RAZUMEVANJE DELOVANJA UMETNE INTELIGENCE JE OD MATEMATIKE SEDMEGA RAZREDA ODDALJENO NAJVEČ 37 KONCEPTOV

JANJA JEREBIC,[1] GREGOR BOKAL,[2] MAŠA GALUN,[3] MONIKA VOGRINEC,[3] DRAGO BOKAL[3]

[1] Univerza v Mariboru, Fakulteta za organizacijske vede, Kranj, Slovenija
janja.jerebic@um.si
[2] Osnovna Šola Alojzija Šuštarja Ljubljana, Ljubljana, Slovenija
g@bokal.net
[3] Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Maribor, Slovenija
masa.galun@student.um.si, monika.vogrinec@student.um.si, drago.bokal@um.si

Povzetek Učni prostori so formalna matematična struktura, ki omogoča modeliranje procesa učenja. Ključni gradniki strukture so znanja, ki jih posameznik pridobi, ter stanja, v katerih se posameznik nahaja, ko pridobiva znanje. Znanja in stanja spoštujejo aksiom dosegljivosti in konsistentnosti. Pot v učnem prostoru predstavlja sprehod od stanja, ko posameznik ne pozna nobenega od znanj, pa do stanja, ko posameznik pridobi vsa znanja iz nabora. V prispevku analiziramo učni prostor matematike sedmega razreda in učni prostor osnovnošolske raziskovalne naloge, v kateri je sedmošolec predstavil algoritem spodbujevanega učenja igre Nim na nivoju, dostopnem osnovnošolcem. Na osnovi analize ovrednotimo, da je spodbujevano učenje 37 znanj oddaljeno od matematike sedmega razreda, da ga razumemo, pri čemer ne upoštevamo konceptov, potrebnih, da algoritem sam sprogramira v Pythonu. Analizo dopolnimo s predlogi nadaljnjih raziskav, ki jih izkušnja predstavlja za uvajanje vsebin umetne inteligence v osnovne in srednje šole.

Ključne besede: umetna inteligenca, učni prostori, učni načrt, poučevanje o umetni inteligenci

Univerzitetna založba Univerze v Mariboru

DOI https://doi.org/10.18690/um.fov.3.2023.31
ISBN 978-961-286-722-5

Understanding Artificial Intelligence is 37 Concepts Away from 7th Grade Mathematics

Janja Jerebic,[1] Gregor Bokal,[2] Maša Galun,[3]
Monika Vogrinec,[3] Drago Bokal[3]

[1] University of Maribor, Faculty of Organizational Sciences, Kranj, Slovenia
janja.jerebic@um.si
[2] OŠ Alojzija Šuštarja Ljubljana; Ljubljana, Slovenia
g@bokal.net
[3] University of Maribor, Faculty of Natural Science and Mathematics; Maribor, Slovenia
masa.galun@student.um.si, monika.vogrinec@student.um.si, drago.bokal@um.si

Abstract Learning space is a formal mathematical structure that enables modeling of a learning process. Knowledge structure consists of items of information that the individual learns, and the states of knowledge, in which the individual finds himself when he acquires knowledge. Items of information and states of knowledge respect the axiom of accessibility and learning consistency. A path in the learning space represents a walk from the state, where the individual does not know any of the items, to the state in which the individual acquires all the items of information. In this paper, we analyze the learning space of seventh-grade mathematics and the learning space of a research paper, in which a seventh grader presented the reinforcement learning algorithm of the game Nim at a level accessible to elementary school students. Based on the analysis, we evaluate that reinforcement learning is 37 items of information away from seventh grade math to understand, not accounting for the concepts required to program it in Python. We complete the analysis with suggestions of further research on introducing artificial intelligence in primary and secondary schools.

Keywords: artificial intelligence, learning spaces, artificial intelligence literacy, curriculm

DOI https://doi.org/10.18690/um.fov.3.2023.31
ISBN 978-961-286-722-5

University of Maribor Press

1 Uvod

Umetna inteligenca (UI) je postala ključna omogočitvena tehnologija v industriji in v znanosti (EK, 2023; Samek in Müller, 2019). Upravičeno lahko domnevamo, da bo bistveno vplivala na z znanjem povezane procese v naslednjih letih in desetletjih. Sooblikovala bo tudi (virtualno) okolje, v katerem človeštvo porabi vse več svoje pozornosti in v katerem se odvija vedno več digitalnih procesov, od zabave in umetnosti prek ustvarjalnosti do raziskav, razvoja in ustvarjalske ekonomije (Huynh-The et al., 2023). Zato je smiselno, da generacije učeče mladine, ki prihajajo, opolnomočimo za soočanje, uporabo in sooblikovanje tehnologij, ki jih s tem terminom označujemo.

Raziskave na temo UI pismenosti v zgodnjih obdobjih poučevanja so v porastu in naslavlja teme, kot so priprava kurikulov, uporaba UI orodij pri pouku, razvoj pedagoških praks, snovanje raziskav in metode vrednotenja (Su in Ng, 2023), kot ključne izzive pa navajajo pomanjkanje kompetenc na strani učiteljev, pomanjkanje izdelanih učnih načrtov in pomanjkanje pedagoških smernic. Ustrezne priložnosti, ki se s tem ponujajo, so razvoj konceptov in praks poučevanja o UI in razvoj vpogledov v uporabo UI pri reševanju problemov (ibid.) Raziskave se usmerja z upanjem, da bo umetna inteligenca izboljšala splošno počutje posameznikov v izobraževanju, kar se bi spodbudilo s poglobljenim dialogom med raziskovalci raznolikih kulturnih ozadij in znanstvenih disciplin (Yang et al., 2023) in bi omogočilo nadgradnjo človeške z umetno inteligenco; koncept se poimenuje na človeka osredinjena umetna inteligenca (human-centered artificial intelligence).

Z uporabo umetne inteligence v izobraževanju so povezana tudi raznolika tveganja. Pregled tovrstnih raziskav sta predstavila Li in Gu, 2023. Identificirala sta osem dimenzij tveganj uporabe na človeka osredinjene inteligence v izobraževanju: nerazumevanje koncepta na človeka osredinjene inteligence, zloraba virov umetne inteligence, neusklajenost pedagogike umetne inteligence, tveganja varnosti in zasebnosti, tveganja transparentnosti, tveganja odgovornosti, tveganja pristranskosti in splošna zaznava tveganj. Zaskrbljujoče je, da se več kot polovica obravnavanih raziskav zaveda le treh ali manj od naštetih tveganj, zato je smiselna sistematična uporaba njunega okvira in njegovo periodično posodabljanje.

Ob bogastvu z umetno inteligenco povezanih konceptov, ki jih kaže zgornji pregled literature, se zastavlja vprašanje, kaj od tega je mogoče predstaviti sleherniku. Zanj predpostavimo, da ima osnovnošolsko izobrazbo, v kateri je pridobil osnovno razumevanje matematičnih konceptov. Koliko truda mora vložiti, da bo razumel osnovne principe delovanja umetne inteligence in pridobil osnove UI pismenosti? Vprašanje je večdimenzionalno, kot kaže literatura in še posebej zadnji omenjeni okvir z UI povezanih tveganj. Če pa se osredotočimo na tehnološki vidik vprašanja, je ob predpostavki neizogibnosti soočanja z rešitvami umetne inteligence in njene uporabe smiselno preveriti, katera znanja je smiselno poleg osnov matematike pridobiti, da bo posameznik lahko zgradil temelj za osnovno uporabo umetne inteligence na nivoju izdelave modela in preprostega algoritma za iskanje strategije za odkrivanje rešitev na vprašanja, ki se v povezavi z modelom zastavljajo.

V pričujočem prispevku predstavimo sistematičen matematičen model, v katerim je mogoče smiselno razpravljati o navedenih vprašanjih na po eni strani razumljiv, po drugi strani pa tudi operativen način. Temeljni koncept predstavljenega modela je učni prostor, ki je formalno definiran v naslednjem razdelku. Razvit je bil za potrebe sistematičnega testiranja matematičnega znanja, za potrebe širše uporabe pa predlagamo razširitev njegove rabe na načrtovanje poučevanja, kot predstavimo v razdelku 3, kjer kot ključni abstraktni rezultat prispevka predstavimo metodologijo nadgrajevanja učnega prostora z novimi vsebinami in vrednotenja skupnega učnega prostora. V četrtem razdelku predstavimo dva konkretna učna prostora. Prvi predstavi strukturo matematike sedmega razreda osnovne šole, drugi pa strukturo raziskovalne naloge, v kateri osnovnošolec analizira algoritem spodbujevanega učenja za iskanje strategije igre Nim ter ga primerja s človeškim znanjem. V petem razdelku predstavimo ključne konkretne rezultate prispevka: konstrukcijo enotnega učnega prostora, ki vsebuje celotno vsebino obeh prej navedenih učnih prostorov ter analizo njegove strukture. Prispevek zaokrožimo z diskusijo uporabe predstavljenih rezultatov in zaključki.

1.2 Matematično ozadje

Predstruktura znanja $(Q,\mathcal{K})$ je urejen par množice Q in družine $\mathcal{K}$ podmnožic množice Q, kjer je vsak element množice Q znanje in vsaka množica iz $\mathcal{K}$ stanje učenja znanj iz Q. Množica Q vsebuje vsa znanja, katerih učenje modeliramo, elementi družine $\mathcal{K}$ pa so stanja, ki jih lahko dosežemo tako, da se naučimo novih znanj iz Q. Pomembno se je zavedati, da poljubno izbrana podmnožica množice Q ni nujno stanje v $\mathcal{K}$. To pomeni, da v predstrukturi znanja ne moremo nujno doseči (le) poljubno izbranih znanj iz Q. Pogosto je namreč pomemben vrstni red učenja posameznih znanj, saj so ta med seboj povezana in moramo včasih najprej usvojiti neko znanje, da se lahko nato s pomočjo tega znanja naučimo neko novo znanje (in tako preidemo v novo stanje strukture znanja). Če zahtevamo še, da družina množic $\mathcal{K}$ predstrukture znanja $(Q, \mathcal{K})$ vsebuje prazno množico, torej stanje, v katerem še ne vemo ničesar, taki predstrukturi znanja pravimo struktura znanja.

Če strukturi znanja dodamo še dve lastnosti oz. aksioma, dobimo poseben primer strukture znanja, ki jo imenujemo učni prostor:

Učni prostor $(Q, \mathcal{K})$ je struktura znanja, za katero velja:

Dostopnost: Za poljubno stanje K iz $\mathcal{K}$, ki ni enako prazni množici, obstaja neko znanje q v K, tako da bo tudi stanje ki ga dobimo, če K odvzamemo znanje q, vsebovano v množici stanj $\mathcal{K}$.

Stanje K smo torej dosegli tako, da smo se iz stanja $K\setminus\{q\}$ naučili znanje q.

Konsistentnost: Če za vsako stanje K iz $\mathcal{K}$ in za vsaki znanji q in r iz Q velja, da sta tudi stanji $K \cup \{q\}$ in $K \cup \{r\}$ vsebovani v množici vseh stanj $\mathcal{K}$, potem iz tega sledi, da je tudi stanje $K \cup \{q,r\}$ vsebovano v množici vseh stanj. To pomeni, da če se iz nekega stanja K lahko naučimo tako znanje q kot tudi znanje r, potem se lahko iz stanja K naučimo obe znanji.

Učni prostor je struktura, ki ponazarja, kako se lahko v praksi naučimo določene koncepte in kako so ti povezani med seboj. Pogosto lahko neko stanje v učnem prostoru dosežemo po več različnih poteh oziroma tako, da se vsa znanja v tem stanju naučimo v različnem vrstnem redu. Za vsako strukturo znanja lahko narišemo graf, ki dodatno ponazarja možnosti prehajanja med stanji z učenjem novih znanj:

Graf strukture znanja G je definiran z množico vozlišč $V(G)= \mathcal{K}$ in množico usmerjenih povezav $E(G)=\{(u,v)\,|\,u,v \in \mathcal{K}\ \&\ \exists\, q \in Q\text{: } v=u \cup \{q\}\}$. Množica vozlišč grafa strukture znanja je torej množica vseh stanj strukture znanja. Stanji v grafu sta povezani, če lahko iz enega stanja prestopimo v drugega tako, da se naučimo neko novo znanje iz Q.

Pomemben koncept pri poučevanju struktur znanja in učnih prostorov so hiperkocke in njihovi izometrični podgrafi, imenovani delne kocke, saj je graf vsakega učnega prostora delna kocka (Eppstein, Falmagne in Ovchinnikov, 2008). Oba koncepta predstavljamo v nadaljevanju.

Množico vozlišč *n*-razsežne hiperkocke sestavljajo vse *n*-terice oz. nizi $b_1 b_2 \ldots b_n$, kjer je $b_i \in \{0,1\}$. Dve vozlišči hiperkocke sta sosednji natanko tedaj, ko se pripadajoči *n*-terici razlikujeta na natanko enem mestu. Hiperkocka je torej graf na množici $\{0,1\}^n$, v katerem sta vozlišči povezani natanko tedaj, ko se razlikujeta v natanko eni poziciji. Izometričnim podgrafom hiperkock rečemo delne kocke (graf *H* je izometrični podgraf grafa *G*, če za poljubni vozlišči *u* in *v* grafa *H* velja, da je razdalja med *u* in *v* v podgrafu *H* enaka kot v grafu *G*).

Delna kocka je torej graf, katerega vozlišča lahko označimo z enako dolgimi nizi bitov tako, da je razdalja med poljubnima vozliščema grafa enaka številu mest, v katerih se vozliščema pripadajoča niza bitov razlikujeta. Ko učni prostor opišemo kot delno kocko in narišemo njen graf, lahko dobro ponazorimo potek učenja novih znanj in prehajanj med njimi. Vsako vozlišče delne kocke predstavlja neko stanje v učnem prostoru. Med stanji v učnem prostoru oziroma vozlišči delne kocke pa prehajamo tako, da se naučimo novih znanj in se s tem sprehodimo iz enega vozlišča delne kocke do drugega. Med poljubnima vozliščema oziroma stanjema v učnem prostoru torej obstaja pot natanko tedaj, ko obstajajo neka znanja iz Q, ki so potrebna za prehod iz enega stanja učnega prostora v drugega.

Opisani koncepti so poglobljeno predstavljeni v knjigi Falmange, Doignon, 2011. Sicer pa sega teorija učnih prostorov več desetletij nazaj v zgodnja osemdeseta leta prejšnjega stoletja, ko sta avtorja navedene knjige pričela razvijati teorijo sistematičnega preverjanja znanja. Ključna je bila njuna ugotovitev, da koncepti fizikalnega merjenja ne ustrezajo merjenju konceptov, povezanih z znanjem. Predsodek, s katerim sta se soočila, je bil tudi pogled dela akademske srenje, ki je za kategorizacijo "znanosti" postavljal pogoj "merljivosti," sorodnosti s fiziko devetnajstega stoletja, ki je temeljila na številčnem merjenju raznolikih takrat novoopaženih pojavov in za njih relevantnih količin in jo odlično povzame Kelvinov citat: "Če česa ne moreš izmeriti, to ni znanost." (Kelvin, 1889). Alternativa, ki jo razvijata avtorja, je, če ostanemo pri fizikalnih prispodobah, bolj sorodna geometriji kot aritmetiki. Znanja ne reducirata na numerično vrednost (ocene), ki bi jo po predmetih aritmetično povprečila v oceno posameznega razreda ali letnika, ampak kot pri geometriji v prostoru znanja prepoznata obsežno množico točk, enot znanja. Kot pri geometriji, prepoznata njihovo večdimenzionalno povezanost in z zgoraj navedenimi definicijami identificirata matematično strukturo. To strukturo formalizirata v nabor matematičnih lastnosti, ki same po sebi nudijo vrsto znanstvenih, kombinatoričnih izzivov.

Prvo monografijo o navedeni tematiki sta avtorja naslovila "Prostori znanja (Knowledge spaces)" (Falmange in Doignon, 1999). Nastala je z omenjenim ciljem formalizacije postopka vrednotenja študentskega znanja. Izkazalo pa se je, da razvita teorija lahko postane del mehanizma sistematičnega podajanja znanja, zato sta zgodnejši koncept nadgradila v specifično obliko, ki jo zgoraj navajamo kot "učne prostore (learning spaces)". Posplošitev obeh konceptov na splošno strukturo obvladovanja informacij nudi koncept medija, ki jo avtorja skupaj z Eppsteinom obravnavata v že omenjeni knjigi "Media theory" (Eppstein, Falmagne in Ovchinnikov, 2008). Vsem trem teorijam je skupna kombinatorična struktura delnih urejenosti stanj znanja. Ta izhaja iz omejitev nad relacijo vsebovanosti podmnožic osnovnih enot znanja, ki ustrezajo stanjem znanja. Kombinatorična teorija se je pričela razvijati z izhodiščnim prispevkom avtorjev (Doignon in Flamange, 1985) in je še vedno predmet aktivnega raziskovanja (Lin, Cao in Li, 2021). V praksi se izkaže, da vsa stanja znanja niso enako verjetna. Posledično se je razvila verjetnostna teorija učnih prostorov (začetki Falmagne in Doignon, 1988, novejše Matayoshi, 2022). Pomembno smer raziskovanja kažejo tudi praktične metode konstrukcij prostorov znanja (Koppen, 1993; Kambouri et al., 1994, Eppstein et al., 2009, Sun et al, 2022, Segedinac et al., 2022).

2 Metodologija

Pregled literature iz prejšnjega razdelka pokaže, da so bili učni prostori obravnavani predvsem s teoretičnega vidika njihove kombinatorične strukture in s praktičnega vidika njihove uporabe pri identificiranju stanja, v katerem se posameznik nahaja ter posledičnem vrednotenju tega znanja. Za slednjo uporabo so bile razvite tehnike identifikacije učnih prostorov, ki so pokazale določeno praktično uporabo, razvita je bila tudi programska oprema za identifikacijo učnih prostorov.

V prispevku predlagamo novo uporabo učnih prostorov za namen načrtovanja poučevanja. Fokus njihove rabe s tem prenesemo s preverjanja znanja in identifikacije lokacije učečega v učnem prostoru na načrtovanje pouka, načrtovanje poti, ki jo bo poučujoči prehodil od izhodiščnega znanja, ko predpostavimo, da še ne pozna konceptov načrtovane izobraževalne enote, do končnega stanja, v katerem pozna vse koncepte, ki jih učna enota podaja. Rezultat tega pristopa je učni prostor, ki ustreza zgornji definiciji in omogoča predavatelju pregled nad možnimi potmi podajanja snovi. Da poudarimo njegove specifike, tak učni prostor poimenujemo poučevalni prostor. Formalna kombinatorična definicija poučevalnega učnega prostora sledi definiciji učnega prostora (prim. razdelek 1.2), nadgradi pa jo z zaporedjem korakov učenja, rekurzivno strukturo učnega prostora. Ker sama definicija ni bistvena za tu obravnavano vsebino, bralca za podrobnosti usmerimo na vir Galun, Bokal, 2023.

Poučevalni prostor temelji na konceptih, ki jih podamo v okviru vsebine, in na stanjih, preko katerih poteka usvajanje teh konceptov med npr. poukom, ki sledi predstavitvi, ali med branjem učbenika. Od učnega prostora, osredotočenega na preverjanje znanja, se poučevalni prostor razlikuje po tem, da je v njem vsebovan (torej je njegov podprostor), in da naravno gradi, dodaja koncepte k stanju znanja, ki jih praviloma ne pozablja. Učni prostor, pridobljen z osredotočanjem na preverjanje znanja, pa je od poučevalnega prostora bogatejši zaradi stanj, do katerih pridemo ob učenju, če določena že usvojena znanja pozabljamo. Bogatejši je tudi zato, ker poleg konceptov, ki se jih moramo naučiti in jih razumeti, v skladu z metodologijo izdelave učnega prostora vsebuje tudi vse načine preverjanja, s katerimi identificiramo stanje znanja.

V skladu z motivacijo v uvodu je dolgoročni cilj opisanih raziskav učečim posameznikom čim bolj približati znanja umetne inteligence. V terminologiji poučevalnih prostorov to pomeni iskanje učinkovitih poti od stanja znanja, v katerem se posamezniki nahajajo, do stanj znanja, v katerih razumejo umetno inteligenco na želenem nivoju. Formalno iščemo čim manjši poučevalni prostor, ki bi vseboval tako znanja, ki jih posamezniki imajo, kot znanja, ki jih potrebujejo za razumevanje umetne inteligence. Da bo rezultat čim širše zanimiv, kot izhodiščni poučevalni prostor vzamemo učni prostor osnovnošolske matematike. Priložnost za poučevalni prostor, ki je prvemu blizu in predstavlja določeno stopnjo razumevanja delovanja umetne inteligence, predstavlja osnovnošolska raziskovalna naloga (Bokal, 2022), v kateri učenec sedmega razreda razvije in analizira v programskem jeziku Python izdelan algoritem spodbujevanega učenja strategije reševanja igre Nim.

Metodologija naše raziskave sledi naslednjim korakom:

1. Izdelava izhodiščnega poučevalnega prostora na podlagi gradiva (učbenik, skripta, predstavitev). V našem primeru je to učni načrt za predmet Matematika, 7. razred.
2. Izdelava ciljnega poučevalnega prostora na podlagi gradiva. V našem primeru je to raziskovalna naloga Bokal, 2022.
3. Identifikacija znanj izhodiščnega poučevalnega prostora, ki so potrebna za usvajanje konceptov ciljnega poučevalnega prostora.
4. Identifikacija stanja izhodiščnega poučevalnega prostora, v katerem ima učeči vsa znanja iz prejšnje točke.
5. Izdelava kombiniranega poučevalnega prostora, ki vsebuje koncepte izhodiščnega in ciljnega poučevalnega prostora, s pomočjo operacij, identificiranih v Galun, Bokal, 2023.
6. Analiza relevantnih parametrov skupnega poučevalnega prostora. V našem primeru je to razdalja vrha ciljnega učnega prostora do najbližje točke izhodiščnega učnega prostora.

Prvi štirje koraki metodologije so predstavljeni v naslednjem razdelku, *Izbrani poučevalni prostori*, ki najprej predstavi poučevalni prostor matematike 7. razreda, nato poučevalni prostor raziskovalne naloge in ob njem koncepte iz prvega poučevalnega prostora, ki so potrebni za razumevanje elementov raziskovalne naloge. Identificira tudi stanje, v katerem ima učeči vsa znanja, ki so potrebna za usvajanje konceptov ciljnega poučevalnega prostora. Za izdelavo raziskovalne naloge je potreben še učni prostor za učenje Pythona, ki pa ni potreben za njeno razumevanje, zato se mu posvetimo le pregledno.

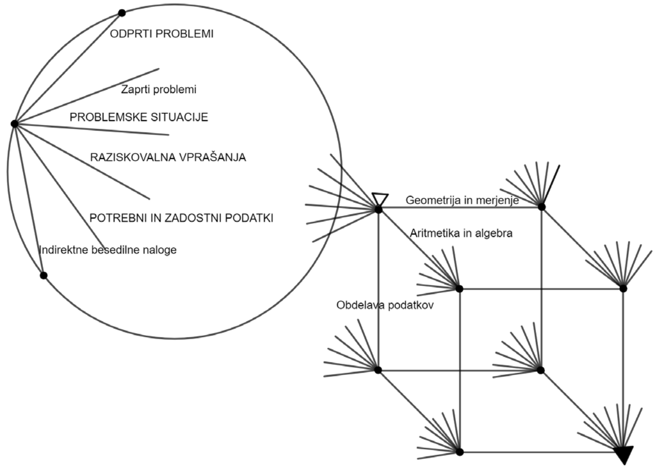
Zadnja dva koraka metodologije sta predstavljena v razdelku *Končni rezultati in diskusija*. Najprej se posvetimo stanju znanja, ki ga potrebujemo za razumevanje raziskovalne naloge, ker koncepti, ki jih to stanje vsebuje, v raziskovalni nalogi niso predstavljeni. Sledi opis konstrukcije skupnega učnega prostora in nazadnje njegova analiza v odnosu do izhodiščnega in ciljnega učnega prostora.

3 Izbrani poučevalni prostori

V razdelku predstavimo ozadje izbranih poučevalnih prostorov (matematika 7. razreda OŠ, spodbujevano učenje igre Nim, programiranje v Pythonu), ki smo jih uporabili za analizo strukture poučevalnega prostora umetne inteligence - spodbujevanega učenja - v odnosu do osnovnošolske matematike. Prva dva prostora, ki sta ključna za analizo, predstavimo v vseh podrobnostih, zadnji, ki je po kompleksnosti primerljiv s samostojnim nizom predmetov in bi najbrž zahteval svoj učni načrt, pa zgolj skeletno opišemo oz. skiciramo pot, po kateri osnovnošolec lahko pride do tovrstnega znanja. Razdelek zaključimo z identifikacijo znanj izhodiščnega poučevalnega prostora (matematike 7. razreda), ki so potrebna za usvajanje konceptov ciljnega poučevalnega prostora.

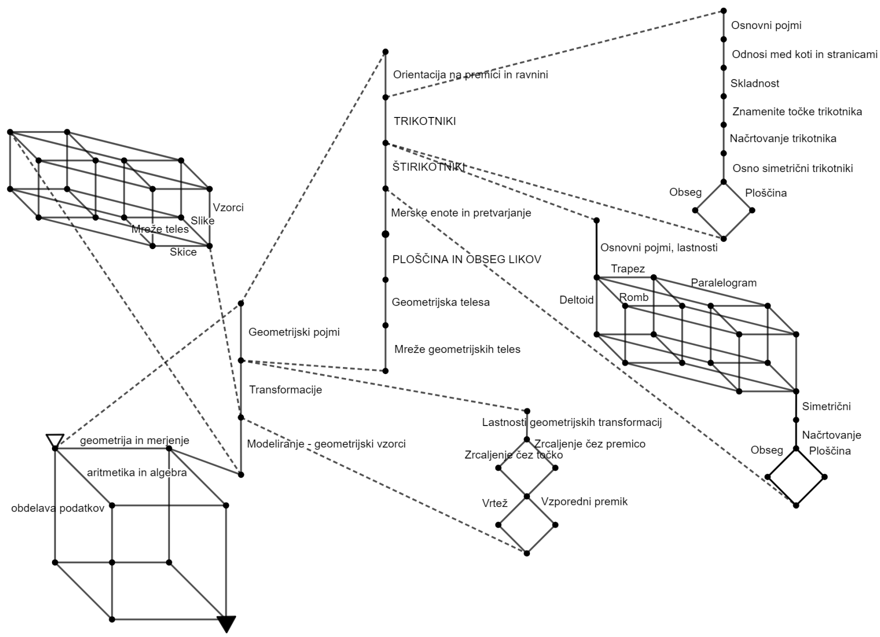
3.1 Poučevalni prostor matematike 7. razreda

Poučevalni prostor matematike 7. razreda (metodologija - 1. korak) lahko v izhodišču razdelimo na 3 glavne skupine, ki jih skozi celotno šolsko leto učenci usvojijo: *Geometrija in merjenje, Aritmetika in algebra* ter *Obdelava podatkov*. Vsaka od treh skupin predstavlja neodvisno stanje, ki pa je nato še podrobneje razčlenjena. Poleg teh 3 jasno določenih skupin imamo še 6 znanj, ki so povezana z več temami in jih lahko obravnavamo pri katerikoli snovi tekom šolskega leta. Teh 6 znanj predstavljajo: *Odprti problemi, Zaprti problemi, Problemske situacije, Raziskovalna vprašanja, Potrebni in zadostni podatki* ter *Indirektne besedilne naloge*, zato jih tudi na sliki 1 prikazujemo na način, da lahko pridemo do njihove obravnave iz katerega koli stanja znanja.



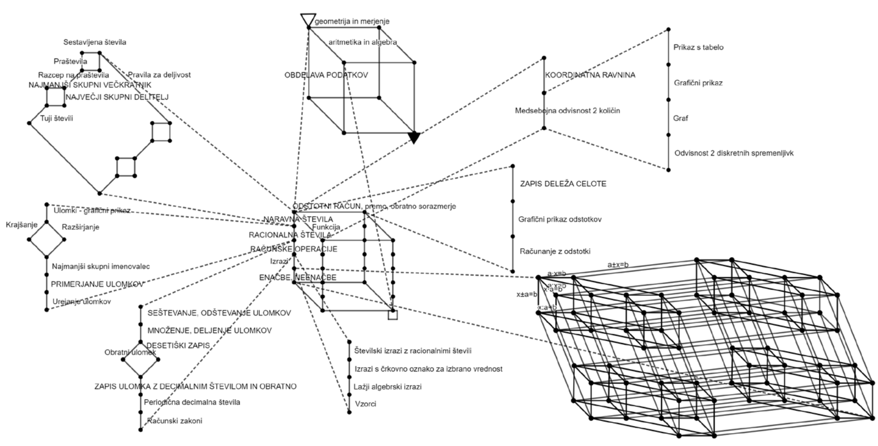
Slika 1: Poučevalni prostor matematike 7. razreda

V skupini *Geometrija in merjenje* (slika 2) imamo dve zaporedni osnovni stanji *Geometrijski pojmi* in *Transformacije*, ki ju bomo še razčlenili. Pri *geometrijskih pojmih* se bomo zadovoljili, da zaradi omejenega prostora opišemo osnovno razčlenjenost, saj so na sliki prikazani elementarni obravnavani koncepti. Tako morajo učenci zaporedoma spoznati koncepte *Orientacija na premici in ravnini, Trikotnik, Štirikotnik, Merske enote in pretvarjanje, Ploščina in obseg likov, Geometrijska telesa* in Mreže *geometrijskih teles*. Po usvojenih konceptih osnovnih geometrijskih pojmov učenci spoznajo *Transformacije*, kjer najprej usvojijo *Lastnosti geometrijskih transformacij*, nato pa se neodvisno naučijo še *Zrcaljenja čez premico* in *čez točko*. Za tem sledi neodvisna obravnava *Vrteža in Vzporednega premika*. Zadnje stanje v tej dimenziji predstavlja *Modeliranje – geometrijski vzorci*, kjer učenci neodvisno osvojijo risanje *Slik, Skic, Mrež teles* ter *Vzorcev*.



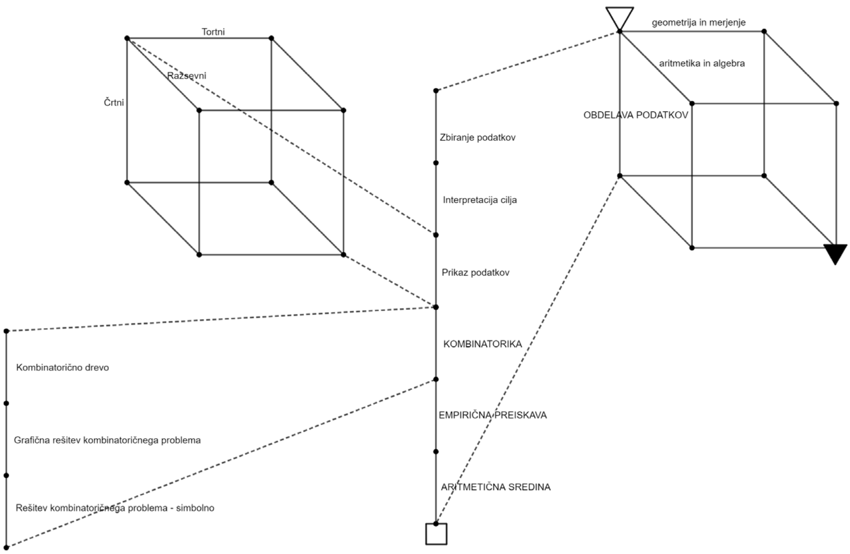
Slika 2: Poučevalni prostor matematike 7. razreda - Geometrija in merjenje

Bolj podrobno si bomo pogledali skupino *Aritmetika in algebra* (Slika 3), ki je najkompleksnejša skupina v poučevalnem prostoru 7. razreda. V osnovi ločimo 3 neodvisna stanja *Odstotni račun, Premo in obratno sorazmerje, Funkcija* ter tretje stanje, ki je sestavljeno iz petih zaporedno obravnavanih stanj: *Naravna števila, Racionalna števila, Računske operacije, Izrazi* ter *Enačbe in neenačbe*. Pri naravnih številih je potrebno najprej neodvisno spoznati *Pravila za deljivost* ali naslednje zaporedne koncepte, ki jih začnemo z neodvisnim spoznavanjem *Sestavljenih števil* in *Praštevil*, da lahko za posamezno število *Razcepimo na praštevila*. To uporabljamo pri določanju *Najmanjšega skupnega večkratnika* in *Največjega skupnega delitelja,* ob čemer spoznajo tudi koncept *Tujih števil*. Pri racionalnih številih najprej utrdijo *Ulomke z grafičnim prikazom*, nato nadaljujejo s *Krajšanjem* in *Razširjanjem*. S pomočjo obravnavanih konceptov lahko določimo *Najmanjši skupni imenovalec*, ki nam pomaga pri *Primerjanju* in *Urejanju ulomkov*. Tako pri naravnih kot racionalnih številih pa uporabljamo *računske operacije*, za katere je na sliki lepo vidna razčlemba do elementarnih konceptov in jo bomo zaradi omejenega prostora izpustili. Po usvojenih *računskih operacijah* na množici obravnavanih števil, se posvetimo še *Izrazom*, pri katerih najprej rešujemo *Številske izraze*, nato pa vpeljemo tudi *Črkovne oznake za izbrano vrednost.* Učenci se naučijo še *Lažjih algebrskih izrazov*, nato pa z vzorci utrdijo znanje usvojenih stanj tako, da opazujejo vzorec ter ugotovijo in zapišejo pravilo. Po vseh naštetih usvojenih stanjih, učenci obravnavajo še *Enačbe in neenačbe.* Gre za najbolj kompleksen del na sliki, saj ga sestavlja 6 neodvisnih obravnavanih konceptov. V 7. razredu namreč učenci še ne obravnavajo reševanja enačb, ki ga spoznajo šele v 9. razredu. Naučijo se le postopka za reševanje posamezne oblike enačbe: $a \pm x = b$, $x \pm a = b$, $ax = b$, $xa = b$, $a{:}x = b$ *in* $x{:}a = b$. Pri stanju *Funkcija* učenci zaporedoma obravnavajo pojem *Koordinatna ravnina* in *Medsebojna odvisnost dveh količin*. V slednjem prikažejo medsebojno odvisnost dveh spremenljivk *s tabelo* in odvisnost interpretirajo, nato se naučijo, kako to *grafično prikazati* in ob besedilni nalogi narišejo posamezni *graf.* Prav tako prepoznajo *odvisnost dveh diskretnih spremenljivk*, kjer naraščanje ene spremenljivke pomeni naraščanje/padanje druge. Tretje stanje te dimenzije je *Odstotni račun, premo in obratno sorazmerje*, kjer spoznajo na kak način *Zapišemo dele celote* ter *Grafično prikažemo odstotke.* V nadaljevanju učenci osvojijo tudi koncept *Računanja z odstotki.*



Slika 3: Poučevalni prostor matematike 7. razreda - Aritmetika in algebra. Beli kvadratek v vozlišču na koncu 3D kocke, ki ponazarja obravnavo *Aritmetike in algebre*, je izhodiščna točka spodbujevanega učenja igre NIM (slika 5).

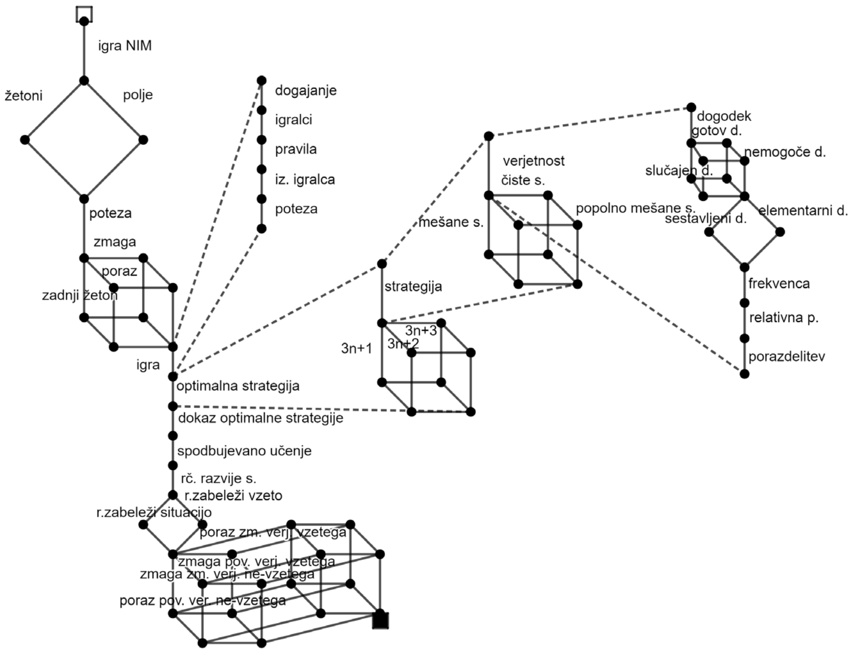
V tretji dimenziji *Obdelava podatkov* (Slika 4) se učenci zaporedoma spoznajo najprej z *Zbiranjem podatkov* ter *Interpretacijo cilja.* Zbrane podatke se naučijo *Prikazati*, pri čemer spoznajo elementarne koncepte *Tortnega, Razsevnega* in *Črtnega* (linijskega) prikaza podatkov. Na področju *Kombinatorike* spoznajo koncept *Kombinatoričnega drevesa* (oz. drevesnega prikaza), s pomočjo katerega *rešijo kombinatorični problem na grafični ravni* – narišejo torej skico, sliko, preglednico ali kombinatorično drevo. Učenci spoznajo tudi koncept *Rešitve kombinatoričnega problema – simbolno*, kjer se naučijo za lažji kombinatorični problem nastaviti tudi račun.



Slika 4: Poučevalni prostor matematike 7. razreda - Obdelava podatkov. Beli kvadratek v vozlišču ob koncu *Aritmetične sredine* je izhodiščna točka spodbujevanega učenja igre NIM (slika 5).

3.2 Poučevalni prostor spodbujevanega učenja igre Nim

Oglejmo si sedaj opis pučevalnega prostora za razumevanje spodbujevanega učenja igre Nim (metodologija - 2. korak), ki je bilo predstavljeno v osnovnošolski raziskovalni nalogi (Bokal, 2022). Potrebna znanja v grobem razdelimo v štiri skupine: *Igra Nim*, *Igra*, *Optimalna strategija* in *Spodbujevano učenje*. Vsaka od teh skupin predstavlja eno od zaporednih stanj v učnem prostoru, saj je potrebno najprej spoznati pravila igre, nato raziskati možnosti igranja in poiskati optimalno strategijo igranja ter jo nato vključiti v načrt spodbujevanega učenja igre Nim. Pri tem se zavedamo, da so omenjena stanja dodatno strukturirana, saj zahtevajo poznavanje različnih konceptov oz. znanj. V nadaljevanju jih bomo zato razčlenili in s tem pregledno opisali celoten poučevalni prostor. Zaradi omejenega prostora bomo le pri izbrani družini znanj šli do elementarnih obravnavanih konceptov, ki se v učnem prostoru ne delijo še naprej, pri ostalih pa se bomo zadovoljili s tem, da je podrobna struktura predstavljena na sliki 5.



Slika 5: Poučevalni prostor igre Nim

Preden se osredotočimo na poučevalni prostor gre Nim, si oglejmo poučevalni prostor *Igre* v splošnem, ki je osnova za razumevanje vseh ostalih specifičnih iger. Opišemo ga lahko z zaporednimi stanji *Dogajanje*, *Igralci*, *Pravila*, *Cilj igralca* in *Poteza*, ki si sledijo v navedenem vrstnem redu. Igralec igro najprej prepozna kot dogajanje, ki je odvisno od sodelujočih v igri (igralcev) in včasih od naključja. Nato se seznani s pravili oz. dogovori, po katerih se je potrebno ravnati in si določi cilj. Ko je igralec na vrsti (na potezi), izbira izmed dejanji, ki so na voljo. Običajno se odloči za tisto, za katero meni, da bo zanj, glede na postavljeni cilj, najugodnejša (Jamnik, 1973).

Pri igri Nim za dva igralca je na igralnem polju nekaj žetonov. Ko je igralec na potezi, lahko vzame enega ali (če je to mogoče) dva žetona. Poraženec je tisti, ki vzame zadnji žeton. Opis poučevalnega prostora igre Nim (za dva igralca) se začne s stanjem *Igra Nim*, na katerem se igralec seznani z igro in nadaljuje na eno od neodvisnih stanj *Žeton* oz. *Polje*. Ko igralec razume pomen obeh oznak ter oceni konkretno situacijo v igri, bodisi v vrstnem redu *Žeton-Polje* ali obratno, lahko (ko je na vrsti) nadaljuje na stanje *Poteza*. Na tem mestu mora spoznati vse možne izide, *Zadnji žeton*, *Poraz* in *Zmaga*, ki jih lahko spozna neodvisno. Ob predpostavki, da je stanje poučevalnega prostora *Igra*, že dosegel, lahko prične s spoznavanjem naslednje dimenzije, ki smo jo poimenovali *Optimalna strategija.* Najprej spozna pojem *Strategija* kot navodilo, ki se uporablja pri igranju iger in je odvisno od okoliščin. Za razumevanje in določanje strategij je potrebno razumeti osnove *Verjetnosti*, ki se jih igralec oz. učenec lahko nauči neodvisno od ostalih stanj v prostoru spodbujevanega učenja igre Nim. Učenje začne z definicijo *Dogodka*, nato v poljubnem vrstnem redu spozna *Gotov dogodek*, *Slučajni dogodek* in *Nemogoč dogodek*, od koder nadaljuje do *Elementarnega* in *Sestavljenega dogodka*, kjer vrstni red ni pomemben. Ko loči med dogodki, nadaljuje na proučevanje njihove pogostosti pojavljanja, pri čemer se nauči izračunati *Frekvenco* in *Relativno frekvenco dogodka* ter spozna *Porazdelitev verjetnosti elementarnih dogodkov* v tem vrstnem redu. Doseženo stanje omogoča nadaljevanje učenja *Strategij*, v okviru katerega neodvisno spozna *Čiste strategije*, *Mešane strategije* in *Popolnoma mešane strategije*. Na naslednji stopnji se učenec omeji na strategije igre Nim, analizira situacije glede na število žetonov, $3n+1$, $3n+2$ oz. $3n+3$, predvidi *Optimalno strategijo* in nato poda še Dokaz *Optimalne strategije*. Zadnja stopnja v prostoru spodbujevanega učenja igre Nim je *Spodbujevano učenje*, s pomočjo katerega se da poiskati optimalno strategijo za igro Nim z umetno inteligenco. Računalniški igralec strategijo pridobiva skozi odigrane igre (učljivi igralec). Gre za strojno učenje, čigar cilj je priučiti ali optimizirati vedenje na podlagi povratne informacije. Začne se torej z *Učljivim igralcem, ki razvija strategijo*. Na naslednjem koraku igralec neodvisno *Zabeleži vzeto* in *Zabeleži situacijo*. Strategijo nato dopolni z dvema od štirih neodvisnih možnosti: *Poraz zmanjša verjetnost vzetega v situaciji*, *Poraz poveča verjetnost ne-vzetega v situaciji*, *Zmaga poveča verjetnost vzetega v situaciji* in *Zmaga zmanjša verjetnost ne-vzetega v situaciji*.

Vozlišče, kjer ima učeči vsa potrebna znanja, ki jih raziskovalna naloga ne obravnava in jih je pridobil v ukviru pouka matematike 7. razreda, je stična točka teh dveh učnih prostorov ter je označeno z belim kvadratkom (metodologija - 5. korak). Pri tem je potrebno beli kvadratek na slikah 3 in 4 obravnavati kot najbližje skupno stanje znanja, ki vsebuje vsa znanja v označenih dveh stanjih.

V tabeli št. 1 je prikazan nabor konceptov, ki jih učenci spoznajo pri matematiki v 7. razredu osnovne šole in so potrebni za razumevanje spodbujevanega učenja igre Nim (metodologija - 3. korak). Poleg tega navajamo še teme, ki so pomembne za izdelavo raziskovalne naloge na poljubnem področju.

Tabela 1: Koncepti matematike 7. razreda in raziskovalne naloge

<table>
<tr><th>Matematika
(7. razred)</th><th colspan="3">Koncept v raziskovalni nalogi</th></tr>
<tr><td>Racionalna števila (ulomki, primerjanje ulomkov).</td><td rowspan="5">Verjetnost (relativna frekvenca, delež, porazdelitev).</td><td rowspan="6">Spodbujevano učenje.</td><td rowspan="8">Izdelava raziskovalne naloge.</td></tr>
<tr><td>Računske operacije (računanje z ulomki, desetiški zapis ulomka, zapis ulomka z decimalnim številom).</td></tr>
<tr><td>Enačbe in neenačbe.</td></tr>
<tr><td>Odstotni račun (zapis deleža celote).</td></tr>
<tr><td>Koordinatna ravnina.</td></tr>
<tr><td>Naravna števila (najmanjši skupni večkratnik, največji skupni delitelj).</td><td>Strategija. Iskanje strategije za situacije “3n+1”, ”3n+2” in “3n+3”.</td></tr>
<tr><td>Obdelava podatkov (kombinatorika, empirična preiskava, aritmetična sredina).</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Odprti problemi, Raziskovalna vprašanja, Problemske situacije, Potrebni in zadostni podatki.</td><td></td><td></td></tr>
</table>

3 Poučevalni prostor programiranja

Za izdelavo raziskovalne naloge je bistven, ni pa za njeno razumevanje potreben, tudi učni prostor programiranja. V konkretnem primeru je bil uporabljen programski jezik Python, kar nakazuje na njegovo dostopnost za osnovnošolce, ni pa to edini jezik, v katerem se osnovnošolci lahko učijo programirati. V razdelku zato učnega prostora pythona ne opišemo v enaki podrobnosti, kot prejšnjih dveh, navedemo pa pot, ki je pripeljala do ustrezne globine znanja.

Učenec se je s programiranjem prvič srečal v 3. razredu na celotedenski delavnici v izvedbi FabLab Rihard Ursini na OŠ Polhov Gradec (Marko Jankovec, 2019). Na njej so udeleženci uporabljali računalnik Raspberry Pi in na njem programirali v Scratchu in nekaj malega tudi v Pythonu, med odmori pa so se lahko tudi kratkočasili z igro Minecraft Pi, ki je na teh računalnikih samodejno naložena. Ker so pri učencu doma računalniške igre bolj zapostavljene, se v igranju igre ni mogel kosati z ostalimi in je sklenil, da bo sprogramiral svoj Minecraft. Za konec delavnice je učenec ob pomoči mentorjev pripravil Kahoot kviz za ponovitev naučenega. Kot nagrado je od sponzorja Metrel d.d. (Prosen Verbič, 2018) prejel knjigo o Scratchu (Lajovic, 2011) in knjigo o Pythonu (Krebelj, 2016).

Učencu je nadaljeval z raziskovanjem Raspberry Pi-a pod mentorstvom staršev. Samostojno je predelal navedeno knjigo o Scratchu in se udeležil delavnice - *Scratchmojstri* v organizaciji Fakultete za elektrotehniko Univerze v Ljubljani (UL Fakulteta za elektrotehniko, 2022). Tu se je naučil sam narediti računalniško igro. S pridobljenim znanjem je začel v Scratchu programirati svoj 2D Minecraft.

Naslednje leto se mu je pri delanju Minecrafta pridružil sošolec, ki ga je zanimala zgodovina. Tako se je (takrat še ne dokončan) 2D Minecraft začel razvijati v igro, v kateri lahko igralec gradi in obiskuje gradbene dosežke zgodovinskih civilizacij. Ko je bila igra dovršena, so jo uporabili kot učni pripomoček pri uri zgodovine. Pri tem sta učenca raziskovala, ali taka igra pomaga pri učenju. Zgodovinske okoliščine, delanje igre in rezultate z uporabo igre v šoli sta opisala v raziskovalni nalogi Bokal, Visočnik, 2021.

Učenec je na poti do igre v Scratchu naletel na veliko težav, ki so bile povezane s Scratchovo »pre-preprostostjo«. Zato se je podrobneje lotil tudi Pythona, ki ga je pred tem bolj redko uporabljal. S pomočjo knjige o Pythonu je nadgradil svoje znanje programiranja v tem jeziku. Kot enega prvih izzivov je sprogramiral igro Nim, ki je dovolj enostavna, da ne potrebuje grafike. Najprej je računalnik omogočal, da sta dva igralca (človeka) igrala igro. Kasneje je bilo mogoče tudi, da je človek igral proti računalniku. Izkazalo se je, da lahko računalnik igra na veliko različnih načinov. Tako je učenec raziskoval strategije in našel tudi optimalno (tisto, ki igralca pripelje do zmage).

Program je nadgradil tako, da je računalnik igral sam proti sebi. Učenec je lahko zato zelo hitro izvedel zelo veliko število iger. V pogovoru z mentorjem sta raziskala idejo, da bi se lahko računalnik sam naučil strategije igranja. To je učenec dosegel s spodbujevanim učenjem. Z njim je dosegel, da je računalnik po vsaki igri dopolnil svojo strategijo, glede na to, ali je zmagal ali ne. In tako je v svoji naslednji raziskovalni nalogi (Bokal, 2022) sam naredil program, ki je z umetno inteligenco - spodbujevanim učenjem - našel optimalno strategijo za igro Nim. Poučevalni prostor te raziskovalne naloge je izhodišče predmetne raziskave.

4 Končni rezultati in diskusija

V prispevku z uporabo matematičnega modela učnega oz. poučevalnega prostora ilustriramo pot od matematike sedmega razreda do razumevanja enega osnovnih mehanizmov umetne inteligence - spodbujevanega učenja. Najprej uvedemo koncept učnih prostorov, se omejimo na poučevalne prostore, ki učni prostor konstruirajo na podlagi gradiva. V nadaljevanju analiziramo gradivo, učni načrt za matematiko 7. razreda oz. raziskovalno nalogo, v kateri sedmošolec predstavi rezultate svoje implementacije spodbujevanega učenja. Oba poučevalna prostora predstavimo z njunim grafom, kar omogoča vizualizacijo možnih poti od praznega stanja znanj do stanja znanja, ko je vsa snov predstavljena.

Izdelana vizualizacija omogoča vrednotenje načinov poučevanja, ki bi omogočili učinkovito usvajanje izdelane snovi ob predpostavljenem predznanju. To ilustriramo z identificiranjem presečnih enot znanja med obema poučevalnima prostoroma in identificiranjem stanja znanja na izhodiščnem učnem prostoru, ki vsebuje vsa presečna znanja. V tem stanju je posameznik maksimalno opremljen za spust v učni prostor umetne inteligence, kot ga predstavlja opisana raziskovalna naloga.

Kot enega konkretnih rezultatov opisanega modeliranja izpostavimo, da je stanje znanja, ki v poučevalnem prostoru raziskovalne naloge predstavlja razumevanje spodbujevanega učenja, od najbližnjega stanja znanja v poučevalnem prostoru matematike sedmega razreda oddaljeno 37 konceptov (metodologija - 6. korak), ki so opisani v razdelku o učnem prostoru naloge in predstavljeni na sliki 5. Od teh 37 konceptov jih je 21 dejansko pomembnih za razumevanje spodbujevanega učenja, 5 jih je pomembnih za razumevanje koncepta abstraktne igre in strategije, znotraj katerega spodbujevano učenje deluje, dodatnih 11 pa jih je pomembnih za razumevanje igre Nim, konkretne igre, ki je učenca motivirala za izdelavo raziskovalne naloge.

Navedeni pristop odpira vrsto zanimivih raziskovalnih vprašanj. Začnimo s povsem praktičnimi. Jasno je, da višji kot je razred osnovne ali letnik srednje šole, krajša je razdalja do ciljnega stanja znanja razumevanja umetne inteligence. Ob predpostavki omejenega prostega časa, ki ga učenec ali dijak lahko posveti raziskovanju tovrstnih izzivov, npr. v okviru krožka, pa bi bilo zanimivo iskati optimalno starost, v kateri bi znotraj takega krožka lahko usvojili znanja, ki jih do ciljnega razumevanja pripeljejo. Drugo praktično raziskovalno vprašanje predstavlja povezavo med pozornostjo oz. časom, potrebnim za razumevanje konceptov, in globino, do katere je koncepte smiselno p(r)oučevati. V konkretnem primeru učenec sam implementira algoritem spodbujevanega učenja in se z njim lahko tudi dejansko igra, kar pa predpostavlja obsežno vlaganje časa v učenje programiranja.

Kot raziskovalno vprašanje velja odpreti tudi temo reprezentativnosti praktičnih učnih prostorov. Kot nakazujejo rezultati (Galun in Bokal, 2023), je isto gradivo mogoče konceptualizirati z več različnimi učnimi prostori. V tem smislu je relevantno uvesti pojem razdalje med učnimi prostori in optimalnega učnega prostora. Rešitve bi iskali v smeri razdalje med grafi (popravljalna razdalja ipd.) (Sanfeliu in Fu, 1983)

Slednja opazka odpira vprašanje motivacije in pedagoških pristopov. V konkretnem primeru sta čas in pozornost prišla iz zanimanja za učni prostor programiranja, ki je vzklil na delavnici v organizaciji FabLab in sta učenca motivirala, da je čas posvečal učnemu prostoru programiranja in iger v Scratch ter kasneje Python. Z začetno iskro delavnice programiranja, ki je omogočila začetne uspehe v teh učnih prostorih, so učni prostori računalniških iger, v katerih otroci porabijo precej svojega časa in pozornosti, postali nezanimivi. Ta uvid, utemeljen na predstavljeni izkušnji, odpira povsem novo dimenzijo eksistencialnih vprašanj, ki smo se jih dotaknili z omenjanjem fizikalnih principov merjenja v pregledu literature učnih prostorov. Po fizikalnem pogledu na svet se dogodki odvijajo v prostoru Minkovskega (Minkowski, 1907), ki formalizira fizikalne zakonitosti 4-dimenzionalnega prostor-časa. Zavedna, učeča se osebnost pa s svojim stanjem zavesti ta prostor nadgradi s prostorom stanj znanja, ki jih učeči usvaja ob svojih aktivnostih v prostor-času. Relativnostna teorija, ki opisuje zakonitosti izhodiščnega prostor-časa, dobi ob soočenju s teorijo učnih prostorov nadgradnjo, ki omogoča iskanje odgovorov na vprašanja optimalne izrabe časa pri učenju in delu, kot jih naslavlja Bokal, Steinbacher, 2019. Kot primer lahko posamezniku ob izbranem trenutku poleg njegove lokacije v fizičnem prostoru pripišemo tudi stanje znanja v njegovem učnem prostoru. To omogoča po eni strani osebno refleksijo - v katerih učnih prostorih preživljamo svoj čas in trošimo svojo pozornost, po drugi strani družbeno refleksijo - v kakšne učne prostore družba usmerja posameznike, še posebej učečo mladino, in nenazadnje refleksijo gibanja v prihodnost: kakšne učne prostore razvijamo, kakšne nove koncepte uvajamo.

References

Bokal, D., & Steinbacher, M. (2019). Phases of psychologically optimal learning experience: task-based time allocation model. Central European Journal of Operations Research, 27(3), 863-885.

Bokal, G., (2022). Igra Nim skozi matematiko in spodbujevano učenje, raziskovalna naloga, Osnovna šola Alojzija Šuštarja, Ljubljana.

Bokal, G., Visočnik, P. (2021). Umetnost gradnje - učni pripomoček za igrivo spoznavanje zgodovinskih civilizacij v Scratch okolju, https://scratch.mit.edu/projects/439141714/

Eppstein, D., Falmagne, J. C. & Ovchinnikov, S. (2008). Media Therory, Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer Berlin.

Eppstein, D., Falmagne, J. C., & Uzun, H. (2009). On verifying and engineering the wellgradedness of a union-closed family. Journal of Mathematical Psychology, 53(1), 34-39.

Evropska Komisija (EK), 2023 Key Enabling Technologies Policy, prenešeno s spleta 1.2.2023, https://research-and-innovation.ec.europa.eu/research-area/industrial-research-and-innovation/key-enabling-technologies_sl

Falmagne, J. C., & Doignon, J. P. (1988). A class of stochastic procedures for the assessment of knowledge. British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 41(1), 1-23.

Galun, M., Bokal, D., Teaching spaces as instructor's and students guide between learning space and curriculum space, v pripravi.

Huynh-The, T., Pham, Q. V., Pham, X. Q., Nguyen, T. T., Han, Z., & Kim, D. S. (2023). Artificial intelligence for the metaverse: A survey. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 117, 105581.

Jamnik, R. (1973). Teorija iger. Državna založba Slovenije, Ljubljana.
Kambouri, M., Koppen, M., Villano, M., & Falmagne, J. C. (1994). Knowledge assessment: Tapping human expertise by the QUERY routine. International Journal of Human-Computer Studies, 40(1), 119-151.
Koppen, M. (1993). Extracting human expertise for constructing knowledge spaces: An algorithm. Journal of mathematical psychology, 37(1), 1-20.
Krebelj, P. (2016) Spoznavamo programski jezik python. Doria, Ljubljana. https://www.doria.si/knjigarna/q/artikel/7405/spoznavamo_programski_jezik_python
Lajovic, S. (2011). Scratch. Pasadena, Ljubljana, 2011.
Lin, F., Cao, X., & Li, J. (2021). The language of pre-topology in knowledge spaces. arXiv preprint arXiv:2111.14380.
Matayoshi, J. (2022). Approximately counting and sampling knowledge states. British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 75(2), 293-318.
Minkowski, H. (1907), "Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern" [The Fundamental Equations for Electromagnetic Processes in Moving Bodies], Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse: 53–111
Prosen Verbič, N., Metrel d.d. podprl podprl projekt FabLab. (2018). https://www.mojaobcina.si/dobrova-polhov-gradec/novice/podjetje-metrel-dd-podprlo-projekt-fablab-polhov-gradec.html
Samek, W., Müller, KR. (2019). Towards ExplUInable Artificial Intelligence. In: Samek, W., Montavon, G., Vedaldi, A., Hansen, L., Müller, KR. (eds) ExplUInable UI: Interpreting, ExplUIning and Visualizing Deep Learning. Lecture Notes in Computer Science(), vol 11700. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28954-6_1
Sanfeliu, Alberto; Fu, King-Sun (1983). A distance measure between attributed relational graphs for pattern recognition. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 13 (3): 353 – 363
Segedinac, M., Milićević, N., Čeliković, M., & Savić, G. (2022). A neuroevolutionary method for knowledge space construction. Computer Science and Information Systems, (00), 4-4.
Su, J., & Ng, D. T. K. (2023). Artificial intelligence (UI) literacy in early childhood education: The challenges and opportunities. Computers and Education: Artificial Intelligence, 100124.
Sun, W., Li, J., Lin, F., & He, Z. (2022). Constructing polytomous knowledge structures from fuzzy skills. Fuzzy Sets and Systems.
Učni načrt. Program osnovna šola. Matematika. (2011). Ministrstvo za šolstvo in šport: Zavod RS za šolstvo. https://www.gov.si/assets/ministrstva/MIZS/Dokumenti/Osnovna-sola/Ucni-nacrti/obvezni/UN_matematika.pdf
UL Fakulteta za elektrotehniko, Scratchmojstri. (2022). https://fe.uni-lj.si/solarji_in_dijaki/poletni_tabor_inovativnih_tehnologij/delavnice/scratchmojstri/
Yang, S. J. H., Ogata, H., & Matsui, T. (2023). Guest Editorial: Human-centered UI in Education: Augment Human Intelligence with Machine Intelligence. Educational Technology & Society, 26(1), 95-98. https://doi.org/10.30191/ETS.202301_26(1).0007