidalno.

**Vaja 27.** Preveri, ali je vektorsko polje  $\vec{F}(x, y, z) = (xy^2, 1 - \frac{1}{3}y^3, 3xy + 2z)$  solenoidalno.

## 6.3 Rotor

Rotor vektorskemu polju priredi novo vektorsko polje.

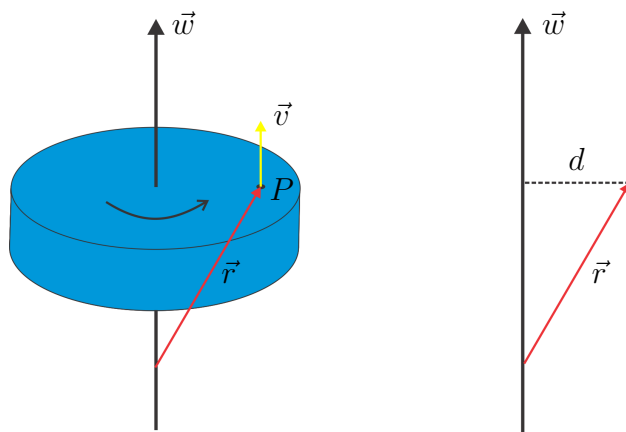
**Definicija 6.9.** Naj bo  $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ,

$$\vec{F}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$$

diferenciabilna vektorska funkcija. Rotor funkcije  $\vec{F}$  je

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

V nadaljevanju je predstavljena interpretacija rotorja v konceptu hitrosti vrtečega se telesa. Rotacijo togega telesa lahko enolično opišemo z enim vektorjem  $\vec{w}$ . Pri tem smer vektorja  $\vec{w}$  kaže v smeri osi vrtenja tako, da je, gledano s konca vektorja  $\vec{w}$ , vrtenje v nasprotni smeri urinega kazalca, dolžina vektorja  $\vec{w}$  pa je enaka kotni hitrosti vrtenja. Vektor hitrosti  $\vec{v}$  v poljubni točki  $P$ , ki ji pripada krajevni vektor  $\vec{r}$ , je tako



Slika 6.4: Vrteče se telo.

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

glej sliko 6.4. Recimo torej, da imamo vrteče se telo in z  $\vec{v}(x, y, z)$  označimo vektorsko polje, ki opisuje hitrost vrtenja. Izkaže se, da je rotor vektorskega polja  $\vec{v}$  vektor, ki kaže v smeri osi vrtenja, njegova dolžina pa je dvakratnik kotne hitrosti vrtenja.



## Poglavje 7

# Integral s parametrom

V tem poglavju obravnavamo integral s parametrom, ki predstavlja uvod v mnogoterni integral. Posebej bomo obravnavali odvod integrala s parametrom in navedli ustrezne formule.

**Definicija 7.1.** *Integral s parametrom je integral oblike*

$$\int_a^b f(x, y) dx.$$

*Spremenljivko  $y$  imenujemo parameter.*

**Vaja 28.** *Izračunaj*

$$\int_0^1 (x^3 y + \sin y) dx.$$

**Izrek 7.2.** *Naj bo  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , zvezna funkcija na  $[a, b] \times [c, d]$ . Potem je funkcija*

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

*zvezna na intervalu  $[c, d]$ .*

**Izrek 7.3.** *Naj bo  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , zvezna funkcija na  $[a, b] \times [c, d]$  in naj bo  $y_0 \in [c, d]$ . Potem je*

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx.$$

**Izrek 7.4.** *Naj bo  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  in naj bosta  $f$  in  $f_y$  zvezni funkciji na  $[a, b] \times [c, d]$ . Potem je funkcija*

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

*odvedljiva na  $[c, d]$  in velja*

---

$$F'(y) = \int_a^b f_y(x, y) dx.$$

**Vaja 29.** *Odvajaj*

$$F(y) = \int_1^2 \frac{\cos(xy)}{x} dx.$$

**Izrek 7.5.** *Naj bo  $f$  zvezno parcialno odvedljiva funkcija na  $D = [a, b] \times [c, d]$ . Naj bosta funkciji  $u(y)$  in  $v(y)$  zvezno odvedljivi na  $[c, d]$ . Potem je na  $[c, d]$  odvedljiva tudi funkcija*

$$F(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx$$

*in velja*

$$F'(y) = f(v(y), y)v'(y) - f(u(y), y)u'(y) + \int_{u(y)}^{v(y)} f_y(x, y) dx.$$

**Vaja 30.** *Odvajaj*

$$F(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+xy)}{x} dx.$$

## Poglavje 8

# Dvojni integral

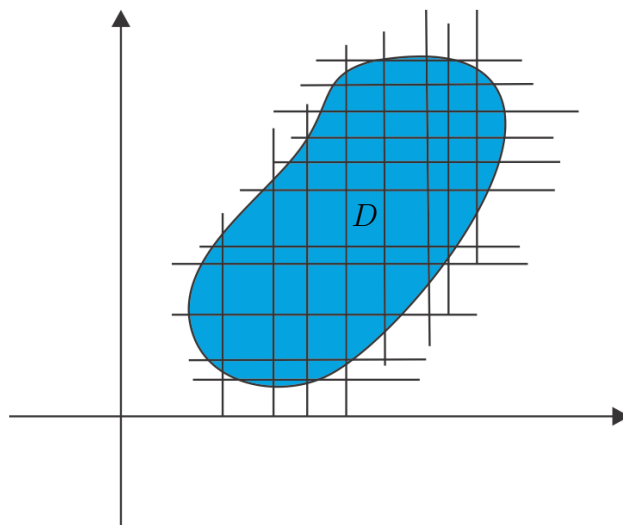
Denimo, da imamo funkcijo dveh spremenljivk  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , kjer je  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  območje v ravnini, ki je zaprto in omejeno. V tem poglavju bomo po korakih vpeljali dvojni integral

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

nato si bomo ogledali, kako tak integral izračunamo, ob koncu pa bomo predstavili še njegovo uporabno vrednost.

### 8.1 Vpeljava dvojnega integrala

1. Območje  $D$  razdelimo na majhne pravokotnike s premicami, ki so vzporedne koordinatnima osema, kot kaže slika 8.1.



Slika 8.1: Delitev območja  $D$ .

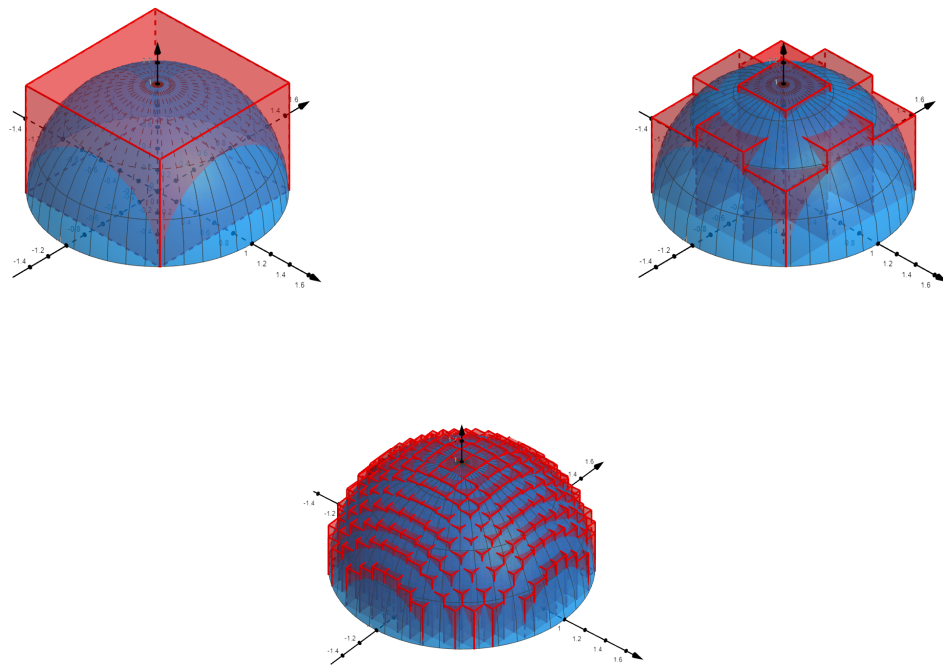
## 8.1. VPELJAVA DVOJNEGA INTEGRALA

2. Pravokotnike oštevilčimo od 1 do  $n$  in jih označimo s  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , njihove ploščine pa z  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ . Pri tem upoštevamo samo tiste pravokotnike, ki so v celoti znotraj območja  $D$ .
3. Dolžino diagonale največjega pravokotnika označimo z  $\delta$ .
4. V vsakem pravokotniku  $S_k$  izberemo eno točko  $(x_k, y_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$ .
5. Definiramo *Riemannovo integralsko vsoto* funkcije  $f$  po območju  $D$ :

$$R_f = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k.$$

6. Dvojni integral  $\iint_D f(x, y) dx dy$  definiramo kot limito integralske vsote:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k.$$

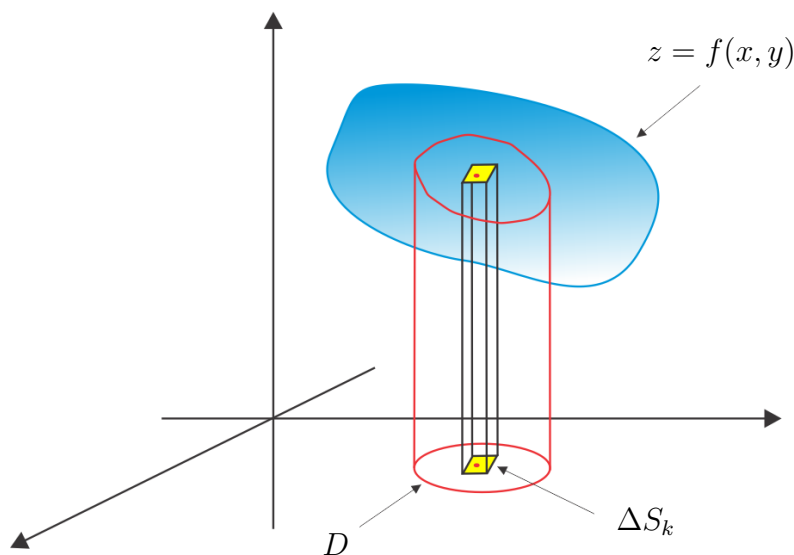


Slika 8.2: Integralska vsota — limitni proces.



Slika 8.2 prikazuje začetne korake v limitnem procesu, ko v integralski vsoti število pravokotnikov pošljemo v neskončnost, ploščino posameznega pravokotnika pa proti 0.

Razložimo geometrijski pomen zgornje integralske vsote in dvojnega integrala. Vsak sumand  $f(x_k, y_k)\Delta S_k$  v integralski vsoti je enak volumnu kvadra, katerega osnovna ploskev je pravokotnik s površino  $\Delta S_k$ , višina pa  $f(x_k, y_k)$ , glej sliko 8.3. Tak kvader se razteza od območja  $D$  do ploskve  $z = f(x, y)$ . Integralska vsota je torej enaka vsoti volumnov takšnih kvadrov.



Slika 8.3: Kvader z volumnom  $f(x_k, y_k)\Delta S_k$ .

Dvojni integral funkcije  $f$  po območju  $D$  je tako enak volumnu tridimenzionalnega območja, ki se razteza med območjem  $D$  v ravnini  $xy$  in ploskvijo  $z = f(x, y)$ , glej sliko 8.4.

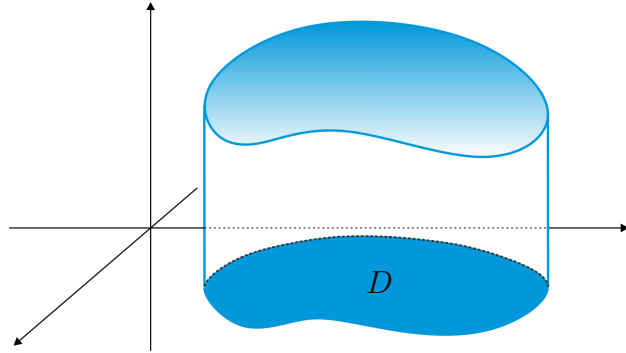
## 8.2 Povezava z dvakratnim integralom

V tem poglavju pokažemo, kako s pomočjo dvakratnega integrala izračunamo dvojni integral.

**Izrek 8.1** (Osnovni izrek o dvojnem integralu). *Naj bo  $f$  zvezna funkcija<sup>1</sup> na območju*

$$D = [a, b] \times [c, d].$$

<sup>1</sup>Izrek velja tudi ob šibkejšem pogoju kot je zveznost funkcije  $f$ . Velja tudi ob pogoju, da integrala na obeh straneh enačbe obstajata.



Slika 8.4: Volumen območja med ravnino  $xy$  in ploskvijo  $z = f(x, y)$ .

Potem je dvojni integral po območju  $D$  enak dvakratnemu integralu

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) \, dy.$$

**Opomba 8.2.** Zgornji izrek pove, da v primeru, ko je  $D$  pravokotnik, dvojni integral izračunamo tako, da dvakrat izračunamo enojni integral.

**Vaja 31.** Izračunaj

$$\iint_D x^2 y \, dx \, dy,$$

kjer je  $D = [0, 2] \times [-1, 3]$ .

**Vaja 32.** Izračunaj

$$\iint_D y \sin x \, dx \, dy,$$

kjer je  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi, -2 \leq y \leq 5\}$ .

**Izrek 8.3.** Naj bo  $f$  zvezna funkcija na območju  $D = [a, b] \times [c, d]$ . Potem velja

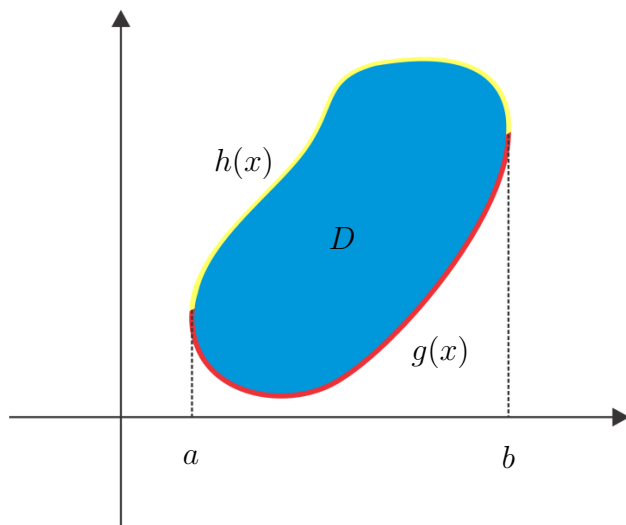
$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) \, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) \, dx.$$

**Opomba 8.4.** Zgornji izrek pove, da v primeru, ko je  $D$  pravokotnik, vrstni red integriranja lahko zamenjamo.

Zaenkrat smo se naučili kako izračunati dvojni integral funkcije  $f$  po območju, ki ima obliko pravokotnika. V nadaljevanju bomo pokazali, kako izračunamo dvojni integral po območjih drugačnih oblik.

**Izrek 8.5.** Naj bo  $D$  območje v ravnini, ki je za vsak  $x \in [a, b]$  navzdol omejeno s krivuljo  $y = g(x)$  in navzgor z  $y = h(x)$ , glej sliko 8.5. Potem velja

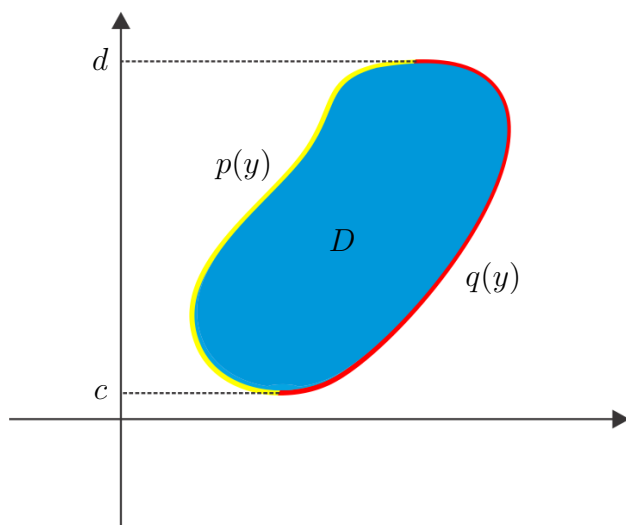
$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy.$$



Slika 8.5: Integracijsko območje  $D$  je omejeno z grafoma funkcij  $g$  (rdeče) in  $h$  (rumeno).

**Izrek 8.6.** Naj bo  $D$  območje v ravnini, ki je za vsak  $y \in [c, d]$  na levo omejeno s krivuljo  $x = p(y)$  in na desno z  $x = q(y)$ , glej sliko 8.6. Potem velja

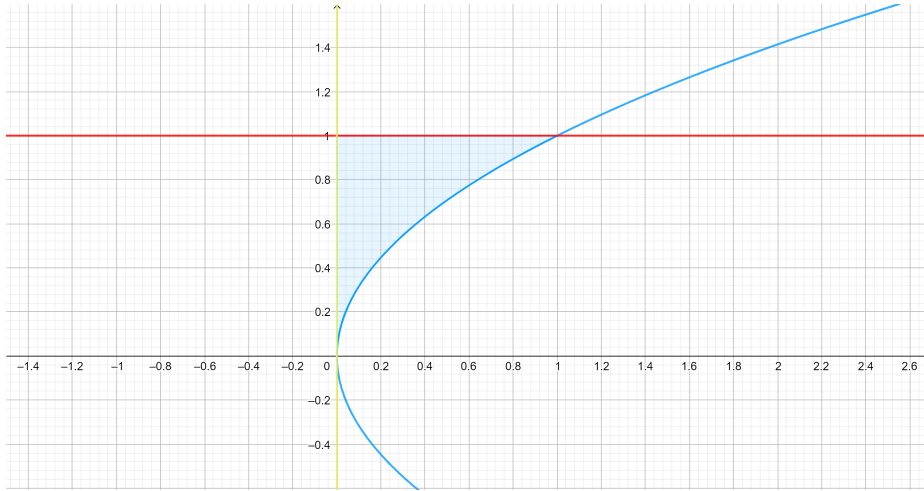
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y) dx.$$



Slika 8.6: Integracijsko območje  $D$  je omejeno z grafoma funkcij  $p$  (rumeno) in  $q$  (rdeče).

## 8.2. POVEZAVA Z DVAKRATNIM INTEGRALOM

**Zgled 29.** Izračunajmo integral  $\iint_D x \, dx \, dy$ , kjer je območje  $D$  omejeno s krivuljami  $y^2 = x$ ,  $y = 1$  in  $x = 0$ , kot kaže slika 8.7.



Slika 8.7: Integracijsko območje  $D$ , omejeno s parabolo in dvema premicama.

Glede na vrstni red integriranja lahko integral izračunamo na dva načina:

$$1. \iint_D x \, dx \, dy = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 x \, dy = \frac{1}{10}$$

$$2. \iint_D x \, dx \, dy = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} x \, dx = \frac{1}{10}$$

**Vaja 33.** Izračunaj

$$\iint_D xy^2 \, dx \, dy,$$

kjer je območje  $D$  omejeno z osjo  $x$ , osjo  $y$  in premico  $y = -x + 1$ .

**Vaja 34.** Izračunaj

$$\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy,$$

kjer je območje  $D$  omejeno s premicami  $y = 0$ ,  $x = 3$  in  $y = 2x + 1$ . Integral izračunaj na dva načina, tako da v prvem najprej integriraš po  $x$ , v drugem pa najprej po  $y$ .

**Vaja 35.** Izračunaj

$$\iint_D (x + y) \, dx \, dy,$$

kjer je območje  $D$  omejeno s sinusoido  $y = \sin x$  ter premicami  $x = 0$ ,  $x = \pi$  in  $y = 0$ .

## 8.3 Vpeljava novih spremenljivk v dvojni integral

Včasih je območje, po katerem integriramo, težko ali celo nemogoče opisati v kartezičnih koordinatah. V takšnih primerih vpeljemo v integral nove spremenljivke oz. novi koordinatni sistem. Najprepoznavnejši med njimi je polarni koordinatni sistem, ki je predstavljen v nadaljevanju. Pred tem zapišimo še izrek o prehodu dvojnega integrala v nov koordinatni sistem.

**Izrek 8.7.** *Naj bosta  $x(u, v)$  in  $y(u, v)$  zvezno parcialno odvedljivi funkciji na območju  $S$ . Naj bo*

$$J = \begin{bmatrix} x_u(u, v) & x_v(u, v) \\ y_u(u, v) & y_v(u, v) \end{bmatrix}$$

*Jacobijeva matrika in naj bo njena determinanta pozitivna (ali negativna) povsod na  $S$ . Potem velja*

$$\boxed{\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv,}$$

*kjer je  $|J|$  absolutna vrednost determinante Jacobijeve matrike in je  $D$  slika območja  $S$  glede na funkcijo  $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ .*

### 8.3.1 Polarne koordinate

Točko v polarnem koordinatnem sistemu podamo s številoma, ki ju imenujemo *polarni koordinati* (glej sliko 8.8):

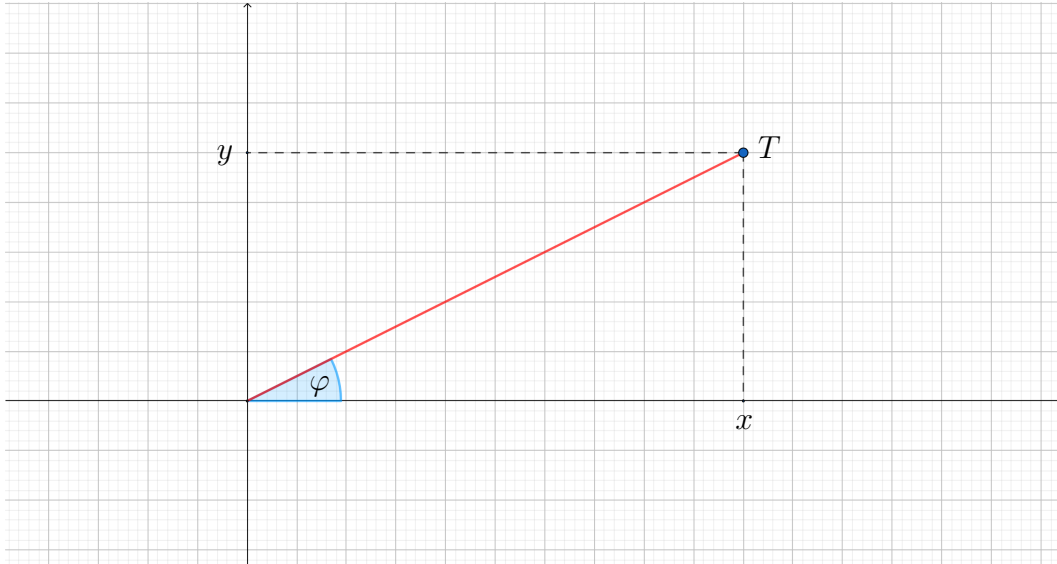
1. Prva koordinata točke  $T$  je kot  $\varphi$ , ki ga določata pozitivni poltrak osi  $x$  in poltrak, ki poteka od izhodišča skozi točko  $T$ . Ponavadi ga podamo na intervalu  $[0, 2\pi]$ .
2. Druga koordinata točke  $T$  je radij  $r$ , ki meri oddaljenost točke  $T$  od koordinatnega izhodišča. Radij  $r$  se poda na intervalu  $[0, \infty)$ .

**Opomba 8.8.** *Polarne koordinate smo spoznali že pri polarnem zapisu kompleksnih števil.*

Če poznamo polarni koordinati točke, lahko z uporabo preproste trigonometrije izračunamo njeni kartezični koordinati in obratno:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \varphi &= \frac{y}{x} \end{aligned}}$$



Slika 8.8: Polarne koordinate.

**Zgled 30.** Točka s kartezičnima koordinatama  $x = 1$ ,  $y = 1$  ima polarni koordinati  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ,  $r = \sqrt{2}$ .

**Vaja 36.** Zapiši polarne koordinate točk  $T_1(2, 0)$ ,  $T_2(2, 1)$  in  $T_3(0, -1)$ .

Polarne koordinate večinoma uporabljamo pri računanju integralov po območjih, ki so enaka krogu ali delu kroga. V takšnih primerih ponavadi preidemo iz integrala, zapisanega v kartezičnih koordinatah, v integral, zapisan v polarnih koordinatah. Vrednost determinante Jacobijeve matrike pri prehodu iz kartezičnih koordinat v polarne je

$$|J| = r$$

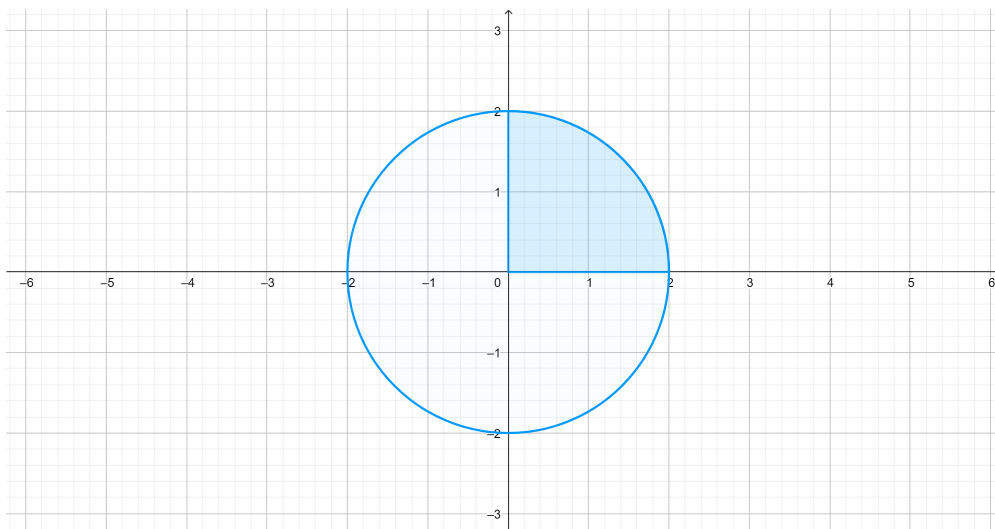
**Zgled 31.** Izračunajmo vrednost dvojnega integrala  $\iint_D x \, dx \, dy$ , kjer je

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Območje  $D$  najprej narišemo v koordinatni sistem, glej sliko 8.9.

Ker je  $D$  del kroga, integral zapišemo v polarnih koordinatah, pri čemer uporabimo Izrek 8.7 in upoštevamo, da je vrednost determinante Jacobijeve matrike pri prehodu v polarne koordinate enaka  $|J| = r$ . Dobimo

$$\iint_D x \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 r \cos \varphi \cdot r \, dr = \frac{8}{3}.$$



Slika 8.9: Integracijsko območje  $D$  je četrtnina kroga s polmerom 2.

**Vaja 37.** Izračunaj

$$\iint_D (x + y) dx dy,$$

kjer je  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ .

**Vaja 38.** Izračunaj

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy,$$

kjer je  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ .

**Opomba 8.9.** Poleg polarnih koordinat pogosto uporabljamo tudi posplošene polarne koordinate, kjer velja

$$\begin{cases} x = ar \cos \varphi \\ y = br \sin \varphi \end{cases}$$

V posplošenih polarnih koordinatah  $\varphi$  opisuje enak kot, kot v polarnih koordinatah in tako lahko zavzame poljubno vrednost na intervalu  $[0, 2\pi]$ , medtem ko  $r$  pripada intervalu  $[0, 1]$ . Te koordinate ponavadi uporabljamo za opis elipsastih območij  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$  in območij znotraj takšnih elips. Vrednost determinante Jacobijeve matrike pri prehodu iz kartezičnih koordinat v posplošene polarne je  $|J| = abr$ .

**Opomba 8.10.** Polarne (posplošene polarne) koordinate so osnova za definicijo cilindričnih (posplošenih cilindričnih) koordinat, ki jih bomo spoznali v poglavju o trojnem integralu.

## 8.4 Uporaba dvojnega integrala

V tem poglavju podajamo seznam formul za računanje tipičnih fizikalnih količin, ki vključujejo dvojni integral.

**Opomba 8.11.** V nekaterih navedenih formulah se pojavlja gostota lika oz. tanke plošče. To je 'površinska' gostota  $\rho = \rho(x, y)$ , torej gostota, ki je podana v enoti mase na enoto površine, npr. v  $\text{kg}/\text{m}^2$ .

### 8.4.1 Ploščina lika

Ploščina lika  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  je

$$S = \iint_D dx dy.$$

**Vaja 39.** Izračunaj ploščino kroga s polmerom  $a$ .

### 8.4.2 Volumen pod ploskvijo

Volumen območja nad likom  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  in pod ploskvijo  $z = f(x, y)$  je

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

**Vaja 40.** Izračunaj volumen krogle s polmerom  $a$ .

### 8.4.3 Statični moment

Statični moment tanke plošče  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  z gostoto  $\varrho = \varrho(x, y)$  glede na premico  $p$  je

$$I = \iint_D d(x, y) \varrho(x, y) dx dy,$$

kjer je  $d(x, y)$  razdalja točke  $(x, y)$  do premice  $p$ .

V praksi nas največkrat zanimata statična momenta tanke plošče  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  glede na os  $x$  in glede na os  $y$ , ki sta enaka

$$I_x = \iint_D y \varrho(x, y) dx dy,$$

$$I_y = \iint_D x \varrho(x, y) dx dy.$$



### 8.4.4 Masa

Masa tanke plošče  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  z gostoto  $\rho = \rho(x, y)$  je

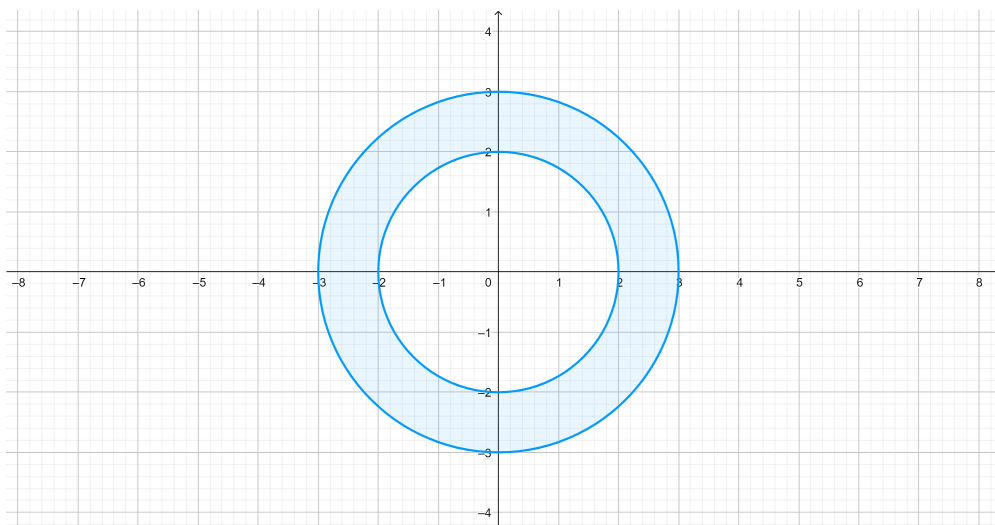
$$m = \iint_D \rho(x, y) dx dy.$$

**Opomba 8.12.** Produktu  $\rho(x, y) dx dy$  rečemo diferencial mase (lika oz. tanke plošče) in ga krajše označimo z  $dm$ , torej

$$dm = \rho(x, y) dx dy.$$

**Zgled 32.** Izračunajmo maso lika  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$  z gostoto  $\rho(x, y) = y^4$ .

Lik  $D$  najprej narišemo v koordinatni sistem, glej sliko 8.10. Ker je  $D$  krožni



Slika 8.10: Integracijsko območje  $D$  je omejeno z dvema krožnicama.

kolobar, bomo integral za izračun mase razpisali v polarnih koordinatah, pri čemer upoštevamo vrednost determinante Jacobijeve matrike  $|J| = r$ . Dobimo

$$m = \iint_D \rho(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \left( \int_2^3 (r \sin \varphi)^4 \cdot r dr \right) d\varphi = \frac{665}{8} \pi.$$

**Vaja 41.** Izračunaj maso trikotnika z gostoto  $\rho(x, y) = x + y$ , ki je omejen s premicami  $x = 1$ ,  $y = 0$  in  $y = 2x$ .

### 8.4.5 Težišče

Težišče tanke plošče  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  z gostoto  $\varrho = \varrho(x, y)$  in maso  $m$  je točka  $T(x_T, y_T)$ , kjer je

$$x_T = \frac{I_y}{m} \text{ in } y_T = \frac{I_x}{m}.$$

Če formule razpišemo, dobimo

$$x_T = \frac{\iint_D x \varrho(x, y) dx dy}{\iint_D \varrho(x, y) dx dy} \text{ in } y_T = \frac{\iint_D y \varrho(x, y) dx dy}{\iint_D \varrho(x, y) dx dy},$$

oziroma

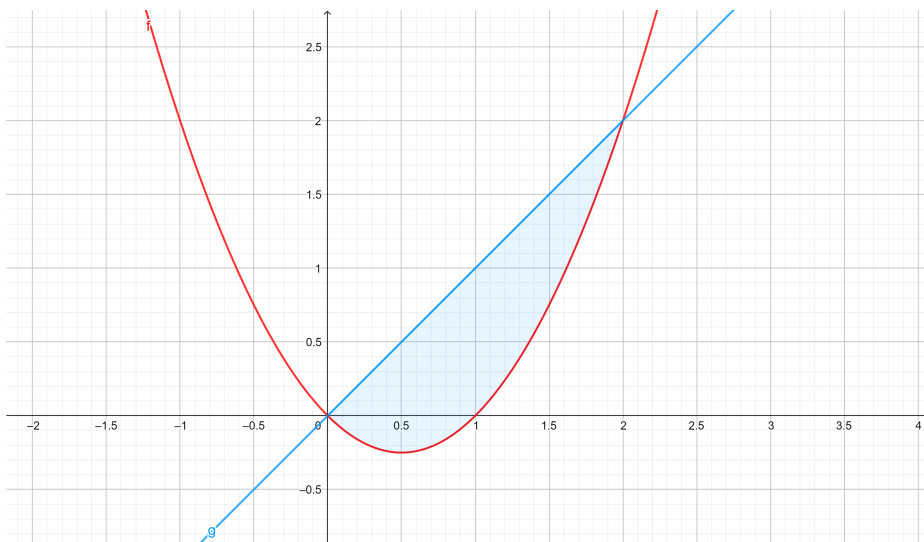
$$\boxed{x_T = \frac{\iint_D x dm}{m} \text{ in } y_T = \frac{\iint_D y dm}{m}.}$$

Ko je lik oz. tanka plošča  $D$  homogena, tj. gostota je konstantna  $\varrho(x, y) = \varrho_0$ , težišče ni odvisno od gostote, zgornji formuli pa se poenostavita tako

$$x_T = \frac{\iint_D x dx dy}{S} \text{ in } y_T = \frac{\iint_D y dx dy}{S}.$$

**Zgled 33.** Izračunajmo težišče tanke plošče  $D$ , ki leži med krivuljama  $y = x^2 - x$  in  $y = x$ , če je njena gostota  $\varrho(x, y) = x^2 + 1$ .

Lik  $D$  najprej narišemo v koordinatni sistem, glej sliko 8.11. Nato izračunamo



Slika 8.11: Integracijsko območje  $D$  je omejeno s parabolo in premico.

urednosti integralov, ki nastopajo v formulah za težišče. Dobimo

$$\begin{aligned}
 m &= \iint_D \varrho(x, y) \, dx \, dy = \int_0^2 \left( \int_{x^2-x}^x (x^2 + 1) \, dy \right) dx = \frac{44}{15}, \\
 \iint_D x \varrho(x, y) \, dx \, dy &= \int_0^2 \left( \int_{x^2-x}^x x(x^2 + 1) \, dy \right) dx = \frac{52}{15}, \\
 \iint_D y \varrho(x, y) \, dx \, dy &= \int_0^2 \left( \int_{x^2-x}^x y(x^2 + 1) \, dy \right) dx = \frac{244}{105}.
 \end{aligned}$$

Težišče tanke plošče  $D$  je točka

$$T\left(\frac{13}{11}, \frac{61}{77}\right).$$

**Vaja 42.** Izračunaj težišče tanke plošče  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  z gostoto  $\varrho(x, y) = x^2 + y^2$ .

### 8.4.6 Vztrajnostni moment

Vztrajnostni moment tanke plošče  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  z gostoto  $\varrho = \varrho(x, y)$  glede na premico  $p$  je

$$J = \iint_D d^2(x, y) \varrho(x, y) \, dx \, dy,$$

kjer je  $d(x, y)$  razdalja točke  $(x, y)$  do premice  $p$ .

Največkrat nas zanimata vztrajnostna momenta tanke plošče  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  glede na os  $x$  in glede na os  $y$ , ki sta enaka

$$J_x = \iint_D y^2 \varrho(x, y) \, dx \, dy \quad \text{in} \quad J_y = \iint_D x^2 \varrho(x, y) \, dx \, dy,$$

oziroma

$$J_x = \iint_D y^2 \, dm \quad \text{in} \quad J_y = \iint_D x^2 \, dm.$$

**Opomba 8.13.** Vztrajnostni momenti glede na isto os se seštevajo. Če je torej lik  $D$  enak vsoti likov  $D = \sum_{k=1}^n D_k$ , tedaj je vztrajnostni moment lika  $D$  enak vsoti vztrajnostnih momentov  $I_k$  posameznih likov  $D_k$  glede na isto os:

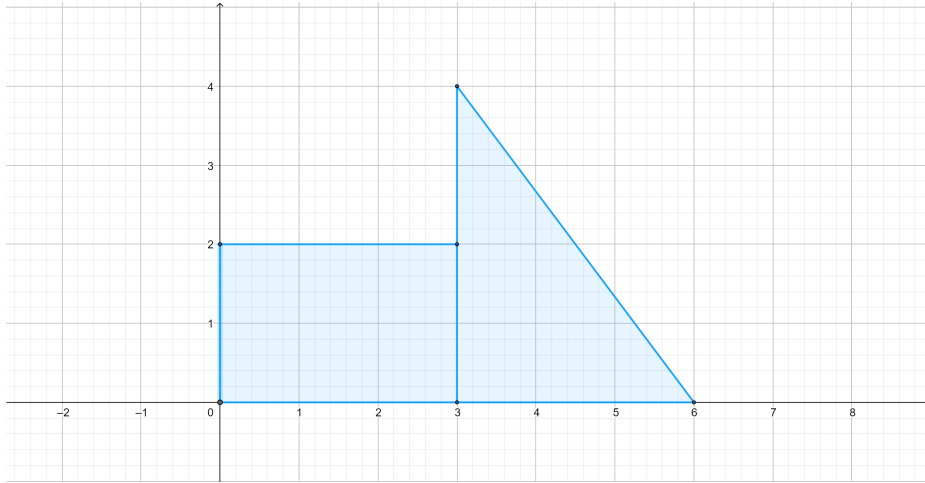
$$I = \sum_{k=1}^n I_k.$$

**Opomba 8.14.** Vztrajnostni moment pove, koliko navora bi potrebovali, da bi neko telo zavrteli ali vrteče se telo ustavili.

## 8.4. UPORABA DVOJNEGA INTEGRALA

**Opomba 8.15.** Vztrajnostni moment pove tudi kakšen odpor nudi prečen prerez telesa, torej prerez pravokoten na os, proti upogibanju.

**Zgled 34.** Izračunajmo vztrajnostni moment lika  $D$ , ki je na sliki 8.12, glede na os  $x$ , če se njegova gostota spreminja v skladu z zakonom  $\varrho(x, y) = x + y$ .



Slika 8.12: Območje  $D$  je unija pravokotnika in trikotnika.

Opazimo, da je lik sestavljen iz dveh enostavnih delov, pravokotnika  $D_1$  in trikotnika  $D_2$ . Ker se vztrajnostni momenti seštevajo, najprej izračunamo vztrajnostna momenta lika  $D_1$  in  $D_2$ , pri čemer dobimo

$$I_1 = \iint_{D_1} y^2 \varrho(x, y) dx dy = \int_0^3 \left( \int_0^2 y^2 (x + y) dy \right) dx = 24,$$

$$I_2 = \iint_{D_2} y^2 \varrho(x, y) dx dy = \int_3^6 \left( \int_0^{-\frac{4}{3}x+8} y^2 (x + y) dy \right) dx = 96.$$

Vztrajnostni moment celotnega lika je zato enak

$$I = I_1 + I_2 = 120.$$

**Vaja 43.** Izračunaj vztrajnostni momen homogenega enakokrakega trikotnika gostote  $\varrho_0$  z osnovnico  $b$  in višino  $h$  glede na osnovnico.

## Poglavje 9

# Trojni integral

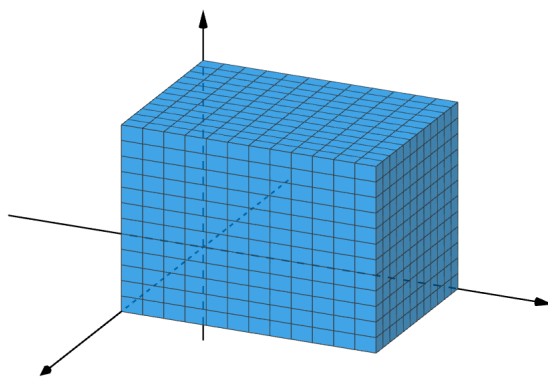
Denimo, da imamo funkcijo treh spremenljivk  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ , kjer je  $G \subseteq \mathbb{R}^3$  območje v prostoru, ki je zaprto in omejeno. V tem poglavju bomo po korakih vpeljali trojni integral

$$\iiint_G f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

nato si bomo ogledali, kako tak integral izračunamo, ob koncu pa bomo predstavili še njegovo uporabno vrednost.

### 9.1 Vpeljava trojnega integrala

1. Območje  $G$  razdelimo na majhne kvadre z ravninami, ki so vzporedne s koordinatnimi ravninami  $xy$ ,  $xz$  in  $yz$ , glej sliko 9.1.



Slika 9.1: Delitev območja  $G$ .

2. Kvadre oštevilčimo od 1 do  $n$  in jih označimo z  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , njihove volumnne pa z  $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$ . Pri tem upoštevamo samo tiste kvadre, ki so v celoti znotraj območja  $G$ .
3. Dolžino diagonale največjega kvadra označimo z  $\delta$ .
4. V vsakem kvadru  $V_k$  izberemo eno točko  $(x_k, y_k, z_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$ .
5. Definiramo *Riemannovo integralsko vsoto* funkcije  $f$  po območju  $G$ :

$$R_f = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k.$$

6. Trojni integral  $\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz$  definiramo kot limito integralske vsote:

$$\boxed{\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k.}$$

## 9.2 Povezava s trikratnim integralom

V tem razdelku bomo pokazali, kako s pomočjo trikratnega integrala izračunamo trojni integral.

**Izrek 9.1** (Osnovni izrek o trojnem integralu). *Naj bo  $f$  zvezna funkcija na območju*

$$G = [a, b] \times [c, d] \times [p, q].$$

*Potem je trojni integral po območju  $G$  enak trikratnemu integralu*

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_p^q f(x, y, z) dz.$$

**Opomba 9.2.** *Zgornji izrek pove, da trojni integral po kvadru izračunamo tako, da trikrat izračunamo enojni integral.*

**Vaja 44.** *Izračunaj*

$$\iiint_G (x^2 + xyz) dx dy dz,$$

*kjer je  $G = [-1, 1] \times [0, 3] \times [2, 4]$ .*

**Vaja 45.** *Izračunaj*

$$\iiint_G (x + xy \sin z) dx dy dz,$$

*kjer je  $G = [-2, 0] \times [1, 4] \times [0, \pi]$ .*

**Izrek 9.3.** Če je območje, po katerem integriramo, enako kvadru, lahko vrstni red integriranja zamenjamo, npr.

$$\int_a^b dx \int_c^d dy \int_p^q f(x, y, z) dz = \int_c^d dy \int_p^q dz \int_a^b f(x, y, z) dx.$$

Zaenkrat smo se naučili kako izračunati trojni integral funkcije  $f$  po območju, ki ima obliko kvadra. V nadaljevanju bomo pokazali, kako izračunamo trojni integral po območjih drugačnih oblik.

**Izrek 9.4.** Naj bo območje  $G$  v prostoru omejeno z dvema ploskvama, spodaj s ploskvijo  $z = z_1(x, y)$  in zgoraj s ploskvijo  $z = z_2(x, y)$ . Projekcija območja  $G$  na ravnino  $xy$  naj bo območje  $D$  omejeno z dvema krivuljama, spodaj z  $y = y_1(x)$  in zgoraj z  $y = y_2(x)$ . Projekcija območja  $D$  na os  $x$  naj bo interval  $[a, b]$ . Potem velja:

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz.$$

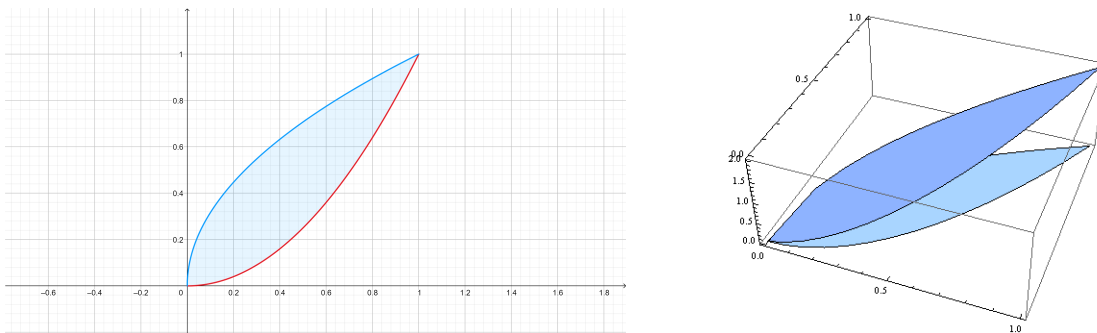
**Zgled 35.** Izračunajmo vrednost trojnega integrala

$$\iiint_G xy dx dy dz$$

po območju

$$G = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq z \leq x + y\}.$$

Praden razpišemo meje za integral, si oglejmo območje  $G$ . To je območje, ki leži nad likom  $D$  (glej sliko 9.2, levo) in se razteza med ravninama  $z = 0$  in  $z = x + y$  (glej sliko 9.2, desno).



Slika 9.2: Mejni ploskvi integracijskega območja  $G$  (desno) in njegova projekcija na ravnino  $xy$  (levo).

Po izreku 9.4 lahko integral razpišemo in izračunamo tako

$$\iiint_G xy \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy \int_0^{x+y} xy \, dz = \frac{3}{28}.$$

**Vaja 46.** Izračunaj trojni integral

$$\iiint_G x \, dx \, dy \, dz,$$

kjer  $G$  predstavlja območje v prvem oktantu pod ravnino  $x + 2y + z = 1$ .

## 9.3 Vpeljava novih spremenljivk v trojni integral

Podobno kot v ravnini se tudi v prostoru pogosto spoprijemamo z območji, ki jih je v kartezičnih koordinatah težko ali nemogoče opisati. V takšnih primerih v integral vpeljemo nove spremenljivke oz. novi koordinatni sistem. Najprepoznavnejša med njimi sta cilindrični in sferični koordinatni sistem, ki smo ju spoznali že v poglavju 5, podrobneje pa sta predstavljena v nadaljevanju. Pred tem zapišimo še izrek o prehodu trojnega integrala v nov koordinatni sistem.

**Izrek 9.5.** Naj bodo  $x(u, v, w)$ ,  $y(u, v, w)$  in  $z(u, v, w)$  zvezno parcialno odvedljive funkcije na območju  $G$ . Naj bo

$$J = \begin{bmatrix} x_u(u, v, w) & x_v(u, v, w) & x_w(u, v, w) \\ y_u(u, v, w) & y_v(u, v, w) & y_w(u, v, w) \\ z_u(u, v, w) & z_v(u, v, w) & z_w(u, v, w) \end{bmatrix}$$

Jacobijeva matrika in naj bo njena determinanta pozitivna (ali negativna) povsod na  $G$ . Potem velja

$$\boxed{\iiint_G f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\Delta} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| \, du \, dv \, dw,}$$

kjer je  $|J|$  absolutna vrednost determinante Jacobijeve matrike in  $G$  slika območja  $\Delta$  glede na funkcijo  $\vec{r}(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ .

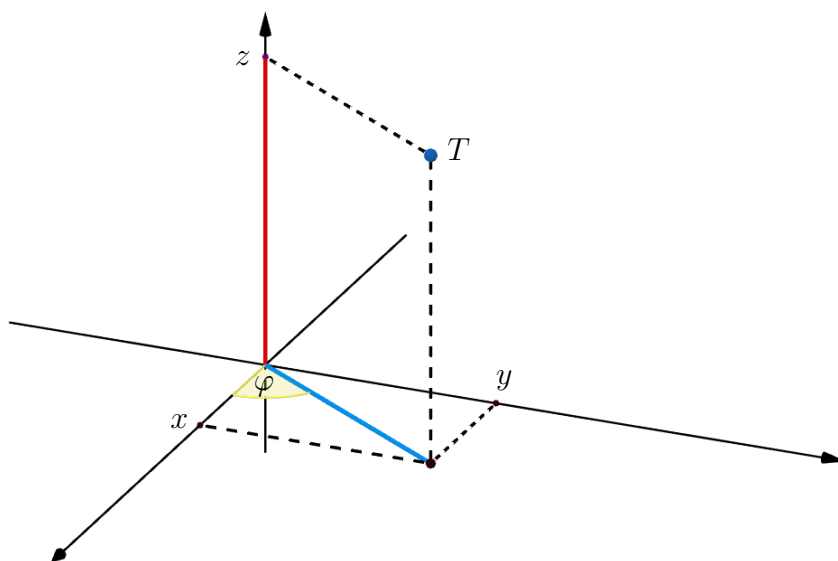
### 9.3.1 Cilindrične koordinate

Točko v cilindričnem koordinatnem sistemu podamo s tremi števili, ki jih imenujemo *cilindrične koordinate*, glej sliko 9.3:

1. Prva koordinata točke  $T$  je kot  $\varphi$ , ki ga določata pozitivni poltrak osi  $x$  in poltrak, ki poteka od koordinatnega izhodišča skozi projekcijo točke  $T$  na  $xy$  ravnino. Ponavadi ga podamo na intervalu  $[0, 2\pi]$ .



2. Druga koordinata točke  $T$  je radij  $r$ , ki meri oddaljenost točke  $T$  do osi  $z$ . Radij podamo na intervalu  $[0, \infty)$ .
3. Tretja koordinata točke  $T$  je pravokotna projekcija točke na os  $z$  in sovpada s tretjo koordinato točke, zapisane v kartezičnih koordinatah. Tako kot v kartezičnih, lahko tudi tukaj  $z$  zavzame poljubno realno vrednost.



Slika 9.3: Cilindrične koordinate.

S pomočjo preproste trigonometrije izrazimo kartezične koordinate s cilindričnimi tako:

$x = r \cos \varphi$ $y = r \sin \varphi$ $z = z$
---

**Opomba 9.6.** *Cilindrične koordinate so polarne koordinate, ki jih prenesemo v prostor in jim dodamo koordinato  $z$ .*

**Opomba 9.7.** *V poglavju 5 smo cilindrične koordinate vpeljali s pomočjo funkcije  $\vec{r}(r, \varphi, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ,  $r \in [0, \infty)$ ,  $z \in \mathbb{R}$ . Zgoraj smo razložili še geometrijski pomen teh koordinat.*

### 9.3. VPELJAVA NOVIH SPREMENLJIVK V TROJNI INTEGRAL

---

Cilindrične koordinate večinoma uporabljamo pri računanju integralov po območjih, ki so enaka valju ali delu valja. V takšnih primerih ponavadi preidemo iz integrala, zapisanega v kartezičnih koordinatah, v integral, zapisan v cilindričnih koordinatah. Vrednost determinante Jacobijeve matrike pri prehodu iz kartezičnih koordinat v cilindrične je

$$|J| = r.$$

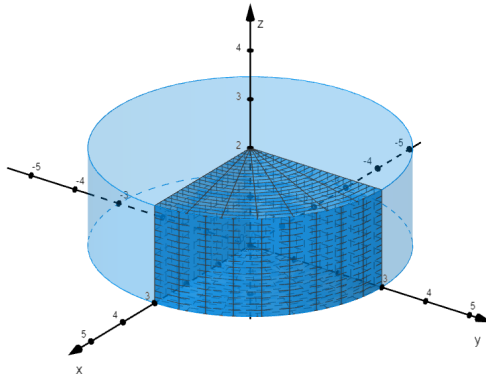
**Zgled 36.** Izračunajmo vrednost trojnega integrala

$$\iiint_G x \, dx \, dy \, dz,$$

kjer je

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 2\}.$$

Najprej skiciramo območje  $G$ , glej sliko 9.4.



Slika 9.4: Integracijsko območje  $G$ .

Ugotovimo, da je  $G$  izsek valja, ki ga veliko preprosteje kot v kartezičnih opišemo v cilindričnih koordinatah. Zato integral pretvorimo v cilindrične koordinate, pri čemer uporabimo izrek 9.5 in upoštevamo, da je vrednost determinante Jacobijeve matrike tega prehoda enaka  $|J| = r$ . Dobimo

$$\iiint_G x \, dx \, dy \, dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^3 \left( \int_0^2 (r^2 \cos \varphi) \, dz \right) dr \right) d\varphi = 18.$$

**Vaja 47.** Izračunaj

$$\iiint_G (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) dx dy dz,$$

kjer je območje  $G$  omejeno z valjem  $x^2 + y^2 = 1$  ter ravninama  $z = 0$  in  $z = 1$ .

**Vaja 48.** Izračunaj

$$\iiint_G (x^2 + y^2) dx dy dz,$$

kjer je območje  $G$  omejeno s paraboloidom  $x^2 + y^2 = 3z$  in ravnino  $z = 3$ .

**Opomba 9.8.** Poleg cilindričnih koordinat pogosto uporabljamo tudi posplošene cilindrične koordinate, kjer velja

$\begin{aligned} x &= ar \cos \varphi \\ y &= br \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned}$
--

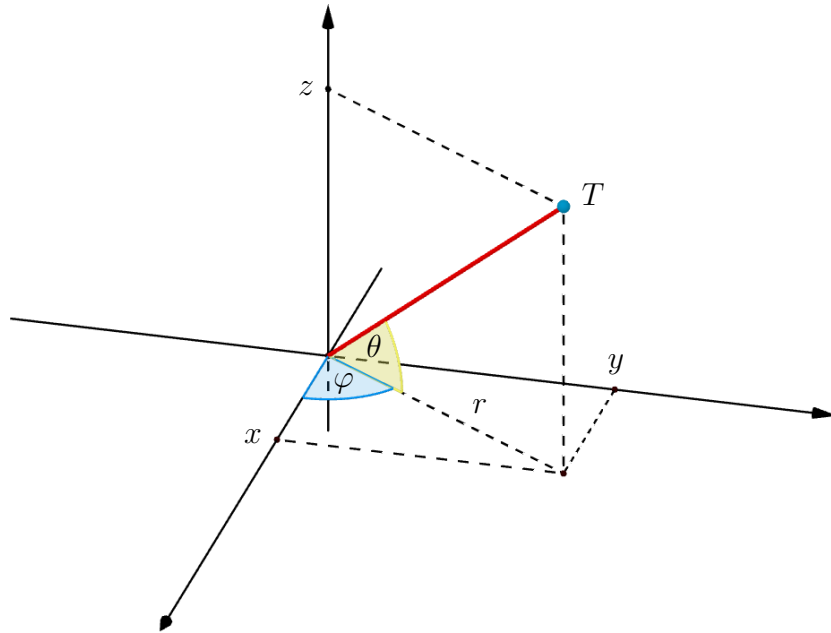
V posplošenih cilindričnih koordinatah  $\varphi$  opisuje enak kot, kot pri cilindričnih koordinatah, medtem ko  $r$  pripada intervalu  $[0, 1]$ . Te koordinate ponavadi uporabljamo za opis eliptičnih valjev  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$  in območij znotraj njih. Vrednost determinante Jacobijeve matrike pri prehodu iz kartezičnih koordinat v posplošene cilindrične je  $|J| = abr$ .

**Opomba 9.9.** Cilindričnim (posplošenim cilindričnim) koordinatam rečemo tudi valjne (posplošene valjne) koordinate.

### 9.3.2 Sferične koordinate

Točko v sferičnem koordinatnem sistemu podamo s tremi števili, ki jih imenujemo *sferične koordinate* (glej sliko 9.5):

1. Prva koordinata točke  $T$  je kot  $\varphi$ , ki ga določata pozitivni poltrak osi  $x$  in poltrak, ki poteka od koordinatnega izhodišča skozi projekcijo točke  $T$  na ravnino  $xy$ . Ponavadi ga podamo na intervalu  $[0, 2\pi]$ .
2. Druga koordinata točke  $T$  je kot  $\theta$ , ki ga poltrak, ki poteka od koordinatnega izhodišča skozi točko  $T$ , oklepa z ravnino  $xy$ . Ponavadi ga podamo na intervalu  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .
3. Tretja koordinata točke  $T$  je radij  $r$ , ki meri oddaljenost točke  $T$  do koordinatnega izhodišča. Radij podamo na intervalu  $[0, \infty)$ .



Slika 9.5: Sferične koordinate.

Z uporabo trigonometrije dobimo povezavo sferičnih koordinat s kartezičnimi:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \cos \varphi \\ y &= r \cos \theta \sin \varphi \\ z &= r \sin \theta \end{aligned}$$

**Opomba 9.10.** V poglavju 5 smo sferične koordinate vpeljali s pomočjo funkcije  $\vec{r}(r, \varphi, \theta) = (r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ,  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $r \in [0, \infty)$ . Zgoraj smo razložili še geometrijski pomen teh koordinat.

Sferične koordinate večinoma uporabljamo pri računanju integralov po območjih, ki so enaka krogli ali delu krogle. V takšnih primerih ponavadi preidemo iz integrala, zapisanega v kartezičnih koordinatah, v integral, zapisan v sferičnih koordinatah. Vrednost determinante Jacobijeve matrike pri prehodu iz kartezičnih koordinat v sferične je

$$|J| = r^2 \cos \theta$$

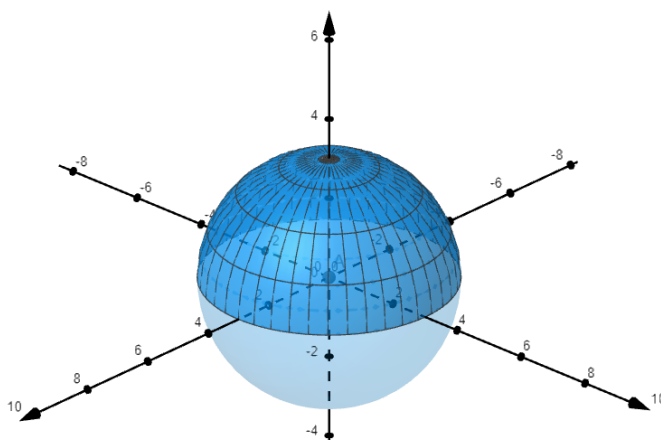
**Zgled 37.** Izračunajmo vrednost trojnega integrala

$$\iiint_G z \, dx \, dy \, dz,$$

kjer je

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq 0\}.$$

Najprej skiciramo območje  $G$ , glej sliko 9.6.



Slika 9.6: Integracijsko območje  $G$ .

Ugotovimo, da je  $G$  polkrogla, ki jo veliko preprosteje kot v kartezičnih opišemo v sferičnih koordinatah. Zato integral pretvorimo v sferične koordinate, pri čemer upoštevamo vrednost determinante Jacobijeve matrike tega prehoda. Dobimo

$$\iiint_G z \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^3 (r^3 \cos \theta \sin \theta) \, dr \right) d\theta \right) d\varphi = \frac{81}{4}\pi.$$

**Vaja 49.** Izračunaj

$$\iiint_G \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz,$$

kjer je  $G$  območje omejeno s sfero  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ .

**Vaja 50.** Izračunaj

$$\iiint_G xyz \, dx \, dy \, dz,$$

kjer je  $G$  del krogle  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ , ki leži v prvem oktantu (prvi oktant je določen z neenačbami  $x \geq 0, y \geq 0$  in  $z \geq 0$ ).

**Opomba 9.11.** Poleg sferičnih koordinat pogosto uporabljamo tudi posplošene sferične koordinate, kjer velja

$$\begin{aligned} x &= ar \cos \theta \cos \varphi \\ y &= br \cos \theta \sin \varphi \\ z &= cr \sin \theta \end{aligned}$$

V posplošenih cilindričnih koordinatah kota  $\varphi$  in  $\theta$  opisujeta enaka kota, kot pri sferičnih koordinatah, medtem ko  $r$  pripada intervalu  $[0, 1]$ . Te koordinate ponavadi uporabljamo za opis elipsoidov  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  in območij znotraj njih. Vrednost determinante Jacobijeve matrike pri prehodu iz kartezičnih koordinat v posplošene sferične je  $|J| = abcr^2 \cos \theta$ .

**Opomba 9.12.** Sferičnim (posplošenim sferičnim) koordinatam rečemo tudi krogelne (posplošene krogelne) koordinate.

## 9.4 Uporaba trojnega integrala

V tem poglavju podajamo seznam formul za računanje tipičnih fizikalnih količin, v katerih se pojavlja trojni integral.

### 9.4.1 Volumen

Volumen območja  $G \subseteq \mathbb{R}^3$  je

$$V = \iiint_G dx \, dy \, dz$$

**Vaja 51.** Izračunaj volumen krogle s polmerom  $a$ .

### 9.4.2 Statični moment

Statični moment telesa  $G \subseteq \mathbb{R}^3$  z gostoto  $\varrho = \varrho(x, y, z)$  glede na premico  $p$  je

$$I = \iiint_G \varrho(x, y, z) d(x, y, z) \, dx \, dy \, dz,$$

kjer je  $d(x, y, z)$  razdalja točke  $(x, y, z)$  do premice  $p$ .

Največkrat nas zanimajo statični momenti telesa  $G \subseteq \mathbb{R}^3$  glede na os  $x$ , os  $y$  in glede na os  $z$ , ki so enaki

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint_G \sqrt{y^2 + z^2} \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \\ I_y &= \iiint_G \sqrt{x^2 + z^2} \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \\ I_z &= \iiint_G \sqrt{x^2 + y^2} \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz. \end{aligned}$$

Izračunamo lahko tudi statične momente glede na ravnine  $xy$ ,  $xz$  in  $yz$ :

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \iiint_G z \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \\ I_{xz} &= \iiint_G y \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \\ I_{yz} &= \iiint_G x \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz. \end{aligned}$$

### 9.4.3 Masa

Masa telesa  $G \subseteq \mathbb{R}^3$  z gostoto  $\rho = \rho(x, y, z)$  je

$$m = \iiint_G \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

**Opomba 9.13.** Produktu  $\rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$  rečemo diferencial mase in ga krajše označimo z  $dm$ , torej

$$dm = \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

**Zgled 38.** Izračunajmo maso valja

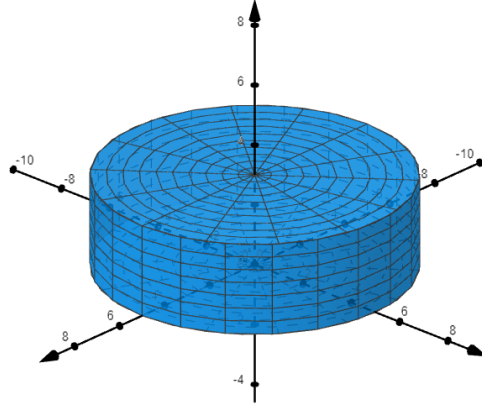
$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 25, 0 \leq z \leq 3\}$$

z gostoto  $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$ . Območje  $G$  najprej narišemo v koordinatni sistem, glej sliko 9.7.

Ker je  $G$  valj, uporabimo cilindrične koordinate, pri čemer gostoto zapišemo tako  $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2$  in upoštevamo vrednost determinante Jacobijeve matrike  $|J| = r$ . Torej

$$m = \iiint_G \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^5 \left( \int_0^3 (r^2 \cdot r) \, dz \right) dr \right) d\varphi = \frac{1875}{2} \pi.$$

**Vaja 52.** Izračunaj maso prizme, ki leži med  $z = 0$  in  $z = 4$ , njena osnovna ploskev pa je pravokotni trikotnik, ki leži v ravnini  $xy$  in je omejen s koordinatnima osema ter premico  $y = -3x + 3$ .



Slika 9.7: Integracijsko območje  $G$ .

#### 9.4.4 Težišče

Težišče telesa  $G \subseteq \mathbb{R}^3$  z gostoto  $\rho = \rho(x, y, z)$  in maso  $m$  je točka  $T(x_T, y_T, z_T)$ , kjer je

$$x_T = \frac{I_{yz}}{m} \quad \text{in} \quad y_T = \frac{I_{xz}}{m} \quad z_T = \frac{I_{xy}}{m}.$$

Če formule razpišemo, dobimo

$$x_T = \frac{\iiint_G x \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{\iiint_G \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}, \quad y_T = \frac{\iiint_G y \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{\iiint_G \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz},$$

$$z_T = \frac{\iiint_G z \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{\iiint_G \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}.$$

oziroma

$$\boxed{x_T = \frac{\iiint_G x \, dm}{m}, \quad y_T = \frac{\iiint_G y \, dm}{m}, \quad z_T = \frac{\iiint_G z \, dm}{m}.$$

Če je telo  $G$  homogeno, tj. gostota je konstantna  $\rho(x, y, z) = \rho_0$ , težišče ni odvisno od gostote, zgornje formule pa se poenostavijo tako

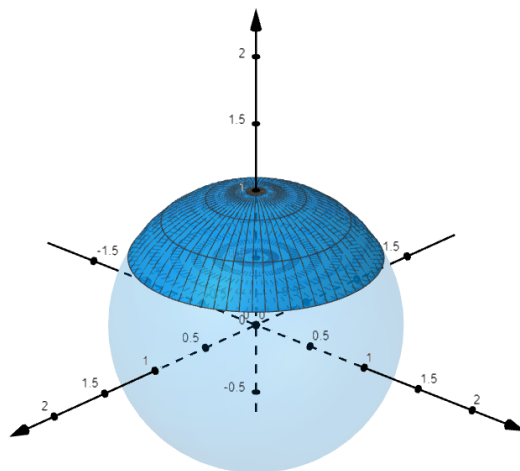
$$x_T = \frac{\iiint_G x \, dx \, dy \, dz}{V}, \quad y_T = \frac{\iiint_G y \, dx \, dy \, dz}{V}, \quad z_T = \frac{\iiint_G z \, dx \, dy \, dz}{V}.$$



**Zgled 39.** Izračunajmo težišče homogenega telesa

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \frac{1}{2}\}.$$

Telo  $G$  najprej narišemo v koordinatni sistem, glej sliko 9.8.



Slika 9.8: Integracijsko območje  $G$ .

Ker je telo homogeno, težišče ni odvisno od gostote. Tako prvi koordinati lahko zaradi simetrije telesa zapišemo brez računanja:

$$x_T = 0, \quad y_T = 0.$$

Za izračun tretje koordinate uporabimo formulo

$$z_T = \frac{\iiint_G z \, dx \, dy \, dz}{V},$$

kjer integrale razpišemo v sferičnih koordinatah, pri čemer upoštevamo vrednost determinante Jacobijeve matrike  $|J| = r^2 \cos \theta$ . Torej

$$\iiint_G z \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \left( \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_{\frac{1}{2\sin\theta}}^1 (r \sin \theta \cdot r^2 \cos \theta) \, dr \right) d\theta \right) d\varphi = \frac{9\pi}{64}$$

in

$$V = \iiint_G dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \left( \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_{\frac{1}{2\sin\theta}}^1 (r^2 \cos \theta) \, dr \right) d\theta \right) d\varphi = \frac{5\pi}{24}.$$

Oziroma

$$z_T = \frac{\frac{9\pi}{64}}{\frac{9\pi}{24}} = \frac{27}{40}.$$

S tem je račun zaključen, težišče telesa  $G$  je točka

$$T\left(0, 0, \frac{27}{40}\right).$$

**Vaja 53.** Izračunaj težišče kvadra  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 2]$  z gostoto  $\rho(x, y, z) = 9 - z^3$ .

### 9.4.5 Vztrajnostni moment

Vztrajnostni moment telesa  $G \subseteq \mathbb{R}^3$  z gostoto  $\rho = \rho(x, y, z)$  glede na premico  $p$  (os vrtenja) je

$$I = \iiint_G d^2(x, y, z) \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

kjer je  $d(x, y, z)$  razdalja točke  $(x, y, z)$  do premice  $p$ .

Največkrat nas zanimajo vztrajnostni momenti glede na os  $x$ , os  $y$  in glede na os  $z$ :

$$I_x = \iiint_G (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_y = \iiint_G (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_z = \iiint_G (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

Oziroma

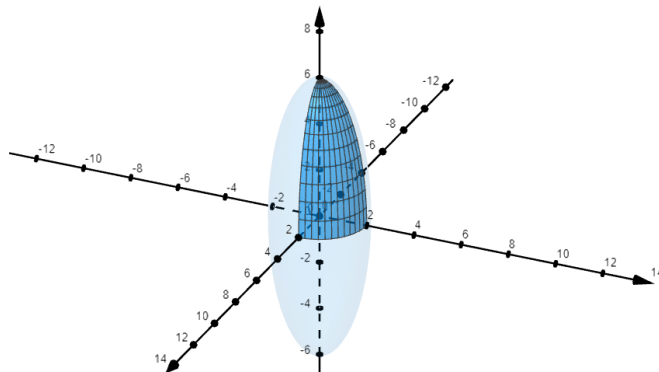
$$I_x = \iiint_G (y^2 + z^2) dm, \quad I_y = \iiint_G (x^2 + z^2) dm, \quad I_z = \iiint_G (x^2 + y^2) dm$$

**Opomba 9.14.** Vztrajnostni moment pove koliko navora potrebujemo, da bomo zavrteli neko telo (ali ustavili vrteče se telo). Velik vztrajnostni moment pomeni, da potrebujemo veliko navora. Vztrajnostni moment tudi pove, kakšen odpor nudi telo proti upogibanju v smeri prečnega prereza telesa.

**Zgled 40.** Izračunajmo vztrajnostni moment telesa  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{36} \leq 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$  glede na os  $z$ , če je njegova gostota  $\rho(x, y, z) = x^2$ .

Območje najprej narišimo v koordinatni sistem, glej sliko 9.9.

Ker je dano območje del elipsoida, bomo integral za izračun vztrajnostnega momenta razpisali v posplošenih sferičnih koordinatah, kjer vrednost determinante Jacobijeve matrike znaša  $|J| = 24r^2 \cos \theta$ . Dobimo



Slika 9.9: Vztrajnostni moment telesa glede na os  $z$ .

$$\begin{aligned}
 I_z &= \iiint_G (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^1 ((4r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + 4r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi) \cdot 4r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi \cdot 24r^2 \cos \theta) \, dr \right) d\theta \right) d\varphi = \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^1 (384 r^6 \cos^5 \theta \cos^2 \varphi) \, dr \right) d\theta \right) d\varphi = \frac{256}{35} \pi.
 \end{aligned}$$

**Vaja 54.** Izračunaj vztrajnostni moment homogene krogle s polmerom  $a$  in gostoto  $\rho$  glede na os, ki poteka skozi središče krogle.

**Vaja 55.** Izračunaj vztrajnostni moment eliptičnega valja  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 6$  glede na os  $z$ , če je njegova gostota  $\rho(x, y, z) = z^2$ .



## Poglavje 10

# Krivuljni integral

### 10.1 Krivuljni integral skalarne funkcije

Denimo, da imamo zvezno skalarno funkcijo  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , kjer je  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ , in gladko krivuljo  $C$ , kjer je  $C \subseteq D$ , z začetno točko  $A$  in končno točko  $B$ . V tem poglavju bomo po korakih vpeljali krivuljni integral skalarne funkcije  $f$

$$\int_C f(x, y, z) ds,$$

ki ga imenujemo tudi krivuljni integral prve vrste. Sledi predstavitev fizikalnega pomena, ob koncu poglavja pa obravnava krivuljnega integrala potencialnega vektorskega polja.

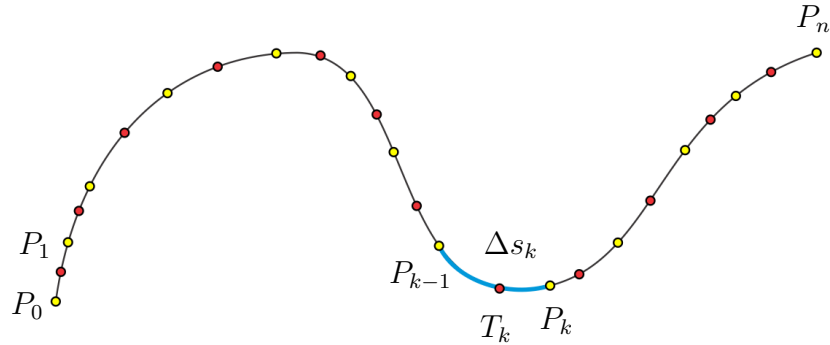
#### 10.1.1 Definicija krivuljnega integrala

1. Krivuljo  $C$  razdelimo na manjše dele s točkami  $P_0, P_1, \dots, P_n$ , kot kaže slika 10.1.
2. Dolžino loka krivulje od točke  $P_{k-1}$  do  $P_k$  označimo z  $\Delta s_k$ .
3. Na vsakem loku dolžine  $\Delta s_k$  izberemo točko  $T_k$ .
4. Z  $\delta$  označimo dolžino najdaljšega odseka:

$$\delta = \max\{\Delta s_k \mid k = 1, \dots, n\}.$$

5. Definiramo *integralsko vsoto* funkcije  $f$  po krivulji  $C$ :

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^n f(T_k) \Delta s_k.$$



Slika 10.1: Krivuljo razdelimo s točkami  $P_0, P_1, \dots, P_n$ .

6. Krivuljni integral definiramo kot limito integralske vsote, kjer  $\delta$  pošljemo prot 0 :

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(T_k) \Delta s_k.$$

Ko je krivulja podana z naravnim parametrom, je zapis integralske vsote, s katero smo definirali krivuljni integral, analogen zapisu integralske vsote za določen integral funkcije  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , kjer je  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Natančneje, velja naslednji izrek.

**Izrek 10.1.** Naj bo krivulja  $C$  podana z naravnim parametrom

$$\vec{r}(s) = (x(s), y(s), z(s)), \quad s \in [\alpha, \beta].$$

Tedaj velja

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(s), y(s), z(s)) ds.$$

Če je krivulja podana s splošnim parametrom  $\vec{r}(t), t \in [a, b]$ , pa lahko v zgornji integral vpeljemo novo spremenljivko  $s = s(t) = \int_{\alpha}^t |\vec{r}'(x)| dx$ , kjer je  $s$  ločna dolžina, in s pomočjo izreka o vpeljavi nove spremenljivke izpeljemo naslednji izrek.

**Izrek 10.2.** Naj bo krivulja  $C$  podana s splošnim parametrom

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [a, b].$$

Tedaj velja

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_\alpha^\beta f(\vec{r}(t)) \cdot |\dot{\vec{r}}(t)| dt.$$

**Opomba 10.3.** Če imamo ravninsko krivuljo  $C$  in skalarno funkcijo  $f(x, y)$ , lahko krivuljni integral  $\int_C f(x, y) ds$  razumemo kot površino plašča, ki se razteza med krivuljo  $C$  in grafom funkcije  $f$ .

**Zgled 41.** Izračunajmo krivuljni integral

$$\int_C x^2 y ds,$$

kjer je  $C$  daljica od koordinatnega izhodišča do točke  $T(2, 3, 5)$ .  
Daljico  $C$  najprej parametriziramo:

$$\vec{r}(t) = t\vec{r}_T = (2t, 3t, 5t), \quad t \in [0, 1].$$

Potrebujemo še

$$\dot{\vec{r}}(t) = (2, 3, 5),$$

$$|\dot{\vec{r}}(t)| = \sqrt{38},$$

nato pa integral izračunamo z uporabo izreka 10.2:

$$\int_C x^2 y ds = \int_0^1 (2t)^2 3t \sqrt{38} dt = 3\sqrt{38}.$$

**Vaja 56.** Izračunaj krivuljni integral

$$\int_C (x^2 + y^2)z ds,$$

kjer je krivulja  $C$  podana s parametrizacijo  $\vec{r}(t) = (\sin 3t, \cos 3t, 4t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

### 10.1.2 Uporaba krivuljnega integrala skalarne funkcije

V tem razdelku podajamo seznam formul za računanje tipičnih fizikalnih količin, v katerih se pojavlja krivuljni integral skalarne funkcije.

**Opomba 10.4.** V večini navedenih formul se pojavlja gostota krivulje. To je 'dolžinska' gostota  $\rho = \rho(x, y, z)$ , torej gostota, ki je podana v enoti mase na enoto dolžine, npr. v kg/m.

### Dolžina krivulje

Dolžina loka krivulje  $C$  s parametrizacijo  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [\alpha, \beta]$  je

$$\ell = \int_C 1 \, ds = \int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\vec{r}}(t)| \, dt.$$

**Zgled 42.** Izračunajmo dolžino krivulje  $\vec{r}(t) = (2t, \sin^2 t, \frac{1}{2} \sin 2t)$  med točkama  $A(0, 0, 0)$  in  $B(\pi, 1, 0)$ .

Najprej ugotovimo, da je  $\vec{r}(0) = A$  in  $\vec{r}(\frac{\pi}{2}) = B$ , kar pomeni, da nas zanima dolžina krivulje s parametrizacijo  $\vec{r}(t) = (2t, \sin^2 t, \frac{1}{2} \sin 2t), t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , ki jo izračunamo po zapisani formuli:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}(t) &= (2, 2 \sin t \cos t, \cos 2t), \\ |\dot{\vec{r}}(t)| &= \sqrt{4 + \sin^2 2t + \cos^2 2t} = \sqrt{5}, \end{aligned}$$

$$\ell = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{5} \, dt = \frac{\sqrt{5}}{2} \pi.$$

**Vaja 57.** Izračunaj dolžino krivulje  $\vec{r}(t) = (2t, t^2, 3 + t), t \in [0, 1]$ .

### Masa krivulje

Naj bo  $\rho(x, y, z)$  gostota krivulje  $C$  v točki  $(x, y, z)$ . Potem je masa krivulje  $C$  s parametrizacijo  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [\alpha, \beta]$  enaka

$$m = \int_C \rho(x, y, z) \, ds = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\vec{r}(t)) \cdot |\dot{\vec{r}}(t)| \, dt.$$

**Zgled 43.** S pomočjo navedene formule na tri decimalke natančno izračunajmo maso krivulje  $\vec{r}(t) = (5 + t^2, 3t, 1 - 2t), t \in [0, 2]$  z gostoto  $\rho(x, y, z) = 4y + 2z - 2$ . Najprej potrebujemo

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}(t) &= (2t, 3, -2), \\ |\dot{\vec{r}}(t)| &= \sqrt{4t^2 + 13}, \\ \rho(\vec{r}(t)) &= 8t, \end{aligned}$$

nato pa z uporabo zgornje formule izračunamo

$$m = \int_0^2 8t \sqrt{4t^2 + 13} \, dt = 72,865.$$

**Vaja 58.** Izračunaj maso krožnice  $x^2 + y^2 = 1, z = 1$  z gostoto  $\rho(x, y, z) = z(x^2 + y^2)$ .



**Težišče krivulje**

Naj bo  $\varrho(x, y, z)$  gostota krivulje  $C$  v točki  $(x, y, z)$ . Potem je težišče krivulje  $C$  s parametrizacijo  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [\alpha, \beta]$  točka  $T(x_T, y_T, z_T)$ , kjer je

$$\boxed{\begin{aligned} x_T &= \frac{\int_C x \varrho(x, y, z) ds}{m} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} x(t) \varrho(\vec{r}(t)) \cdot |\dot{\vec{r}}(t)| dt}{m}, \\ y_T &= \frac{\int_C y \varrho(x, y, z) ds}{m} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} y(t) \varrho(\vec{r}(t)) \cdot |\dot{\vec{r}}(t)| dt}{m}, \\ z_T &= \frac{\int_C z \varrho(x, y, z) ds}{m} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} z(t) \varrho(\vec{r}(t)) \cdot |\dot{\vec{r}}(t)| dt}{m}. \end{aligned}}$$

**Opomba 10.5.** Podobno kot pri tankih ploščah in telesih, tudi tukaj, v primeru, ko gre za homogeno krivuljo (tj. gostota je konstantna), gostoto iz zgornjih formul lahko okrajšamo:

$$x_T = \frac{\int_C x ds}{\ell}, \quad y_T = \frac{\int_C y ds}{\ell}, \quad z_T = \frac{\int_C z ds}{\ell},$$

kjer je  $\ell$  dolžina krivulje  $C$ .

**Zgled 44.** Izračunajmo težišče homogene krivulje

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, y \geq 0, z = 1\}.$$

Krivuljo najprej narišemo v koordinatni sistem, glej sliko 10.2.

Ker je  $C$  homogena krivulja, težišče ni odvisno od gostote, dve koordinati težišča  $T(x_T, y_T, z_T)$  pa lahko, zaradi simetrije krivulje glede na ravnino  $yz$ , ocenimo takoj:

$$x_T = 0, \quad z_T = 1.$$

Za izračun koordinate  $y_T$ , krivuljo  $C$  najprej parametriziramo:

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 1), t \in [0, \pi],$$

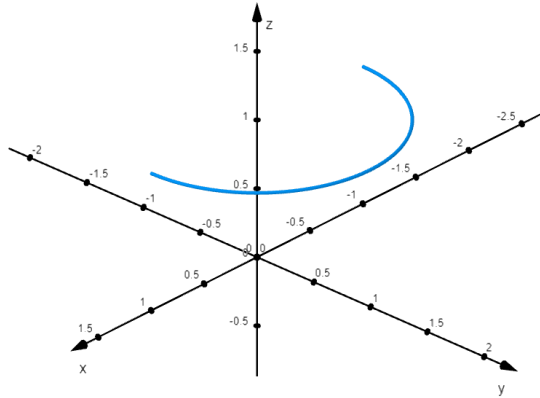
in izračunamo diferencial dolžine:

$$\dot{\vec{r}}(t) = (-\sin t, \cos t, 0),$$

$$|\dot{\vec{r}}(t)| = 1.$$

Nato izračunamo  $y_T$  s pomočjo zapisane formule:

$$\int_C y ds = \int_0^{\pi} \sin t \cdot 1 dt = 2,$$



Slika 10.2: Krivulja  $C$ .

$$\ell = \int_C 1 \, ds = \int_0^\pi 1 \, dt = \pi,$$

$$y_T = \frac{\int_C y \, ds}{\ell} = \frac{2}{\pi}.$$

Težišče krivulje  $C$  je torej

$$T\left(0, \frac{2}{\pi}, 1\right).$$

**Vaja 59.** Izračunaj težišče krivulje s parametrizacijo

$$\vec{r}(t) = (1 + t^2, 2, 3t^2), \quad t \in [0, 5]$$

in gostoto  $\varrho(x, y, z) = x + y$ .

### Vztrajnostni moment krivulje

Naj bo  $\varrho(x, y, z)$  gostota krivulje  $C$  v točki  $(x, y, z)$ . Potem je vztrajnostni moment krivulje  $C$  s parametrizacijo  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [\alpha, \beta]$  glede na premico  $p$  (os vrtenja) enak

$$I = \int_C d^2(x, y, z) \varrho(x, y, z) \, ds = \int_\alpha^\beta d^2(\vec{r}(t)) \varrho(\vec{r}(t)) |\dot{\vec{r}}(t)| \, dt,$$

kjer je  $d(x, y, z)$  razdalja točke  $(x, y, z)$  do premice  $p$ .

Največkrat nas zanimajo vztrajnostni momenti krivulje  $C$  glede na os  $x$ , os  $y$  in glede na os  $z$ :

$$\begin{aligned} I_x &= \int_C (y^2 + z^2) \varrho(x, y, z) ds = \int_\alpha^\beta (y^2(t) + z^2(t)) \varrho(\vec{r}(t)) \cdot |\dot{\vec{r}}(t)| dt, \\ I_y &= \int_C (x^2 + z^2) \varrho(x, y, z) ds = \int_\alpha^\beta (x^2(t) + z^2(t)) \varrho(\vec{r}(t)) \cdot |\dot{\vec{r}}(t)| dt, \\ I_z &= \int_C (x^2 + y^2) \varrho(x, y, z) ds = \int_\alpha^\beta (x^2(t) + y^2(t)) \varrho(\vec{r}(t)) \cdot |\dot{\vec{r}}(t)| dt. \end{aligned}$$

**Zgled 45.** Izračunajmo vztrajnostni moment krivulje

$$\vec{r}(t) = (t^2, 1 - t^2, 5), \quad t \in [1, 3]$$

glede na os  $y$ , če je gostota krivulje enaka  $\varrho(x, y, z) = x + z$ .

Najprej potrebujemo

$$\begin{aligned} \varrho(\vec{r}(t)) &= t^2 + 5, \\ \dot{\vec{r}}(t) &= (2t, -2t, 0), \\ |\dot{\vec{r}}(t)| &= 2\sqrt{2}t, \end{aligned}$$

nato pa po formuli izračunamo

$$I_y = \int_C (x^2 + z^2) \varrho(x, y, z) ds = \int_1^3 (t^4 + 25) \cdot (t^2 + 5) \cdot 2\sqrt{2}t dt = \frac{14560}{3} \sqrt{2}.$$

**Vaja 60.** Izračunaj vztrajnostni moment krivulje

$$\vec{r}(t) = (\sin^2 2t, \cos^2 2t, 3t^2), \quad t \in [0, \pi]$$

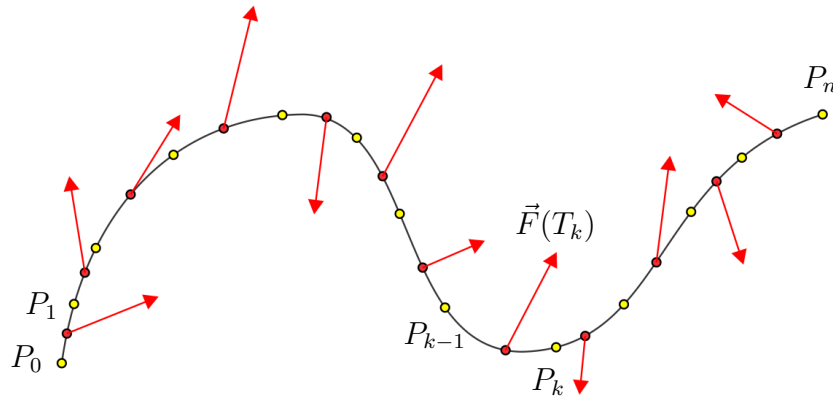
glede na os  $z$ , če je gostota krivulje enaka  $\varrho(x, y, z) = x$ .

## 10.2 Krivuljni integral vektorske funkcije

Denimo, da imamo zvezno vektorsko funkcijo  $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , kjer je  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ , in gladko krivuljo  $C$ , kjer je  $C \subseteq D$ , z začetno točko  $A$  in končno točko  $B$ . V tem poglavju bomo po korakih vpeljali krivuljni integral vektorske funkcije  $\vec{F}$

$$\int_C \vec{F}(x, y, z) d\vec{r},$$

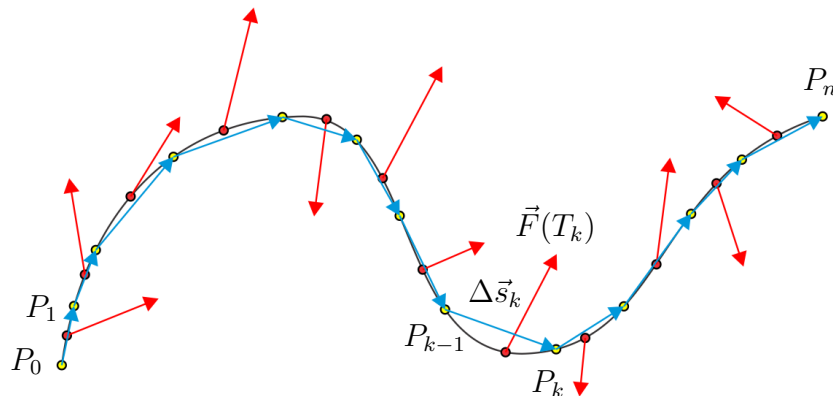
ki ga imenujemo tudi krivuljni integral druge vrste. Temu sledi predstavitev uporabe tega integrala v fiziki.



Slika 10.3: Krivuljo razdelimo s točkami  $P_0, P_1, \dots, P_n$ . Funkcijska vrednost v točki  $T_k$  je vektor  $\vec{F}(T_k)$ .

### 10.2.1 Definicija krivuljnega integrala vektorske funkcije

1. Krivuljo  $C$  najprej razdelimo na manjše dele s točkami  $P_0, P_1, \dots, P_n$ , kot kaže slika 10.3.
2. Na vsakem loku med točkama  $P_{k-1}$  in  $P_k$  izberemo točko  $T_k$ .
3. Vektor  $\overrightarrow{P_{k-1}P_k}$  označimo z  $\Delta\vec{s}_k$ , torej  $\Delta\vec{s}_k = \overrightarrow{P_{k-1}P_k}$ , glej sliko 10.4.



Slika 10.4: Vektor  $\Delta\vec{s}_k$  ima začetek v točki  $P_{k-1}$  in konec v  $P_k$ .

4. Z  $\delta$  označimo dožino najdaljšega vektorja  $\Delta\vec{s}_k$ :

$$\delta = \max\{|\Delta\vec{s}_k| \mid k = 1, \dots, n\}.$$

5. Definiramo *integralsko vsoto* funkcije  $\vec{F}$  po krivulji  $C$ :

$$S_n(\vec{F}) = \sum_{k=1}^n \vec{F}(T_k) \Delta \vec{s}_k.$$

6. Krivuljni integral definiramo kot limito integralske vsote, kjer  $\delta$  pošljemo proti 0:

$$\int_C \vec{F}(x, y, z) d\vec{r} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \vec{F}(T_k) \Delta \vec{s}_k.$$

**Izrek 10.6.** Naj bo  $C$  gladka krivulja s parametrizacijo  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , kjer je  $t \in [\alpha, \beta]$ . Naj bo  $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , kjer je  $C \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^3$ , zvezna funkcija.<sup>1</sup> Potem je

$$\int_C \vec{F}(x, y, z) d\vec{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt.$$

**Izrek 10.7.** Naj bo  $\vec{F}$  vektorska funkcija in  $C$  krivulja v prostoru. Naj bo  $\vec{T} = \vec{T}(x, y, z)$  enotska tangenta na krivuljo  $C$  v točki  $(x, y, z)$ . Potem je

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds.$$

**Opomba 10.8.** Na levi strani formule iz zgornjega izreka imamo krivuljni integral vektorske funkcije  $\vec{F}$ , na desni pa krivuljni integral skalarne funkcije  $\vec{F} \cdot \vec{T}$ .

**Vaja 61.** Podano je vektorsko polje

$$\vec{F}(x, y, z) = (2xy, x^2 + z^2, 2yz).$$

Izračunaj

$$\int_C \vec{F}(x, y, z) d\vec{r},$$

kjer je  $C$  daljica od točke  $A(2, 5, 3)$  do točke  $B(1, 2, -1)$ .

---

<sup>1</sup>Formula velja tudi ob šibkejših pogojih, tj. ob pogoju, da integral na desni strani obstaja.

### 10.2.2 Uporaba krivuljnega integrala vektorske funkcije

Naj bo  $\vec{F}(x, y, z)$  sila, ki deluje na telo, ki se giblje vzdolž krivulje  $C$  s parametrizacijo  $\vec{r}(t), t \in [\alpha, \beta]$  od točke  $A = \vec{r}(\alpha)$  do točke  $B = \vec{r}(\beta)$ . Potem je delo, ki ga opravi sila  $\vec{F}$  vzdolž krivulje  $C$ , enako

$$A = \int_C \vec{F}(x, y, z) d\vec{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt.$$

**Opomba 10.9.** Delu, ki nastopa v zgornji formuli, rečemo tudi delo, ki ga masni delec opravi v polju sil  $\vec{F}$  pri premiku po krivulji  $C$ .

**Zgled 46.** Izračunajmo delo, ki je potrebno za premik delca v polju sil  $\vec{F}(x, y, z) = (z, 1 - x, xy)$  od točke  $A(1, 1, 1)$  do točke  $B(2, 0, 3)$  po daljici  $\overrightarrow{AB}$ . Daljico  $\overrightarrow{AB}$  najprej parametriziramo:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_A + t\overrightarrow{AB}, t \in [0, 1],$$

oziroma

$$\vec{r}(t) = (1 + t, 1 - t, 1 + 2t), t \in [0, 1].$$

Potrebujemo še

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (1 + 2t, -t, 1 - t^2)$$

in

$$\dot{\vec{r}}(t) = (1, -1, 2).$$

Delo za premik delca je po zgornji formuli enako

$$\begin{aligned} A &= \int_C \vec{F}(x, y, z) d\vec{r} \\ &= \int_0^1 (1 + 2t, -t, 1 - t^2) \cdot (1, -1, 2) dt \\ &= \int_0^1 (3 + 3t - 2t^2) dt = \frac{23}{6}. \end{aligned}$$

**Vaja 62.** Izračunaj delo, ki ga masni delec opravi v polju sil

$$\vec{F}(x, y, z) = (8x^2yz, 5z, -4xy)$$

pri premiku vzdolž krivulje  $C$  s parametrizacijo  $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3), t \in [0, 1]$ .

### 10.2.3 Krivuljni integral potencialnega vektorskega polja

Spomnimo se (definicija 6.6), da vektorsko polje  $\vec{F}$  imenujemo *potencialno*, če obstaja skalarna funkcija  $f$ , tako da velja

$$\vec{F} = \text{grad}(f).$$

Funkciji  $f$  tedaj rečemo *potencial* vektorskega polja  $\vec{F}$ .

**Definicija 10.10.** *Krivuljni integral vektorske funkcije  $\vec{F}$  je neodvisen od poti na območju  $D$ , če za poljubni točki  $A$  in  $B$  in poljubni krivulji  $C_1$  in  $C_2$  na območju  $D$ , z začetkom v  $A$  in koncem v  $B$ , velja*

$$\int_{C_1} \vec{F} d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} d\vec{r}.$$

**Izrek 10.11.** *Naj bo  $\vec{F}$  zvezno vektorsko polje na  $D$ . Potem je krivuljni integral*

$$\int_C \vec{F} d\vec{r}$$

*neodvisen od poti na  $D$  natanko tedaj, ko je polje  $\vec{F}$  potencialno.*

**Posledica 10.12.** *Naj bo  $\vec{F}$  potencialno vektorsko polje in  $f$  potencial polja  $\vec{F}$ . Naj bo  $C$  krivulja z začetno točko  $A$  in končno točko  $B$ . Potem velja*

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = f(B) - f(A).$$

**Posledica 10.13.** *Integral*

$$\int_C \vec{F} d\vec{r}$$

*je neodvisen od poti na  $D$  natanko tedaj, ko je integral po vsaki sklenjeni krivulji na  $D$  enak 0.*

**Opomba 10.14.** *Potencial  $f$  potencialnega vektorskega polja  $\vec{F}$  dobimo tako:*

$$f(x, y, z) = \int_T^{(x,y,z)} \vec{F} d\vec{r},$$

*kjer je  $T$  poljubna fiksna točka na  $D$ .*

**Vaja 63.** *Naj bo*

$$f(x, y) = xy^2.$$

*Izračunaj  $\vec{F} = \text{grad}(f)$  in nato*

$$\int_C \vec{F} d\vec{r},$$

## 10.2. KRIVULJNI INTEGRAL VEKTORSKE FUNKCIJE

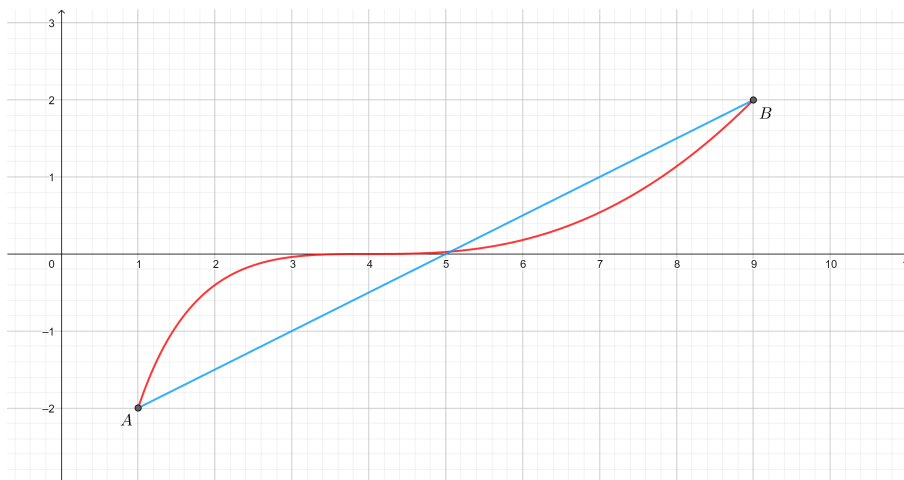
---

kjer je krivulja  $C$  z začetkom v točki  $A(1, -2)$  in koncem v točki  $B(9, 2)$  definirana tako <sup>2</sup>

a)  $C$  je daljica od  $A$  do  $B$ , glej sliko 10.5.

b)  $C$  je krivulja s parametrizacijo  $\vec{r}(t) = (t^2, 2(t-2)^3)$ ,  $t \in [1, 3]$ , glej sliko 10.5.

Integral izračunaj še z uporabo Posledice 10.12.



Slika 10.5: Krivulja  $\vec{r}$  (rdeče) in daljica (modro) s krajiščema  $A$  in  $B$ .

---

<sup>2</sup>V zgledu obravnavamo vektorsko polje in krivuljo v ravnini. Ker celotno ravnino lahko enostavno umestimo v prostor (dodamo tretjo koordinato  $z = 0$ ), veljajo zgoraj zapisane formule tudi v tej situaciji.



# Poglavje 11

## Ploskovni integral

### 11.1 Ploskovni integral skalarne funkcije

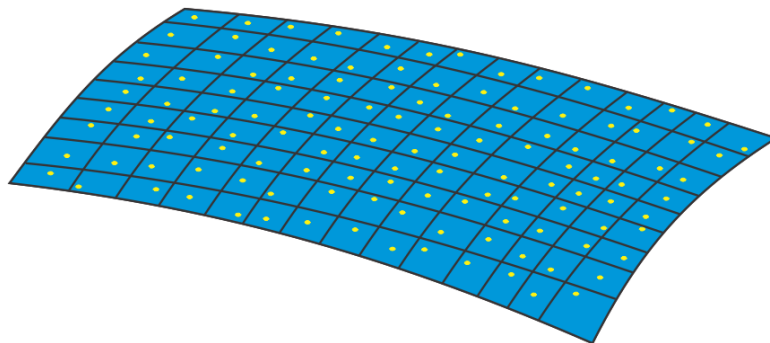
Denimo, da imamo zvezno funkcijo  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , kjer je  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ , in gladko ploskev  $S$ , kjer je  $S \subseteq D$ . V tem poglavju bomo po korakih vpeljali ploskovni integral skalarne funkcije  $f$

$$\iint_S f \, dP,$$

ki ga imenujemo tudi ploskovni integral prve vrste. Temu sledi še predstavitev fizikalnega pomena tega integrala.

#### 11.1.1 Definicija ploskovnega integrala skalarne funkcije

1. Ploskev  $S$  razdelimo na manjše dele s ploščinami  $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ , kot kaže slika 11.1.
2. Na vsakem delu s ploščino  $\Delta s_k$  izberemo točko  $T_k$ .



Slika 11.1: Ploskev razdelimo na majhne dele in v vsakem delu izberemo eno točko.

3. Z  $\delta$  označimo premer največjega dela med vsemi  $n$  deli ploskve.<sup>1</sup>
4. Definiramo *integralsko vsoto* funkcije  $f$  po ploskvi  $S$ :

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^n f(T_k) \Delta s_k.$$

5. Ploskovni integral definiramo kot limito integralske vsote, kjer  $\delta$  pošljemo proti 0:

$$\iint_S f \, dP = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(T_k) \Delta s_k.$$

**Izrek 11.1.** Naj bo  $S$  gladka ploskev s parametrizacijo

$$\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D.$$

Potem je ploskovni integral funkcije  $f$  po ploskvi  $S$  enak

$$\iint_S f \, dP = \iint_D f(\vec{r}(u, v)) \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv,$$

kjer je  $E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u$ ,  $F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$  in  $G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v$ .

**Izrek 11.2.** Če je ploskev  $S$  podana v eksplicitni obliki  $z = z(x, y)$ , kjer je  $(x, y) \in D$ , je ploskovni integral funkcije  $f$  po ploskvi  $S$  enak

$$\iint_S f \, dP = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy,$$

kjer je  $p = z_x$  in  $q = z_y$ .

**Vaja 64.** Izračunaj

$$\iint_S (xy + yz + zx) \, dP,$$

kjer je  $S$  tisti del ploskve  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , ki leži znotraj območja  $x^2 + y^2 = 2ax$ .

### 11.1.2 Uporaba ploskovnega integrala skalarne funkcije

V tem razdelku podajamo seznam formul za računanje tipičnih fizikalnih količin, v katerih se pojavlja ploskovni integral skalarne funkcije.

**Opomba 11.3.** V nekaterih navedenih formulah se pojavlja gostota ploskve. To je 'površinska' gostota  $\rho = \rho(x, y, z)$ , torej gostota, ki je podana v enoti mase na enoto površine, npr. v  $\text{kg}/\text{m}^2$ .

<sup>1</sup>Premer dela je največja razdalja med dvema točkama tega dela.

### Površina ploskve

Površina ploskve  $S$  s parametrizacijo

$$\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in D$$

je

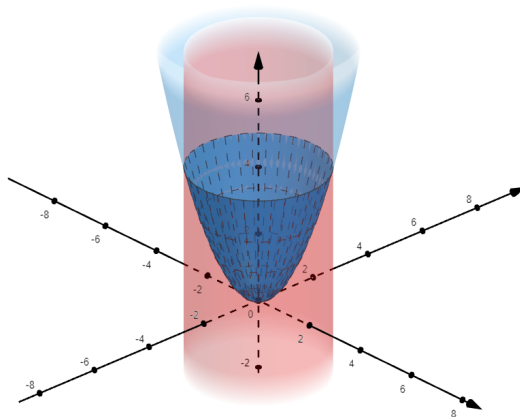
$$P = \iint_S 1 \, dP = \iint_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, du \, dv.$$

**Opomba 11.4.** Spomnimo se (glej definicijo 4.7), da

$$dP = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, du \, dv$$

imenujemo diferencial površine.

**Zgled 47.** Izračunajmo površino tistega dela paraboloida  $z = x^2 + y^2$ , ki leži znotraj neskončnega valja  $x^2 + y^2 = 9$ . Ploskev najprej narišemo v koordinatni sistem, glej sliko 11.2.



Slika 11.2: Paraboloid  $z = x^2 + y^2$  in valj  $x^2 + y^2 = 9$ .

Nato jo parametriziramo:

$$\vec{r}(\varphi, r) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, r^2), \varphi \in [0, 2\pi], r \in [0, 3].$$

Izračunamo še

$$\vec{r}_\varphi = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0),$$

$$\vec{r}_r = (\cos \varphi, \sin \varphi, 2r),$$

$$\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_r = (2r^2 \cos \varphi, 2r^2 \sin \varphi, -r)$$

in

$$|\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_r| = r\sqrt{4r^2 + 1}.$$

Površina ploskve je enaka

$$P = \iint_S 1 dP = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^3 r\sqrt{4r^2 + 1} dr \right) d\varphi = \frac{\pi}{6}(37\sqrt{37} - 1).$$

**Vaja 65.** Izračunaj površino ploskve, ki je presek ravnine  $x + y - z = 2$  in eliptičnega valja  $4x^2 + 9y^2 \leq 36$ .

### Masa ploskve

Naj bo  $S$  gladka ploskev s parametrizacijo  $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ,  $(u, v) \in D$  in  $\rho(x, y, z)$  njena gostota v točki  $(x, y, z)$ . Potem je masa ploskve  $S$  enaka

$$m = \iint_S \rho(x, y, z) dP = \iint_D \rho(\vec{r}(u, v)) \cdot |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv.$$

**Vaja 66.** Izračunaj maso ploskve

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

kjer je gostota podana s funkcijo  $\rho(x, y, z) = \frac{z}{a}$ .

### Težišče ploskve

Naj bo  $S$  gladka ploskev s parametrizacijo  $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ,  $(u, v) \in D$  in  $\rho(x, y, z)$  njena gostota v točki  $(x, y, z)$ . Potem je težišče ploskve  $S$  točka  $T(x_T, y_T, z_T)$ , kjer je

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{\iint_S x \rho(x, y, z) dP}{m} = \frac{\iint_D x(u, v) \rho(\vec{r}(u, v)) \cdot |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv}{m}, \\ y_T &= \frac{\iint_S y \rho(x, y, z) dP}{m} = \frac{\iint_D y(u, v) \rho(\vec{r}(u, v)) \cdot |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv}{m}, \\ z_T &= \frac{\iint_S z \rho(x, y, z) dP}{m} = \frac{\iint_D z(u, v) \rho(\vec{r}(u, v)) \cdot |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv}{m}. \end{aligned}$$

**Opomba 11.5.** Kot pri krivuljah, tudi tukaj, v primeru, ko gre za homogeno ploskev (tj. gostota je konstantna), gostoto iz zgornjih formul lahko okrajšamo in dobimo

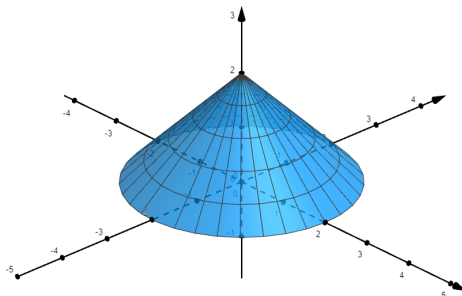
$$x_T = \frac{\iint_S x dP}{P}, \quad y_T = \frac{\iint_S y dP}{P}, \quad z_T = \frac{\iint_S z dP}{P},$$

kjer  $P$  označuje površino ploskve  $S$ .

**Zgled 48.** Izračunajmo težišče homogene ploskve

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, z \geq 0\}.$$

Ploskev najprej narišemo v koordinatni sistem, glej sliko 11.3.



Slika 11.3: Ploskev  $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, z \geq 0$ .

Nato jo parametriziramo

$$\vec{r}(\varphi, r) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 2 - r), \quad \varphi \in [0, 2\pi], r \in [0, 2].$$

Ker je ploskev homogena, težišče ni odvisno od gostote, dve koordinati točke  $T(x_T, y_T, z_T)$  pa zaradi simetrije lahko zapišemo takoj:

$$x_T = 0, y_T = 0.$$

Za izračun tretje koordinate potrebujemo

$$\vec{r}_\varphi = (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0),$$

$$\vec{r}_r = (\cos \varphi, \sin \varphi, -1),$$

$$\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_r = (-r \cos \varphi, -r \sin \varphi, -r)$$

in

$$|\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_r| = r\sqrt{2}.$$

Izračunamo še vrednost integralov, nato pa  $z_T$  s pomočjo zapisane formule:

$$\iint_S z \, dP = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^2 (2 - r) \cdot r\sqrt{2} \, dr \right) d\varphi = \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi,$$

$$P = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^2 r\sqrt{2} dr \right) d\varphi = 4\sqrt{2}\pi,$$

$$z_T = \frac{\iint_S z dP}{P} = \frac{2}{3}.$$

Težišče ploskve  $S$  je torej točka

$$T\left(0, 0, \frac{2}{3}\right).$$

**Vaja 67.** Izračunaj težišče ploskve

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 5\}$$

$z$  gostoto  $\varrho(x, y, z) = x^2 + y^2$ .

**Vztrajnostni moment ploskve**

Naj bo  $S$  gladka ploskev s parametrizacijo  $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ,  $(u, v) \in D$  in  $\varrho(x, y, z)$  njena gostota v točki  $(x, y, z)$ . Potem je vztrajnostni moment ploskve  $S$  glede na premico  $p$  enak

$$I = \iint_S d^2(x, y, z) \varrho(x, y, z) dP = \iint_D d^2(\vec{r}(u, v)) \varrho(\vec{r}(u, v)) \cdot |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv,$$

kjer je  $d(x, y, z)$  razdalja točke  $(x, y, z)$  do premice  $p$ .

Največkrat nas zanimajo vztrajnostni momenti ploskve  $S$  glede na os  $x$ , os  $y$  in glede na os  $z$ , ki jih torej izračunamo s formulami

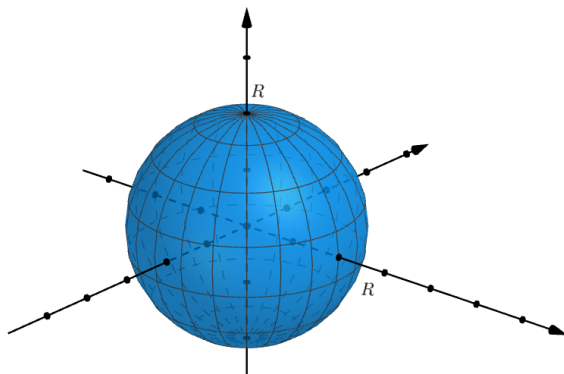
$$\begin{aligned} I_x &= \iint_S (y^2 + z^2) \varrho(x, y, z) dP, \\ I_y &= \iint_S (x^2 + z^2) \varrho(x, y, z) dP, \\ I_z &= \iint_S (x^2 + y^2) \varrho(x, y, z) dP, \end{aligned}$$

oziroma

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D (y^2(u, v) + z^2(u, v)) \varrho(\vec{r}(u, v)) \cdot |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv, \\ I_y &= \iint_D (x^2(u, v) + z^2(u, v)) \varrho(\vec{r}(u, v)) \cdot |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv, \\ I_z &= \iint_D (x^2(u, v) + y^2(u, v)) \varrho(\vec{r}(u, v)) \cdot |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv. \end{aligned}$$

**Zgled 49.** Izračunajmo vztrajnostni moment homogene ( $\rho = \rho_0$ ) sfere z radijem  $R$ , glede na os, ki poteka skozi težišče te sfere.

Ker je težišče homogene sfere v njenem središču in ker so zaradi simetrije njeni vztrajnostni momenti glede na vse težiščne osi enaki, lahko izberemo formulo za izračun enega od njih, recimo  $I_z$ . Sfero najprej umestimo v koordinatni sistem, glej sliko 11.4.



Slika 11.4: Sfera  $S$ .

Nato jo parametriziramo:

$$\vec{r}(\varphi, \theta) = (R \cos \theta \cos \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Potrebujemo še

$$\begin{aligned} \vec{r}_\varphi &= (-R \cos \theta \sin \varphi, R \cos \theta \cos \varphi, 0), \\ \vec{r}_\theta &= (-R \sin \theta \cos \varphi, -R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta), \\ \vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\theta &= (R^2 \cos^2 \theta \cos \varphi, R^2 \cos^2 \theta \sin \varphi, R^2 \cos \theta \sin \theta) \end{aligned}$$

in

$$|\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\theta| = R^2 \cos \theta.$$

Vztrajnostni moment homogene sfere z radijem  $R$  glede na poljubno težiščno os je tako enak

$$\begin{aligned} I = I_z &= \iint_P (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dP \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (R^2 \cos^2 \theta) \cdot \rho_0 \cdot R^2 \cos \theta d\theta \right) d\varphi = \frac{8}{3} \pi R^4 \rho_0 \end{aligned}$$

**Opomba 11.6.** Vztrajnostni moment in druge fizikalne količine večkrat izrazimo z maso. Tako bi npr. rezultat iz zгледа 49 lahko zapisali v obliki

$$I = \frac{8}{3}\pi R^4 \varrho_0 = \frac{2}{3}mR^2.$$

**Vaja 68.** Izračunaj vztrajnostni moment ploskve

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0\}$$

z gostoto  $\varrho(x, y, z) = z$  glede na os  $z$ .

## 11.2 Ploskovni integral vektorske funkcije

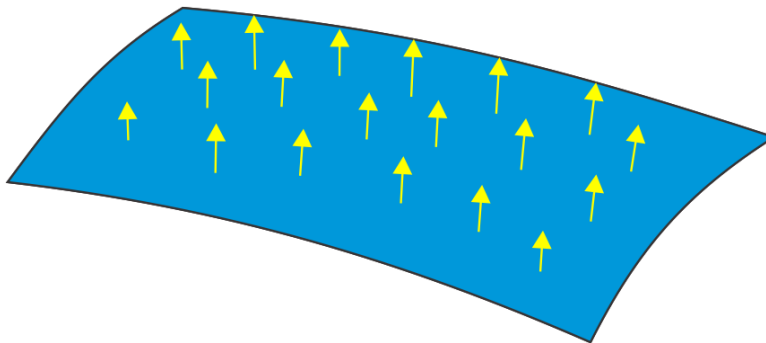
Denimo, da imamo zvezno vektorsko funkcijo  $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , kjer je  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ , in gladko ploskev  $S$ , kjer je  $S \subseteq D$ . V tem poglavju bomo najprej definirali ploskovni integral vektorske funkcije  $\vec{F}$

$$\iint_S \vec{F} d\vec{P},$$

ki ga imenujemo tudi ploskovni integral druge vrste, nato pa bomo predstavili nekaj aplikacij tega integrala.

### 11.2.1 Definicija ploskovnega integrala vektorske funkcije

1. Ploskev najprej orientiramo<sup>2</sup> tako, da določimo eno od dveh možnih smeri normale, glej sliko 11.5.



Slika 11.5: Ploskev orientiramo z normalo.

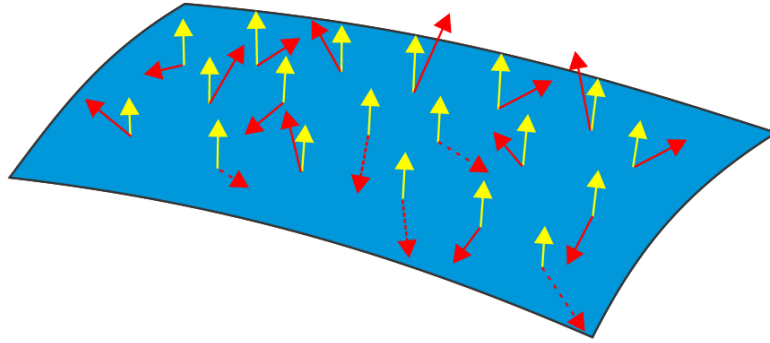
2. Ploskev  $S$  razdelimo na manjše dele s ploščinami  $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ .

<sup>2</sup>Predpostavljamo, da je ploskev orientabilna.



3. Na vsakem delu s ploščino  $\Delta s_k$  izberemo točko  $T_k$  in z  $\vec{N}(T_k)$  označimo enotsko normalo v točki  $T_k$ , kjer pri izbiri smeri normale upoštevamo orientacijo ploskve, glej sliko 11.6.
4. Z  $\delta$  označimo premer največjega med vsemi  $n$  deli ploskve.<sup>3</sup>
5. Definiramo *integralsko vsoto* funkcije  $\vec{F}$  po ploskvi  $S$ :

$$S_n(\vec{F}) = \sum_{k=1}^n \vec{F}(T_k) \vec{N}(T_k) \Delta s_k.$$



Slika 11.6: V vsaki točki  $T_k$  imamo normalo  $\vec{N}(T_k)$  (rumeno) in funkcijsko vrednost  $\vec{F}(T_k)$  (rdeče).

6. Ploskovni integral definiramo kot limito integralske vsote, kjer  $\delta$  pošljemo proti 0:

$$\iint_S \vec{F} d\vec{P} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \vec{F}(T_k) \vec{N}(T_k) \Delta s_k.$$

**Izrek 11.7.** Naj bo  $S$  gladka ploskev s parametrizacijo

$$\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D.$$

Potem je ploskovni integral funkcije  $\vec{F}$  po ploskvi  $S$  enak

$$\iint_S \vec{F} d\vec{P} = \pm \iint_D (\vec{F}, \vec{r}_u, \vec{r}_v) du dv,$$

<sup>3</sup>Premer dela je enak največji razdalji med dvema točkama iz tega dela.

## 11.2. PLOSKOVNI INTEGRAL VEKTORSKE FUNKCIJE

---

kjer  $(\vec{F}, \vec{r}_u, \vec{r}_v)$  označuje mešani produkt vektorjev  $\vec{F}$ ,  $\vec{r}_u$  in  $\vec{r}_v$ . Predznak integrala na desni strani je odvisen od orientacije ploskve. Če je ploskev orientirana v smeri  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ , tedaj je predznak pozitiven, sicer je negativen.

**Opomba 11.8.** Mešani produkt, ki nastopa v zgornji formuli, izračunamo kot kombinacijo vektorskega in mešanega produkta, torej

$$\iint_S \vec{F} d\vec{P} = \pm \iint_D (\vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)) du dv$$

in pišemo

$$d\vec{P} = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv,$$

**Izrek 11.9.** Ko je ploskev  $S$  podana v eksplisitni obliki  $z = z(x, y)$ , kjer je  $(x, y) \in D$ , je ploskovni integral funkcije  $\vec{F} = (X, Y, Z)$  po ploskvi  $S$  enak

$$\iint_S \vec{F} d\vec{P} = \pm \iint_D (-pX - qY + Z) dx dy,$$

kjer je  $p = z_x$  in  $q = z_y$ .

### 11.2.2 Uporaba ploskovnega integrala vektorske funkcije

Naj bo  $\vec{F}$  vektorsko polje. Potem je pretok polja  $\vec{F}$  skozi ploskev  $S$  s parametризacijo  $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ,  $(u, v) \in D$  enak

$$\Phi = \iint_S \vec{F} d\vec{P} = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv.$$

**Opomba 11.10.** Po zgornji formuli se izračuna pretok polja  $\vec{F}$  skozi ploskev  $S$  v smeri normale  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ . S formulo

$$\Phi = \iint_S \vec{F} d\vec{P} = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot (\vec{r}_v \times \vec{r}_u) du dv$$

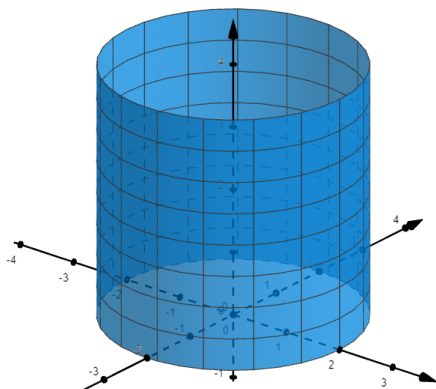
pa izračunamo pretok polja  $\vec{F}$  skozi ploskev  $S$  v nasprotni smeri, torej v smeri normale  $\vec{r}_v \times \vec{r}_u$ . Pretoka se razlikujeta le v predznaku.

**Zgled 50.** Izračunajmo pretok polja  $\vec{F}(x, y, z) = (xy^3, z^2, 3)$  skozi plašč valja

$$x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 4$$

v smeri zunanje normale.

Plašč valja  $S$  najprej narišemo v koordinatni sistem, glej sliko 11.7.


 Slika 11.7: Plašč valja  $S$ .

Nato ga parametriziramo

$$\vec{r}(\varphi, z) = (2 \cos \varphi, 2 \sin \varphi, z), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad z \in [0, 4].$$

Potrebujemo še

$$\vec{r}_\varphi = (-2 \sin \varphi, 2 \cos \varphi, 0),$$

$$\vec{r}_z = (0, 0, 1),$$

$$\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_z = (2 \cos \varphi, 2 \sin \varphi, 0).$$

Ugotovimo, da normala  $\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_z$  kaže v pravo smer. Če bi normala kazala v notranjost valja, bi jo morali obrniti. Pretok je tako enak

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \vec{F} \, d\vec{P} \\ &= \iint_D \vec{F}(\vec{r}(\varphi, z)) \cdot (\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_z) \, d\varphi \, dz \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^4 (16 \cos \varphi \sin^3 \varphi, z^2, 3) \cdot (2 \cos \varphi, 2 \sin \varphi, 0) \, dz \right) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^4 (32 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + 2z^2 \sin \varphi) \, dz \right) d\varphi = 0. \end{aligned}$$

**Vaja 69.** Izračunaj pretok polja

$$\vec{F}(x, y, z) = (yz, zx, xy)$$

skozi del sfere s polmerom  $a$ , ki leži v prvem oktantu, v smeri zunanje normale.

## 11.2. PLOSKOVNI INTEGRAL VEKTORSKE FUNKCIJE

---

**Vaja 70.** Izračunaj pretok polja  $\vec{F}(x, y, z) = (zy, zx, x^2 + y^2)$  skozi ploskev

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 3\},$$

v smeri zunanje normale.

## Poglavje 12

# Povezave med integrali različnih tipov

Računanje krivuljnih in ploskovnih integralov vektorskih funkcij je pogosto enostavneje izračunati z uporabo izrekov, ki jih bomo predstavili v tem poglavju.

### 12.1 Gaussov izrek

Gaussov izrek povezuje trojni integral skalarne funkcije s ploskovnim integralom vektorske funkcije.

**Izrek 12.1.** *Naj bo  $S$  sklenjena in gladka ploskev v prostoru, orientirana z zunanjo normalo, in naj bo  $G$  območje, ki ga ploskev  $S$  omejuje (glej sliko 12.1). Naj bo  $\vec{F}$  zvezno parcialno odvedljiva vektorska funkcija na okolici območja  $G$ . Potem velja*

$$\iiint_G \operatorname{div}(\vec{F}) \, dx \, dy \, dz = \iint_S \vec{F} \, d\vec{P}.$$

**Zgled 51.** *Izračunajmo pretok vektorskega polja*

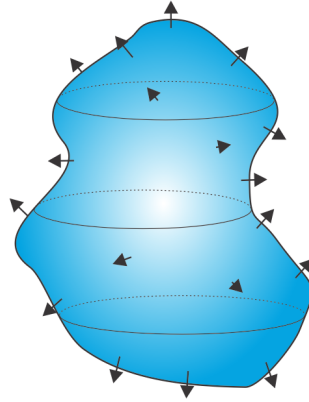
$$\vec{F}(x, y, z) = (2zx^2, z^2y, x^2z + y^2z)$$

*skozi vse mejne ploskve valja  $x^2 + y^2 \leq R^2$ ,  $0 \leq z \leq 1$  navzven.*

*Valj najprej skiciramo v koordinatni sistem, glej sliko 12.2.*

*Ker nas zanima pretok vektorskega polja skozi ploskev, ki omejuje valj, bomo uporabili Gaussov izrek in s tem namesto treh ploskovnih integralov (po plašču ter spodnji in zgornji osnovni ploskvi) izračunali vrednost enega trojnega integrala. Trojni integral po valju  $G$  bomo razpisali v cilindričnih koordinatah, zato z njimi zapišemo tudi divergenco polja  $\vec{F}$ :*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{F}) &= 4xz + z^2 + x^2 + y^2 \\ &= 4zr \cos \varphi + z^2 + r^2. \end{aligned}$$



Slika 12.1: Ploskev orientiramo z zunanjo normalo.

Pretok polja  $\vec{F}$  skozi mejne ploskve valja v smeri zunanje normale je tako enak

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_S \vec{F} d\vec{P} \\ &= \iiint_G \operatorname{div}(\vec{F}) dx dy dz \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R \left( \int_0^1 (4zr \cos \varphi + z^2 + r^2)r dz \right) dr \right) d\varphi = \frac{1}{6}\pi R^2(3R^2 + 2).\end{aligned}$$

**Vaja 71.** Naj bo

$$\vec{F}(x, y, z) = (7x, 0, -z)$$

in naj bo  $S$  sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  orientirana z zunanjo normalo. Izračunaj

$$\iint_S \vec{F} d\vec{P}$$

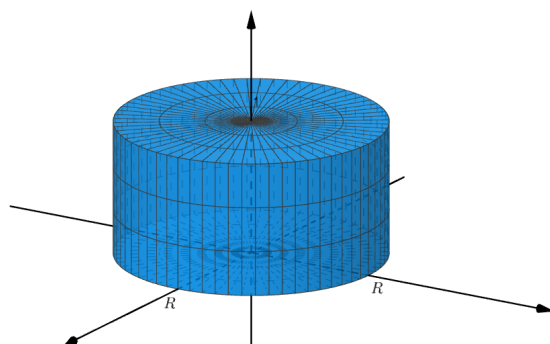
najprej neposredno, nato pa z uporabo Gaussovega izreka.

## 12.2 Stokesov izrek

Stokesov izrek povezuje ploskovni integral vektorske funkcije s krivuljnim integralom vektorske funkcije.

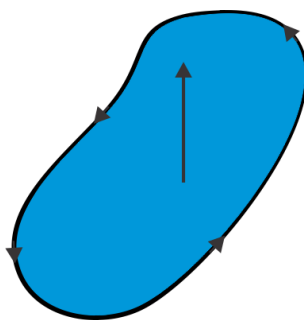
**Izrek 12.2.** Naj bo  $S$  gladka ploskev v prostoru (orientirana z normalo), in naj bo rob ploskve  $S$  gladka krivulja  $C$ . Naj bo  $\vec{F}$  zvezno parcialno odvedljiva vektorska funkcija na okolici ploskve  $S$ . Potem velja

$$\boxed{\iint_S \operatorname{rot}(\vec{F}) d\vec{P} = \int_C \vec{F} d\vec{r}.}$$



Slika 12.2: Valj  $x^2 + y^2 \leq R^2$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .

Pri tem velja, da sta ploskev  $S$  in krivulja  $C$  orientirani tako, da je (gledano iz vrha normale) krivulja orientirana v nasprotni smeri urinega kazalca, glej sliko 12.3.



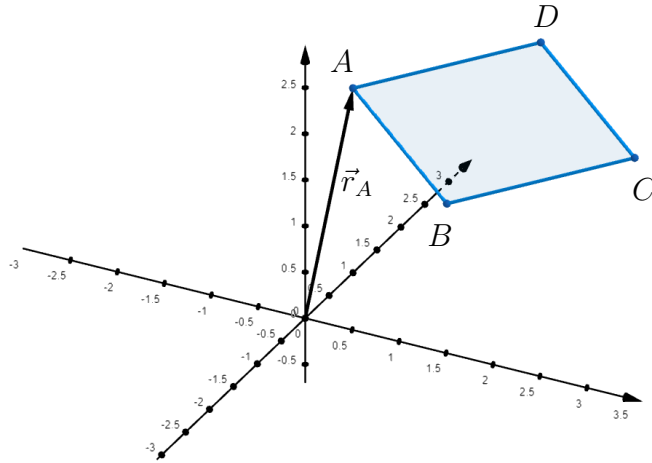
Slika 12.3: Ploskev  $S$  in njen rob  $C$ .

**Zgled 52.** Izračunajmo delo, ki je potrebno, da v polju sil

$$\vec{F}(x, y, z) = (e^x + y, x^2 + \ln y, zy + x)$$

delec premaknemo enkrat naokrog po robu paralelograma  $A(0, 1, 2)$ ,  $B(1, 1, 1)$ ,  $C(2, 1, 3)$ ,  $D(3, 1, 2)$  v smeri  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ .

Ker nas zanima delo po sklenjeni krivulji, lahko uporabimo Stokesov izrek in štiri krivuljne integrale (za vsako stranico potrebujemo svoj integral) pretvorimo na ploskovni integral po celotnem paralelogramu, glej sliko 12.4.



Slika 12.4: Uporaba Stokesovega izreka na paralelogramu.

Najprej paralelogram parametriziramo:

$$\vec{r}(u, v) = \vec{r}_A + u\vec{AB} + v\vec{AD}, \quad u \in [0, 1], \quad v \in [0, 1],$$

torej

$$\vec{r}(u, v) = (u + 3v, 1, 2 - u), \quad u \in [0, 1], \quad v \in [0, 1].$$

S pomočjo parcialnih odvodov izračunamo normalo:

$$\vec{r}_u(u, v) = (1, 0, -1), \quad \vec{r}_v(u, v) = (3, 0, 0)$$

$$\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v) = (0, -3, 0).$$

Ker v Stokesovi formuli nastopa rotor, izračunamo še rotor.

$$\text{rot}(\vec{F}) = (z, -1, 2x - 1),$$

oziroma

$$\text{rot}(\vec{F})(\vec{r}(u, v)) = (2 - u, -1, 2u + 6v - 1).$$



Delo po robu paralelograma je torej enako

$$\begin{aligned}
 A &= \int_C \vec{F} d\vec{r} \\
 &= \iint_S \operatorname{rot}(\vec{F}) d\vec{P} \\
 &= \int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \operatorname{rot}(\vec{F})(\vec{r}(u, v)) \cdot (\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)) \right) dv \right) du \\
 &= \int_0^1 \left( \int_0^1 \left( (2 - u, -1, 2u + 6v - 1) \cdot (0, -3, 0) \right) dv \right) du \\
 &= \int_0^1 \left( \int_0^1 3 dv \right) du = 3.
 \end{aligned}$$

**Vaja 72.** Naj bo

$$\vec{F}(x, y, z) = (y, z, x)$$

in naj bo  $S$  ploskev  $z = 1 - (x^2 + y^2)$ , kjer je  $z \geq 0$  in  $C$  krivulja, ki leži na robu te ploskve. Izračunaj

$$\int_C \vec{F} d\vec{r}$$

najprej neposredno, nato pa z uporabo Stokesovega izreka.

# Stvarno kazalo

- binormalni vektor, 18
- cilindrične koordinate, 72
- diferenciabilnost vektorske funkcije, 27
- diferencial površine, 32
- diferencial volumna, 43
- divergenca, 50
- dvojni integral, 56
- elipsoid, 35
- fleksijska ukrivljenost, 20
- Gaussov izrek, 109
- gladka krivulja, 13
- gladka ploskev, 29
- glavna normala, 17
- gradient, 47
- hiperboloid, 38
- integral s parametrom, 53
- Jacobijeva matrika, 27
- koordinatne krivulje, 30, 42
- koordinatne ploskve, 41
- krivočrtne koordinate, 41
- krivulja, 11
- krivuljni integral skalarne funkcije, 86
- krivuljni integral vektorske funkcije, 93
- limita vektorske funkcije, 7
- ločna dolžina krivulje, 13
- naravna parametrizacija, 15
- naravno definicijsko območje, 4
- normalna ravnina, 17
- normalni vektor, 31
- odvod vektorske funkcije, 8
- paraboloid, 35, 36
- parametrična oblika krivulje, 11
- parametrizacija ploskve, 29
- ploskovni integral skalarne funkcije, 98
- ploskovni integral vektorske funkcije, 105
- polarne koordinate, 61
- potencial, 49
- potencialno polje, 49
- pritisnjena krožnica, 21
- pritisnjena ravnina, 18
- radialni pospešek, 24
- rektifikacijska ravnina, 17
- Riemannova integralska vsota, 56, 70
- rotor, 50
- sfera, 34
- sferične koordinate, 75
- smerni odvod, 47
- solenoidalno polje, 50
- stožec, 33
- Stokesov izrek, 110
- tangencialni pospešek, 24
- tangentni vektor, 17
- torzijska ukrivljenost, 22
- trojni integral, 70
- valj, 32
- vektorska funkcija ene spremenljivke, 3
- vektorska funkcija več spremenljivk, 25
- zaloga vrednosti, 4

## *STVARNO KAZALO*

---

zvezna parcialna odvedljivost vektorske  
funkcije, 28  
zveznost vektorske funkcije, 6

*STVARNO KAZALO*

---

# Literatura

- [1] E. Kreyszig, *Advanced engineering mathematics*, 10th ed., J. Wiley & Sons, 2011.
- [2] F. Brešar, *Matematika III*, Maribor : Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko, 1995.
- [3] M. Mencinger, P. Šparl, B. Zalar, *Zbirka rešenih nalog iz Matematike II*, Maribor : Fakulteta za gradbeništvo, 2008.



DOI

[https://doi.org/  
10.18690/um.fs.2.2023](https://doi.org/10.18690/um.fs.2.2023)

ISBN

978-961-286-764-5

# VEKTORSKA ANALIZA

TINA SOVIČ,<sup>1</sup> SIMON ŠPACAPAN<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo,  
Maribor, Slovenija

tina.sovic@um.si

<sup>2</sup> Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, Maribor, Slovenija

simon.spacapan@um.si

V učbeniku Vektorska analiza avtorja, dr. Tina Sovič in dr. Simon Špacapan, predstavita vektorske in skalarne funkcije ene in več spremenljivk. Obravnavata glavne teme iz tega področja, kot so krivulje in ploskve v prostoru, odvod vektorskih funkcij, dvojni in trojni integral, ter krivuljni in ploskovni integral skalarne in vektorske funkcije. Namen učbenika je tudi predstaviti praktične aplikacije teorije vektorskih funkcij na področju inženirske prakse, ki se pojavlja pri reševanju različnih problemov v realnem življenju. Učbenik je opremljen s številnimi grafičnimi prikazi, ki nazorno prikazujejo obravnavano temo, številnimi zgledi, ki na konkretnih primerih prikazujejo uporabo teorije v računskih nalogah, ter nekaterimi vajami, ki so namenjene za samostojno reševanje študentov.

**Ključne besede:**

vektorska funkcija,  
skalarna funkcija,  
krivulje,  
ploskve,  
mnogoterni integral,  
krivuljni integral,  
ploskovni integral



Univerzitetna založba  
Univerze v Mariboru



Univerza v Mariboru

---

Fakulteta za strojništvo