Verjetnost

Dominik Benkovič

Univerzitetna založba
Univerze v Mariboru

Kazalo

Predgovor **1**

1 Neformalni uvod v teorijo verjetnosti **3**

1.1 Statistična definicija verjetnosti 4
1.2 Klasična definicija verjetnosti 6
1.3 Geometrijska definicija verjetnosti 8

2 Osnove verjetnosti **13**

2.1 Prostor elementarnih dogodkov 13
2.2 Sigma algebra dogodkov 16
2.3 Verjetnostni prostor 18
2.4 Lastnosti verjetnostne mere 22
2.5 Pogojna verjetnost 26
2.6 Neodvisnost 29
2.7 Formula za popolno verjetnost 31
2.8 Naključni sprehod 33
2.9 Borelov nič-ena zakon 39

3 Naključne spremenljivke **43**

3.1 Porazdelitveni zakon 43
3.2 Diskretne naključne spremenljivke 48
3.3 Zvezne naključne spremenljivke 51
3.4 Funkcije naključnih spremenljivk 59
3.5 Aproksimacije binomske porazdelitve 62

4 Naključni vektorji **67**

4.1 Porazdelitveni zakon 67
4.1.1 Diskretno porazdeljeni naključni vektorji 70
4.1.2 Zvezno porazdeljeni naključni vektorji 72

4.2 Neodvisnost naključnih spremenljivk 76
4.3 Vsota naključnih spremenljivk in konvolucija 78
4.4 Pogojne naključne spremenljivke 83

5 Številske karakteristike **89**

5.1 Matematično upanje 89
5.2 Disperzija 96
5.3 Kovarianca 99
5.4 Momenti 104
5.5 Pogojno matematično upanje 107

6 Limitni izreki **113**

6.1 Rodovne funkcije 113
6.2 Karakteristične funkcije 118
6.3 Konvergenca naključnih spremenljivk 122
6.4 Zakon velikih števil 125
6.5 Centralni limitni izrek 129

7 Osnovni naključni procesi **133**

7.1 Uvod 133
7.2 Bernoullijev proces 135
7.3 Poissonov proces 137
7.4 Vejitveni proces 141

8 Markovske verige **147**

8.1 Homogene markovske verige 147
8.2 Klasifikacija stanj HMV 153
8.3 Klasifikacija HMV 158
8.4 Nerazcepne HMV 162
8.5 Absorbirajoče HMV 165

Literatura **171**

Priloga: Tabela A **173**

Predgovor

Pričujoče delo je zastavljeno kot skripta pri predmetu Verjetnost na prvi stopnji študijskega programa Matematika na Fakulteti za naravoslovje in matematiko in je nastalo na podlagi priprav na predavanja. Tematika verjetnosti in naključnih procesov je obravnavana v več knjigah in učbenikih. Posamezni avtorji imajo različne pristope k obravnavani tematiki, različen vrstni red podajanja snovi in različen nivo zahtevnosti. V nobenem delu pristop in vrstni red obravnave ne sovpadata čisto s pristopom, ki ga uporabljamo pri predmetu Verjetnost. Ker so se predavanja v študijskem letu 2020/21 izvajala na daljavo, sem imel pri pripravi dela primarni cilj študentom zagotoviti vir, ki neposredno sledi podajanju snovi na predavanjih. Po drugi strani na ustnih zagovorih teorije pri nekaterih študentih opažam pomanjkljivo znanje in nerazumevanje osnovnih pojmov. Zato upam, da bo delo študentom omogočalo tudi kakovosten samostojni študij. Za utrditev same teorije je nujno potrebno predelati kakšno kakovostno zbirko nalog iz verjetnosti.

Pričujoči učbenik je sestavljen iz dveh delov. Prvi del, ki obsega šest poglavij, pokriva vsebino klasičnega verjetnostnega računa: definicijo in osnovne lastnosti verjetnosti, naključne spremenljivke in naključne vektorje ter številske karakteristike in limitne izreke. Drugi del, ki obsega dve poglavji, obravnava naključne procese. Tukaj so najprej predstavljeni osnovni naključni procesi, v nadaljevanju pa so bolj natančno obravnavane homogene markovske verige. Pri podajanju snovi se v čim večjem možnem obsegu držim matematične korektnosti, zato je veliko rezultatov tudi dokazanih. Nekateri rezultati so podani kot dejstva, brez dokazov, ker bodisi tematika presega nivo zahtevnosti bodisi so njihovi dokazi tehnično zapleteni in zamudni. Pozorni bralec bo v delu zagotovo našel kakšno nedoslednost, ki izhaja iz dejstva, da je gradivo namenjeno študentom na prvi stopnji bolonjskega študija, kjer je smiselno kakšno strogo formalnost iz teorije mere tudi izpustiti.

Delo ne vsebuje originalnih prispevkov ali pristopov s področja verjetnosti in naključnih procesov. Lasten je samo v določeni meri izbor in sama predstavitev obravnavane snovi. Pri pripravi gradiva sem se zgledoval predvsem po učbenikih [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] in spletnem viru [10]. Tako na primer v svet verjetnosti vstopimo neformalno, kot to naredi prof. Milan Hladnik v učbeniku [4, Neformalni uvod v verjetnost], poglavji o naključnih procesih pa sta povzeti po učbenikih [1, 3]. Pri študiju na daljavo so se kot zelo poučne izkazale računalniške simulacije s spletne strani *Random* [10], zato so v delo vključeni tudi zgledi, pri katerih lahko bralec simulacije po želji tudi samostojno izvaja na računalniku.

Na koncu bi se iskreno zahvalil recenzentoma dr. Brigiti Ferčec in dr. Borutu Zalarju za natančen pregled dela in popravke. Zahvala gre tudi Urški Jaušovec Kolar za lektoriranje besedila.

Poglavje 1

Neformalni uvod v teorijo verjetnosti

Začetki proučevanja verjetnosti segajo v 17. stoletje in so povezani z različnimi igrami na srečo, pri katerih so opazili določene pravilnosti in nenavadne lastnosti. Med začetnike verjetnosti spadajo P. Fermat (1601–1665), B. Pascal (1623–1662), Ch. Huygens (1629–1695) in J. Bernoulli (1654–1705). Utemeljitelji klasične verjetnosti so A. De Moivre (1667–1754), P. S. Laplace (1749–1827), S. D. Poisson (1781–1840), C. F. Gauss (1977–1855) in ruski matematiki P. L. Čebišev (1821–1894), A. A. Markov (1856–1922), A. M. Ljapunov (1857–1918). Utemeljitelj sodobnega verjetnostnega računa je A. N. Kolmogorov (1903–1987), ki je definiral verjetnostni prostor z uporabo teorije mere leta 1933. Ta pomeni, da se je teorija verjetnosti dobrih 300 let razvijala brez splošno korektne matematične definicije.

Zakaj se je teorija verjetnosti pojavila šele v 17. stoletju in ne prej? Igre so se pojavile že zelo zgodaj, 3500 let pred Kristusom v starem Egiptu. Ker je verjetnost povezana z naključjem, so lahko v ozadju tudi religiozni razlogi, da je naključje v domeni bogov.

Za začetek teorije verjetnosti je smiselno šteti leto 1654, ko kockar markiz Chevalier De Mere francoskima matematikoma Fermatu in Pascalu zastavi vprašanje, na kaj je bolje staviti:

A – v štirih zaporednih metih igralne kocke pade vsaj ena šestica,

B – v 24-ih zaporednih metih dveh igralnih kock pade vsaj en par šestic.

De Mere je beležil rezultate obeh iger in v prvem primeru je v povprečju zmagoval (verjetnost dogodka A je večja od 1/2), v drugem pa izgubljal (verjetnost dogodka B je manjša od 1/2). To je bilo v nasprotju z njegovim prepričanjem, da bi v obeh primerih moral imeti enake možnosti za zmago. Verjetnost, da pri metu kocke pade šestica, je $p = 1/6$. Verjetnost, da pri metu dveh kock pade par šestic, je enaka $q = 1/36$. Velja $p = 6q$, število poskusov pa je v prvem primeru enako $n = 4$, v drugem primeru pa šestkrat toliko, torej $m = 24$. Torej, po De Merovi logiki naj bi veljalo

$$np = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3} = 24 \cdot \frac{1}{36} = mq,$$

kar je v nasprotju z eksperimentalnimi podatki. Problem je rešil Pascal, ki je izračunal

$$P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \doteq 0.518 > \frac{1}{2},$$
$$P(B) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \doteq 0.491 < \frac{1}{2}.$$

Teorija verjetnosti se v svoji moderni formulaciji ukvarja s pojmi, kot so: poskus, dogodek, naključje in verjetnost. Poskus je realizacija natanko določenih pogojev, pri katerih opazujemo enega ali več pojavov. Če pogoje spremenimo, se spremeni celoten poskus. Pojav, ki ga opazujemo pri poskusu, je dogodek. Dogodek, ki se pri poskusu zgodi vedno, je gotov dogodek. Dogodek, ki se ne zgodi nikoli, imenujemo nemogoč dogodek. Dogodek, ki se v nekaterih ponovitvah poskusa zgodi, v nekaterih pa ne, se imenuje naključni dogodek. Pri naključnem dogodku ni nikoli možno zanesljivo napovedati, kdaj se bo le-ta zgodil. V teoriji verjetnosti nas namreč zanimajo naključni dogodki. Ker se nekateri dogodki pojavljajo pogosteje kot drugi, želimo to pogostost tudi meriti in mera za to je verjetnost.

Zgledi.

1. Mečemo standardno označeno igralno kocko. Pri metu kocke nas zanima število pik na zgornji ploskvi. Dogodek, da se pojavi vsaj ena pika, je gotov dogodek. Dogodek, da se pojavi sedem pik, je nemogoč. Dogodka, da se na kocki pojavi šestica ali da je število pik sodo, sta naključna dogodka. Simulacija [10, *Apps: The Dice Sample Experiment*].

2. Mečemo dve igralni kocki, zanimata pa nas števili pik na obeh kockah in njuna primerjava. Še posebej nas zanimata denimo dogodka, da se na kockah pojavi isto število pik ali da je vsota pik enaka 8. Simulacija [10, *Apps: The Dice Sample Experiment*].

3. Na kvadratno mrežo z robom $a = 10\ cm$ mečemo kovanec s polmerom $r = 2\ cm$. Zanima nas dogodek, da kovanec pri tem ne seka mreže, torej v celoti leži znotraj posameznega kvadrata. Simulacija [10, *Apps: Buffon's Coin Experiment*].

1.1 Statistična definicija verjetnosti

Izkušnje kažejo, da za naključne dogodke veljajo določeni zakoni, ki pridejo do izraza pri velikem številu ponovitev poskusa. To so t. i. stohastični ali statistični zakoni. Oglejmo si najpreprostejši statistični zakon velikih števil, tj. stabilizacija relativne frekvence. Poskus, v katerem nastopa dogodek A, neodvisno ponovimo n-krat in označimo s $k_n(A)$ število tistih ponovitev poskusa, pri katerih se je dogodek A zgodil. Številu $k_n(A)$ rečemo frekvenca dogodka A, razmerje

$$f_n(A) = \frac{k_n(A)}{n}$$

VERJETNOST

DOMINIK BENKOVIČ
Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Maribor, Slovenija.
dominik.benkovic@um.si

Povzetek Pričujoče delo je zastavljeno kot skripta pri predmetu Verjetnost na prvi stopnji študijskega programa Matematika na Fakulteti za naravoslovje in matematiko in je nastalo na podlagi priprav na predavanja. Sestavljeno je iz dveh delov. Prvi del, ki obsega šest poglavij, pokriva vsebino klasičnega verjetnostnega računa: definicijo in osnovne lastnosti verjetnosti, naključne spremenljivke in naključne vektorje ter številske karakteristike in limitne izreke. Drugi del, ki obsega dve poglavji, obravnava naključne procese. Tukaj so najprej predstavljeni osnovni naključni procesi, v nadaljevanju pa so bolj natančno obravnavane homogene markovske verige.

Ključne besede:
verjetnost,
naključne
spremenljivke,
naključni vektorji,
naključni procesi,
markovske verige

Univerzitetna založba
Univerze v Mariboru

DOI https://doi.org/10.18690/um.fnm.7.2022
ISBN 978-961-286-644-0

PROBABILITY

DOMINIK BENKOVIČ
University of Maribor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Maribor, Slovenia
dominik.benkovic@um.si

Abstract The present work is created as a script for the course Probability at the first level of the Mathematics study program at the Faculty of Natural Sciences and Mathematics and it has been written based on preparations for lectures. It consists of two parts. The first part, comprising six chapters, covers the content of classical probability calculus: the definition and basic properties of probability, random variables, and random vectors, as well as numerical characteristics and limit theorems. The second part, consisting of two chapters, deals with stochastic processes. Firstly, the basic random processes are presented and then the homogeneous Markov chains are discussed in more detail.

Key words:
probability,
random variables,
random vectors,
andom processes,
Markov chains

https://doi.org/10.18690/um.fnm.7.2022 DOI
978-961-286-644-0 ISBN

University of Maribor Press

Univerza v Mariboru

Fakulteta za naravoslovje
in matematiko

Publikacija je dobro zgrajena in strukturirana. Vsebuje osem obsežnih poglavij in pri vsakem poglavju avtor ponudi številne zglede, ki študentom omogočajo dobro razumevanje. Snov je primerno razdelana. Na začetku so podane osnove verjetnosti (prostor elementarnih dogodkov, lastnosti verjetnosti, pogojna verjetnost ...). V nadaljnjih dveh poglavjih so podrobno obravnavane naključne spremenljivke in naključni vektorji (diskretni, zvezni). Nato so obdelane nekatere številske karakteristike, kot so matematično upanje, disperzija, momenti idr. V poglavju 6 so obravnavane rodovne in karakteristične funkcije ter limitni izreki. V zadnjih dveh poglavjih avtor predstavi osnovne naključne procese in natančneje obravnava homogene markovske verige. Gradivo je napisano matematično korektno. Gradivo študentom omogoča samostojno pridobivanje znanja in poglobljeno razlago.

dr. Brigita FERČEC
Univerza v Mariboru

Obravnavana snov je podana na nivoju, ki je primerna za študente FNM, ker uporablja rigorozne matematične standarde, hkrati pa je polna tudi zanimivih primerov, ki izvirajo iz prakse. Avtor je uspešno predstavil osnove precej širokega nabora tern iz verjetnosti (osnovni pojmi v poglavjih 1-5 ter smiseln uvod v tri bolj napredne tematike: limitne izreke, naključne procese in markovske verige. Trenutno ne obstaja nobeno delo, ki bi se tako široke tematike uspelo smiselno dotakniti na relativno elementarnem nivoju, ki zahteva samo poznavanje osnov diferencialnega in integralskega računa. Učbenik predstavlja dobro osnovo za poglobitev tematike na podiplomskem studiju v več možnih smereh, na primer statističnem testiranju, teoriji čakalnih vrst in podobno. Avtor je delo opravil zelo dobro. Učbenik bo nedvomno koristil študentkam in študentom matematike.

dr. Borut ZALAR
Univerza v Mariboru

ISBN-13: 978-961-286-644-0
9 789612 866440
Cena: 12,00 €