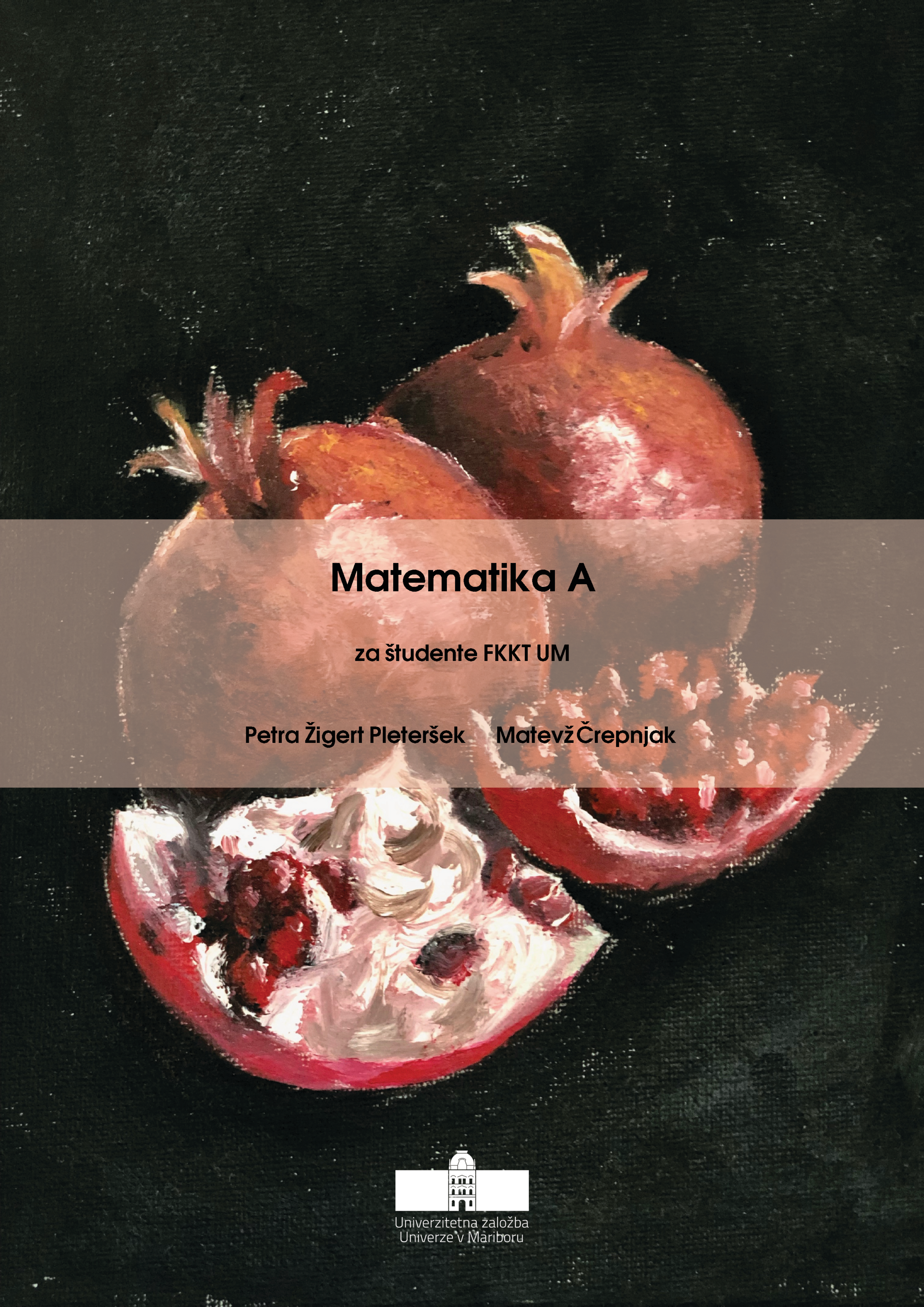


Matematika A

za študente FKKT UM

Petra Žigert Pleteršek Matevž Črepnjak

Univerzitetna založba
Univerze v Mariboru

Univerza v Mariboru

Fakulteta za kemijo
in kemijsko tehnologijo

Matematika A

Za študente FKKT UM

Avtorja

Petra Žigert Pleteršek

Matevž Črepnjak

Februar 2022

Naslov / *Title*: Matematika A / *Mathematics A*

Podnaslov / *Subtitle*: Za študente FKKT UM / *for Students of FKKT UM*

Avtorja / *Authors*: Petra Žigert Pleteršek
(Univerza v Mariboru, Fakulteta za kemijo in kemijsko tehnologijo)

Matevž Črepnjak
(Univerza v Mariboru, Fakulteta za kemijo in kemijsko tehnologijo)

Recenzija / *Review*: Borut Zalar
(Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo)

Riste Škrekovski
(Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko)

Rija Erveš
(Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo)

Tehnična urednika / *Technical editors*: Petra Žigert Pleteršek
(Univerza v Mariboru, Fakulteta za kemijo in kemijsko tehnologijo)

Jan Perša
(Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba)

Oblikovanje ovitka / *Cover designer*: Petra Žigert Pleteršek
(Univerza v Mariboru, Fakulteta za kemijo in kemijsko tehnologijo)

Grafika na ovitku / *Cover graphics*: Granatno jabolko
avtorice Zoje Pleteršek, 2022

Grafične priloge / *Graphic material*: Avtorja

Založnik / *Published by*: **Univerza v Mariboru**
Univerzitetna založba
Slomškov trg 15, 2000 Maribor, Slovenija
https://press.um.si, zalozba@um.si

Izdajatelj / *Issued by*: **Univerza v Mariboru**
Fakulteta za kemijo in kemijsko tehnologijo
Smetanova ulica 17, 2000 Maribor, Slovenija
https://www.fkkt.um.si, fkkt@um.si

Izdaja / *Edition*: Prva izdaja

Izdano / *Published at*: Maribor, februar 2022

Vrsta publikacije / *Publication type*: E-knjiga

Dostopno na / *Available at*: https://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/627

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Univerzitetna knjižnica Maribor

51(075.8)(0.034.2)

ŽIGERT Pleteršek, Petra
Matematika A [Elektronski vir] : za študente FKKT UM / avtorja Petra Žigert Pleteršek, Matevž Črepnjak. - 1. izd. - E-knjiga. - Maribor : Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba, 2022

Način dostopa (URL):
https://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/627
ISBN 978-961-286-554-2 (PDF)
doi: 10.18690/um.fkkt.1.2022
COBISS.SI-ID 96194563

ISBN 978-961-286-554-2 (pdf)

DOI https://doi.org/10.18690/um.fkkt.1.2022

Cena / *Price*: Brezplačni izvod

Odgovorna oseba založnika / *For publisher*: prof. dr. Zdravko Kačič,
rektor Univerze v Mariboru

Citiranje / *Attribution*: Žigert Pleteršek, P. in Črepnjak, M. (2022). *Matematika A: za študente FKKT UM.* Maribor: Univerzitetna založba. doi: 10.18690/um.fkkt.1.2022

Vsebina

Predgovor

Učbenik pred vami je nastal v duhu prenove vsebin matematičnih predmetov na univerzitetnih študijskih programih Fakultete za kemijo in kemijsko tehnologijo Univerze v Mariboru, zato je v prvi vrsti namenjen študentom prvega letnika te fakultete, lahko pa po njem poseže kdorkoli, ki vstopa v svet matematične analize. Nastal je na osnovi visokošolskega učbenika Matematika I istih avtorjev, s tem da vsebuje več kot tretjino novih vsebin, preostanek je mestoma spremenjen ali vsebinsko diferenciran ter obogaten z novimi grafi in slikami.

Učbenik je organiziran v treh delih, tako kot si sledijo testi preverjanj znanja pri predmetu Matematika A na FKKT med študijskim letom. Začeli smo z osnovnimi koncepti, mimo katerih ne moremo, če želimo pogledati v svet diferencialnega in integralnega računa, kar je osnovni namen tega učbenika. V prvem delu učbenika je veliko snovi povzete iz srednješolskih programov, saj je skoraj zmeraj kažejo težave z razumevanjem določenih osnovnih dejstev. Zato bodo nekaterim študentom pojmi znani in jih bodo samo na kratko obnovili, drugi pa bodo morali s samostojnim delom tem osnovam posvetiti več časa. V drugem delu smo z uporabo diferencialnega računa funkcije razstavili na manjše enostavnejše dele in opazovali, kaj se lokalno dogaja s funkcijo v okolici dane točke. Zatem smo v zadnjem delu učbenika manjše dele funkcij sestavili - integrirali nazaj v celoto, kar nam omogoča integralni račun. Dejstvo je, da so za to potrebni veliko zahtevnejši prijemi kot pri diferencialnem računu.

Vsak od treh delov učbenika je enako zgrajen - teoretičnemu delu sledijo naloge s postopki za reševanje, kar omogoča samostojno delo študentov. V teoretičnem delu se znajdejo izreki, posledice, definicije, ..., kar je za nekatere popolnoma nov pristop k podajanju matematike, zato se lahko na začetku pojavijo težave z organizacijo učenja. Najin nasvet je, da najprej preštudirajte teorijo tako, da jo razumete, šele zatem se lotite računanja nalog.

Ker je učbenik v prvi vrsti namenjen študentom Fakultete za kemijo in kemijsko tehnologijo Univerze v Mariboru, je teoretični del diferenciran in prilagojen na sistemu ocenjevanja. Težji pojmi, predvsem nekateri dokazi, so označeni z modro barvo. Te vsebine pri testih predstavljajo 10 % ocene in so namenjene študentom, ki želijo izpit opraviti z višjimi ocenami.

I. Številske množice in funkcije

1. Logika in množice

Zelo poenostavljeno bi lahko rekli, da je logika veda, ki proučuje načela pravilnega mišljenja, medtem ko je množica skupina nekih elementov.

1.1 Logika

Osredotočili se bomo na izjave in njihovo povezovanje s tako imenovanimi izjavnimi povezavami oziroma logičnimi operatorji. *Izjava* je skupek trditev, katere poglavitna lastnost je njena resničnost oziroma neresničnost. Izjava, ki je sestavljena iz ene same trditve, je *enostavna izjava*, v nasprotnem govorimo o *sestavljeni izjavi*. Enostavne izjave, ki jih običajno označujemo z malimi tiskanimi črkami $p,q,r,\ldots$, z *izjavnimi povezavami* povežemo v sestavljene izjave, ki jih označujemo z velikimi tiskanimi črkami z začetka abecede $A,B,\ldots$. Če je izjava p resnična, pravimo, da ima *logično vrednost* 1, in pišemo $p \equiv 1$. V nasprotne primeru je izjava neresnična izjava ima logično vrednost $p \equiv 0$.

■ **Zgled 1.1** Preverimo logično vrednost enostavnih izjav v sestavljeni izjavi:

"Število 4 je naravno število in je praštevilo"

Zgornja izjava je tvorjena iz dveh enostavnih izjav:

p: "4 je naravno število"

q: " 4 je praštevilo"

Izjava p je resnična in ima logično vrednost $p \equiv 1$, izjava q je neresnična in ima logično vrednost $q \equiv 0$. ■

Če želimo preveriti logično vrednost sestavljene izjave iz Zgleda 1.1, moramo spoznati izjavne povezave med enostavnimi izjavami in njihove logične vrednosti. Navedimo najpogostejše izjavne povezave, ki povezujejo dve enostavni izjavi v sestavljeno izjavo. Poleg teh bomo omenili še eno posebno izjavno povezavo, in sicer je to negacija, ki deluje samo na eni izjavi.

- *Negacija* $\neg$

  $\neg p$: beremo "ne p oziroma ni res, da p"

  Izjava $\neg p$ je resnična natanko tedaj, ko je p neresnična izjava, kar lahko prikažemo s *pravilnostno tabelo*:

p	$\neg p$
1	0
0	1

Zgled 1.2 Negirajmo izjavo p iz Zgleda 1.1 in določimo njeno logično vrednost.

Izjava $A = \neg p$: "ni res, da je 4 naravno število" oziroma "4 ni naravno število ima logično vrednost $A \equiv 0$. ■

- *Disjunkcija* $\vee$

  $p \vee q$: beremo "p ali q"

  Sestavljena izjava $p \vee q$ je resnična, ko je resnična vsaj ena od izjav p ali q, kar lahko ilustriramo s pravilnostno tabelo:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Zgled 1.3 Poiščimo disjunkcijo izjav iz Zgleda 1.1 in določimo njeno logično vrednost.

Izjava $A = p \vee q$: "4 je naravno število ali praštevilo" ima logično vrednost $A \equiv 1$. ■

- *Konjunkcija* $\wedge$

  $p \wedge q$: beremo "p in q"

  Sestavljena izjava $p \wedge q$ je resnična natanko tedaj, ko sta resnični obe izjavi p in q:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

■ **Zgled 1.4** Poiščimo konjukcijo izjav iz Zgleda 1.1 in določimo njeno logično vrednost.

Izjava $A = p \wedge q$: "4 je naravno število in 4 je praštevilo" ima logično vrednost $A \equiv 0$. ■

- *Implikacija* $\Rightarrow$

  $p \Rightarrow q$: beremo " iz p sledi q oziroma če velja p, tedaj q"

  Sestavljena izjava $p \Rightarrow q$ je neresnična natanko tedaj, ko je p resnična in q neresnična izjava. V vseh ostalih primerih je ta izjava resnična:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

■ **Zgled 1.5** Poiščimo obe implikaciji izjav iz Zgleda 1.1 in določimo njuni logični vrednosti.

Izjava $A = q \Rightarrow p$: "če je 4 praštevilo, potem je 4 naravno število" ima logično vrednost $A \equiv 1$.

Izjava $B = p \Rightarrow q$: "če je 4 naravno število, potem je 4 praštevilo" ima logično vrednost $B \equiv 0$. ■

- *Ekvivalenca* $\Leftrightarrow$

  $p \Leftrightarrow q$: beremo "p je ekvivalentno q oziroma p velja natanko tedaj kot q"

  Sestavljena izjava $p \Leftrightarrow q$ je resnična natanko tedaj, ko sta p in q obe resnični ali pa obe neresnični:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

■ **Zgled 1.6** Poiščimo ekvivalenco izjav iz Zgleda 1.1 in določimo njeno logično vrednost.

Izjava $A = p \Leftrightarrow q$: "4 je naravno število natanko tedaj, ko je 4 praštevilo" ima logično vrednost $A \equiv 0$. ■

Vrstni red delovanja izjavnih povezav določimo z oklepaji in upoštevanjem prioritete izjavnih povezav, ki je sledeča (od najmočnejše do najšibkejše):

$$\begin{array}{c} \neg \\ \wedge \\ \vee \\ \Rightarrow \\ \Leftrightarrow \end{array}$$

Na primer, v sestavljeni izjavi $(\neg p) \vee q$ je oklepaj odvečen in jo lahko pišemo kot $\neg p \vee q$.

Definicija 1.1.1 Izjavi A in B sta *enakovredni*, $A \approx B$, ko imata enako logično vrednost za vse možne nabore enostavnih izjav, ki ju sestavljajo.

■ **Zgled 1.7** Podajmo primer enakovrednih sestavljenih izjav.

S pravilnostno tabelo se lahko prepričamo, da sta naslednji sestavljeni izjavi enakovredni:

$$p \Leftrightarrow q \quad \approx \quad (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)\,.$$

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$(p \Rightarrow q)$	$\wedge$	$(q \Rightarrow p)$
0	0	**1**	1	**1**	1
0	1	**0**	1	**0**	0
1	0	**0**	0	**0**	1
1	1	**1**	1	**1**	1

■

Omenimo, da so disjunkcija, konjunkcija in ekvivalenca komutativne in asociativne izjavne povezave, medtem ko implikacija teh lastnosti nima:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \text{komutativnost} & & & & \text{asociativnost} & \\
p \vee q & \approx & q \vee p, & & (p \vee q) \vee r & \approx & p \vee (q \vee r), \\
p \wedge q & \approx & q \wedge p, & & (p \wedge q) \wedge r & \approx & p \wedge (q \wedge r), \\
p \Leftrightarrow q & \approx & q \Leftrightarrow p, & & (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r & \approx & p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)\,.
\end{array}$$

Naštejmo še nekatere pomembnejše enakovredne izjave, ki jih lahko hitro preverimo s pravilnostno tabelo:

$$\begin{array}{rcll}
p \Rightarrow q & \approx & \neg p \vee q & \ldots \text{ zamenjava implikacije} \\
p \Leftrightarrow q & \approx & \neg p \Leftrightarrow \neg q & \\
\neg(p \wedge q) & \approx & \neg p \vee \neg q & \ldots \text{ prvi De Morganov zakon} \\
\neg(p \vee q) & \approx & \neg p \wedge \neg q & \ldots \text{ drugi De Morganov zakon} \\
p \vee (q \wedge r) & \approx & (p \vee q) \wedge (p \vee r) & \ldots \text{ distributivnost disjunkcije} \\
p \wedge (q \vee r) & \approx & (p \wedge q) \vee (p \wedge r) & \ldots \text{ distributivnost konjukcije}
\end{array}$$

■ **Zgled 1.8** Preverimo enakovrednost naslednjih izjav.

1. $p \Rightarrow q \quad \approx \quad \neg q \Rightarrow \neg p$:

   Enakovrednost lahko preverimo s pravilnostno tabelo:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
0	0	**1**	1	1	**1**
0	1	**1**	0	1	**1**
1	0	**0**	1	0	**0**
1	1	**1**	0	0	**1**

   Lahko pa tudi z uporabo enakovrednih izjav, ki smo jih navedli zgoraj:

$$\begin{aligned} p \quad \Rightarrow \quad q \quad &\approx & &\text{(zamenjava implikacije)}\\ \neg p \quad \vee \quad q \quad &\approx & &\text{(komutativnost)}\\ q \quad \vee \quad \neg p \quad &\approx & &\text{(zamenjava implikacije)}\\ \neg q \quad \Rightarrow \quad \neg p\,. & & & \end{aligned}$$

2. $\neg(p \Rightarrow q) \quad \approx \quad p \wedge \neg q$:

   S pomočjo pravilnostne tabele lahko bralec sam preveri drugi primer, mi pa bomo uporabili enakovredne izjave:

$$\begin{aligned} \neg(p \quad \Rightarrow \quad q) \quad &\approx & &\text{(zamenjava implikacije)}\\ \neg(\neg p \quad \vee \quad q) \quad &\approx & &\text{(drugi De Morganov zakon)}\\ \neg(\neg p) \quad \wedge \quad \neg q \quad &\approx & &\text{(negacija)}\\ p \quad \wedge \quad \neg q\,. & & & \end{aligned}$$

■

■ **Zgled 1.9** Zanikajmo izjavo:

"Če je neka žival ptica, tedaj lahko leti."

Enostavni izjavi v tem primeru sta:
p: "žival je ptica"
q: "žival leti"

Sestavljena izjava je enaka $p \Rightarrow q$, medtem ko je njena negacija je enaka $p \wedge \neg q$, zato je zanikana izjava "žival je ptica in ne leti". ■

Pri zapisovanju izjav se lahko dodatno pojavita dva kvantifikatorja:

- univerzalni kvantifikator: $\forall \ldots$ beremo "za vsak",
- eksistenčni kvantifikator: $\exists \ldots$ beremo "obstaja".

Če ima nek x lastnost P, pišemo $P(x)$. Izjavi, da ima vsak x lastnost P, kar pišemo $\forall x : \neg P(x)$, oziroma da obstaja x z lastnostjo P, kar pišemo $\exists x : \neg P(x)$, zanikamo kot:

$$\neg \forall x : P(x) \quad \approx \quad \exists x : \neg P(x)\,,$$

$$\neg \exists x : P(x) \quad \approx \quad \forall x : \neg P(x)\,.$$

■ **Zgled 1.10** Zanikajmo izjavi:

1. *"Vsaka ptica leti."*

   Naj bo: $P(x)$: "ptica x leti"

   Izjava "vsaka ptica leti" ima potemtakem obliko $\forall x : P(x)$, njena negacija je enaka $\forall x : \neg P(x)$, kar beremo "obstaja ptica, ki ne leti".

2. *"Nekatere ptice letijo."*

   Na podoben način kot v prvem primeru pridemo do zanikane izjave "nobena ptica ne leti".

■

1.2 Množice

Teorija množic je danes temeljno področje matematike, ki pa je zelo zahtevno in je nastalo veliko kasneje kot diferencialni in integralni račun. V tem razdelku se bomo seznanili samo z nekaterimi osnovnimi pojmi te teorije. Pogledali si bomo zapisovanje in podajanje množic ter računske operacije z njimi.

Pojem množica bomo uvedli le na osnovi modela, ki nam je blizu iz vsakdana. *Množica* je skupina nekih elementov, govorimo lahko recimo o množici vseh učencev dane šole, množici števk itd. To množico imenujemo *univerzalna množica* ali *univerzum* in običajno je označena z U. Množice v matematiki običajno označujemo z veliki tiskanimi črkami $A, B, \ldots, M, \ldots$, nekatere znane množice pa imajo posebne oznake, na primer $\mathbb{N}$ je množica naravnih števil in $\mathbb{R}$ je množica realnih števil, o kateri bomo povedali več v nadaljevanju.

Množico smatramo za dano, če lahko za vsako reč presodimo, ali je v dani množici. Reči v množici so *elementi* te množice. Izjavo, da je a element množice M, zapišemo

$$a \in M\,.$$

V nasprotnem primeru, če nek element b ne pripada množici M, to zapišemo v obliki

$$b \notin M\,.$$

Množice najpogosteje podajamo na enega od naslednjih dveh načinov.

- V zavitih oklepajih naštejemo vse elemente množice:
$$M = \{-1, 0, 1\}.$$

- V zavitem oklepaju zapišemo skupno lastnost $P(x)$ elementov množice:
$$M = \{x \mid P(x)\},$$
na primer
$$M = \{x \in \mathbb{N} | x^2 - x = 0\} = \{1\}.$$

Včasih uporabimo kombinacijo obeh načinov, ko elemente naštejemo, vendar ne moremo našteti vseh elementov. V tem primeru uporabimo zapis

$$M = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\},$$

kjer pikice pomenijo "in tako naprej", tako da, če se da, iz naštetih elementov izluščimo karakteristično lastnost množice.

■ **Zgled 1.11** Poiščimo elemente množic A in B.

1. Naj množica A vsebuje vse tiste x, za katere velja, da je x praštevilo.

   $A = \{x | x \text{je praštevilo}\} = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37, 41, \ldots\}.$

2. Naj imajo elementi množice B lastnost $P(x)$, ki pove, da je x večkratnik števila 3 v množici naravnih števil $\mathbb{N}$.

   $B = \{x | P(x)\} = \{x | x = 3k \wedge k \in \mathbb{N}\} = \{3k | k \in \mathbb{N}\} = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}.$

■

Množica M je *prazna*, če ne vsebuje nobenega elementa. Prazno množico zapišemo $\emptyset$ ali tudi $\{\,\}$. Intuitivno lahko rečemo, da je množica *končna*, če lahko naštejemo vse njene elemente. *Moč končne množice* M, $|M|$, je število njenih elementov. Množica A je *podmnožica* množice B, $A \subseteq B$, če je vsak element množice A obenem tudi element množice B. Množici A in B sta *enaki*, $A = B$, ko je $A \subseteq B$ in $B \subseteq A$. Neenakost množic A in B zapišemo $A \neq B$. A je *prava podmnožica* množice B, $A \subset B$, če je $A \subseteq B$ in je $A \neq B$. *Potenčna množica* množice A, $\mathscr{P}(A)$, je množica vseh podmnožic množice A.

■ **Zgled 1.12** Poiščimo odnos med množicama A in B.

1. Naj bo A množica celih števil in B množica sodih števil.

   Ker je vsako sodo število celo, velja $B \subset A$.

2. $A = \{x \in \mathbb{R} | x > 0 \wedge x < 0\}$, $B = \emptyset$.

   Ker nobeno število ne more biti hkrati pozitivno in negativno, pogoju za elemente množice A ne zadošča noben x, kar pomeni $A = B$.

■

■ **Zgled 1.13** Poiščimo potenčno množico množice $A = \{1,a,b\}$.

$$\mathscr{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{a\}, \{b\}, \{1,a\}, \{1,b\}, \{a,b\}, A\}$$

■

Poglejmo najpogostejše operacije z množicami:

- *Presek* množic A in B, $A \cap B$, je množica vseh tistih elementov, ki so hkrati v A in v B:

  $$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}.$$

  Če je $A \cap B = \emptyset$ pravimo, da sta množici A in B *disjunktni*.

- *Unija* množic A in B, $A \cup B$, je množica vseh tistih elementov, ki so vsaj v eni od množic A ali B:

  $$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}.$$

- *Razlika* množic A in B, $A - B$, je množica vseh tistih elementov, ki so v A in niso v B:

  $$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}.$$

- *Kartezični produkt množic A in B*, $A \times B$, je množica vseh urejenih parov (a,b), kjer je $a \in A$ in $b \in B$:

  $$A \times B = \{(a,b) | a \in A \wedge b \in B\}.$$

■ **Zgled 1.14** Naj bo $A = \{a,b,c,d,1,2,3\}$ in $B = \{1,c,e\}$.

1. Poiščimo presek množic A in B.

   $A \cap B = \{1,c\}$.

2. Poiščimo unijo množic A in B.

   $A \cup B = \{a,b,c,d,e,1,2,3\}$.

3. Poiščimo razliko množic A in B.

   $A - B = \{a,b,d,2,3\}$.

■

■ **Zgled 1.15** Poiščimo oba kartezična produkta množic $A = \{1,2,3\}$ in $B = \{a,b\}$.

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1,a),(2,a),(3,a),(1,b),(2,b),(3,b)\} \\ B \times A &= \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\} \end{aligned}$$

■

Omenimo, da je treba biti pozoren na vrstni red elementov pri zapisu urejenega para, medtem ko je pri elementih množice vrstni red lahko poljuben:

$$\begin{aligned} \{a,b\} &= \{b,a\} \quad \ldots \quad \text{ista množica,} \\ (a,b) &\neq (b,a) \quad \ldots \quad \text{različna urejena para.} \end{aligned}$$

Zapis $\{a,a\}$ ni korekten, saj je isti element množice naveden dvakrat in moramo v tem primeru pisati $\{a\}$, medtem ko je zapis (a,a) korekten, saj predstavlja urejeni par.

Kartezični produkt lahko posplošimo na več faktorjev:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1,a_2,\ldots,a_n) | a_i \in A_i,\, i = 1,2,\ldots,n\}.$$

Elementi kartezičnega produkta $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ so *urejene n-terice.* Tako je $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ n-razsežen realni prostor, o katerem bomo podrobneje govorili pri Matematiki B.

Komplement množice A (glede na univerzalno množico U), A^C, je razlika množic U in A:

$$A^C = U - A = \{x \in U | x \notin A\}.$$

V komplementu množice A so torej elementi, ki so v U in niso v A.

Operacije z množicami imajo različne lastnosti, med katerimi sta pomembnejši *komutativnost* in *asociativnost*. Preprosto je preveriti, da imata operaciji unije in preseka obe lastnosti:

$$\begin{aligned} A \cap B = B \cap A \quad &\text{in} \quad A \cup B = B \cup A \quad \ldots \quad \text{komutativnost} \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad &\text{in} \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad \ldots \quad \text{asociativnost}. \end{aligned}$$

Razlika množic nima teh dveh lastnosti. V Zgledu 1.15 smo videli, da iz $A \times B \neq B \times A$ sledi, da kartezični produkt ni komutativna operacija. Poglejmo še nekaj lastnosti operacij z množicami:

$$\begin{aligned} &A \subseteq A \cup B, && B \subseteq A \cup B, \\ &A \cap B \subseteq A, && A \cap B \subseteq B, \\ &A \cap A = A, && A \cup A = A, \\ &A \cap \emptyset = \emptyset, && A \cup \emptyset = A, \\ &(A \cap B)^C = A^C \cup B^C, && (A \cup B)^C = A^C \cap B^C, \\ &A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), && A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

Prvih nekaj lastnosti je precej očitnih, zato za zgled izpeljimo eno od distributivnosti:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) \quad &\Leftrightarrow \quad x \in A \wedge x \in B \cup C \\ &\Leftrightarrow \quad x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in A \wedge x \in B \vee x \in A \wedge x \in C \\ &\Leftrightarrow \quad x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

2. Številske množice

Nekatere številske množice so nam že dobro znane in jih bomo samo na kratko omenili, o določenih pa bomo povedali nekaj več. Naštejmo jih:

- V množici *naravnih števil* $\mathbb{N}$ so števila s katerimi preštevamo, torej $\{1,2,3,\ldots\}$. Če naravnim številom dodamo število 0, dobimo množico $\mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{N}_0$.

- Množico *celih števil* $\mathbb{Z}$ sestavljajo naravna števila, število 0 in nasprotne vrednosti naravnih števil $-1,-2,-3,\ldots$.

- *Racionalna števila* so števila, ki jih lahko zapišemo v obliki okrajšanega ulomka $\frac{a}{b}$, kjer sta a in b iz $\mathbb{Z}$, ter $b \neq 0$:
$$\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, -\frac{35}{99}, \ldots$$
Ulomka $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ sta enaka, ko je $ad = bc$. Množico racionalnih števil označimo $\mathbb{Q}$.

- V množici racionalnih števil ne moremo na primer izračunati kvadratnega korena iz števila 2. Če bi $\sqrt{2}$ bil racionalno število, bi ga lahko zapisali v obliki okrajšanega ulomka $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Potemtakem je $2 = \frac{a^2}{b^2}$ oziroma $a^2 = 2b^2$. Ker je a^2 deljiv z 2, mora tudi a biti deljiv z 2, torej je $a = 2a_1$. Po krajšanju z 2 tako dobimo $b^2 = 2a_1^2$ in s podobnim sklepanjem kot prej mora tudi b biti deljiv z 2, kar vodi v protislovje s tem, da je $\frac{a}{b}$ okrajšan ulomek.
Vpeljati moramo neka nova števila, ki jih imenujemo *iracionalna števila*. Med ta števila spadajo na primer $\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots,$. Skupaj z racionalnimi števili tvorijo množico *realnih števil*, ki jo označimo $\mathbb{R}$. Množico iracionalnih števil zapišemo $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Med naštetimi množicami velja zveza:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

2.1 Matematična indukcija

Pomemben pojem povezan z naravnimi števili se imenuje matematična indukcija. *Matematična indukcija* je metoda dokazovanja, ko želimo neko lastnost P dokazati za vsa naravna števila n v dveh korakih:

- dokažemo, da P velja za začetni n, ki je običajno $n = 1$,
- predpostavimo, da lastnost P velja za naravna števila do n in od tod izpeljemo, da lastnost P velja tudi za $n+1$.

■ **Zgled 2.1** 1. Dokažimo, da za vsako naravno število n velja $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Za $n = 1$ dobimo
$$1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$
Pokazati moramo še
$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow 1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$
kar imenujemo indukcijski korak:
$$\begin{aligned}\underbrace{(1+2+\ldots+n)}_{\frac{n(n+1)}{2}}+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

2. Pokažimo, da za vsako naravno število n velja $n < 2^n$.

Za $n = 1$ očitno velja $1 < 2^1$. Nadalje moramo pokazati
$$n < 2^n \Rightarrow n+1 < 2^{n+1}.$$
$$n+1 \leq n+n \underbrace{<}_{ind.predp.} 2^n+2^n = 2\cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

3. Poiščimo in dokažimo formulo za število diagonal v konveksnem večkotniku.

Z nekaj premisleka ugotovimo, da je število diagonal D_n v konveksnem n-kotniku enako $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$, kar bomo dokazali z indukcijo. Najmanjši večkotnik je trikotnik, zato za bazo indukcije vzamemo $n = 3$. V tem primeru ni diagonal in tudi $D_3 = \frac{3(3-3)}{2} = 0$. Za indukcijski korak premislimo, da je vsaka diagonala v n-kotniku tudi diagonala v $(n+1)$-kotniku. Nadalje dobimo novih $n-2$ diagonal iz na novo dodanega oglišča. Poleg tega ena stranica n-kotnika postane diagonala v $n+1$ kotniku, zato velja
$$D_{n+1} = \underbrace{D_n}_{\frac{n(n-3)}{2}}+(n-2)+1 = \frac{n(n-3)}{2}+n-1 = \frac{(n+1)(n-2)}{2}.$$

■

2.2 Realna števila in absolutna vrednost

OBSEG REALNIH ŠTEVIL

Realna števila imajo zanimivo algebrajsko strukturo, ki so jo bomo na kratko pogledali. Če želimo govoriti o algebrajskih strukturah, potrebujemo pojem notranje oziroma binarne operacije.

Definicija 2.2.1 Operacija $*$ je *notranja* oziroma *binarna operacija* na množici A, če urejenemu paru $(a,b) \in A \times A$ priredi element $a * b \in A$. Množico A skupaj z notranjo operacijo $*$ pišemo $(A,*)$.

Na množici realnih števil $\mathbb{R}$ poznamo preprosti notranji operaciji seštevanja in množenja. Za poljubna realna števila a,b,c tedaj veljajo naslednje lastnosti.

(i) Asociativnost seštevanja: $(a+b)+c = a+(b+c)$

(ii) Komutativnost seštevanja: $a+b = b+a$

(iii) Obstaja nevtralni element (enota) za seštevanje: $a+0 = 0+a = a$

(iv) Obstaja nasprotni element za seštevanje: $a+(-a) = (-a)+a = 0$
Množica z notranjo operacijo, za katero veljajo lastnosti $(i),(iii)$ in (iv), se imenuje *grupa*. Če velja še lastnost (ii), je *komutativna grupa*. Realna števila z operacijo seštevanja so komutativna grupa.

(v) Asociativnost množenja: $(ab)c = a(bc)$

(vi) Komutativnost množenja: $ab = ba$

(vii) Obstaja nevtralni element (enota) za množenje: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

(viii) Obstaja inverzni oziroma obratni element za množenje: $aa^{-1} = a^{-1}a = 1, \forall a \neq 0$
Množica realnih števil brez števila 0 je torej komutativna grupa tudi za operacijo množenja.
V množici realnih števil velja še lastnost, ki poveže obe operaciji:

(ix) Distributivnost množenja glede na seštevanje: $(a+b)c = ac+bc$

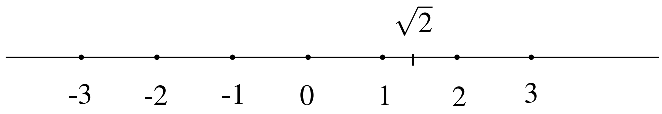
Če v neki množici z dvema notranjima operacijama veljajo lastnosti $(i)-(ix)$, se taka množica imenuje *obseg*. Množica $(\mathbb{R},+,\cdot)$ je obseg realnih števil.

Odštevanje in deljenje sta le posebna primera seštevanja in množenja:

$$\begin{aligned} a-b &= a+(-b) \\ a:b &= a \cdot b^{-1}, b \neq 0. \end{aligned}$$

UREJENOST REALNIH ŠTEVIL IN PODMNOŽICE

Realna števila lahko identificiramo s točkami na premici, ki ji rečemo *realna os*. Na premici izberemo točko, ki ji rečemo izhodišče ter je slika števila 0 in točko, ki je slika števila 1. Potem vsakemu realnemu številu ustreza natanko določena točka na premici in obratno, vsaki točki lahko



Slika 2.1: Realna os.

priredimo natanko določeno realno število. Zato običajno identificiramo izraza realno število in točka na realni osi.

Množica realnih števil desno od števila 0 je množica *pozitivnih števil*, levo od števila 0 se nahaja množica *negativnih števil*. Med poljubnima dvema številoma na realni osi je neskončno mnogo tako racionalnih kot tudi iracionalnih števil, zato pravimo, da sta obe množici gosti v $\mathbb{R}$.

Če je $a-b$ nenegativno število, rečemo, da je število a večje od števila b oziroma ˇje stevilo b manjše od števila a, kar zapišemo $a \geq b$ oziroma $b \leq a$. Če je $a-b$ pozitivno število, rečemo, da je število a strogo večje od števila b oziroma število b je strogo manjše od števila a, kar zapišemo $a > b$ oziroma $b < a$.

Za poljubna realna števila a, b in c veljajo naslednje trditve.

(i) Velja natanko ena od treh možnosti:

$$a < b \quad \text{ali} \quad a = b \quad \text{ali} \quad a > b\,,$$

(ii) $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$, (enako velja za $\leq$),

(iii) $a \geq b \wedge b \geq a \Rightarrow a = b$.

Zaradi zgoraj naštetih lastnosti lahko realna števila med seboj primerjamo in uredimo po velikosti, čemur rečemo da je množica realnih števil linearno urejena množica.

Naštejmo nekaj pomembnejših podmnožic množice $\mathbb{R}$:

(i) odprti interval:

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

(ii) zaprti interval:

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$

(iii) polodprta intervala:

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$$

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$$

(iv) neskončni intervali:

$$[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\} \quad (-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\}$$

$$(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} | a < x\} \quad (-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} | x < b\}$$

$$(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$$

Potenciranje in korenjenje

Ker potenciranje in korenjenje realnih števil včasih povzroča težave, ponovimo osnovne pojme v zvezi s tema računskima operacijama.

Produkt realnega števila a s samim seboj (n-krat) zapišemo s potenco

$$\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n} = a^n,\, n \in \mathbb{N}.$$

Število a imenujemo osnova, n eksponent, a^n pa je potenca.

Za računanje s potencami veljajo naslednja pravila:

(1) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$,

(2) $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n,\, b \neq 0$,

(3) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$,

(4) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m},\, a \neq 0,\, n > m$,

(5) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

Dokažemo jih z matematično indukcijo (razen (4) za $n \leq m$). Pokažimo na primeru (2):

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n,\, b \neq 0,$$

$$n = 1: \qquad \frac{a^1}{b^1} = \left(\frac{a}{b}\right)^1$$

$$n \to n+1: \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdots \left(\frac{a}{b}\right)}_{n} \left(\frac{a}{b}\right) =$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a^n}{b^n}\frac{a}{b} = \frac{a^n \cdot a}{b^n \cdot b} = \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}}$$

Če dodatno definiramo še

$$a^0 = 1 \quad \text{in} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

velja (4) za poljubna n in m.

Če rečemo, da je potenca vsak izraz, ki zadošča zvezam od (1) do (5), potemtakem je lahko v potenci eksponent katerokoli celo število. Dejansko veljajo vsa pravila tudi v primeru, ko je eksponent realno število, a tega ne bomo dokazovali. V potenci naj bosta torej osnova poljubno pozitivno, eksponent pa poljubno realno število.

Definicija 2.2.2 Naj bo $a \geq 0$. *Koren*

$$\sqrt[n]{a}$$

je tisto število b, za katerega velja

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a.$$

Število a se imenuje *korenjenec* oziroma *radikand*, število n je *korenski eksponent*.

Uporabljamo lahko tudi naslednji zapis:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}\,.$$

Tedaj je

$$\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m\,.$$

Pravila za korenjenje izpeljemo iz pravil za računanje s potencami in so naslednja:

(1') $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b}$

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}} = (a\cdot b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a\cdot b}$$

(2') $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
Pokažemo podobno kot $(1')$.

(3') $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{a} = \sqrt[n\cdot m]{a^{n+m}}$

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{a} &= (\sqrt[n]{a})^{\frac{m}{m}}\cdot(\sqrt[m]{a})^{\frac{n}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{m}{m}}\cdot(a^{\frac{1}{m}})^{\frac{n}{n}}\\ &= a^{\frac{m}{n\cdot m}}\cdot a^{\frac{n}{n\cdot m}} = a^{\frac{n+m}{n\cdot m}} = \sqrt[n\cdot m]{a^{n+m}}\end{aligned}$$

(4') $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a^{m-n}}$
Pokažemo podobno kot $(3')$.

(5') $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (\sqrt[n]{a})^{\frac{1}{m}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n\cdot m}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$$

OMEJENOST MNOŽIC

Pomemben pojem v zvezi z realnimi podmnožicami je njihova omejenost. O njej lahko govorimo, ker je množica realnih števil linearno urejena množica.

Definicija 2.2.3 Naj bo A poljubna podmnožica v $\mathbb{R}$. Množica A je *navzgor omejena*, če obstaja tako realno število M, da je

$$x \le M,\ \forall x \in A\,.$$

Število M je *zgornja meja* množice A. Množica A je *navzdol omejena*, če obstaja tako realno število m, da je

$$m \le x,\ \forall x \in A\,.$$

Število m je *spodnja meja* množice A. Množica je *omejena*, ko je navzdol in navzgor omejena.

Množica lahko ima več spodnjih in/ali zgornjih mej.

■ **Zgled 2.2** Naj bo $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$. Preučimo omejenost množice A.

Ulomki $\frac{1}{n}$ so vsi pozitivni in manjši od 1, zato je zgornja meja M vsako število večje od 1

$$1 \leq M$$

in spodnja meja m vsako število manjše od 0

$$m \leq 0\,.$$

■

V naravoslovju in tehniki je velikokrat zaželjeno določiti optimalne meje.

Definicija 2.2.4 Najmanjšo zgornjo mejo M' (navzgor) omejene množice A je *natančna zgornja meja* in jo imenujemo supremum množice A:

$$M' = \sup A\,.$$

To pomeni, da za M' velja:

(i) M' je zgornja meja množice A $(x \leq M', \forall x \in A)$,

(ii) če je M^* poljubna zgornja meja množice A, tedaj je $M' \leq M^*$.

Definicija 2.2.5 Največjo spodnjo mejo m' (navzdol) omejene množice A je *natančna spodnja meja* in jo imenujemo infimum množice A:

$$m' = \inf A\,.$$

To pomeni, da za m' velja:

(i) m' je spodnja meja množice A $(m' \leq x, \forall x \in A)$,

(ii) če je m^* poljubna spodnja meja množice A, tedaj je $m^* \leq m'$.

Op O eksistenci supremuma in infimuma govori *Dedekindov aksiom*. Le-ta pravi, da ima vsaka neprazna navzdol omejena podmnožica realnih števil natančno spodnjo mejo (ekvivalentno lahko trdimo, da ima vsaka neprazna navzgor omejena podmnožica realnih števil natančno zgornjo mejo). Ta aksiom poudarja razliko med realnimi in racionalnimi števili, kar je prikazano v Zgledu 2.4.

■ **Zgled 2.3** Dana je množica $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$. Poiščimo njen supremum in infimum.

Množico A lahko zapišemo kot $A = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$. Vidimo, da je supremum $M' = 1$. Pokažimo še, da je infimum $m' = 0$. Očitno je $m' = 0$ spodnja meja množice A, saj za vsako naravno število n velja $0 \leq \frac{1}{n}$. Predpostavimo nasprotno, recimo da $m' = 0$ ni natančna spodnja meja množice A. Tedaj obstaja spodnja meja m^* množice A, ki je večja od $m' = 0$, to pomeni, da je za nek $\varepsilon > 0$

$m^* = m' + \varepsilon$ oziroma $m^* = \varepsilon$. Pokažimo da v tem primeru obstaja naravno število n_0 tako, da je $\frac{1}{n_0} < m^*$:

$$\frac{1}{n_0} < \varepsilon \Rightarrow n_0 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Na primer za $\varepsilon = 10^{-2}$ je n_0 lahko vsako naravno število večje od 100. Prišli smo v protislovje s tem, da je m^* spodnja meja in tako pokazali, da je $m' = 0$ infimum množice A. ■

■ **Zgled 2.4** Dana je množica $A = \{x | x^2 > 2 \wedge x > 0\}$. Ali obstaja infimum množice A?
V množici racionalnih števil množica A nima natančne spodnje meje, v množici realnih števil pa je njena natančna spodnja meja (iracionalno) število $m' = \sqrt{2}$. ■

Definicija 2.2.6 Če supremum M' množice A tudi sam pripada množici A, ga imenujemo *maksimum* množice A

$$M' = \max A.$$

Če infimum m' množice A tudi sam pripada množici A, ga imenujemo *minimum* množice A

$$m' = \min A.$$

■ **Zgled 2.5** Ali ima množica $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ maksimum in minimum?

Supremum $M' = 1$ je tudi maksimum, ker $1 \in A$, infimum $m' = 0$ pa ni minimum, ker $0 \notin A$. ■

Absolutna vrednost realnega števila

Definicija 2.2.7 *Absolutna vrednost* realnega števila x, $|x|$, je definirana kot

$$|x| = \begin{cases} x & ; \quad x \geq 0, \\ -x & ; \quad x < 0. \end{cases}$$

■ **Zgled 2.6**

1. Poiščimo elemente množice $A = \{x \in \mathbb{R} | |x-2| < 3\}$.

$$A = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 5\} = (-1, 5).$$

2. Zapišimo predpis funkcije f brez znakov absolutne vrednosti, če je $f(x) = |4x-2|$.

$$f(x) = \begin{cases} 4x-2 & ; \quad x \geq \frac{1}{2}, \\ -4x+2 & ; \quad x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

3. Zapišimo predpis funkcije g brez znakov absolutne vrednosti, če je $g(x) = |x^2 - 2x|$.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & ; \quad x \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty)\,, \\ -x^2 + 2x & ; \quad 0 < x < 2\,. \end{cases}$$

■

Trditev 2.2.1 Za realni števili a in b velja:

(i) $|ab| = |a||b|$,

(ii) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (trikotniška neenakost),

(iii) $||a| - |b|| \leq |a - b|$,

(iv) $|a - b| = |b - a|$ (razdalja med točkama a in b).

Dokaz.

(i) Pokažimo najprej, da za poljubno realno število x velja $|x^2| = x^2$. Če je $x \geq 0$, tedaj je $x^2 \geq 0$ in posledično $x^2 = |x^2|$. Za $x < 0$ je prav tako $x^2 > 0$ in $x^2 = |x^2|$. Nadaljujmo z dokazom prve lastnosti:

$$\begin{array}{rcl} |ab| & = & |a||b| \quad /^2 \\ |ab|^2 & = & (|a||b|)^2 \\ (ab)^2 & = & |a|^2|b|^2 \\ a^2b^2 & = & a^2b^2 \end{array}$$

(ii)-(iv) Na podoben način za vajo pokažite preostale tri identitete.

■

2.3 Kompleksna števila

Ker nekatere enačbe nimajo rešitve v množici realnih števil, kot na primer

$$x^2 + 4 = 0\,,$$

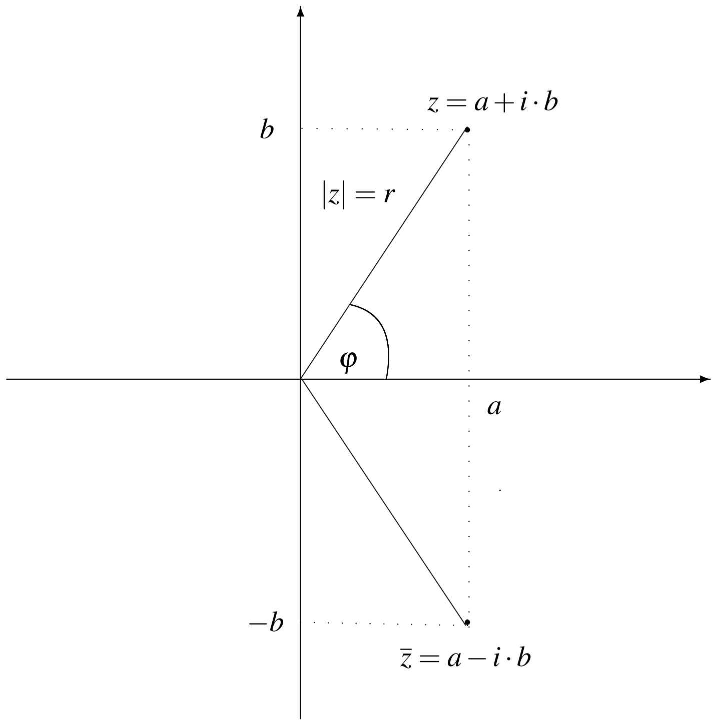
je smiselno vpleajti nove številske množice.

Obseg kompleksnih števil

Kompleksna števila lahko vpeljemo kot urejene pare (a, b) v ravnini $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Podobno kot smo to naredili v primeru realnih števil, lahko tudi na množici $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ki jo krajše zapišemo s $\mathbb{C}$, definiramo notranji operaciji seštevanja in množenja. Operaciji bosta veliko lažje razumljivi, če privzamemo zapis

$$(a, b) := a + ib\,,$$

kjer je $i^2 = -1$. Ta i imenujemo *imaginarna enota*. Kompleksno število $z = (a, b) = a + ib$ ima *realni del* a in *imaginarni del* b, kar zapišemo $\mathscr{R}e(z) = a$ in $\mathscr{I}m(z) = b$. Kompleksno število $z = a + ib = (a, b)$ lahko predstavimo v kompleksni ravnini, kjer realni del nanašamo na horizontalno os (absciso), imaginarni pa na vertikalno os (ordinato), kot to vidimo na Sliki 2.2.



Slika 2.2: Kompleksna ravnina.

Naj bosta $z = a + ib$ in $w = c + id$ dve kompleksni števili. Tedaj je njuna notranja operacija seštevanja definirana kot

$$z + w = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)\,.$$

Naj bodo z, w, u poljubna kompleksna števila. Tedaj veljajo naslednje lastnosti.

(i) Asociativnost seštevanja: $(z + w) + u = z + (w + u)$

(ii) Komutativnost seštevanja: $z + w = w + z$

(iii) Obstaja nevtralni element (enota) za seštevanje: $z + (0 + i \cdot 0) = (0 + i \cdot 0) + z = z$

(iv) Obstaja nasprotni element za seštevanje: $z + (-z) = (-z) + z = 0 + i \cdot 0$, kjer je za $z = a + ib$ nasprotni element $-z = -a - ib$

Množica kompleksnih števil je za operacijo seštevanja komutativna grupa.
Produkt dveh kompleksnih števil $z = a + ib$ in $w = c + id$ definiramo kot običajno množenje dvočlenikov

$$zw = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)\,.$$

Tudi za množenje veljajo podobne lastnosti. Naj bodo ponovno z, w, u poljubna kompleksna števila. Tedaj velja:

(v) Asociativnost množenja: $(zw)u = z(wu)$

(vi) Komutativnost množenja: $zw = wz$

(vii) Obstaja nevtralni element oziroma enota za množenje: $z \cdot (1 + i \cdot 0) = (1 + i \cdot 0) \cdot z = z$

(viii) Obstaja inverzni oziroma obratni element za množenja: $zz^{-1} = z^{-1}z = 1 + i \cdot 0$, kjer je za $z = a + ib$ inverzni element $z^{-1} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - i\dfrac{b}{a^2 + b^2}$, $a \neq 0$ ali $b \neq 0$.

Množica kompleksnih števil brez enote za seštevanje je tako komutativna grupa tudi za operacijo množenja.
Tudi v množici kompleksnih števil seštevanje in množenje povezuje skupna lastnost:

(ix) Distributivnost množenja glede na seštevanje: $(z + w)u = zu + wu$

Zaradi lastnosti $(i) - (ix)$ je množica kompleksnih števil $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *obseg*.

Odštevanje in deljenje sta tudi v tem primeru le posebna primera seštevanja in množenja:

$$\begin{aligned} (a + ib) - (c + id) &= (a + ib) + (-c - id) = (a - c) + i(b - d) \\ (a + ib) : (c + id) &= (a + ib)(c + id)^{-1} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,. \end{aligned}$$

Definicija 2.3.1 *Konjugirano število* števila z je kompleksno število

$$\bar{z} = a - ib\,.$$

Produkt kompleksnega števila s svojim konjugiranim številom je enak

$$z\bar{z} = a^2 + b^2\,.$$

Konjugirano kompleksno število nam pomaga pri deljenju kompleksnih števil. V ta namen najprej poglejmo, kako hitro izračunamo obratno vrednost kompleksnega števila z

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}\,.$$

Kvocient dveh kompleksnih števil z in w je tako enak

$$\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}\,.$$

■ **Zgled 2.7** Poiščimo kvocient kompleksnih števil $z = 2 - 3i$ in $w = 1 + 4i$.

$$\frac{z}{w} = \frac{2 - 3i}{1 + 4i} = \frac{(2 - 3i)(1 - 4i)}{(1 + 4i)(1 - 4i)} = \frac{-10 - 11i}{1 - (4i)^2} = -\frac{10}{17} - \frac{11}{17}i\,.$$

■

Definicija 2.3.2 *Absolutna vrednost* števila $z = a + ib$, $|z|$, je nenegativno realno število

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Izračunajmo še

$$z + \bar{z} = 2a \quad \text{in} \quad z - \bar{z} = 2ib\,,$$

kar pomeni, da je

$$\mathscr{R}e(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{in} \quad \mathscr{I}m(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}\,.$$

Notranji operaciji množenja in seštevanja na množici kompleksnih števil $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ lahko vpeljemo tudi preko urejenih parov:

- seštevanje $(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$,
- množenje $(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Preverimo veljavnost vseh lastnosti obeh računskih operacij.

(i)-(iv) $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$ je komutativna grupa z enoto $(0,0)$, nasprotni element od (a,b) je $(-a,-b)$, kar naj bralec preveri sam.

(v)-(viii) $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{(0,0)\}, \cdot)$ je komutativna grupa. Pokažimo, da je enota za množenje $(1,0)$:

$$\begin{aligned} (a,b) \cdot (x,y) &= (a,b) \\ (ax - by, ay + bx) &= (a,b)\,. \end{aligned}$$

Rešitev dobljenega sistema enačb je $x = 1$ in $y = 0$. Poiščimo še obratni element:

$$\begin{aligned} (a,b) \cdot (x,y) &= (1,0) \\ (ax - by, ay + by) &= (1,0)\,. \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je $x = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$ in $y = -\dfrac{b}{a^2 + b^2}$.

(ix) Preverimo distributivnost:

$$(a,b) \cdot ((c,d) + (e,f)) = (a,b) \cdot (c,d) + (a,b) \cdot (e,f)\,.$$

Leva stran enakosti:

$$\begin{aligned} &(a,b) \cdot (c + e, d + f) = \\ &(a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)) = \\ &(ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be)\,. \end{aligned}$$

Desna stran enakosti:

$$\begin{aligned} &(a,b) \cdot (c,d) + (a,b) \cdot (e,f) = \\ &(ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) = \\ &(ac - bd + ae - bf, a\,d + bc + af + be)\,. \end{aligned}$$

Na začetku tega razdelka smo privzeli, da je $a+ib=(a,b)$, zdaj pa bomo to zvezo izpeljali. Poglejmo najprej seštevanje in množenje kompleksnih števil z imaginarnim delom 0:

$$
\begin{aligned}
(a,0)+(b,0) &= (a+b,0+0)=(a+b,0)\,,\\
(a,0)\cdot(b,0) &= (ab-0\cdot 0,a0+b0)=(ab,0)\,.
\end{aligned}
$$

Opazimo, da sta v obeh primerih rezultata kompleksni števili z imaginarnim delom enakim 0, realna dela pa se obnašata kot realni števili, zato lahko privzamemo:

$$(a,0):=a\,,$$

oziroma vsa realna števila so tudi kompleksna števila. V uvodu smo zapisali, da je $i^2=-1=(-1,0)$. Poiščimo zapis za i z urejenim parom. Naj bo $i=(x,y)$:

$$
\begin{aligned}
(x,y)\cdot(x,y) &= (-1,0)\\
(x^2-y^2,2xy) &= (-1,0)\,.
\end{aligned}
$$

Rešitev dobljenega sistema enačb je $x=0$ in $y=1$, zato je $i=(0,1)$. Izračunajmo še

$$bi=(b,0)\cdot(0,1)=(0,b)\,.$$

Zato lahko (a,b) zapišemo kot

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=a+ib\,.$$

POLARNI ZAPIS

Poglejmo si še *polarni zapis* kompleksnega števila. V tem primeru kompleksno število $z=a+ib$ opišemo s kotom φ in polmerom r. Kot φ je kot med pozitivnim delom abscise in poltrakom, na katerem leži točka (a,b), polmer r je oddaljenost točke (a,b) od koordinatnega izhodišča. Kot φ imenujemo *argument* števila z in pišemo

$$\varphi=Arg(z)\,.$$

Vsi koti $\varphi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}-\{0\}$, so prav tako argumenti števila z in pišemo

$$\varphi+2k\pi=arg(z),\, k\in\mathbb{Z}-\{0\}\,.$$

Opazimo, da velja

$$r=|z| \quad \text{in} \quad \tan\varphi=\frac{b}{a}\,.$$

Polmer in argument natanko določata kompleksno število:

$$z=a+ib=r\cos\varphi+ir\sin\varphi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\,.$$

Polarni zapis za konjugirano število od z pa je oblike

$$\bar{z}=a-ib=r\cos\varphi-ir\sin\varphi=r(\cos\varphi-i\sin\varphi)\,.$$

V razdelku o realnih funkcijah bomo spoznali pojem sode in lihe funkcije. Videli bomo, da velja $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$ in $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$. Tako je

$$\bar{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)).$$

Zato velja, če je $Arg(z) = \varphi$, tedaj je $Arg(\bar{z}) = -\varphi$.

Računanje v množici kompleksnih števil podanih v polarneem zapisu je ugodno za množenje in deljenje kompleksnih števil.

- *Množenje*

Trditev 2.3.1 Naj bo $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ in $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Tedaj je

$$z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) \\ &= r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i(\sin(\varphi_1+\varphi_2)) \end{aligned}$$

■

Op Pri dokazu smo uporabili adicijska izreka, ki se v srednji šoli izpeljeta z uporabo skalarnega produkta geometrijskih vektorjev, s čimer se ne bomo ukvarjali:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha\pm\beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha \\ \cos(\alpha\pm\beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta. \end{aligned}$$

Trditev lahko posplošimo na produkt več kompleksnih števil.

Izrek 2.3.2 Naj bo $z_k = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k)$, $k = 1,2,\ldots,n$. Tedaj je

$$z_1z_2\cdots z_n = r_1r_2\cdots r_n(\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)).$$

Dokaz. Uporabimo indukcijo po n. Za $n = 2$ smo pokazali v Trditvi 2.3.1, indukcijski korak je sledeč:

$$(z_1\cdots z_{n-1})z_n =$$

$$= r_1\cdots r_{n-1}(\cos\underbrace{(\varphi_1+\ldots+\varphi_{n-1})}_{\alpha} + i\sin\underbrace{(\varphi_1+\ldots+\varphi_{n-1})}_{\alpha})r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)$$

$$= r_1r_2\cdots r_n(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)$$

$$= r_1r_2\cdots r_n(\cos\alpha\cos\varphi_n - \sin\alpha\sin\varphi_n + i(\sin\alpha\cos\varphi_n + \cos\alpha\sin\varphi_n))$$

$$= r_1r_2\cdots r_n(\cos(\alpha+\varphi_n) + i\sin(\alpha+\varphi_n))$$

$$= r_1r_2\cdots r_n(\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)).$$

■

- *Potenciranje*
  Potenciranje sledi neposredno iz Izreka 2.3.2.

Posledica 2.3.3 — Moivreova formula. Naj bo $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Tedaj je

$$z^n = r^n\left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right), n \in \mathbb{N}.$$

Dokaz. V Izreku 2.3.2 upoštevamo, da so vsi faktorji med seboj enaki

$$z^n = z \cdot z \cdots z = r^n\left(\cos(\varphi+\varphi+\ldots+\varphi) + i\sin(\varphi+\varphi+\ldots+\varphi)\right) = r^n\left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right).$$

■

Za vajo dokažite formulo za potenciranje kompleksnih števil direktno z matematično indukcijo (brez uporabe Izreka 2.3.2).

■ **Zgled 2.8** Naj bo $z = 1+i$. Izračunajmo z^{50}.

Izračunati moramo polmer r in argument φ:

$$r = \sqrt{2}, \tan\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}\,(\text{I. kvadrant}).$$

$$\begin{aligned} z^{50} &= (\sqrt{2})^{50}(\cos(50\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(50\tfrac{\pi}{4})) \\ &= 2^{25}(\cos(\tfrac{\pi}{2} + 12\pi) + i\sin(\tfrac{\pi}{2} + 12\pi)) \\ &= 2^{25}(0+i) \\ &= i2^{25}. \end{aligned}$$

■

- *Deljenje*

Trditev 2.3.4 Obratna vrednost neničelnega kompleksnega števila $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ je enaka

$$z^{-1} = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$

Dokaz. Naj bo $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Tedaj je obratna vrednost kompleksnega števila z:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{r}.$$

■

Trditev 2.3.5 Naj bosta $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ in $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, $z_2 \neq 0$, kompleksni števili. Tedaj je njun kvocient enak

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i(\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= z_1 z_2^{-1} = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\frac{1}{r_2}(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)\\ &= \frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2))\\ &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i(\sin(\varphi_1-\varphi_2))\,.\end{aligned}$$

■

- *Korenjenje*
  Zanima nas $\sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$. Spomnimo se, da je to ekvivalentno reševanju enačbe
  $$u^n = z\,.$$
  Naj bo podano kompleksno število z v polarnem zapisu:
  $$z = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0),\ r_0 \in \mathbb{R}_0^+,\ \varphi_0 \in [0, 2\pi)\,.$$
  Nadalje, naj bo
  $$u = \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$
  in izračunajmo
  $$\begin{aligned}u^n &= \left(\sqrt[n]{r_0}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)\right)^n\\ &= r_0\left(\cos\left(\varphi_0 + 2k\pi\right) + i\sin\left(\varphi_0 + 2k\pi\right)\right)\\ &= r_0\left(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0\right) = z\,.\end{aligned}$$
  Rešitve enačbe $\sqrt[n]{z} = u$, kjer je $z = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$, so torej oblike
  $$u_k = \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right),\ k \in \mathbb{Z}\,.$$
  V bistvu je dovolj, da k preteče vrednosti od 0 do $n-1$ (ali 1 do n), kar sledi iz lastnosti funkcij sinus in kosinus, ki ju bomo obravnavali v naslednjem poglavju.

■ **Zgled 2.9** Poiščimo rešitve enačbe $u^3 = 1$.

Število 1 zapišemo v polarnem zapisu $1 = 1(\cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi))$ in ga ustrezno korenimo

$$\begin{aligned}u^3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad u &= \sqrt[3]{1}\\ &= \sqrt[3]{(\cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi)}\\ &= \sqrt[3]{1}((\cos(\tfrac{2k\pi}{3}) + i\sin(\tfrac{2k\pi}{3}))\,,\ k = 0,1,2\,.\end{aligned}$$

Rešitve so

$$u_1 = 1,\ u_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ u_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\,.$$

■

Opazimo, da so rešitve enačbe $z^n = a$ oglišča pravilnega n-kotnika.

3. Realne funkcije

3.1 Preslikave

Definicija 3.1.1 *Preslikava* je določena s parom množic in predpisom, ki vsakemu elementu iz prve množice priredi natanko en element iz druge množice.

Običajen zapis za preslikavo f iz množice A v množico B je $f : A \to B$. Pri tem je f predpis, množico A imenujemo *domena* in množico B *kodomena* preslikave. Če preslikava $f : A \to B$ elementu a iz domene A priredi element b iz kodomene B, to zapišemo kot

$$f(a) = b$$

ali tudi

$$f : a \mapsto b$$

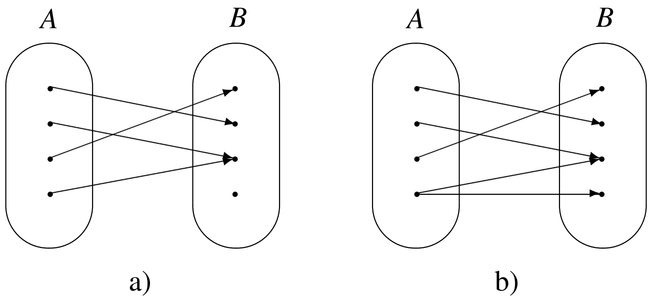
(znak $\mapsto$ beremo "priredi"). Elementi domene so *originali* in elementi kodomene so njihove *slike*.

Če sta množici A in B končni in ne preveliki, lahko preslikavo opišemo z diagramom, kot to vidimo na Sliki 3.1. Na Sliki 3.1 imamo pod a) primer preslikave, medtem ko pod b) nimamo opravka s preslikavo, saj se en original ne more preslikati v dve različni sliki.

Za preslikavo uporabljamo tudi izraze funkcija, upodobitev, transformacija, ... Izbira ustreznega termina je odvisna od vrste domene in kodomene. V naslednjih poglavjih bomo govorili o preslikavah, v katerih bosta domena in kodomena podmnožici realnih števil, in v tem primeru se uporablja izraz realna funkcija.

Definicija 3.1.2 Naj bosta $f, g : A \to B$. Preslikavi f in g sta *enaki*, $f = g$, če je $f(a) = g(a)$ za vsak $a \in A$.

■ **Zgled 3.1** Preverimo, ali sta preslikavi $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ enaki.



Slika 3.1: a) Je preslikava, b) ni preslikava.

1. $f(x) = (x-1)^3$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$:

   Ker je $f(x) = g(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, sta f in g enaki preslikavi.

2. $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = x$:

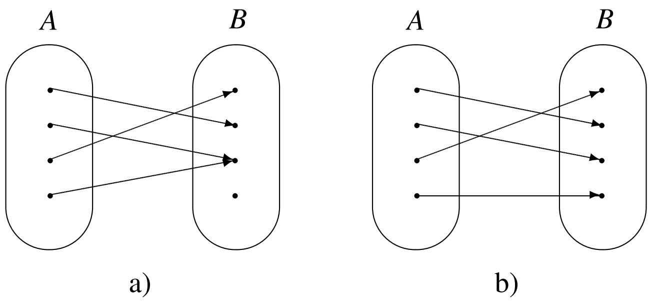
   Ker je $f(-5) = 5$ in $g(-5) = -5$, sta preslikavi f in g različni.

■

Definicija 3.1.3 Preslikava $f : A \to B$ je *surjektivna*, če je vsak element iz B slika kakega elementa iz A:

$$\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b\,.$$

Na Sliki 3.2 imamo pod a) primer preslikave, ki ni surjektivna, medtem ko je preslikava pod b) surjektivna.



Slika 3.2: a) Ni surjektivna preslikava, b) je surjektivna preslikava.

Definicija 3.1.4 *Zaloga vrednosti* preslikave $f : A \to B$, Z_f, je množica vseh tistih elementov iz B, ki so slika kakega elementa iz A:

$$Z_f = \{b \in B | \exists a \in A : f(a) = b\} = \{f(a) | a \in A\}\,.$$

Očitno je preslikava $f : A \to B$ surjektivna natanko tedaj, ko je $Z_f = B$.

Definicija 3.1.5 Preslikava $f : A \to B$ je *injektivna*, če se poljubna različna elementa iz A preslikata v različna elementa iz B:

$$\forall a_1, a_2 \in A : a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2).$$

Ekvivalenten zapis bi bil

$$\forall a_1, a_2 \in A : f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2.$$

Nasprotno, torej preslikave ki niso injektivne, dobimo z negacijo zgornje trditve

$$\exists a_1, a_2 \in A : a_1 \neq a_2 \wedge f(a_1) = f(a_2).$$

Definicija 3.1.6 Preslikava $f : A \to B$ je *bijektivna*, ko je injektivna in surjektivna, kar formalno zapišemo

$$\forall b \in B, \exists! a \in A : f(a) = b.$$

Op Simbol $\exists!$ beremo "obstaja natanko en".

■ **Zgled 3.2** Preverimo bijektivnost preslikav.

1. Naj bo $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ in $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ podana s predpisom $f(x) = x^2$.

   Tako definirana preslikava f je bijektivna, saj za vsak $y = x^2$ obstaja natanko eno pozitivno število x, ki se preslika v y.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$.

   Tako definirana preslikava f ni niti injektivna ($f(2) = f(-2)$) niti surjektivna (na primer -4 ni slika nobenega elementa), zato ni bijektivna.

■

Z uporabo bijektivne preslikave lahko definiramo enako močne množice.

Definicija 3.1.7 Končni množici sta enako močni, ko med njima obstaja bijektivna preslikava.

To definicijo lahko posplošimo tudi na neskončne množice. Za ilustracijo si poglejmo Zgled 3.3.

■ **Zgled 3.3** Pokažimo, da sta množica naravnih števil $\mathbb{N}$ in množica sodih števil enako močni. Podajmo preslikavo f, ki slika iz množice $\mathbb{N}$ v množico sodih števil s predpisom

$$f(n) = 2n.$$

Ker je tako definirana preslikava f bijekcija, sta množici enako močni. Pravimo, da imata števno neskončno moč. ■

Definicija 3.1.8 *Graf preslikave* $f : A \to B$, Γ_f, je množica vseh urejenih parov $(a, f(a))$:

$$\Gamma_f = \{(a, f(a)) | a \in A\} \subseteq A \times B\,.$$

■ **Zgled 3.4** Naj bo $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b,c\}$ in $f : A \to B$ definirana kot

$$f(1) = b, f(2) = a, f(3) = c\,.$$

Poiščimo graf preslikave f.

Graf preslikave f je

$$\Gamma_f = \{(1,b),(2,a),(3,c)\}\,.$$

■

■ **Zgled 3.5** Poiščimo graf preslikave $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

Graf preslikave f je $\Gamma_f = \{(x,x^2) | x \in \mathbb{R}\}$.

■

Definicija 3.1.9 *Kompozitum preslikav* $f : A \to B$ in $g : B \to C$ je preslikava $g \circ f : A \to C$, definirana s predpisom

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))\,.$$

Računski operaciji pravimo *komponiranje*.

■ **Zgled 3.6** Poiščimo kompozitum preslikav.

1. Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podana s predpisom $f(x) = e^{2x}$ in $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podana s $g(x) = x^3 + 2x$.

   Tedaj lahko izračunamo oba kompozituma:

$$g \circ f = (g \circ f)(x) = g(e^{2x}) = (e^{2x})^3 + 2e^{2x} = e^{6x} + 2e^{2x}$$

$$f \circ g = (f \circ g)(x) = f(x^3 + 2x) = e^{2(x^3+2x)} = e^{2x^3+4x}\,.$$

2. $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f((n,m)) = n + m$ in $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, g(n) = n^2$. V tem primeru je definiran le kompozitum $g \circ f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$(g \circ f)((n,m)) = g(n+m) = (n+m)^2\,.$$

■

Opazimo, da komponiranje ni komutativna operacija:

$$f \circ g \neq g \circ f\,.$$

Po drugi strani pokažimo, da je komponiranje asociativna operacija. Naj bodo dane preslikave $f : A \to B$, $g : B \to C$ in $h : C \to D$. Tedaj je

$$\begin{aligned}((f \circ g) \circ h)(x) &= (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) \quad \text{in} \\ (f \circ (g \circ h))(x) &= f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))\,.\end{aligned}$$

■ **Zgled 3.7** Preverimo asociativnost komponiranja, če sta preslikavi f in g podani kot v 1. točki Zgleda 3.6, in je $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podana s predpisom $h(x) = 3x$.

Vemo že, da je $(f \circ g)(x) = e^{2x^3+4x} := y(x)$, zato je

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (y \circ h)(x) = y(h(x)) = y(3x) = e^{2(3x)^3+12x} = e^{54x^3+12x}\,.$$

Za drugo stran izračunajmo najprej

$$z(x) := (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(3x) = (3x)^3 + 2(3x) = 27x^3 + 6x\,.$$

Tedaj je

$$(f \circ (g \circ h)(x) = (f \circ z)(x) = f(z(x)) = e^{2(27x^3+6x)} = e^{54x^3+12x}\,.$$

■

Definicija 3.1.10 Preslikava $f : A \to A$, definirana s predpisom $f(a) = a$, $\forall a \in A$, je *identiteta* na množici A in se označi z I_A.

Izrek 3.1.1 Naj bo $f : A \to B$ bijektivna preslikava. Potem obstaja natanko ena bijektivna preslikava $g : B \to A$ taka, da je

$$g \circ f = I_A \quad \text{in} \quad f \circ g = I_B\,.$$

Dokaz.

Definirajmo g kot:

$$\forall b \in B \,\text{naj bo}\, g(b) \,\text{tisti}\, a \in A,\, \text{za katerega je}\, f(a) = b\,,$$

kot je to razvidno s Slike 3.3. Tako definirana preslikava g je bijektivna, saj iz bijektivnosti preslikave f sledi, da za vsak $a \in A$ obstaja natanko en tak $b = f(a) \in B$, da je $g(b) = a$.

Pokažimo še drugi del trditve:

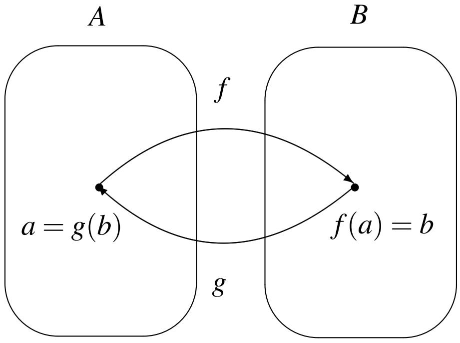
$$\forall a \in A : (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = a \Rightarrow g \circ f = I_A\,.$$

Podobno velja

$$\forall b \in B : (f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = b \Rightarrow f \circ g = I_B\,.$$

■

Preslikavo g običajno označujemo f^{-1} in ji pravimo *inverzna preslikava* ali *obratna preslikava* preslikave f.



Slika 3.3: Obratni preslikavi f in g.

■ **Zgled 3.8** Naj bo $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b,c\}$ in $f : A \to B$ podana s predpisom

$$f(1) = b, f(2) = a, f(3) = c\,.$$

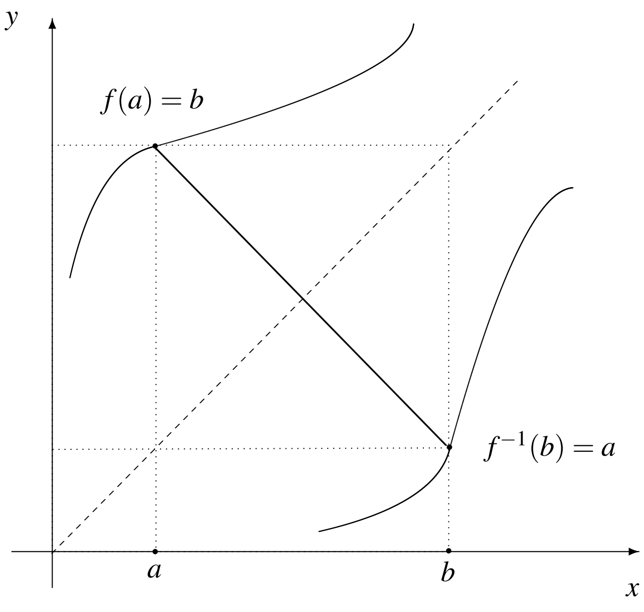
Če obstaja, poiščimo f^{-1}.

Preslikava f je bijektivna in zato obstaja $f^{-1} : B \to A$, ki je podana kot

$$f^{-1}(a) = 2, f^{-1}(b) = 1, f^{-1}(c) = 3\,.$$

■

Na Sliki 3.4 vidimo odnos med grafom preslikave f in grafom obratne preslikave f^{-1}.



Slika 3.4: Obratni preslikavi f in f^{-1}.

3.2 Pregled elementarnih funkcij

V prejšnjem razdelku so nas zanimale preslikave v splošnem, zdaj se bomo osredotočili samo na realne funkcije realne spremenljivke. Ponovili bomo njihove osnovne lastnosti in naredili pregled elementarnih funkcij.

OSNOVNE LASTNOSTI

Zanimajo nas preslikave $f : \mathscr{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katere bomo uporabljali izraz funkcija

$$f(x) = y\,.$$

Ker je domena $\mathscr{D}$ podmnožica v $\mathbb{R}$, je f funkcija realne spremenljivke. Ker je tudi kodomena podmnožica $\mathbb{R}$, je f realna funkcija. Domena $\mathscr{D}$ običajno ni vnaprej podana, temveč je to množica vseh tistih realnih števil, za katere je predpis funkcije f izračunljiv. Zato ne govorimo o domeni, temveč o *definicijskem območju* oziroma *naravnem definicijskem območju* funkcije f, ki ga označimo $\mathscr{D}_f$. Včasih indeks f izpustimo in namesto $\mathscr{D}_f$ pišemo samo $\mathscr{D}$ in imamo s tem v mislih definicijsko območje funkcije f. Nadalje pravimo, da je x *neodvisna spremenljivka* ali *argument*, $f(x) = y$ je *odvisna spremenljivka*, saj je y odvisen od izbire x-a.

Definicija 3.2.1 Naj bosta $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ in $g : \mathscr{D}_g \to \mathbb{R}$. Tedaj je naravno definicijsko območje kompozituma $f \circ g$ definirano takole

$$\mathscr{D}_{f\circ g} = \{x \in \mathscr{D}_g | g(x) \in \mathscr{D}_f\}\,.$$

■ **Zgled 3.9** Naj bosta dani realni funkciji $f(x) = 2 - x^2$ in $g(x) = \sqrt{x}$. Poiščimo definicijsko območje obeh kompozitumov.

Definicijsko območje funkcije f je $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ in funkcije g je $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Definicijski območji kompozitumov sta

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}_{f\circ g} &= \{x \geq 0 \big| \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = \mathscr{D}_g\,,\\
\mathscr{D}_{g\circ f} &= \{x \in \mathbb{R} \big| 2 - x^2 \geq 0\} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\,.
\end{aligned}$$

■

Poglejmo nekaj osnovnih lastnosti realnih funkcij.

Definicija 3.2.2 Funkcija f, definirana na simetričnem intervalu $\mathscr{D} = (-a, a)$ ali $\mathscr{D} = [-a, a]$, je *soda*, če velja

$$f(-x) = f(x),\ \forall x \in \mathscr{D}$$

in *liha*, če velja

$$f(-x) = -f(x),\ \forall x \in \mathscr{D}\,.$$

■ **Zgled 3.10** Preverimo sodost oziroma lihost funkcije.

1. $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

   Ker je $f(-x) = \frac{1}{2}(-x)^2 = \frac{1}{2}x^2$, je to soda funkcija.

2. $f(x) = 2x^3$.

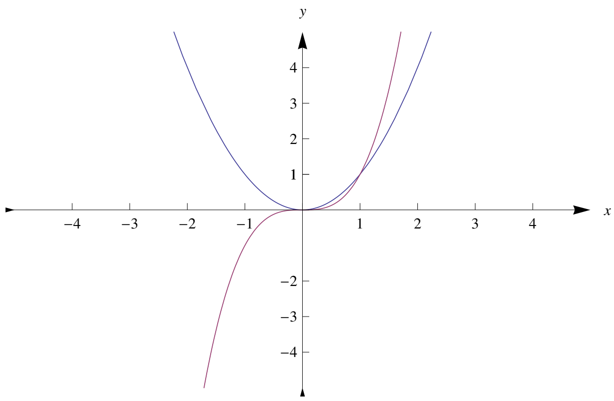
   Ker je $f(-x) = 2(-x)^3 = -2x^3$, je to liha funkcija.

3. $f(x) = x + 2x^2$.

   To ni niti soda, niti liha funkcija, saj je na primer $f(1) = 3$ in $f(-1) = 1$.

■

Graf sode funkcije je simetričen glede na y os, graf lihe funkcije pa je simetričen glede na koordinatno izhodišče (*glej Sliko 3.5*). Večina realnih funkcij ni niti sodih niti lihih.



Slika 3.5: Graf sode in lihe funkcije iz Zgleda 3.10.

Definicija 3.2.3 Funkcija $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ je *omejena*, ko je zaloga vrednosti Z_f omejena množica.

Op Supremum, infimum, maksimum in minimum funkcije f so istoimenski pojmi množice Z_f. Uporabljamo zapise

$$\sup_{x\in\mathscr{D}_f} f(x),\ \inf_{x\in\mathscr{D}_f} f(x),\ \max_{x\in\mathscr{D}_f} f(x),\ \min_{x\in\mathscr{D}_f} f(x)$$

ali tudi

$$\sup f,\ \inf f,\ \max f,\ \min f\,.$$

■ **Zgled 3.11** Preverimo omejenost funkcije.

1. $f(x) = x^2$.

   Funkcija f je navzdol omejena in sicer je

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} x^2 = \min_{x\in\mathbb{R}} x^2 = 0\,.$$

2. $f(x) = x^3$.

   Funkcija f ni omejena.

■

Definicija 3.2.4 Naj bo f definirana na definicijskem območju $\mathscr{D}_f$. Tedaj je f *naraščajoča*, kadar velja

$$\forall x_1, x_2 \in \mathscr{D}_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

in f je *padajoča*, če velja

$$\forall x_1, x_2 \in \mathscr{D}_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) .$$

Če na desni strani veljata strogi neenakosti ($f(x_1) < f(x_2)$) oziroma ($f(x_1) > f(x_2)$), govorimo o *strogo naraščajoči* oziroma *strogo padajoči* funkciji. Če je f (strogo) naraščajoča ali (strogo) padajoča funkcija, je f *(strogo) monotona* funkcija. Če je funkcija monotona samo na neki podmnožici I definicijskega območja, pravimo, da je monotona na I.

■ **Zgled 3.12** Preverimo monotonost funkcije.

1. $f(x) = x^2$.

   Funkcija f ni monotona funkcija, ker je za $x < 0$ strogo padajoča, za $x > 0$ pa strogo naraščajoča.

2. $f(x) = x^3$.

   Funkcija f je strogo naraščajoča funkcija, saj za realni števili x_1, x_2 velja:

$$\text{če je } x_1 < x_2, \text{tedaj je} x_1^3 < x_2^3 .$$

■

ELEMENTARNE FUNKCIJE

Preglejmo po vrsti elementarne funkcije, s katerimi se bomo srečevali v nadaljevanju.

a) *Polinomi in racionalne funkcije*
   Polinomi so funkcije oblike

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 ,$$

   kjer je $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. Če je $a_n \neq 0$, pravimo, da je polinom p *stopnje* n. Če želimo poudariti stopnjo polinoma pišemo p_n namesto p. Številu a_n pravimo *vodilni koeficient* polinoma, številu a_0 pa *splošni člen*.

   Rešitvam polinomske enačbe

$$p(x) = 0$$

   pravimo *koreni*. Običajno namesto o korenih govorimo kar o *ničlah polinoma*. Polinom stopnje n ima natanko n ne nujno različnih ničel. Koreni polinomske enačbe pripadajo množici $\mathbb{R}$

ali $\mathbb{C}$. Ker kompleksni koreni polinomske enačbe zmeraj nastopajo v konjugiranih parih, ima polinom lihe stopnje vsaj eno realno ničlo. Naj bodo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koreni polinomske enačbe

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 .$$

Tedaj lahko polinom p *faktoriziramo*, kar pomeni, da ga zapišemo kot produkt faktorjev

$$p(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) .$$

Če se faktor $(x - x_k)$ pojavi m-krat v razcepu, pravimo, da je x_k m-kratna ničla polinoma f. Ničli polinoma druge stopnje

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

sta korena pripadajoče enačbe

$$p(x) = 0$$

in ju izračunamo po znanih formulah

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \, x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} .$$

Izraz pod korenom imenujemo diskriminanta in jo označujemo z $D = b^2 - 4ac$. Glede na vrednost diskriminante ločimo tri možnosti:

$$D > 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R},$$

$$D = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 \in \mathbb{R},$$

$$D < 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \overline{x_2} \in \mathbb{C}.$$

Ničle polinomov višje stopnje

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \, , n \geq 3$$

lahko iščemo s pomočjo *Hornerjevega algoritma*. Uporabimo ga lahko, če poznamo vsaj en koren enačbe $p(x) = 0$. Dokazati je mogoče, da če so koeficienti a_i celoštevilski in je koren racionalno število $\frac{m}{n}$, tedaj m deli a_0, n pa a_n. Uporaba Hornerjevega algoritma je prikazana na Zgledu 3.13.

■ **Zgled 3.13** Poiščimo vse korene polinomske enačbe

$$p(x) = 5x^4 + 48x^3 - 15x^2 + 48x - 20 = 0 .$$

Če je koren racionalno število $\frac{m}{n}$, mora biti $m \in \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ in $n \in \{1, 5\}$. Skupno imamo 9 kandidatov za rešitev enačbe, poleg tega pa še njihove nasprotne vrednosti. Preverimo po Hornerjevem algoritmu, da je $\frac{2}{5}$ koren enačbe.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 5 & 48 & -15 & 48 & -20 \\ & & 2 & 20 & 2 & 20 \\ \hline \frac{2}{5} & 5 & 50 & 5 & 50 & 0 \end{array}$$

Torej je

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-\frac{2}{5})(5x^3+50x^2+5x+50) \\ &= 5(x-\frac{2}{5})(x^3+10x^2+x+10) \\ &= 5(x-\frac{2}{5})(x^2(x+10)+(x+10)) \\ &= 5(x-\frac{2}{5})(x+10)(x^2+1) \\ &= 5(x-\frac{2}{5})(x+10)(x+i)(x-i)\,. \end{aligned}$$

Rešitve so $x_1 = \frac{2}{5}$, $x_2 = -10$, $x_3 = i$, $x_4 = -i$.

■

Racionalna funkcija f je kvocient dveh polinomov p in q:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}\,.$$

Ničle ima v točkah, kjer je $p(x) = 0$. Definirana je povsod, kjer je $q(x) \neq 0$. V točkah, kjer je $q(x) = 0$, funkcija f ni definirana. Če je v taki točki $p(x) \neq 0$, tedaj pravimo, da ima v tej točki funkcija *pol* ali *navpično oziroma vertikalno asimptoto*. Več o tem bomo izvedeli v naslednjem razdelku, ko bomo risali grafe racionalnih funkcij.

■ **Zgled 3.14** Poiščimo ničle, definicijsko območje in pole funkcije

$$f(x) = \frac{5x^4+48x^3-15x^2+48x-20}{x^2-4}\,.$$

Ničle funkcije f so koreni polinoma iz Zgleda 3.13. Pola ima v $2, -2$ in definicijsko območje je zato $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$. ■

b) *Trigonometrične funkcije*

Definirali bomo *trigonometrične funkcije* sinus, kosinus, tangens in kotangens, za katere uporabljamo tudi termin *kotne funkcije*. Trigonometrične funkcije bomo najprej definirali za kote z intervala $[0,2\pi]$. Kot je poleg v radianih lahko merjen tudi v stopinjah. Kote iz stopinj v radiane pretvarjamo po naslednji zvezi:

$$x(rd) = \frac{\pi}{180^\circ}x(^\circ)$$

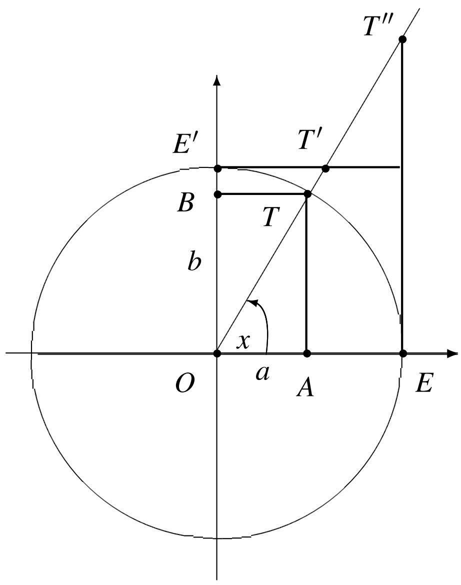
oziroma

$$x(^\circ) = \frac{180^\circ}{\pi}x(rd)\,.$$

Kot x, merjen v radianih, predstavlja dolžino loka na enotski krožnici med točkama E in T s Slike 3.6.

Na enotski krožnici izberemo poljubno točko $T(a,b)$ v I. kvadrantu in označimo ostale točke, kot je razvidno s Slike 3.6. Kot med pozitivnim delom osi x in poltrakom OT označimo z x. Tedaj je

$$
\begin{aligned}
|OA| = a = \cos x & \quad \ldots \quad \text{kosinus kota}\, x\,, \\
|OB| = b = \sin x & \quad \ldots \quad \text{sinus kota}\, x\,, \\
|ET''| = \tan x & \quad \ldots \quad \text{tangens kota}\, x\,, \\
|E'T'| = \cot x & \quad \ldots \quad \text{kotangens kota}\, x\,.
\end{aligned}
$$



Slika 3.6: Definicija trigonometričnih funkcij.

Iz podobnosti trikotnikov OAT in OET'' je razvidno razmerje

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\tan x}{|OE|} = \tan x\,.$$

Podobno velja

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cot x}{|OE'|} = \cot x\,,$$

kar pomeni, da je

$$\tan x = \frac{1}{\cot x}\,.$$

Naj bo sedaj $x \in [0, 2\pi]$. Poglejmo predznak trigonometričnih funkcij po posameznih kvadrantih

	$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$	$\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$
$\cos x$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\sin x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\tan x$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\cot x$	$+$	$-$	$+$	$-$

Za poljuben kot x definiramo trigonometrične funkcije na sledeč način:

$$\cos x = \cos(x + 2k\pi),$$

$$\sin x = \sin(x + 2k\pi),$$

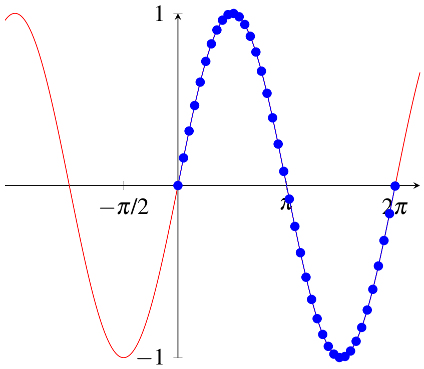
$$\tan x = \tan(x + k\pi),$$

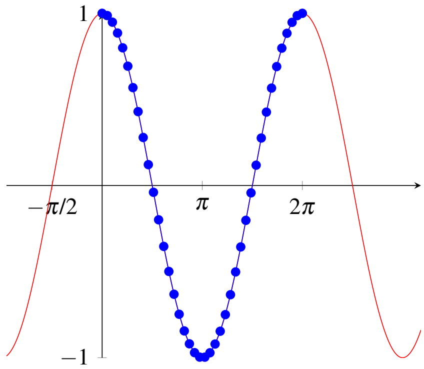
$$\cot x = \cot(x + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Pravimo, da sta funkciji sinus in kosinus *periodični* z osnovno periodo 2π, tangens in kotangens pa s periodo π.

S Slike 3.6 razvidno, da je kosinus soda funkcija ($\cos x = \cos(-x)$) in sinus liha funkcija ($\sin x = -\sin(-x)$), kar pomeni, da sta preostali dve prav tako lihi funkciji ($\tan x = -\tan(-x)$, $\cot x = -\cot(-x)$).

Na Sliki 3.7 vidimo grafa funkcij sinus in kosinus, ki sta sta definirani na celem $\mathbb{R}$. Zaloga vrednosti je v obeh primerih zaprti interval $[-1, 1]$.



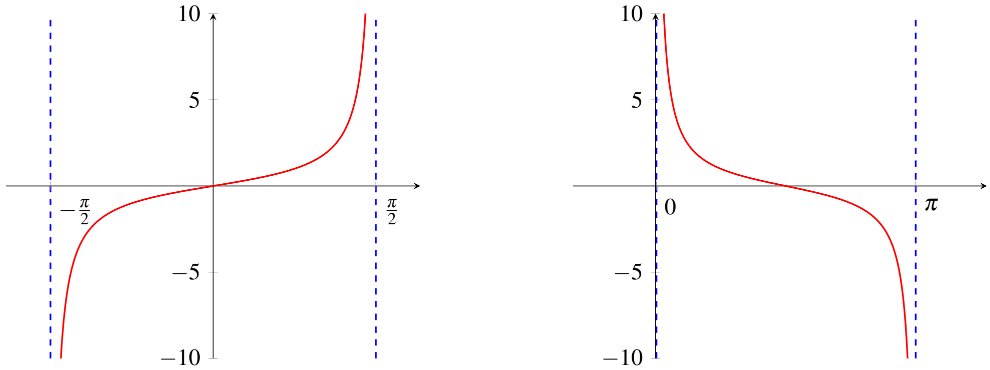


Slika 3.7: Grafa funkcij sinus (levo) in kosinus (desno); z modro je označena osnovna perioda.

Na Sliki 3.8 sta grafa funkcij tangens in kotangens; funkcija tangens ni definirana v ničlah kosinusa ($x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$), kotangens ni definiran v ničlah sinusa ($x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$), zaloga vrednosti je v obeh primerih množica $\mathbb{R}$.

Poglejmo še nekaj najpogostejših zvez med trigonometričnimi funkcijami. Po Pitagorovem izreku velja

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1\,.$$



Slika 3.8: Grafa funkcij tangens (levo) in kotangens (desno) na svoji osnovni periodi.

Izračunajmo

$$\begin{aligned} 1+\tan^2 x &= 1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Podobno zveza velja za kotangens

$$1+\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Iz adicijskih izrekov sledi

$$\begin{aligned} \sin(x-y) &= \sin(x+(-y)) \\ &= \sin x\cos(-y)+\cos x\sin(-y) \\ &= \sin x\cos y-\cos x\sin y, \\ \cos(x-y) &= \cos(x+(-y)) \\ &= \cos x\cos(-y)-\sin x\sin(-y) \\ &= \cos x\cos y+\sin x\sin y. \end{aligned}$$

Iz adicijskih izrekov lahko izpeljemo tudi formuli za sinus in kosinus dvojnih kotov:

$$\begin{aligned}\sin(2x) &= \sin(x+x)\\ &= \sin x\cos x+\cos x\sin x\\ &= 2\sin x\cos x,\\ \cos(2x) &= \cos(x+x)\\ &= \cos x\cos x-\sin x\sin x\\ &= \cos^2 x-\sin^2 x.\end{aligned}$$

Prav tako nam adicijski izreki dajo zvezo med kotoma, katerih vsota je $\frac{\pi}{2}$ (*komplementarna kota*):

$$\begin{aligned}\sin(\tfrac{\pi}{2}-x) &= \sin\tfrac{\pi}{2}\cos x-\cos\tfrac{\pi}{2}\sin x\\ &= \cos x,\\ \cos(\tfrac{\pi}{2}-x) &= \cos\tfrac{\pi}{2}\cos x+\sin\tfrac{\pi}{2}\sin x\\ &= \sin x.\end{aligned}$$

Podobno velja za preostali dve funkciji:

$$\begin{aligned}\tan(\tfrac{\pi}{2}-x) &= \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\cos(\frac{\pi}{2}-x)}\\ &= \frac{\cos x}{\sin x}\\ &= \cot x,\\ \cot(\tfrac{\pi}{2}-x) &= \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2}-x)}\\ &= \tan x.\end{aligned}$$

Omenimo še, da boste v starejši literaturi naleteli na oznaki za funkciji tangens in kotangens v obliki tg oziroma ctg.

c) *Ciklometrične funkcije*

Ciklometrične funkcije so obratne oziroma inverzne funkcije od trigonometričnih. Zanje uporabljamo tudi izraz *krožne funkcije*. Ciklometrične funkcije so arkus sinus, arkus kosinus, arkus tangens in arkus kotangens.

Funkcija arkus sinus

Če hočemo, da bo obstajal inverz funkcije sinus, mora le-ta biti bijektivna. V ta namen moramo skrčiti definicijsko območje. Naj bo $f(x)=\sin x$ in $f:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1]$. Tedaj obstaja $f^{-1}:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ taka, da je

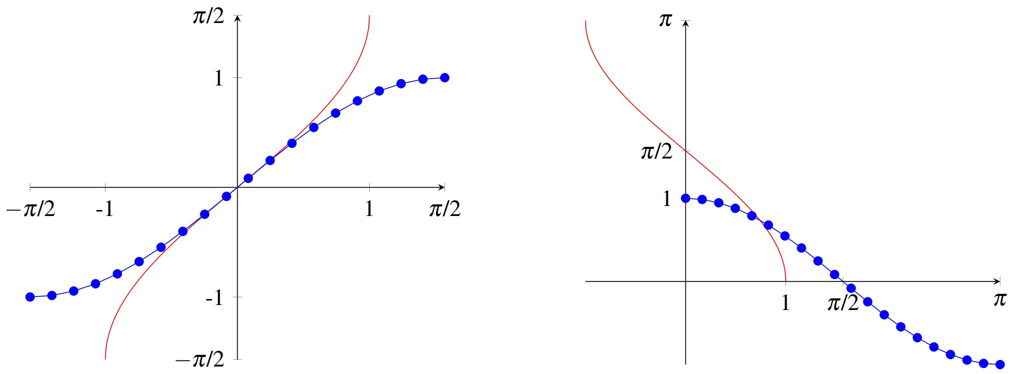
$$(f\circ f^{-1})(x)=f(f^{-1}(x))=x,\ \forall x\in[-1,1]$$

in
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x, \, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Imenujemo jo *arkus sinus* in pišemo
$$f^{-1}(x) = \operatorname{asin} x.$$

Ponekod zasledimo še staro oznako, ki je arcsin. Velja torej
$$\sin(\operatorname{asin} x) = x, \, \forall x \in [-1, 1],$$
$$\operatorname{asin}(\sin x) = x, \, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Definicijsko območje funkcije $f(x) = \sin x$ bi lahko skrčili tudi kako drugače. Za vsako skrčitev definicijskega območja, ki ima za rezultat bijektivno funkcijo sinus, lahko definiramo obratno funkcijo arkus sinus. Za poljubno kodomeno funkcije arkus sinus pišemo funkcijo z veliko začetnico, torej $\operatorname{Asin} x$. Kadar skrčimo območje na $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, torej tako, kot smo to najprej naredili, govorimo o *glavni veji* funkcije arkus sinus in jo pišemo z malo začetnico $\operatorname{asin} x$.
Vemo že, da graf obratne funkcije dobimo z zrcaljenem preko premice $y = x$, kot je prikazano na levem grafu na Sliki 3.9.



Slika 3.9: Grafa glavnih vej funkcij arkus sinus (levo) in arkus kosinus (desno); z modro barvo sta označeni obratni funkciji sinus oziroma kosinus.

Funkcija arkus kosinus

Naj bo $f(x) = \cos x$. Definicijsko območje skrčimo na $[0, \pi]$, s čimer bomo podobno kot pri funkciji arkus sinus, dobili glavno vejo funkcije arkus kosinus, ki jo zapisujemo z malo začetnico. Tedaj obstaja
$$f^{-1}(x) = \operatorname{acos} x : [-1, 1] \to [0, \pi],$$

za katero velja
$$\cos(\operatorname{acos} x) = x, \, \forall x \in [-1, 1],$$
$$\operatorname{acos}(\cos x) = x, \, \forall x \in [0, \pi].$$

Tudi v tem primeru lahko naletimo na staro oznako arccos. Na desni strani Slike 3.9 vidimo graf glavne veje funkcije arkus kosinus.

Izpeljimo še zvezo med obema ciklometričnima unkcijama. Naj bo $x \in [-1,1]$. Tedaj je $y = \operatorname{asin} x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ in $x = \sin y$. Nadalje je

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sin y = x,$$

kar pomeni, da je

$$\frac{\pi}{2} - y = \operatorname{acos} x$$

oziroma

$$\operatorname{asin} x + \operatorname{acos} x = \frac{\pi}{2}, \forall x \in [-1,1].$$

Funkcija arkus tangens

Naj bo $f(x) = \tan x$. Definicijsko območje skrčimo na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, s čimer bomo dobili glavno vejo funkcije arkus tangens Tedaj obstaja

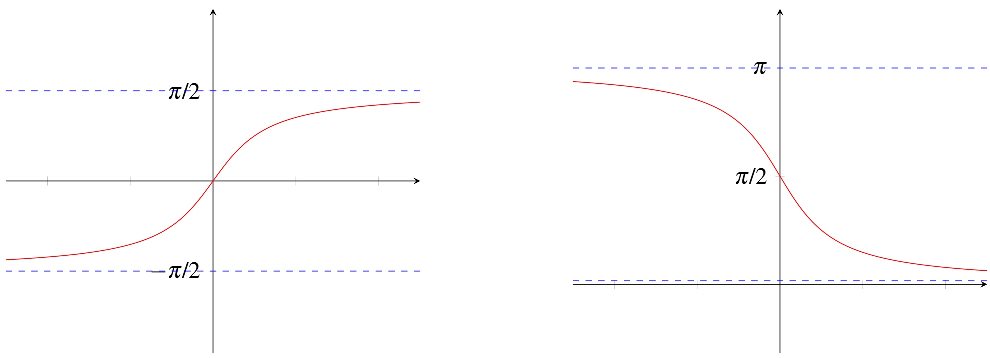
$$f^{-1}(x) = \operatorname{atan} x : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

za katero velja

$$\tan(\operatorname{atan} x) = x, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{atan}(\tan x) = x, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Na levi strani Slike 3.10 vidimo graf glavne veje funkcije arkus tangens.



Slika 3.10: Grafa glavnih vej funkcij arkus tangens (levo) in arkus kotangens (desno).

Funkcija arkus kotangens

Naj bo $f(x) = \cot x$. Definicijsko območje skrčimo na $(0,\pi)$, kar nam definira glavno vejo funkcije arkus kotangens. Tedaj obstaja

$$f^{-1}(x) = \operatorname{acot} x : \mathbb{R} \to (0,\pi),$$

za katero velja

$$\cot(\operatorname{acot} x) = x, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{acot}(\cot x) = x, \forall x \in (0,\pi).$$

Na desni strani Slike 3.10 vidimo graf veje funkcije arkus kotangens.

Izpeljimo še zvezo med obema funkcijama. Naj bo $x \in \mathbb{R}$ in $y = \operatorname{atan} x$. Tedaj je

$$x = \tan y = \cot\left(\frac{\pi}{2} - y\right).$$

Torej je

$$\frac{\pi}{2} - y = \operatorname{acot} x$$

oziroma

$$\operatorname{atan} x + \operatorname{acot} x = \frac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tudi pri funkcijah arkus tangens in arkus kotangens sta ponekod v uporabi stari oznaki, ki sta arctg oziroma arcctg, ter arctan oziroma arccot.

d) *Eksponentna funkcija*
Eksponentna funkcija je oblike

$$f(x) = a^x, a > 0.$$

V eksponentni funkciji nastopa neodvisna spremenljivka x v eksponentu. Ker je $1^x = 1$ za vsak x, naj bo osnova $a \neq 1$. Eksponentna funkcija je povsod definirana, torej je $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$, in je povsod pozitivna. To tudi pomeni, da je $Z_f = \mathbb{R}^+$, in zato funkcija f nima ničel. Obravnavamo jo lahko kot

$$a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+.$$

Za $f(x) = a^x$ velja

$$f(x+y) = f(x)\, f(y),$$

saj je

$$\begin{aligned} f(x+y) &= a^{x+y} \\ &= a^x a^y \\ &= f(x)\, f(y). \end{aligned}$$

Za $a > 1$ je $f(x) = a^x$ strogo naraščajoča funkcija, saj za vsak x_1, x_2 velja:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 \quad &\Rightarrow \quad a^{x_1} < a^{x_2} \\ &\Leftrightarrow \quad 1 < \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} \\ &\Leftrightarrow \quad 1 < a^{x_2 - x_1}. \end{aligned}$$

Ker je $x_2 - x_1 > 0$ in $a > 1$ je to res za vsak $x_1 < x_2$.

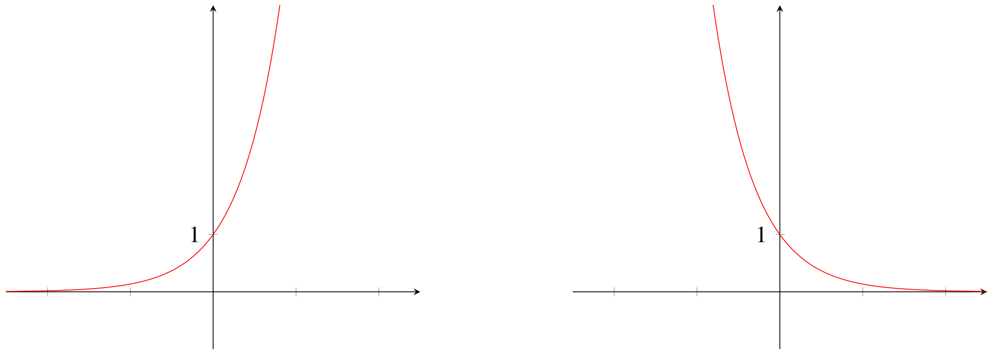
Na levi strani Slike 3.11 vidimo graf funkcije $f(x) = a^x$ za $a > 1$.

Za $a < 1$ je $f(x) = a^x$ strogo padajoča funkcija, saj za vsak x_1, x_2 velja:

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad a^{x_1} > a^{x_2},$$

kar pokažemo na analogen način kot za $a > 1$.

Na desni strani Slike 3.11 vidimo graf funkcije $f(x) = a^x$ za $a < 1$. Monotonost eksponentne funkcije se enostavneje preveri z uporabo odvoda, kar bomo spoznali v naslednjem poglavju. Ker je eksponentna funkcija strogo monotona, je injektivna.



Slika 3.11: Graf eksponentne funkcije a^x za $a > 1$ (levo) in $a < 1$(desno).

Zaradi nekaterih zakonov naravne rasti je zelo pomembna osnova število e oziroma eksponentni funkciji e^x in e^{-x}. Število e bomo spoznali pri razdelku o zaporedjih, zaenkrat povejmo le to, da je to iracionalno število, katerega približek je $2,71828\ldots$

■ **Zgled 3.15** Skicirajmo grafa funkcij e^x in e^{-x}.

Grafa obeh funkcij vidimo na Sliki 3.11.

■

e) *Logaritemska funkcija*
Naj bo f eksponentna funkcija, torej

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\, f(x) = a^x,\, a > 0, a \neq 1\,.$$

To je bijektivna funkcija, zato obstaja njej obratna funkcija $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Imenujemo jo *logaritemska funkcija* in pišemo

$$f^{-1}(x) = \log_a x\,.$$

(Beremo: logaritem z osnovo a od števila x.)
Ker sta eksponentna in logaritemska funkcija obratni, velja

$$f(f^{-1}(x)) = a^{\log_a x} = x,\, \forall x \in \mathbb{R}^+$$

in

$$f^{-1}(f(x)) = \log_a a^x = x,\, \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Imamo torej zvezo

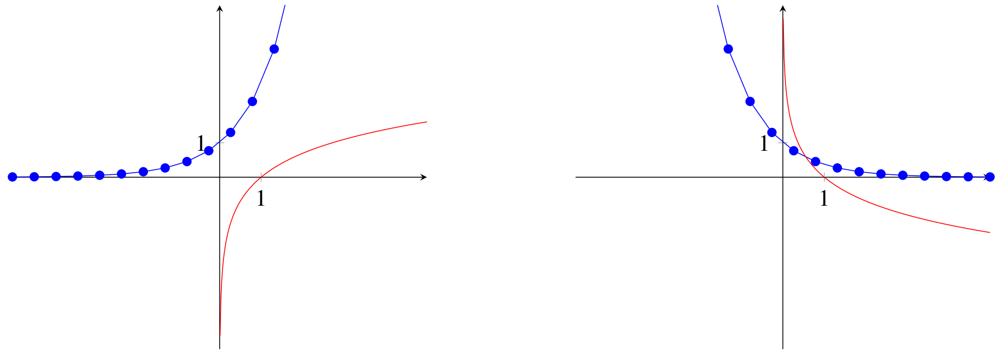
$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x\,.$$

Logaritemska funkcija ima ničlo v točki 1, saj velja

$$0 = \log_a x \Leftrightarrow a^0 = 1 = x\,.$$

Graf logaritemske funkcije dobimo iz grafa eksponentne funkcije z zrcaljenjem preko premice $y = x$, kar vidimo na Sliki 3.12, kjer je z rdečo barvo narisan graf logaritemske funkcije in z modro graf ustrezne eksponentne funkcije.

Ob upoštevanju injektivnosti eksponentne funkcije izpeljimo tri pomembne lastnosti logaritma:



Slika 3.12: Graf logaritemske funkcije za $a > 1$ (levo) in $a < 1$ (desno); z modro barvo je označena obratna tj. eksponentna funkcija.

(1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \forall x, y > 0$
Izpeljava:

$$\begin{aligned} a^{\log_a(xy)} &= xy \\ &= a^{\log_a x} a^{\log_a y} \\ &= a^{\log_a x + \log_a y}. \end{aligned}$$

(2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, quad \forall x, y > 0$
Izpeljava:

$$\begin{aligned} a^{\log_a \frac{x}{y}} &= \frac{x}{y} \\ &= \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} \\ &= a^{\log_a x - \log_a y}. \end{aligned}$$

(3) $\log_a x^y = y \log_a x, \quad \forall x > 0, \forall y \in \mathbb{R}$
Izpeljava:

$$\begin{aligned} a^{\log_a x^y} &= x^y \\ &= (a^{\log_a x})^y \\ &= a^{(\log_a x) y} \\ &= a^{y \log_a x}. \end{aligned}$$

Kadar je osnova enaka številu e, govorimo o *naravnem logaritmu* in pišemo

$$\log_e x = \ln x.$$

Na Sliki 3.12 vidimo graf te funkcije.

f) *Hiperbolične funkcije*
Definirajmo še *hiperbolični funkciji* kosinus hiperbolikus in sinus hiperbolikus, ki sicer nista elementarni funkciji:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \ldots \quad \text{kosinus hiperbolikus},$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \ldots \quad \text{sinus hiperbolikus}.$$

Opazimo, da je prva funkcija soda, druga pa liha. Med njima veljajo naslednje zveze:

(1) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}\frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^y - e^{-y}}{2}\frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
&= \frac{1}{4}(2e^{x+y} - 2e^{-x-y}) \\
&= \operatorname{sh}(x+y).
\end{aligned}$$

(2) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$

Pokažemo podobno kot (1).

(3) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

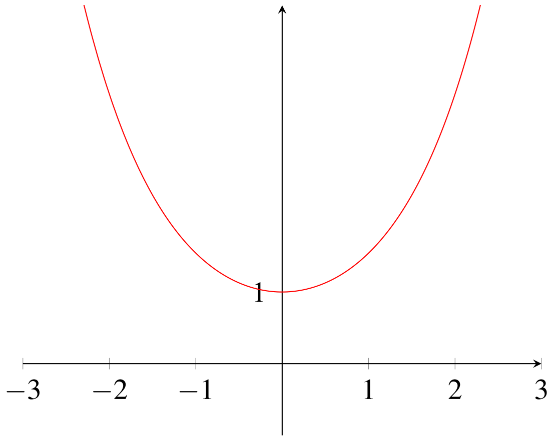
$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Na Sliki 3.13 vidimo graf funkcije kosinus hiperbolikus in na 3.14 vidimo graf funkcije sinus hiperbolikus.

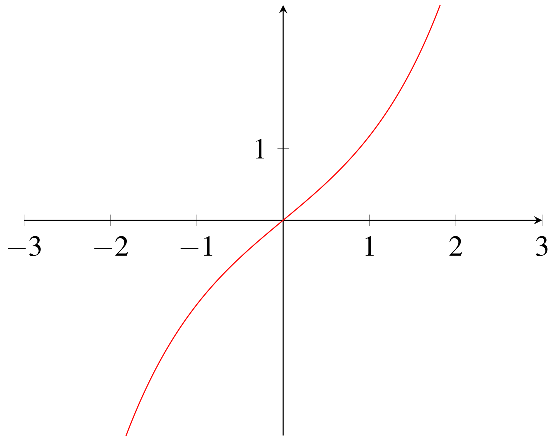
3.3 Limita in zveznost funkcije

Limita funkcije

Za začetek poglejmo funkciji $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ in $g(x) = x - 1$. Na prvi pogled sta funkciji enaki, ker se predpis funkcije f okrajša v predpis funkcije g, vendar je treba biti pazljiv, saj funkcija f ni definirana v točki -1, medtem ko s funkcijo g v tej točki ni težav, saj je $g(-1) = -2$. Ampak tudi za funkcijo f velja, da ko gredo x-si proti -1 z obeh strani, gredo funkcijske vrednosti $f(x)$ proti -2, tako kot to velja za funkcijo g. Opaženi koncept dogajanja s funkcijo f opišemo z limito funkcije.



Slika 3.13: Graf funkcije kosinus hiperbolikus.



Slika 3.14: Graf funkcije sinus hiperbolikus.

Definicija 3.3.1 Naj bo $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$. Število L je *limita funkcije* f v točki a, če velja naslednji sklep:

”Za vsako pozitivno število ε obstaja tako pozitivno število δ, da iz $x \in \mathscr{D}_f$, $x \neq a$ in $|x-a| < \delta$, sledi$|f(x) - L| < \varepsilon$.”

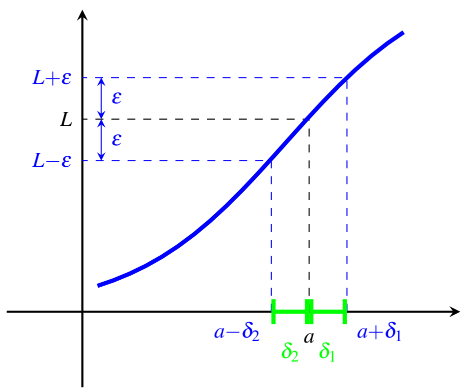
Pišemo

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{ali} \quad f(x) \stackrel{x \to a}{\longrightarrow} L\,.$$

Z logičnimi operatorji lahko definicijo limite zapišemo v obliki

$$L = \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathscr{D}_f \setminus \{a\} : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\,.$$

Slika 3.15 ponazarja definicijo limite funkcije v točki a. Za okolico δ izberemo manjšo od obeh vrednosti δ_1 in δ_2.



Slika 3.15: Limita v točki a.

Nekateri zanimivi primeri so:

- f ni definirana v točki a in ima limito L,

- f je definirana v točki a in ima limito L, ampak $f(a) \neq L$,
- f je definirana v točki a in ima limito L ter $f(a) = L$,
- f nima limite L, ima pa limito, ko se bližamo z desne oziroma leve strani proti točki a.

Včasih obstaja limita funkcije v točki a samo na eni strani in v tem primeru govorimo o levi in desni limiti.

Definicija 3.3.2 Funkcija $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ ima v a *desno limito*, L^+, če velja:
"Za vsako pozitivno število ε obstaja tako pozitivno število δ, da za vsak $x \in (a, a+\delta) \cap \mathscr{D}_f$ velja $|f(x) - L^+| < \varepsilon$."

Krajše:

$$L^+ = \lim_{x \downarrow a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (a, a+\delta) \cap \mathscr{D}_f : |f(x) - L^+| < \varepsilon .$$

Za desno limito se uporablja tudi zapis

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) .$$

Podobno definiramo *levo limito*.

Definicija 3.3.3 Funkcija f ima v a *levo limito*, L^-, če velja:

$$L^- = \lim_{x \uparrow a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (a-\delta, a) \cap \mathscr{D}_f : |f(x) - L^-| < \varepsilon .$$

Za levo limito se lahko uporablja zapis

$$\lim_{x \uparrow a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) .$$

Iz definicije desne in leve limite v točki sledi, da obstaja limita L natanko tedaj, ko sta leva limita L^- in desna limita L^+ enaki:

$$L = L^+ = L^- \Leftrightarrow L = \lim_{x \to a} f(x) .$$

■ **Zgled 3.16** Poiščimo levo in desno limito funkcije $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ v točki 0.

Premislimo, kaj se dogaja s funcijo f, ko se bližamo točki 0 enkrat s pozitivne strani in drugič z negativne. Ko se bližamo z desne strani, gredo vrednosti izraza $\frac{1}{x}$ proti pozitivni neskončnosti, saj gre imenovalec proti vedno manjšim pozitivnim številom. Izraz $e^{\frac{1}{x}}$ zato narašča v neskončnost, kar pomeni, da je

$$L^+ = \lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0 .$$

V primeru leve limite gredo vrednosti izraza $\frac{1}{x}$ proti negativni neskončnosti, zato gre $e^{\frac{1}{x}}$ proti 0 in leva limita je

$$L^- = \lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 1 .$$

■

Računanje z limitami bomo opisali v naslednjih izrekih.

Izrek 3.3.1 Naj bo $\lim_{x\to a} f(x) = A$ in $\lim_{x\to a} g(x) = B$, $A, B \in RR$. Tedaj velja:

(i) $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = A+B$,

(ii) $\lim_{x\to a}(cf(x)) = cA$, $c \in \mathbb{R}$.

Dokaz.

(i) Pokazati moramo, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da bo za vsak $x \in \mathscr{D}_f \setminus \{a\}$ veljalo, če je $|x-a| < \delta$, tedaj je $|(f(x)+g(x))-(A+B)| < \varepsilon$. Ker je $\lim_{x\to a} f(x) = A$ in $\lim_{x\to a} g(x) = B$, za vsak $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ obstajata pozitivni števili δ_1, δ_2 taki, da

$$|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon_1\,,$$

$$|x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)-B| < \varepsilon_2\,.$$

Tedaj velja

$$\begin{aligned} |(f(x)+g(x))-(A+B)| &= |(f(x)-A)+(g(x)-B)| \\ &\leq |f(x)-A|+|g(x)-B| \\ &< \varepsilon_1+\varepsilon_2\,. \end{aligned}$$

Ker sta ε_1 in ε_2 poljubna, naj bosta oba enaka $\frac{\varepsilon}{2}$. Sledi, da za vsak $x \in \mathscr{D}_f \setminus \{a\}$ za katerega je $|x-a| < \delta$, kjer je $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, velja

$$|(f(x)+g(x))-(A+B)| < \varepsilon_1+\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

s čimer smo zaključili dokaz.

(ii) V tem primeru moramo pokazati, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da bo za vsak $x \in \mathscr{D}_f \setminus \{a\}$ veljalo, če je $|x-a| < \delta$, tedaj je $|cf(x)-cA| < \varepsilon$. Podobno kot prej, iz definicije limite funkcije f sledi, da za vsak $\varepsilon_1 > 0$ obstaja $\delta > 0$ tak, da za vsak $x \in \mathscr{D}_f \setminus \{a\}$ iz $|x-a| < \delta$ sledi $|f(x)-A| < \varepsilon_1$. Z upoštevanjem lastnosti absolutne vrednosti in dejstva, da lahko ε_1 poljubno izberemo, dobimo

$$|cf(x)-cA| = |c(f(x)-A)| = |c||f(x)-A| < |c|\varepsilon_1 = |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon,\ c \neq 0\,.$$

Če je $c = 0$, je dokaz trivialen.

∎

Posledica 3.3.2 Naj bo $\lim_{x\to a} f(x) = A$ in $\lim_{x\to a} g(x) = B$, $A, B \in RR$. Tedaj velja:

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = A-B\,.$$

Dokaz. Z upoštevanjem Izreka 3.3.1 preprosto izpeljemo

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to a}(f(x)+(-g(x))) = \lim_{x\to a} f(x)+(-1)\lim_{x\to a} g(x) = A-B\,.$$

∎

Izrek 3.3.3 Naj bo $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ in $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Tedaj velja:

(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = AB$,

(ii) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, če je $B \neq 0$.

Dokaz.

(i) Lastnost produkta bi lahko dokazali podobno, kot smo to naredili v primeru vsote v Izreku 3.3.1, a bomo ubrali elegantnejšo pot. Pokažimo najprej, da ob predpostavkah izreka velja $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-A)(g(x)-B) = 0$ oziroma natančneje, za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$ tak, da za vsak $x \in \mathscr{D}_f \setminus \{a\}$ iz $|x-a| < \delta$ sledi $|(f(x)-A)(g(x)-B)| < \varepsilon$. Ker je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ in $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, za vsak $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ obstajata pozitivni števili δ_1, δ_2 taki, da velja:

$$|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon_1\,,$$

$$|x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)-B| < \varepsilon_2\,.$$

Zaradi lastnosti absolutne vrednosti dobimo

$$|(f(x)-A)(g(x)-B)| = |f(x)-A||g(x)-B| < \varepsilon_1\varepsilon_2\,.$$

Ker lahko okolice poljubno izbiramo, naj bosta zdaj ε_1 in ε_2 oba enaka $\sqrt{\varepsilon}$. Sledi, da za vsak $x \in \mathscr{D}_f \setminus \{a\}$ velja, če je $|x-a| < \delta$, kjer je $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, velja

$$|(f(x)-A)(g(x)-B)| < \varepsilon_1\varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon\,,$$

s čimer smo pokazali $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-A)(g(x)-B) = 0$.
Nadaljujmo z dokazom izreka. Iz

$$\lim_{x\to a}(f(x)-A)(g(x)-B) = \lim_{x\to a} f(x)g(x) - \lim_{x\to a} Ag(x) - \lim_{x\to a} Bf(x) + \lim_{x\to a} AB$$

sledi, da je

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x)g(x) &= \lim_{x\to a}(f(x)-A)(g(x)-B) + A\lim_{x\to a} g(x) + B\lim_{x\to a} f(x) - AB \\
&= 0 + AB + AB - AB \\
&= AB\,,
\end{aligned}$$

s čimer smo pokazali prvo točko.

(ii) Pokažimo najprej, da je

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$$

oziroma natančneje, za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$ tak, da za vsak $x \in \mathscr{D}_f \setminus \{a\}$ iz $|x-a| < \delta$ sledi $|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}| < \varepsilon$. Iz predpostavke $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ sledi, da za vsak $\varepsilon_1 > 0$ obstaja $\delta_1 > 0$ tak, da za vsak $x \in \mathscr{D}_f \setminus \{a\}$ iz $|x-a| < \delta_1$ sledi $|g(x)-B| < \varepsilon_1$. Kot že vemo, lahko okolice poljubno izbiramo, zato naj bo v tem primeru $\varepsilon_1 = \frac{|B|}{2}$. Z upoštevanjem ene od lastnosti absolutne vrednosti velja

$$||g(x)| - |B|| \leq |g(x)| - |B| < \varepsilon_1 = \frac{|B|}{2}\,,$$

oziroma

$$\begin{array}{rcccl} -\frac{|B|}{2} & < & |g(x)|-|B| & < & \frac{|B|}{2} \qquad /+|B| \\ \frac{|B|}{2} & < & |g(x)| & < & \frac{3|B|}{2} \qquad /\text{obratne vrednosti} \\ \frac{2}{|B|} & > & \frac{1}{|g(x)|} & > & \frac{2}{3|B|}\,. \end{array}$$

V nadaljevanju bomo potrebovali samo prvo neenakost. Na tem mestu še enkrat uporabimo predpostavko $\lim_{x\to a} g(x) = B$ oziroma za vsak $\varepsilon_2 > 0$ obstaja $\delta_2 > 0$ tak, da za vsak $x \in \mathscr{D}_f \setminus \{a\}$ iz $|x-a| < \delta_2$ sledi $|B - g(x)| < \varepsilon_2$. Tedaj velja

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|B-g(x)|}{|B||g(x)|} = \frac{1}{|B|}\frac{1}{|g(x)|}|B-g(x)| < \frac{2}{|B|^2}\varepsilon_2\,.$$

Tudi v tem primeru ustrezno izberemo okolico ε_2 in sicer naj bo $\varepsilon_2 = \varepsilon\frac{|B|^2}{2}$. Tedaj za vsak $x \in \mathscr{D}_f \setminus \{a\}$ iz $|x-a| < \delta$, kjer je $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, sledi $|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}| < \varepsilon$.
Dokaz zaključimo z uporabo točke (i):

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x)\frac{1}{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)} = A\frac{1}{B}\,.$$

∎

Definicija 3.3.4 Funkcija $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ ima limito $L \in \mathbb{R}$, ko gre x proti neskončnosti, če za vsako pozitivno število ε obstaja tak $M > 0$, da $|f(x) - L| < \varepsilon$ velja za vsak $x > M$ iz $\mathscr{D}_f$.

Krajše:

$$L = \lim_{x\to\infty} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall x \in \mathscr{D}_f : x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\,.$$

Podobno definiramo limito, ko gre x proti negativni neskončnosti.

Definicija 3.3.5 Funkcija $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ ima limito $L \in \mathbb{R}$, ko gre x proti negativni neskončnosti, če za vsako pozitivno število ε obstaja tak $m < 0$, da $|f(x) - L| < \varepsilon$ velja za vsak $x < m$ iz $\mathscr{D}_f$.

Krajše:

$$L = \lim_{x\to-\infty} f(x) \leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists m < 0, \forall x \in \mathscr{D}_f : x < m \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\,.$$

Na Sliki 3.16 vidimo primer takšnih limit.

■ **Zgled 3.17** Izračunajmo $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}$.

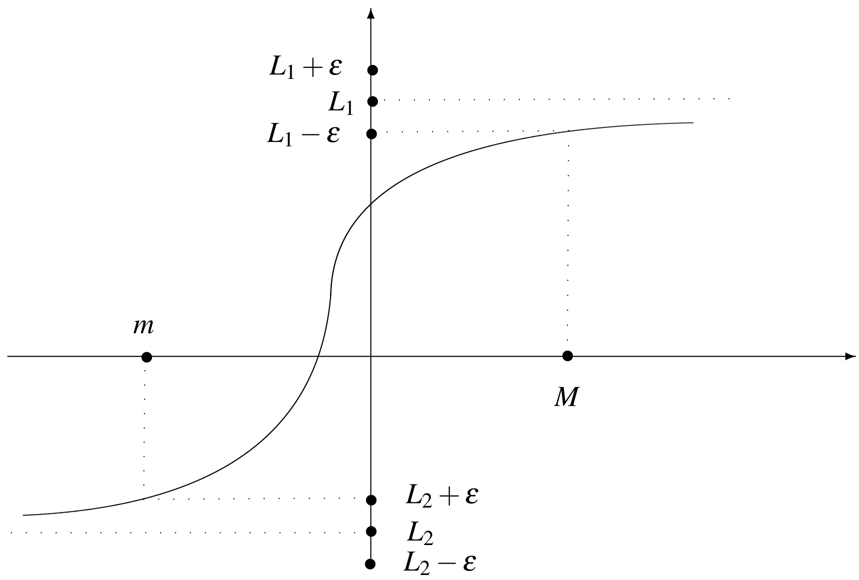
Limita je enaka 0, ker je števec konstanten, imenovalec pa narašča v neskončnost.

■

Op Včasih je primernejši zapis limite funkcije f v točki a preko oddaljenosti $h = x - a$ od a:

$$L = \lim_{h\to 0} f(a+h) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall h : |h| < \delta \Rightarrow |f(a+h) - L| < \varepsilon$$

ZVEZNOST FUNKCIJE



Slika 3.16: Limita funkcije, ko gre x proti neskončnostima.

Definicija 3.3.6 Naj bo funkcija $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$. Funkcija f je *zvezna v* $a \in \mathscr{D}_f$, če velja:
"Za vsako pozitivno število ε obstaja tako pozitivno število δ, da iz $x \in \mathscr{D}_f$ in $|x-a| < \delta$ sledi $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$."

Krajši zapis za zveznost funkcije f v točki a:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathscr{D}_f : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\,.$$

Definicija 3.3.7 Funkcija f je *zvezna na podmnožici* $A \subseteq \mathbb{R}$, če je defninirana in zvezna v vsaki točki iz A.

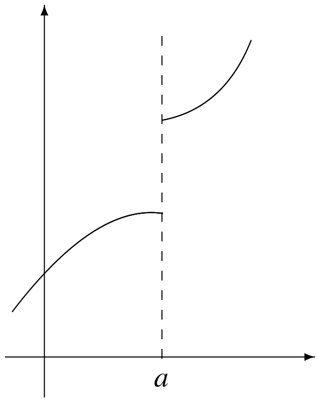
Na Sliki 3.17 vidimo primera obeh tipov funkcij.

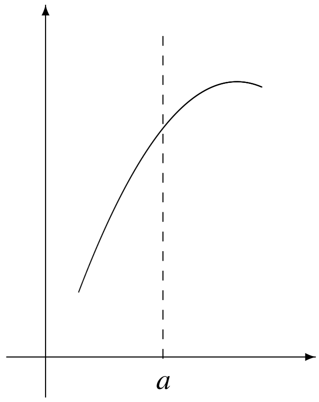
Potrebni pogoji za zveznost funkcije f v točki a so:

- f je definirana v točki a,
- f ima limito v točki a,
- limita v točki a je enaka funkcijski vrednosti $f(a)$.

Spodnje situacije vodijo v nezveznost funkcije f v točki a:

- funkcija f v točki a ni definirana.
- f v točki a nima limite,
- f ima limito v točki a, a ni enaka $f(a)$.





Slika 3.17: a) V točki a nezvezna funkcija in b) zvezna funkcija na $\mathbb{R}$.

Izrek 3.3.4 Funkcija f je zvezna v točki $a \in \mathscr{D}_f$ natanko tedaj, ko je

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) .$$

Dokaz. Trditev izreka je v obliki ekvivalence, ki jo dokažemo z implikacijama v obe smeri.

($\Rightarrow$) Ker je f zvezna v točki a, za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da $\forall x \in \mathscr{D}_f$ velja:

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon ,$$

kar pomeni, $f(a)$ zadošča pogojem za limito funkcije f v točki a.

($\Leftarrow$) Ker je

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) ,$$

obstaja za vsak $\varepsilon > 0$ tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in \mathscr{D}_f \setminus \{a\}$ velja:

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon .$$

Če je $x = a$, tedaj je

$$|f(x) - f(a)| = |f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon ,$$

s čimer je dokaz zaključen.

∎

Izrek 3.3.5 Če sta funkciji f in g zvezni v točki a in je $c \in \mathbb{R}$, tedaj so v a zvezne tudi funkcije

(i) $f \pm g$,

(ii) $c \cdot f$,

(iii) $f \cdot g$,

(iv) $\dfrac{f}{g}$, če je $g(a) \neq 0$.

Dokaz. Dokaz vseh lastnosti sledi neposredno iz Izreka 3.3.1, Posledice 3.3.2 ter Izreka 3.3.3 in ga naj zahtevnejši bralec za vajo naredi sam. Za ilustracijo bomo naredili dokaz za primer vsote. Funkcija $f+g$ je zvezna v točki a natanko tedaj, ko je $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = f(a)+g(a)$. Iz zveznosti funkcij f in g v točki a in Izreka 3.3.1 sledi

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) \underset{\text{Izrek 3.3.1}}{=} \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) \underset{\text{zveznost}}{=} f(a)+g(a)\,.$$

∎

Naslednji izrek podaja zelo pomembno lastnost limite kompozituma zveznih funkcij, ki jo bomo potrebovali v nadaljevanju.

Izrek 3.3.6 Naj bo f zvezna v točki b in $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$. Potem je

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)) = f(b)\,.$$

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$. Pokazati moramo, da obstaja $\delta > 0$ tak, da za vsak $x \in \mathscr{D}_f$ iz $|x-a| < \delta$ sledi:

$$|f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon\,.$$

Iz zveznosti funkcije f v točki b sledi, da za dani ε obstaja $\delta_1 > 0$ tak, da za vsak y velja, če $|y-b| < \delta_1$, tedaj je

$$|f(y) - f(b)| < \varepsilon\,.$$

Ker je $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, mora za vsak $\varepsilon_1 > 0$, torej tudi za $\varepsilon_1 := \delta_1$, obstajati $\delta > 0$ tak, da bo za vsak $x \in \mathscr{D}_f : |x-a| < \delta$ veljalo

$$|g(x) - b| < \delta_1\,.$$

Ker je $g(x) = y$, smo dokaz zaključili. ∎

Nekatere pomembnejše limite

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

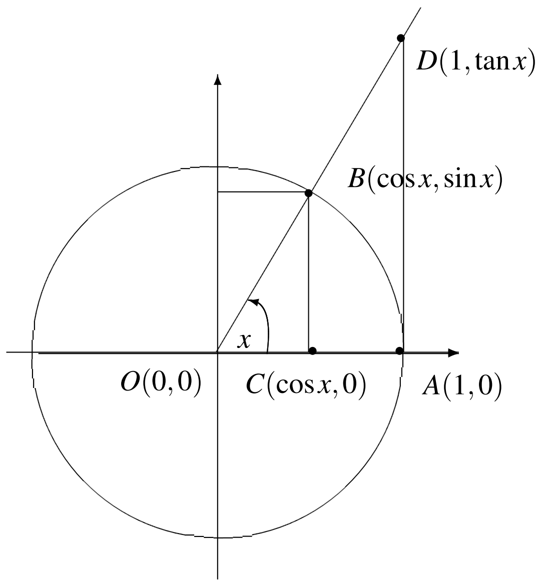
Izberimo $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ in naj bo $A(1,0)$, $B(\cos x, \sin x)$, $C(\cos x, 0)$, $D(1, \tan x)$ ter $O(0,0)$ točke, kot je to razvidno s Slike 3.18. Nadalje naj bo S_1 ploščina trikotnika BOC, S_2 ploščina trikotnika AOD in S ploščina krožnega izseka AOB. Poudarimo, da je ploščina krožnega izseka s polmerom r enaka $r^2\frac{x}{2}$. Tedaj velja:

$$\begin{array}{ccccccc}
S_1 & < & S & < & S_2 & \\
\frac{1}{2}\sin x\cos x & < & \frac{x}{2} & < & \frac{1}{2}\tan x & /\cdot 2/:\sin x\\
\cos x & < & \dfrac{x}{\sin x} & < & \dfrac{1}{\cos x} & \\
\dfrac{1}{\cos x} & > & \dfrac{\sin x}{x} & > & \cos x & /\lim_{x\downarrow 0}\\
\lim\limits_{x\downarrow 0}\dfrac{1}{\cos x} & \le & \lim\limits_{x\downarrow 0}\dfrac{\sin x}{x} & \le & \lim\limits_{x\downarrow 0}\cos x & \\
1 & \le & \lim\limits_{x\downarrow 0}\dfrac{\sin x}{x} & \le & 1 &
\end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\downarrow 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Podobno bi lahko pokazali za levo limito, pri čemer je $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$.



Slika 3.18: Izpeljava limite $\lim\limits_{x\downarrow 0}\dfrac{\sin x}{x}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$

Pri zaporedjih bomo spoznali število e, ki je definirano kot limita zaporedja

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{e} \doteq 2.71828\ldots.$$

S pomočjo limite zaporedja bomo pokazali podobno limito v primeru, ko je x pozitivno realno število.
Naj bo za pozitivno realno število x naravno število n celi del od x. Tedaj je $n \leq x < n+1$ in velja naslednje:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{x} \leq \tfrac{1}{n} \quad &\Rightarrow \quad (1+\tfrac{1}{x})^x \leq (1+\tfrac{1}{n})^x < (1+\tfrac{1}{n})^{n+1} = (1+\tfrac{1}{n})^n(1+\tfrac{1}{n}) \\
\tfrac{1}{x} > \tfrac{1}{n+1} \quad &\Rightarrow \quad (1+\tfrac{1}{x})^x > (1+\tfrac{1}{n+1})^x \leq (1+\tfrac{1}{n+1})^n = \\
& \qquad (1+\tfrac{1}{n+1})^{n+1}\tfrac{1}{(1+\frac{1}{n+1})} = (1+\tfrac{1}{n+1})^{n+1}\tfrac{n+1}{n+2}
\end{aligned}$$

Zato velja

$$\begin{array}{ccccc}
(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\frac{n+1}{n+2} & < & (1+\frac{1}{x})^x & < & (1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n}) \\
\downarrow n \to \infty & & & & \downarrow n \to \infty \\
\mathrm{e}\cdot 1 & \leq & \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x & \leq & \mathrm{e}\cdot 1
\end{array}$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \mathrm{e}$$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Če v (ii) pišemo namesto x spremenljivko y, dobimo $\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = \mathrm{e}$. Vpeljemo novo spremenljivko $y = \frac{1}{x}$, tedaj gre x proti 0 in dobimo limito (iii).

(iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a}$

Izračunajmo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e = \frac{\log_e e}{\log_e a} = \frac{1}{\ln a}\,.$$

(v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

V (iv) upoštevamo, da je logaritemska osnova enaka e.

(vi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$

Vpeljemo $u = a^x - 1$ in dobimo

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{u\to 0}\frac{u}{\log_a(u+1)} = \lim_{u\to 0}\left(\frac{\log_a(u+1)}{u}\right)^{-1} = \ln a\,.$$

ZVEZNE FUNKCIJE NA ZAPRTEM INTERVALU

V zadnjem razdelku smo spoznali definicijo zveznosti funkcije, sedaj pa nas bodo zanimale lastnosti funkcij, ki so zvezne na zaprtem intervalu. Izkaže se, da imajo le-te veliko lepih lastnosti, ki so pomembne pri praktično vseh aplikacijah diferencialnega računa.

Zanimajo nas funkcije na zaprtih intervalih

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}\,.$$

S $\mathscr{C}[a,b]$ označujemo množico zveznih funkcij na zaprtem intervalu $[a,b]$.

V zvezi z zveznostjo funkcij na zaprtem intervalu velja nekaj pomembnih izrekov.

Izrek 3.3.7 Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija in $f(a) \cdot f(b) < 0$. Tedaj obstaja točka $c \in (a,b)$ takšna, da je $f(c) = 0$.

Dokaz. Naj bo $f(a) < 0$ in $f(b) > 0$ ter definirajmo množico

$$A = \{x \in [a,b] \,|\, f(x) < 0\}\,.$$

Množica A ni prazna ($a \in A$) in je navzgor omejena ($\forall x \in A : x \leq b$), zato obstaja njena natančna zgornja meja, ki jo označimo s c, $c = \sup A$. Pokažimo, da za tako definiran c velja $f(c) = 0$. Predpostavimo nasprotno, naj bo torej $f(c) \neq 0$. Iz definicije zveznosti funkcije f v točki c sledi:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon\,.$$

Ker je ε poljuben, naj bo $\varepsilon = \frac{1}{2}|f(c)|$. Ločimo dve možnosti:

- $f(c) < 0$:
  V tem primeru je $c \neq b$. Iz definicije zveznosti sklepamo da za vsak $x : |x-c| < \delta$ velja
  $$\begin{array}{rcccl} & & |f(x)-f(c)| & < & \frac{1}{2}|f(c)| \\ -\frac{1}{2}|f(c)| & < & f(x)-f(c) & < & \frac{1}{2}|f(c)| \\ \frac{1}{2}f(c) & < & f(x)-f(c) & < & -\frac{1}{2}f(c) \\ \frac{3}{2}f(c) & < & f(x) & < & \frac{1}{2}f(c) < 0 \end{array}$$
  Ker za vsak $x : |x-c| < \delta$ velja $f(x) < 0$, obstaja $x \in A$ tak, da je $c < x$ in seveda $f(x) < 0$, kar je v protislovju s tem, da je $c = \sup A$.

- $f(c) > 0$:
  V tem primeru je $c \neq a$. Iz definicije zveznosti sklepamo da za vsak $x : |x-c| < \delta$ velja
  $$\begin{array}{rcccl} & & |f(x)-f(c)| & < & \frac{1}{2}|f(c)| \\ -\frac{1}{2}|f(c)| & < & f(x)-f(c) & < & \frac{1}{2}|f(c)| \\ -\frac{1}{2}f(c) & < & f(x)-f(c) & < & \frac{1}{2}f(c) \\ 0 < \frac{1}{2}f(c) & < & f(x) & < & \frac{3}{2}f(c) \end{array}$$
  Ker za vsak $x : |x-c| < \delta$ velja $f(x) > 0$, je za vse x-se iz intervala $(c-\delta, c)$ funkcijska vrednosti $f(x) > 0$, kar ponovno vodi v protislovje s tem, da je $c = \sup A$, saj bi v tem primeru moral biti $c - \delta$ supremum množice A.

Iz obeh možnosti sledi, da je $f(c) = 0$ in ker je $c \neq a, b$, je $c \in (a, b)$. Podobno dokažemo v primeru, ko je $f(a) > 0$ in $f(b) < 0$. ∎

■ Zgled 3.18 Preverimo Izrek 3.3.7 na primerih.

1. Naj bo $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ podana s predpisom $f(x) = -x^2 + 4$.

   Ker je $f(0) = 4 > 0$ in $f(4) = -12 < 0$, po Izreku 3.3.7 obstaja ničla funkcije f na $[0,4]$ in sicer je to točka $x = 2$.

2. Naj bo $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ; \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & ; \quad 0 < x \leq 1 \,. \end{cases}$$

   Ker funcija f ni zvezna na $[-1,1]$, ne zadošča pogojem Izreka 3.3.7.

■

Naslednji izrek podaja zvezo med zveznostjo funkcije in omejenostjo. Sam dokaz zahteva poglobljeno znanje o zaporedjih, zato je zgolj informativno namenjen najzahtevnejšim bralcem.[1]

Izrek 3.3.8 Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Tedaj je funkcija f omejena.

■ Zgled 3.19 Preverimo Izrek 3.3.8 na primerih.

1. Naj bo $f : [-2,3] \to \mathbb{R}$ podana s predpisom $f(x) = x^2$.

   Vidimo, da je f zvezna in po Izreku 3.3.8 omejena. Ni težko opaziti, da je $\sup f(x) = f(3)$ in $\inf f(x) = f(0)$.

2. Naj bo $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x = 0 \\ \frac{1}{x} & ; \quad \text{sicer} \,. \end{cases}$$

   Vidimo, da f ni omejena in po Izreku 3.3.8 zato ni zvezna.

3. Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *Dirichletova funkcija*, ki je definirana kot

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \,. \end{cases}$$

   Dirichletova funkcija ni zvezna na $[a,b]$ in ne moremo uporabiti Izreka 3.3.8, je pa omejena.

■

[1] *Dokaz Izreka 3.3.8. Recimo, da $f \in \mathscr{C}[a,b]$ ni navzgor omejena. Tedaj za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja tak $x_n \in [a,b]$, da je $n < f(x_n)$. Obstaja torej zaporedje (x_n), $x_n \in [a,b]$, ki je očitno omejeno in zato vsebuje konvergentno podzaporedje (x_{n_k}), ki konvergira k točki $c \in [a,b]$. Pridruženo zaporedje $(f(x_{n_k}))$ potemtakem divergira v neskončnost, kar je v nasprotju z zveznostjo funkcije f na $[a,b]$. Podobno pokažemo, da je f navzdol omejena.*

Nadaljujmo s pojmom omejenosti funkcij, ki so zvezne na zaprtem intervalu in sicer nas bo zanimal obstoj minimuma in maksimuma takšne funkcije.

Zgled 3.20 Če obstajata, poiščimo minimum in maksimum funkcij.

1. Naj bo $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ podana s predpisom $f(x)=x^2$.

   Funkcija f doseže maksimum v točki 2 in sicer je $\max f(x)=4$, minimum pa v točki 1 in velja $\min f(x)=1$.

2. Naj bo $f:[0,\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$ podana s predpisom $f(x)=\tan x$.

   Funkcija f doseže minimum v točki 0 in sicer je $\min f(x)=0$, maksimuma pa nima.

3. Naj bo $f:\mathbb{R}^+\to(0,\frac{\pi}{2})$ podana s predpisom $f(x)=\operatorname{atan} x$.

   Funkcija f je omejena, a nima maksimuma niti minimuma.

■

Na Zgledu 3.20 smo videli, da je od treh primerov le zvezna funkcija na zaprtem intervalu dosegla minimum in maksimum.

Izrek 3.3.9 Naj bo $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ zvezna funkcija. Tedaj doseže funkcija f na intervalu $[a,b]$ minimum in maksimum.

Dokaz. Pokažimo obstoj maksimuma. Po Izreku 3.3.8 obstaja natančna zgornja meja M funkcije f. Pokažimo, da je $M=\max_{x\in[a,b]} f(x)$.

Ker je M supremum funkcije f, velja $M-f(x)\geq 0$ za vsak $x\in[a,b]$. Tam, kjer je $M-f(x)>0$, je kvocient $\frac{1}{M-f(x)}$ zvezna funkcija. Če funkcija f ne bi nikjer zavzela vrednosti M, bi bil ta kvocient povsod na $[a,b]$ zvezen in po Izreku 3.3.8 omejen. Tedaj bi $\exists A>0:$

$$\frac{1}{M-f(x)}\leq A,\ \forall x\in[a,b].$$

Od tod sledi

$$f(x)\leq M-\frac{1}{A}$$

in M ne bi bil supremum funkcije. Zato torej obstaja $c\in[a,b]:f(c)=M$.
Podobno pokažemo obstoj minimuma funkcije. ∎

Za konec dokažimo zadnji izrek v zvezi z zveznostjo funkcij na zaprtem intervalu.

Izrek 3.3.10 Naj bo $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ zvezna funkcija. Tedaj zavzame funkcija f vse vrednosti med minimumom in maksimumom.

Dokaz. Naj bo

$$m=\min_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{in} \quad M=\max_{x\in[a,b]} f(x)$$

ter $f(\alpha)=m$ in $f(\beta)=M$. Točki α in β obstajata zaradi Izreka 3.3.9. Ločimo dve možnosti:

(i) Če je $m=M$, tedaj je $m=M=f(x)$ za vsak $x\in[a,b]$ in ni kaj dokazovati.

(ii) Naj bo $m < M$. Predpostavimo, da je $\alpha < \beta$. Definirajmo novo funkcijo $\Psi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$\Psi(x) = f(x) - C\,,$$

kjer je $C \in (m, M)$. Trdimo, da obstaja tak $\varphi \in [a, b]$, da je $f(\varphi) = C$. Ker je f zvezna, je tudi nova funkcija Ψ zvezna za poljuben $C \in (m, M)$. Izračunajmo

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha) &= f(\alpha) - C = m - C < 0\,, \\ \Psi(\beta) &= f(\beta) - C = M - C > 0\,. \end{aligned}$$

Po Izreku 3.3.7 obstaja $\varphi \in (\alpha, \beta)$ tak, da je $\Psi(\varphi) = 0$ in zato $f(\varphi) - C = 0$.

■

Iz Izreka 3.3.10 sledi naslednja posledica.

Posledica 3.3.11 Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Tedaj je zaloga vrednosti funkcije f interval $[m, M]$, kjer je

$$m = \min_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{in} \quad M = \max_{x \in [a,b]} f(x)\,.$$

■

4. Zaporedja

Definirali bomo zaporedje, njegovo konvergenco in se osredotočili na nekatere lastnosti, kot sta monotonost in omejenost.

4.1 Limita zaporedja

Zaporedje v množici M je preslikava
$$a : \mathbb{N} \to M\,.$$
Množica M bo za nas množica realnih ali kompleksnih števil in tako govorimo o realnem ali kompleksnem zaporedju.

Po dogovoru pišemo funkcijsko vrednost $a(n) = a_n$ in jo imenujemo n-ti ali *splošni* člen zaporedja, n pa imenujemo *indeks* člena zaporedja. Namesto zapisa $a : \mathbb{N} \to M$ uporabljamo za zaporedje zapis $(a_n) = (a_1, a_2, \ldots)$.

■ **Zgled 4.1** Poglejmo nekaj primerov na različne načine podanih zaporedij.

1. $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, $(\frac{1}{n^2}) = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots)$
2. $a_n = a_{n-1} + d$, kjer sta $a_1, d \in \mathbb{R} \ldots$ aritmetično zaporedje
3. $a_n = a_{n-1}\,q$, kjer sta $a_1, q \in \mathbb{R} \ldots$ geometrijsko zaporedje
4. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_0 = F_1 = 1 \ldots$ Fibonaccijevo zaporedje
5. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $(a_n) = (-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$

■

Definicija 4.1.1 Naj bo $\varepsilon > 0$ poljubno število. Odprti interval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ imenujemo *ε-okolica* točke a.

■ **Zgled 4.2** Od katerega n naprej so vsi členi zaporedja $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ znotraj ε-okolice točke 0, če je $\varepsilon = \frac{1}{10}$ oziroma $\varepsilon = \frac{1}{100}$?

Rešujemo neenakost

$$\begin{aligned} |a_n - 0| &< \varepsilon \\ \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| &< \varepsilon \\ \frac{1}{n} &< \varepsilon \\ n &> \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Za $\varepsilon = \frac{1}{10}$ ležijo znotraj ε-okolice vsi členi od 10-ega naprej, za $\varepsilon = \frac{1}{100}$ pa od 100-tega naprej. ■

Definicija 4.1.2 Naj bo (a_n) zaporedje v M. Število $A \in M$ je *limita* zaporedja (a_n), $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, natanko tedaj, ko za vsako ε-okolico točke A obstaja tako naravno število n_0, da za vsako naravno število $n \geq n_0$ velja, da a_n leži znotraj ε-okolice točke A.

Krajši zapis:

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon .$$

Če obstaja limita A zaporedja (a_n), pravimo, da (a_n) konvergira k številu A oziroma zaporedje (a_n) je *konvergentno*, v nasprotnem je zaporedje (a_n) *divergentno*.

■ **Zgled 4.3** Dokažimo, da velja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 .$$

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| &< \varepsilon \Leftrightarrow \\ \left|\frac{1}{n}\right| &< \varepsilon \\ \frac{1}{n} &< \varepsilon \\ n &> \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Naj bo n_0 prvo naravno število večje od $\frac{1}{\varepsilon}$. Na primer, za $\varepsilon = \frac{1}{50}$, bi bil $n_0 = 51$, kar pomeni, da vsi členi od 50-ega naprej ležijo znotraj ε-okolice limite 0. ■

■ **Zgled 4.4** Pokažimo, da je zaporedje $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ konvergentno.

Členi zaporedja konvergirajo k limiti 1, kar pokažemo tako, da preverimo pogoj

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : \quad \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| &< \varepsilon \Leftrightarrow \\ \left|\frac{-1}{n+1}\right| &< \varepsilon \\ \frac{1}{n+1} &< \varepsilon \\ n+1 &> \frac{1}{\varepsilon} \\ n &> \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Naj bo n_0 prvo naravno število večje od $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$. Na primer, za $\varepsilon = \frac{1}{20}$, bi bil $n_0 = 20$, kar pomeni, da vsi členi od 19-ega naprej ležijo znotraj ε-okolice limite 1. ■

Op Če je A limita zaporedja (a_n), tedaj v poljubno majhni okolici točke A ležijo vsi členi zaporedja (a_n) od nekega člena a_{n_0} naprej.

■ **Zgled 4.5** Ali je $a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$ konvergentno zaporedje?

Ne, ker se sodi členi bližajo k 1, lihi pa k -1. ■

Definicija 4.1.3 Naj bo (a_n) zaporedje v M. Število $S \in M$ je *stekališče* zaporedja (a_n), če vsebuje vsaka poljubno majhna okolica števila S neskončno členov zaporedja (a_n).

Če je S stekališče zaporedja (a_n), tedaj je neenakost $|a_n - S| < \varepsilon$ izpolnjena za neskončno mnogo indeksov n.

Opazimo, da velja

$$\text{"limita} \Rightarrow \text{stekališče"},$$

medtem ko implikacija v obratno smer ne drži.

■ **Zgled 4.6** Poiščimo stekališča zaporedja $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{6}, \ldots)$

Stekališči sta 1 in 0. ■

Izrek 4.1.1 Če ima zaporedje več kot eno stekališče, tedaj je divergentno.

Dokaz. Naj bosta S_1 in S_2 različni stekališči zaporedja (a_n). Tedaj sta edina možna kandidata za limito zaporedja (a_n) števili S_1 in S_2. Pokažimo, da nobeno ni limita zaporedja (a_n). S tem namenom izberimo tak ε, da velja

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}|S_1 - S_2| .$$

Potem je po definiciji stekališča na vsakem od intervalov $(S_1 - \varepsilon, S_1 + \varepsilon)$ in $(S_2 - \varepsilon, S_2 + \varepsilon)$ neskončno mnogo členov zaporedja (a_n) in noben ni na obeh intervalih hkrati. To pomeni, da nobeno od števil S_1 in S_2 ne zadošča temu, da bi v njegovi ε-okolici ležali vsi členi a_n od nekega n naprej in zato nobeno od števil S_1 in S_2 ne more biti limita. ∎

4.2 Lastnosti zaporedja

Konvergenco zaporedja je včasih težko potrditi. Pri tem nam pomagajo nekatere lastnosti zaporedij, kot sta to monotonost in omejenost. Oba pojma smo že definirali za poljubno realno funkcijo, zato koncept ni nov, se pa v primeru zaporedij obe lastnosti poenostavita.

(i) *Monotonost zaporedja*
Poglejmo si definicijo naraščajočega zaporedja. Iz definicije naraščajoče funkcije bi sledilo

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 < n_2 \Rightarrow a_{n_1} \leq a_{n_2} .$$

Ampak v primeru zaporedij je dovolj, če primerjamo dva poljubna zaporedna člena, saj če je neenakost

$$a_n \leq a_{n+1}$$

izpolnjena za vsako naravno število, tedaj je zaporedje (a_n) naraščajoče.
Na podoben način opišemo padajoče zaporedje in obe varianti stroge monotonosti.

Definicija 4.2.1 Zaporedje (a_n) je *naraščajoče*, če velja

$$a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N},$$

in je *strogo naraščajoče*, če

$$a_n < a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zaporedje (a_n) je *padajoče*, če velja

$$a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N},$$

in je *strogo padajoče*, če

$$a_n > a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

■ **Zgled 4.7** Preverimo monotonost zaporedja podanega s splošnim členom $a_n = \frac{n}{n+1}$.

Pokažimo da je zaporedje strogo naraščajoče:

$$\begin{aligned} a_n &< a_{n+1} \\ \tfrac{n}{n+1} &< \tfrac{n+1}{n+2} \\ n^2+2n &< n^2+2n+1 \\ 0 &< 1\,. \end{aligned}$$

■

(ii) *Omejenost zaporedja*
Tudi pojem omejenosti funkcije že poznamo, zato je zaporedje (a_n) omejeno, ko je množica funkcijskih vrednosti oziroma v tem primeru členov zaporedja

$$\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$$

omejena množica. V primeru omejenega zaporedja za supremum in infimum uporabljamo zapisa

$$\sup a_n \quad \text{in} \quad \inf a_n\,.$$

■ **Zgled 4.8** Preverimo omejenost zaporedja podanega splošnim členom $a_n = \frac{n}{n+1}$.

Ker smo v Zgledu 4.7 že pokazali, da je (a_n) naraščajoče zaporedje, je natančna spodnja meja oziroma infimum tega zaporedja enaka kar prvemu člene tega zaporedja

$$\inf a_n = a_1 = \frac{1}{2}\,.$$

Dokažimo da je število 1 natančna zgornja meja oziroma supremum tega zaporedja. Začnimo s tem, da je 1 zgornja meja zaporedja (a_n), torej za vsako naravno število n mora veljati

$$\begin{aligned} \tfrac{n}{n+1} &\leq 1 \\ n &\leq n+1 \\ 0 &\leq 1\,. \end{aligned}$$

Pokažimo še, da je $\sup \frac{n}{n+1} = 1$. Izberimo poljuben $\varepsilon > 0$ in dokažimo, da število $1-\varepsilon$ ni zgornja meja, kar pomeni, da je 1 res najmanjša zgornja meja. Obstajati mora člen zaporedja (a_n), ki je večji od $1-\varepsilon$ oziroma n, za katerega velja

$$\begin{aligned} 1-\varepsilon &< \tfrac{n}{n+1} \\ (n+1)(1-\varepsilon) &< n \\ \tfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon} &< n\,. \end{aligned}$$

Na primer za $\varepsilon = 10^{-2}$ vsako naravno število $n > 99$ zadošča zgoraj zapisanemu pogoju. ■

Izrek 4.2.1 Vsako monotono in omejeno zaporedje je konvergentno.

Dokaz. Naj bo (a_n) naraščajoče in omejeno zaporedje in naj bo $M = \sup a_n$. Pokazali bomo, da je $M = \lim_{n\to\infty} a_n$, kar pomeni da velja

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : |a_n - M| < \varepsilon\,.$$

Izberimo poljuben $\varepsilon > 0$. Tedaj število $M - \varepsilon$ ni zgornja meja zaporedja, saj sicer M ne bi bil natančna zgornja meja. Torej obstaja člen zaporedja a_{n_ε} tak, da leži med $M - \varepsilon$ in M, kar pomeni, da je $a_{n_\varepsilon} > M - \varepsilon$. Če postavimo indeks tega člena za n_0 v definiciji limite, to je $n_\varepsilon = n_0$, potem za ta ε velja

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - M| < \varepsilon\,,$$

saj je zaporedje (a_n) po predpostavki naraščajoče, kar pomeni, da je M res limita zaporedja a_n.

Podobno pokažemo v primeru padajočega zaporedja (a_n), da je $m = \inf a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$. ∎

Neposredno iz dokaza sledi naslednja posledica.

Posledica 4.2.2 Naj bo (a_n) monotono zaporedje.

- Če je (a_n) naraščajoče in navzgor omejeno, tedaj (a_n) konvergira k supremumu.
- Če je (a_n) padajoče in navzdol omejeno, tedaj (a_n) konvergira k infimumu.

∎

Pomemben primer monotonega in omejenega zaporedja, kar sicer ni trivialno pokazat, je zaporedje

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Naštejmo približne vrednosti nekaterih členov tega zaporedja

$$a_1 = 2\,, a_2 = 2.25\,, a_3 = 2.370,\ a_4 = 2.441\,, \ldots, a_{100} = 2.705\,, \ldots, a_{1000} = 2.717\,, \ldots$$

Po Izreku 4.2.1 obstaja limita tega zaporedja. Izkaže se, da je to iracionalno število, ki je pomembna konstanta[1] in ga označimo z e:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \doteq 2.7182818284590\ldots$$

Poglejmo še, kako računamo z zaporedji in njihovimi limitami. Zaporedja seštevamo, odštevamo, množimo in delimo po členih:

$$\begin{aligned} (a_n \pm b_n) &= (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, \ldots), \\ (a_n \cdot b_n) &= (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \ldots), \\ \left(\frac{a_n}{b_n}\right) &= \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots\right), \text{če } b_i \neq 0, \forall i \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

Naslednji izrek pove, kako računamo s konvergentnimi zaporedji.

[1] Glej eksponentno in logaritemsko funkcijo.

Izrek 4.2.3 Naj bosta (a_n) in (b_n) konvergentni zaporedji z limitama $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ in $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, $A, B \in \mathbb{R}$ in c poljubno realno število. Tedaj velja

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$,

(ii) $\lim_{n\to\infty}(c\,a_n) = cA$.

Dokaz.

(i) Pokazati moramo, da

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : |(a_n + b_n) - (A + B)| < \varepsilon\,.$$

Ker sta (a_n) in (b_n) konvergentni zaporedji, velja

$$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 : |a_n - A| < \varepsilon_1 \text{ in}$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2 : |b_n - B| < \varepsilon_2\,.$$

Tako za vsak $n \geq n_0$, kjer je $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ velja

$$\begin{aligned}
|(a_n + b_n) - (A + B)| &= |(a_n - A) + (b_n - B)| \\
&\leq |a_n - A| + |b_n - B| \\
&< \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Ker lahko okolice poljubno izbiramo, smo v tem primeru izbrali $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

(ii) Pokazati moramo, da

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : |c\,a_n - cA| < \varepsilon\,.$$

Velja podobno kot v točki (i):

$$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 : |a_n - A| < \varepsilon_1\,.$$

Tako za vsak $n \geq n_0$, kjer je $n_0 = n_1$ velja

$$\begin{aligned}
|c\,a_n - cA| &= |c\,(a_n - A)| \\
&= |c||a_n - A| \\
&< |c|\varepsilon_1 \\
&= |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

V tem primeru je bila izbrana okolica $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{|c|}$.

Če je $c = 0$, je točka (ii) trivialno izpolnjena. ∎

Iz Izreka 4.2.3 sledi posledica.

Posledica 4.2.4 Naj bosta (a_n) in (b_n) konvergentni zaporedji z limitama $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ in $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, $A, B \in \mathbb{R}$. Tedaj velja

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$,

Dokaz.

(i) Razliko prevedemo na vsoto in uporabimo Izrek 4.2.3

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) &= \lim_{n\to\infty}(a_n + (-b_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty}((-1)b_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n .
\end{aligned}$$

(ii) Ker sta zaporedji (a_n) in (b_n) konvergentni, velja

$$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 : |a_n - A| < \varepsilon_1 \text{ in}$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2 : |b_n - B| < \varepsilon_2 .$$

Pokažimo najprej da je $\lim_{n\to\infty}(a_n - A)(b_n - B) = 0$, kar pomeni, da

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : |(a_n - A)(b_n - B) - 0| < \varepsilon .$$

Tako za vsak $n \geq n_0$, kjer je $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ velja

$$|(a_n - A)(b_n - B)| = |a_n - A||b_n - B| < \varepsilon_1 \varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon .$$

V tem primeru smo izbrali okolici $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon}$. Poiščimo zdaj iskano limito

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty}(a_n - A)(b_n - B) \\
&= \lim_{n\to\infty}(a_n b_n - Ab_n - Ba_n + AB) \\
&= \lim_{n\to\infty} a_n b_n - A \lim_{n\to\infty} b_n - B \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} AB
\end{aligned}$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty} a_n b_n - AB - AB + AB \\
\lim_{n\to\infty} a_n b_n &= AB .
\end{aligned}$$

∎

Izrek 4.2.5 Naj bosta (a_n) in (b_n) konvergentni zaporedji z limitama $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ in $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, pri čemer je vsak člen zaporedja (b_n) različen od 0 in tudi $B \neq 0$. Tedaj velja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}.$$

Dokaz. Ker je zaporedje (b_n) konvergentno, velja

$$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 : |b_n - B| < \varepsilon_1 .$$

Dokažimo najprej

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}$$

oziroma

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| < \varepsilon .$$

Preoblikujmo izraz

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B - b_n}{b_n \cdot B}\right| = \left|\frac{1}{b_n}\right| \frac{|b_n - B|}{|B|} .$$

Ker je ε_1 v definiciji konvergence zaporedja (b_n) poljuben, naj velja $\varepsilon_1 = \frac{|B|}{2}$. Tedaj obstaja tako naravno število n_1, da za vsak $n \geq n_1$ velja

$$||b_n| - |B|| \quad \leq \quad |b_n - B| \quad < \quad \varepsilon_1 = \frac{|B|}{2} .$$

Iz

$$||b_n| - |B|| < \frac{|B|}{2}$$

sledi

$$\begin{aligned} -\frac{|B|}{2} \quad &< \quad |b_n| - |B| \quad < \quad \frac{|B|}{2} \qquad\qquad / + |B| \\ \frac{|B|}{2} \quad &< \quad |b_n| \quad < \quad \frac{3\,|B|}{2} . \end{aligned}$$

Nadaljujmo samo s prvo neenakostjo

$$\begin{aligned} \frac{|B|}{2} \quad &< \quad |b_n| \qquad\qquad / \cdot \tfrac{2}{|B||b_n|} \\ \frac{1}{|b_n|} \quad &< \quad \frac{2}{|B|} . \end{aligned}$$

Nadaljujmo s prej začeto oceno izraza $|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}|$:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| \quad &= \quad \frac{1}{|b_n|}\frac{1}{|B|}|b_n - B| \\ &< \quad \frac{2}{|B|}\frac{1}{|B|}\varepsilon_1 \\ &= \quad \frac{2}{|B|^2}\frac{|B|^2\varepsilon}{2} = \varepsilon . \end{aligned}$$

V tem primeru je bila izbrana okolica $\varepsilon_1 = \dfrac{|B|^2\varepsilon}{2}$, torej obstaja $n_1' \in \mathbb{N}$ tak da za $\forall n \geq n_1'$ velja $|b_n - B| < \varepsilon_1$. Dokaz zaključimo z uporabo točke (ii) Posledice 4.2.4, pri čemer je za dani ε ustrezno naravno število $n_0 = \max\{n_1, n_1'\}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} a_n \frac{1}{b_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \\
&= A\frac{1}{B} = \frac{A}{B}
\end{aligned}$$

■

■ **Zgled 4.9** Poiščimo limito zaporedja $a_n = \dfrac{3n}{4+7n}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4+7n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n}{n}}{\frac{4}{n} + \frac{7n}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4\frac{1}{n} + 7} \\
&= \frac{3}{7}.
\end{aligned}$$

■

■ **Zgled 4.10** Raziščimo zaporedje $a_n = 2 + \frac{n}{n+1}$ (monotonost, omejenost, konvergenco, stekališča).

Zaporedje je naraščajoče ter omejeno z $m \leq a_1$ in $M \geq 3$. Potemtakem je to konvergetno zaporedje, kjer je

$$\begin{aligned}
\sup(2 + \tfrac{n}{n+1}) &= \lim_{n\to\infty} (2 + \frac{n}{n+1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \\
&= 2 + 1 = 3\,.
\end{aligned}$$

Infimum zaporedja je $\inf(2 + \frac{n}{n+1}) = a_1 = \frac{5}{2}$. ■

5. Vrste

5.1 Številske vrste

Naj bo

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

zaporedje realnih števil. Izraz

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

imenujemo *številska vrsta* ali na kratko *vrsta*, številom a_1, a_2, ... pravimo *členi vrste*. Vrsto pišemo kot

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots$$

Nekaterim vrstam lahko priredimo realno število kot njeno vsoto ali vrednost. Pri tem nam pomagajo *delne vsote* $S_1, S_2, \dots$:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Zaporedju (S_n) pravimo *zaporedje delnih vsot*. V primeru, ko je zaporedje delnih vsot (S_n) konvergento, imenujemo njegovo limito S *vsota vrste* in pišemo:

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

oziroma

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,.$$

Če število S obstaja, pravimo, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentna*, sicer je vrsta *divergentna*.

Poglejmo primera konvergentne in divergentne vrste.

■ **Zgled 5.1** S pomočjo zaporedja delnih vsot preuči konvergenco geometrijske vrste

$$a + aq + aq^2 + \cdots.$$

Izračunajmo n-to delno vsoto S_n:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1}.$$

Pomnožimo obe strani enakosti s q in poglejmo razliko:

$$\begin{aligned} S_n &= a + aq + \cdots + aq^{n-1} \\ S_n q &= aq + aq^2 + \cdots + aq^n \\ S_n &= a\frac{1-q^n}{1-q} \end{aligned}$$

Delna vsota S_n bo konvergentna, ko obstaja $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$, kar se zgodi, ko je $|q| < 1$ in je ta limita enaka 0. Za $|q| < 1$ je torej

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}.$$

■

■ **Zgled 5.2** Preuči konvergenco vrste

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots.$$

Vrsta je divergentna, saj je zaporedje delnih vsot

$$S_1 = 1, S_2 = 0 S_3 = 1, S_4 = 0, \ldots$$

divergentno. ■

Opazimo, da je v primeru, ko obstaja vsota geometrijske vrste, limita

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} aq^{n-1} = 0,$$

kar se izkaže, da velja tudi v splošnem.

Izrek 5.1.1 Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna, tedaj je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Dokaz. Iz konvergence vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sledi obstoj njene vsote S

$$S = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n\,.$$

Ker je zaporedje delnih vsot tudi konvergentno, je

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S\,.$$

Splošni člen zaporedja je enak razliki dveh zaporednih členov delnih vsot in njegova limita je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0\,.$$

■

Če vrsta zadošča pogoju v Izreku 5.1.1 to še ni dovolj, da bi bila konvergentna, zato je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *potrebni pogoj* za konvergenco vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ne pa tudi *zadostni pogoj*.

■ **Zgled 5.3** Pokažimo, da *harmonična vrsta*

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

ni konvergenta, čeprav je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0\,.$$

Z malo računanja opazimo, da za delne vsote velja

$$S_2 \geq \frac{3}{2},\ S_4 > \frac{4}{2},\ S_8 > \frac{5}{2},\ S_{16} > \frac{6}{2},\ S_{32} > \frac{7}{2},\ \ldots,$$

oziroma

$$S_{2^k} > \frac{k+2}{2},$$

kar pomeni, da zaporedje S_n ni navzgor omejeno in ker je očitno naraščajoče, ne more biti konvergentno. ■

V nadaljevanju bomo navedli (brez dokazov) nekaj najpogostejših kriterijev za preverjanje konvergence vrste. Začeli bomo z vrstami s pozitivnimi členi, nadaljevali z alternirajočimi vrstami in zaključili z vrstami s poljubnimi členi.

Konvergenca vrst s pozitivnimi členi

- *Primerjalni kriterij*

Definicija 5.1.1 Vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ je *majoranta* vrste $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, če je za vsako naravno število n izpolnjen pogoj $a_n \leq b_n$. Pravimo tudi, da je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *minoranta* vrste $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *s pozitivnimi členi je konvergentna, če ima kakšno konvergentno majoranto* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. *Vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *s pozitivnimi členi je divergentna, če ima kakšno divergentno minoranto* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

■ **Zgled 5.4** Ali je konvergenta vrsta

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}+\frac{1}{\sqrt{4\cdot 5}}+\cdots ?$$

Velja

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}>\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+1)}}=\frac{1}{n+1},$$

zato je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ minoranta vrste $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$. Ker je prva vrsta harmonična vrsta brez prvega člena, je divergentna, saj končno mnogo členov ne vpliva na konvergenco vrste. Torej je naša vrsta divergentna. ■

- *Kvocientni kriterij*

Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *vrsta s pozitivnimi členi in naj bo*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q\,.$$

Tedaj velja, če je

$$q<1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergira,}$$

$$q>1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{divergira.}$$

■ **Zgled 5.5** Preverimo konvergenco vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}.$$

Po kvocientnem kriteriju je

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)e^{-(n+1)^2}}{ne^{-n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\frac{1}{e^{2n+1}}=0$$

in zato vrsta konvergira.

■

- *Korenski kriterij*

Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *vrsta s pozitivnimi členi in naj bo*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q\,.$$

Tedaj velja, če je

$$q < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergira},$$

$$q > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{divergira}.$$

■ **Zgled 5.6** Preverimo konvergenco vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}.$$

Po korenskem kriteriju je

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2} e > 1$$

in zato vrsta divergira.

■

- *Raabejev kriterij*

Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *vrsta s pozitivnimi členi in naj bo* q *limita pridruženega zaporedja*

$$q = \lim_{n\to\infty} \left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)\right).$$

Tedaj velja, če je

$$q > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergira},$$

$$q < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{divergira}.$$

■ **Zgled 5.7** Preučimo konvergenco vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Po Raabejevem kriteriju izračunajmo limito

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(n+1)^3}{n^3} - 1\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+3n+1}{n^2} \\ &= 3 > 1\,. \end{aligned}$$

Ker je $q > 1$, je vrsta konvergentna. ■

Op V kriterijih s q-jem je vrsta v primeru, ko q ne obstaja, divergentna. Kadar je $q = 1$, ti kriteriji ne dajo odgovora na vprašanje o konvergenci vrste.

Konvergenca alternirajočih vrst

Definicija 5.1.2 *Alternirajoča vrsta* je vrsta s pozitivnimi in negativnimi členi, ki si izmenično sledijo

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n\,,\ a_n \geq 0\,.$$

- *Leibnizov kriterij*

Alternirajoča vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots$$

je konvergentna, če je

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5 \geq \cdots \quad \text{in} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0\,.$$

■ **Zgled 5.8** Preverimo konvergenco vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}\,.$$

Vrsta je alternirajoča, absolutne vrednosti členov tvorijo padajoče zaporedje in konvergirajo k 0, zato je po Leibnizovem kriteriju vrsta konvergentna.

■

KONVERGENCA VRST S POLJUBNIMI ČLENI

Definicija 5.1.3 Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *absolutno konvergentna*, če konvergira pridružena vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ absolutnih vrednosti njenih členov. Če za konvergentno vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pridružena vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergira, govorimo o *pogojni konvergenci*.

V primeru vrst s poljubnimi členi nas torej zanima absolutna konvergenca vrste. V ta namen nimamo novih kriterijev, temveč le prilagodimo kriterije za vrste s pozitivnimi členi na absolutno vrednost.

■ **Zgled 5.9** Preverimo konvergenco vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} .$$

Uporabi Raabejev kriterij na pridruženi vrsti s pozitivnimi členi:

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{(n+1)^2}{n^2} - 1 \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n}{n^2} \\ &= 2 > 1 . \end{aligned}$$

Vrsta je zato absolutno konvergentna.

■

Konvergentne vrste seštevamo in množimo s skalarjem po členih. Naj bosta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentni vrsti in c poljubno realno število. Tedaj je

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) ,$$

$$c \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n ,$$

pri čemer sta rezultata prav tako konvergentni vrsti. Pri računanju z absolutno konvergentnimi vrstami lahko poljubno premešamo vrstni red členov, kar pa ne velja za pogojno konvergentne vrste.

5.2 Funkcijske vrste

Doslej smo obravnavali samo take vrste, pri katerih so bili posamezni členi konstante. Vzemimo sedaj vrsto

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots ,$$

kjer so členi $f_k(x)$ funkcije spremenljivke x. Tako vrsto imenujemo *funkcijska vrsta*. Obstaja naj taka množica $\mathscr{D} \subseteq \mathbb{R}$, na kateri so vsi členi $f_k(x)$ definirani. Če damo argumentu kako vrednost c iz $\mathscr{D}$, dobimo številsko vrsto

$$f_1(c) + f_2(c) + f_3(c) + \cdots,$$

ki je bodisi konvergentna bodisi divergentna. Za ugotavljanje območja konvergentnosti funkcijske vrste uporabljamo že poznane kriterije konvergence številskih vrst.

Podobno kot za številsko vrsto naj bo $S_n(x)$ konvergentno zaporedje delnih vsot funkcijske vrste $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ in $S(x)$ njena vsota. Za vsak x dobimo pripadajočo številsko vrsto in če so le-te konvergentne, pravimo, da funkcijska vrsta *konvergira po točkah*. Poznamo še drugo vrsto konvergence, in sicer enakomerno konvergenco funkcijske vrste, s katero se ne bomo ukvarjali.

Najbolj pomembne funkcijske vrste so *potenčne vrste*, ki so oblike

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1},$$

kjer je (a_n) neko zaporedje. Pogosteje pišemo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Uporabimo npr. korenski kriterij za preučitev absolutne konvergence po točkah:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| \cdot |x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

Od tod sledi

$$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

kar pomeni, da je vrsta $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolutno konvergentna na intervalu

$$(-R, R), \text{ kjer} \quad \text{je} \quad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Pri tem postavimo

$$R = \infty, \text{ če} \quad \text{je} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$$

in če je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty,$$

vrsta ni nikjer absolutno konvergentna. Lastnosti vrste na krajiščih intervala moramo posebej raziskati.

Podobno bi lahko uporabili kvocientni kriterij:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$$

Od tod sledi

$$|x| < \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

in vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je absolutno konvergentna na intervalu

$$(-R, R), \text{ kjer} \quad \text{je} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\,.$$

Če je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 0\,,$$

vrsta ni nikjer absolutno konvergentna. Lastnosti vrste na krajiščih intervala moramo tudi v tem primeru posebej raziskati.

■ **Zgled 5.10** Določimo območje konvergence vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\,.$$

Uporabimo kvocienti kriterij za absolutno konvergenco po točkah:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{|x|^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{|x|^n}{n}} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |x| < 1\,.$$

Vrsta je torej absolutno konvergentna na $(-1,1)$, izven tega intervala je divergentna, na krajiščih intervala pa moramo konvergenco posebej preveriti.
Za $x = 1$ dobimo harmonično vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,,$$

za katero že vemo, da je divergentna.
Za $x = -1$ dobimo vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\,,$$

ki je pogojno konvergentna.

■

6. Rešene naloge

Logika in množice

1. Koliko elementov imajo naslednje množice:
   (a) $\emptyset$,
   (b) $\{a,e,j,k\}$,
   (c) $\{a,e,j,k,\emptyset\}$,
   (d) $\{\{1,2\},\{a,b\},\{1,a\}\}$,
   (e) $\{1,4,7,\ldots,5998\}$.

   Rešitev.
   (a) 0,
   (b) 4,
   (c) 5,
   (d) 3,
   (e) 2000.

2. Za naslednje izjave preveri resničnost:
   (a) $x \in \{\{x\},\emptyset\}$,
   (b) $\{x\} \in \{\{x\},\{\{x\}\}\}$,
   (c) $x \in \{\{x\},\{\{x\}\}\}$,
   (d) $\emptyset = \{\emptyset\}$,
   (e) $\{x\} \subset \{\{x\},x\}$,
   (f) $\{\{x\},\emptyset\} \supseteq \{\{x\}\}$.

   Rešitev.
   (a) Izjava ni resnična, saj x ne nastopa kot element množice.
   (b) Izjava je resnična, saj $\{x\}$ nastopa kot element množice.
   (c) Izjava ni resnična, saj v množici nastopata elementa $\{x\}$ in $\{\{x\}\}$, ki pa nista enaka elementu x.
   (d) Izjava ni resnična, saj $\emptyset$ nima elementov, množica $\{\emptyset\}$ pa ima element $\emptyset$.
   (e) Izjava je resnična, saj je edini element leve množice x, ta pa je vsebovan tudi v desni množici.
   (f) Izjava je resnična, saj je edini element desne množice $\{x\}$, ta pa je vsebovan tudi v levi množici.

3. Dane so množice

$$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\},$$
$$B = \{1,3,5,7,9,11,13,15\},$$
$$C = \{1,4,7,10,13,16,19,22\}.$$

Poišči $A \cup B$, $C \cap B$, $A - B$, $B - (A \cap C)$.
Rešitev. $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,13,15\}$, $C \cap B = \{1,7,13\}$, $A - B = \{2,4,6,8\}$, $B - (A \cap C) = \{3,5,9,11,13,15\}$. ∎

4. Dani sta množici

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid -5 < x \leq 5\}$$

in

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \wedge x < 3\}.$$

Z naštevanjem elementov ali z intervali zapiši množice A, B, $A \cup B$, $A \cap B$ in $A \times B$.
Rešitev. $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = [-1,3)$, $A \cup B = [-1,3] \cup \{4,5\}$, $A \cap B = \{1,2\}$, $A \times B = \{(a,b) \mid a \in \{1,2,3,4,5\},\ b \in [-1,3)\}$. ∎

5. Dani sta množici

$$A = \{3n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 6\}$$

in

$$B = \{2n+3 \mid n \in \mathbb{N} \wedge n < 8\}.$$

Z naštevanjem elementov ali z intervali zapiši množice $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$.
Rešitev. $A = \{3,6,9,12,15,18\}$, $B = \{5,7,9,11,13,15,17\}$, $A \cup B = \{3,5,6,7,9,11,12,13,15,17,18\}$, $A \cap B = \{9,15\}$, $A - B = \{3,6,12,18\}$. ∎

6. Dane so množice

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid -3 \leq x \leq 4\},$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 < 4\},$$
$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4x + 4 < 0\},$$
$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4x + 4 = 0\}.$$

Z naštevanjem elementov ali z intervali zapiši množice $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup (B \cap C)$, $B - A$, $C - B$, $A \times D$ ter preveri $D \subseteq B$.
Rešitev. $A = \{1,2,3,4\}$, $B = (-\infty,5)$, $C = \emptyset$, $D = \{-2\}$, $A \cup B = B$, $A \cap B = A$, $A \cup (B \cap C) = A$, $B - A = (-\infty,1) \cup (1,2) \cup (2,3) \cup (3,4) \cup (4,5)$, $C - B = \emptyset$, $A \times D = \{(1,-2),(2,-2),(3,-2),(4,-2)\}$. Število -2 je element intervala $(-\infty,5)$. ∎

7. Določi kartezični produkt množic A in B, kjer sta
   (a) $A = \{a,b\}$ in $B = \{1,2,3\}$,
   (b) $A = [1,2)$ in $B = [-1,3)$,
   (c) $A = \mathbb{N}$ in $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 3\}$.

   Pomagaj si s sliko.
Rešitev. Upoštevamo definicijo kartezičnega produkta in dobimo
   (a) $A \times B = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\}$,
   (b) $A \times B = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R},\ 1 \leq a < 2,\ -1 \leq b < 3\}$ (pomagaj si s sliko),
   (c) $A \times B = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{R},\ -2 \leq b < 3\}$ (pomagaj si s sliko).

∎

8. Dani sta množici

$$A = (-3,2] \quad \text{in} \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 3 < 5\}.$$

Z naštevanjem elementov ali z intervali zapiši množice $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$, $A \times B$.
Rešitev. $B = (-\infty,4)$, $A \cup B = B$, $A \cap B = A$, $A - B = \emptyset$, $B - A = (-\infty,-3] \cup (2,4)$, $A \times B = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R},\ -3 < a \leq 2, b < 4\}$. ∎

9. Dani sta množici
$$A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -2x^2 + 3x + 5 \geq 0\}$$
in
$$B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 1 = 0\}.$$
Ali je $B \subseteq A$?
Rešitev. Pri obeh množicah je potrebno rešiti kvadratno enačbo. Ničle kvadratne enačbe $ax^2 + bx + c = 0$, kjer sta $a, b \in \mathbb{R}$, dobimo dobimo po formuli $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. V našem primeru dobimo $x_1 = \frac{5}{2}$ in $x_2 = -1$. Tako se za množico A omejimo, da iščemo tiste $x \in \mathbb{R}$, za katera velja $-2(x+1)\left(x - \frac{5}{2}\right) \geq 0$. Slednje velja za $x \in \left[-1, \frac{5}{2}\right]$. Za množico B, rešujemo enačbo $x^2 = 1$. Rešitvi te enačbe sta $x_1 = 1$ in $x_2 = -1$. Na podlagi teh dveh rezultatov vidimo $B \subseteq A$. ∎
10. Poišči potenčno množico naslednjih množic
   (a) $A = \{0, 1\}$,
   (b) $B = \{1, 2, a\}$,
   (c) $C = \{1, 2, \{a, b\}\}$.
   Rešitev. Potenčna množica poljubne množice X je množica vseh podmnožic množice X. Običajno jo označujemo s $\mathscr{P}(X)$.
   (a) $\mathscr{P}(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, A\}$,
   (b) $\mathscr{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{a\}, \{1,2\}, \{1,a\}, \{2,a\}, B\}$,
   (c) $\mathscr{P}(C) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{\{a,b\}\}, \{1,2\}, \{1,\{a,b\}\}, \{2,\{a,b\}\}, C\}$.
   ∎
11. Dani sta množici $A = \{1,2,3\}$ in $B = \{2,3,4\}$. Poišči A^C, $(A \cup B)^C$ in $(A \cap B)^C$, če je univerzalna množica
   (a) $\mathscr{U} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$,
   (b) $\mathscr{V} = \mathbb{N}$,
   (c) $\mathscr{W} = \mathbb{R}$.
   Rešitev. Upoštevamo definicijo komplementa glede na različne univerzalne množice.
   (a) $A^C = \{4,5,6,7,8,9,10\}$, $(A \cup B)^C = \{5,6,7,8,9,10\}$, $(A \cap B)^C = \{1,4,5,6,7,8,9,10\}$.
   (b) $A^C = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq 4\}$, $(A \cup B)^C = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq 5\}$, $(A \cap B)^C = \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq 4\}$.
   (c) $A^C = (-\infty, 1) \cup (1,2) \cup (2,3) \cup (3,\infty)$, $(A \cup B)^C = (-\infty,1) \cup (1,2) \cup (2,3) \cup (3,4) \cup (4,\infty)$, $(A \cap B)^C = (-\infty, 2) \cup (2,3) \cup (3,\infty)$.
   ∎

Matematična indukcija

1. S pomočjo matematične indukcije dokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja
$$3 \,|\, (5^n + 2^{n+1}).$$
Rešitev. Baza indukcije je trivialno izpolnjena, saj je $3|(5+4)$. S pomočjo indukcijske predpostavke $3 \,|\, (5^n + 2^{n+1})$, kjer $n \in \mathbb{N}$, dokažimo, da $3 \,|\, (5^{n+1} + 2^{(n+1)+1})$. Zapišimo $5^{n+1} + 2^{(n+1)+1}$ nekoliko drugače:
$$\begin{aligned} 5^{n+1} + 2^{(n+1)+1} &= 5 \cdot 5^n + 2 \cdot 2^{n+1} \\ &= 5 \cdot 5^n + (5-3) \cdot 2^{n+1} \\ &= 5 \cdot 5^n + 5 \cdot 2^{n+1} - 3 \cdot 2^{n+1} \\ &= 5 \cdot (5^n + 2^{n+1}) - 3 \cdot 2^{n+1}. \end{aligned}$$
Opomnimo, da je produkt dveh števil deljiv s 3, če je vsaj eno od števil deljivo s 3. Po indukcijski predpostavki je število $5 \cdot (5^n + 2^{n+1})$ je deljivo s 3 ($3 \,|\, (5^n + 2^{n+1})$). Za lažje razumevanje simbolično zapišimo $3 \cdot K = 5^n + 2^{n+1}$, kjer je K ustezno celo število. Tako dobimo
$$5 \cdot (5^n + 2^{n+1}) - 3 \cdot 2^{n+1} = 3 \cdot 5 \cdot K - 3 \cdot 2^{n+1} = 3 \cdot (5 \cdot K - 2^{n+1})$$

in to število deljivo s 3 (imamo produkt dveh števil in eno od teh je deljivo s 3). ∎

2. Preveri, ali za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja
$$9 \mid 7^n(3n+1)-1?$$

Rešitev. Baza indukcije je trivialno izpolnjena. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in predpostavimo $9 \mid 7^n(3n+1)-1$. Dokažimo $9 \mid 7^{n+1}(3n+4)-1$. Rešili bomo podobno kot v nalogi 1.

$$\begin{aligned} 7^{n+1}(3n+4)-1 &= (6+1)7^n(3(n+1)+1)-1 \\ &= 7^n(3(n+1)+1)+6\cdot 7^n(3(n+1)+1)-1 \\ &= 7^n(3n+1)-1+7^n(18n+27) \end{aligned}$$

To je očitno deljivo z 9, saj je $7^n(3n+1)-1$ deljivo z 9 po indukcijski predpostavki, $7^n(18n+27)$ pa tudi, saj je $7^n(18n+27) = 9\cdot 7^n(2n+3)$. ∎

3. S pomočjo matematične indukcije dokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja
$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

Rešitev. Baza indukcije je trivialno izpolnjena, saj $\frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{2\cdot 1+1}$. Sedaj s pomočjo indukcijske predpostavke $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$, kjer $n \in \mathbb{N}$, dokažimo, da velja
$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}.$$

Dokažimo na naslednji način:
$$\begin{aligned} &\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}+\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)} = \\ = &\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)} = \frac{n\cdot(2n+3)+1}{(2n+1)\cdot(2n+3)} = \\ = &\frac{(2n+1)\cdot(n+1)}{(2n+1)\cdot(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3} = \frac{n+1}{2(n+1)+1} \end{aligned}$$
in s tem smo dokazali trditev. ∎

4. S pomočjo matematične indukcije dokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja
$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}.$$

Rešitev. Baza indukcije je izpolnjena, saj $\frac{1}{\sqrt{1}} \geq \sqrt{1}$. Sedaj s pomočjo indukcijske predpostavke $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$, kjer je $n \in \mathbb{N}$, dokažimo, da je $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}$. To dokažimo na naslednji način:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n^2+n}+1}{\sqrt{n+1}} \geq \\ &\geq \frac{\sqrt{n^2}+1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}. \end{aligned}$$

∎

5. S pomočjo matematične indukcije dokaži, da je vsota kubov treh zaporednih naravnih števil deljiva z 9.

Rešitev. Najprej preverimo bazo indukcije. Vidimo, da je $1^3+2^3+3^3$ deljiva z 9. Predpostavimo, da je število $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$, kjer je $n \in \mathbb{N}$, deljivo z 9 in označimo $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3 = 9\cdot K$, kjer je $K \in \mathbb{N}$. Dokažimo, da je tudi vsota $(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3$ deljiva z 9.

$$\begin{aligned}(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3 &= (n+1)^3+(n+2)^3+n^3+9n^2+27n+27\\ &= \left(n^3+(n+1)^3+(n+2)^3\right)+9\cdot(3+3n+n^2)\\ &= 9\cdot K+9\cdot(3+3n+n^2)\\ &= 9\cdot(K+3+3n+n^2)\end{aligned}$$

in ta produkt je deljiv z 9. ∎

6. S pomočjo matematične indukcije dokaži, da je vsota prvih n lihih naravnih števil enaka n^2.
Rešitev. Baza indukcije je izpolnjena, saj je vsota prvega lihega števila 1. Predpostavimo, da je $1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$, kjer je $n \in \mathbb{N}$, in dokažimo, da je vsota prvih $n+1$ lihih števil enaka $(n+1)^2$. Dobimo

$$1+3+\ldots+(2n-1)+(2n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2$$

in trditev je s tem dokazana. ∎

7. Naj bo $x \in \mathbb{R} \wedge x \geq -1$. Z matematično indukcijo dokaži, da velja Bernoullijeva neenakost

$$1+nx \leq (1+x)^n,$$

kjer je $n \in \mathbb{N}$.
Rešitev. Baza indukcije trivialno velja. Predpostavimo, da je $1+nx \leq (1+x)^n$, kjer je $n \in \mathbb{N}$, in dokažimo, da velja $1+(n+1)x \leq (1+x)^{n+1}$.
Če upoštevamo indukcijsko predpostavko, dobimo

$$(1+x)^{n+1}=(1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx).$$

Predpostavili smo tudi, da je $x \geq -1$ in zato je $x+1 \geq 0$. Tako dobimo

$$(1+x)(1+nx)=1+nx+x+nx^2=1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x.$$

S tem je trditev dokazana. ∎

8. Preveri, če za poljubno naravno število n velja:

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!} \leq 1-\frac{1}{(n+1)!}.$$

Rešitev. Baza indukcije je trivialno izpolnjena, saj za $n=1$ dobimo neenakost $\frac{1}{2!} \leq 1-\frac{1}{2!}$. Izvedimo še indukcijski korak.
Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in naj velja

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!} \leq 1-\frac{1}{(n+1)!}.$$

Dokažimo

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!} \leq 1-\frac{1}{(n+2)!}.$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!} &\leq 1-\frac{1}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!}\\ &\leq 1-\frac{n+2-n-1}{(n+2)!}\\ &\leq 1-\frac{1}{(n+2)!}\end{aligned}$$

S tem je trditev dokazana. ∎

9. Preveri, če za poljubno naravno število n velja:

$$\frac{1}{1!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{5!}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)!}\leq 2-\frac{1}{(2n)!}.$$

Rešitev. Baza indukcije je trivialno izpolnjena. Izvedimo še indukcijski korak. Naj bo $n\in\mathbb{N}$ in naj velja

$$\frac{1}{1!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{5!}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)!}\leq 2-\frac{1}{(2n)!}.$$

Dokažimo

$$\frac{1}{1!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{5!}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)!}+\frac{n+1}{(2n+1)!}\leq 2-\frac{1}{(2n+2)!}.$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{5!}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)!}+\frac{n+1}{(2n+1)!}&\leq 2-\frac{1}{(2n)!}+\frac{n+1}{(2n+1)!}\\&=2-\frac{2n(n+1)}{(2n+2)!}\\&\leq 2-\frac{n+1}{(2n+2)!}\end{aligned}$$

S tem je trditev dokazana. ∎

10. Preveri, če za poljubno naravno število n velja:
   (a) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1$,
   (b) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\leq 2\sqrt{n}-1$.

   Rešitev.
   (a) Trditev ne velja, saj ni izpolnjena baza indukcije.
   (b) V tem primeru je baza indukcije izpolnjena. Izvedimo še indukcijski korak. Naj bo $n\in\mathbb{N}$ in naj velja

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\leq 2\sqrt{n}-1.$$

   Dokažimo

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\leq 2\sqrt{n+1}-1.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\leq 2\sqrt{n}-1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

   Sedaj je dovolj dokazati

$$2\sqrt{n}-1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\leq 2\sqrt{n+1}-1$$

   oziroma

$$2\sqrt{n}\leq 2\sqrt{n+1}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

   Po kvadriranju in odštevanju dobimo

$$0\leq\frac{1}{n+1}$$

   in s tem je trditev dokazana, saj je $n\in\mathbb{N}$.

∎

11. Dokaži, da za poljubno naravno število n velja

$$\frac{1}{2n}\leq\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\leq\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Vse natančno utemelji!

Rešitev. Trditev bomo dokazali v dveh korakih. Natančneje, dokazali bomo dve neenakosti.

(a) Dokažimo, da za poljubno naravno število n velja

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}.$$

Baza indukcije je trivialno izpolnjena, zato naredimo le še indukcijski korak. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in naj velja

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}.$$

Dokažimo

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n\cdot 2(n+1)}.$$

Torej

$$\frac{1}{2(n+1)} = \frac{2n}{2n\cdot 2(n+1)} \leq \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot 2n}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n\cdot 2(n+1)} \leq \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2(n+1)}$$

S tem je prva neenakost dokazana.

(b) Dokažimo, da za poljubno naravno število n velja

$$\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Baza indukcije je trivialno izpolnjena. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in naj velja

$$\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Dokažimo

$$\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n\cdot 2(n+1)} \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}}.$$

Torej

$$\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n\cdot 2(n+1)} \leq \frac{2n+1}{\sqrt{n+1}\cdot 2(n+1)}$$

Sedaj dokažimo

$$\frac{2n+1}{\sqrt{n+1}\cdot 2(n+1)} \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}}.$$

Najprej preoblikujemo v

$$(2n+1)\sqrt{n+2} \leq 2(n+1)\sqrt{n+1}$$

in nato kvadriramo neenačbo. Saj ni več težko videti, da je trditev resnična.

Z zgornjima točkama je trditev dokazana. ∎

Realna števila in absolutna vrednost

1. Poišči minimum, infimum, maksimum in supremum v $\mathbb{R}$, če obstajajo, za naslednje množice:
   (a) $A = \mathbb{N}$,
   (b) $B = \mathbb{N} \cap (-5, 5]$,
   (c) $C = \{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$,
   (d) $D = \{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

   Rešitev.
   (a) $\min A = 1$, $\inf A = 1$, $\max A$ ne obstaja, $\sup A$ ne obstaja.
   (b) $\min B = 1$, $\inf B = 1$, $\max B = 5$, $\sup B = 5$.
   (c) $\min C$ ne obstaja, $\inf C = 1$, $\max C = 2$, $\sup C = 2$.
   (d) $\min D = 0$, $\inf D = 0$, $\max D = \frac{3}{2}$, $\sup D = \frac{3}{2}$.

∎

2. Poišči minimum, infimum, maksimum in supremum v $\mathbb{R}$, če obstajajo, za množico

$$M = \left\{ \frac{4x}{x+2} \mid x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \right\}.$$

Rešitev. Opazimo, da je množica enaka intervalu $[0,4)$. Torej, $\min M = 0$, $\inf M = 0$, $\max M$ ne obstaja, $\sup M = 4$. ∎

3. Poišči minimum, infimum, maksimum in supremum v $\mathbb{R}$, če obstajajo, za množico

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^4 - 2x^3 - 3x^2 < 0 \right\}.$$

Rešitev. Opazimo, da je množica enaka intervalu $(-1,0) \cup (0,3)$. Torej, $\min M$ ne obstaja, $\inf M = -1$, $\max M$ ne obstaja, $\sup M = 3$. ∎

4. Reši naslednjo neenačbo

$$2x - 1 < \frac{x}{2} + 5.$$

Rešitev. Neenačbo preoblikujemo v obliko

$$\begin{aligned} 2x - \frac{x}{2} &< 5 + 1 \\ x &< 4 \end{aligned}$$

in zato je rešitev $x \in (-\infty, 4)$. ∎

5. Reši naslednjo neenačbo

$$x^2 + 5x + 3 > -1.$$

Rešitev. Neenačbo preoblikujemo v obliko

$$x^2 + 5x + 4 > 0.$$

S pomočjo formule $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ dobimo $x^2 + 5x + 4 = (x+1)(x+4)$ in zato je rešitev $x \in (-\infty, -4) \cup (-1, \infty)$. ∎

6. Reši naslednji neenačbi
   (a) $\dfrac{x-1}{x+2} \leq 1$,
   (b) $\dfrac{x^2-1}{x-3} > 0$.

Rešitev.

(a) Na neenačbo bomo gledali posebej za $x \in (-\infty, -2)$ oziroma $x \in (-2, \infty)$, ker se v odvisnosti od teh intervalov spreminja neenačaj (upoštevati je potrebno pravila za obravnavo neenačb).

- Za $x \in (-\infty, -2)$ poenostavimo enačbo in dobimo

$$\begin{aligned} x - 1 &\geq x + 2 \\ 0 &\geq 3. \end{aligned}$$

  Torej ne obstaja tak $x \in (-\infty, -2)$, za katerega velja neenakost.
- Za $x \in (-2, \infty)$ poenostavimo enačbo in dobimo

$$\begin{aligned} x - 1 &\leq x + 2 \\ 0 &\leq 3. \end{aligned}$$

  Torej, za vsak $x \in (-2, \infty)$ velja neenakost.

Rešitev neenačbe je $x \in (-2, \infty)$.

(b) Podobno kot v (a) gledamo za $x \in (-\infty, 3)$ oziroma $x \in (3, \infty)$.

- Za $x \in (-\infty, 3)$ poenostavimo enačbo in dobimo
$$x^2 - 1 < 0.$$
Iz te neenačbe dobimo $x \in (-1, 1)$. Ko gledamo presek $(-\infty, 3) \cap (-1, 1)$, dobimo $x \in (-1, 1)$.
- Za $x \in (3, \infty)$ poenostavimo enačbo in dobimo
$$x^2 - 1 > 0.$$
Iz te neenačbe dobimo $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Ko gledamo presek $((-\infty, -1) \cup (1, \infty)) \cap (3, \infty)$, dobimo $x \in (3, \infty)$.

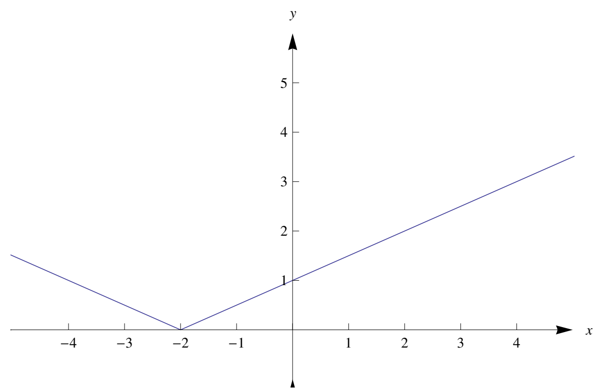
Rešitev neenačbe je $x \in (-1, 1) \cup (3, \infty)$. Nalogo lahko rešimo tudi grafično, saj lahko iz natančnega grafa funkcije preberemo rešitev.

∎

7. Skiciraj grafe funkcij.
   (a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = |\frac{x}{2} + 1|$,
   (b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = |-\frac{x}{2} + 1|$,
   (c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f_1(x) + f_2(x)$,
   (d) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f_1(x) - f_2(x)$.

Rešitev.

(a) Vidimo, da je $\frac{x}{2} + 1 \geq 0$, ko je $x \geq -2$. Tako dobimo
$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 1 & ; \quad x \geq -2 \\ -\frac{x}{2} - 1 & ; \quad x < -2. \end{cases}$$

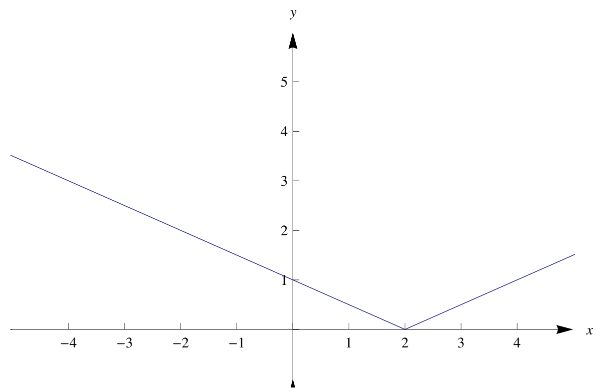


Slika 6.1: Graf funkcije f_1.

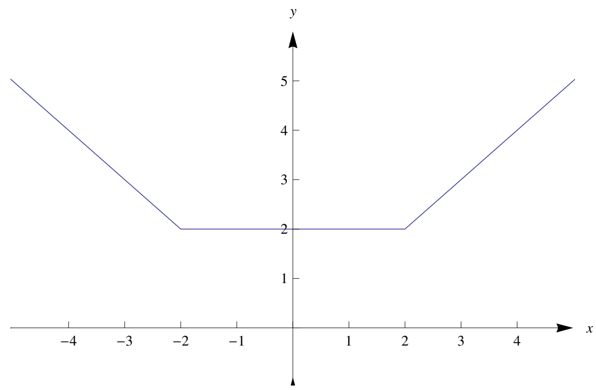
(b) Vidimo, da je $-\frac{x}{2} + 1 \geq 0$, ko je $x \leq 2$. Tako dobimo
$$f_2(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} + 1 & ; \quad x \leq 2 \\ \frac{x}{2} - 1 & ; \quad x > 2. \end{cases}$$

(c) Obravnavo razdelimo na naslednje tri možnosti
- za $x < -2$ je $g(x) = -\frac{x}{2} - 1 - \frac{x}{2} + 1 = -x$,
- za $-2 \leq x < 2$ je $g(x) = \frac{x}{2} + 1 - \frac{x}{2} + 1 = 2$,
- za $2 \leq x$ je $g(x) = \frac{x}{2} + 1 + \frac{x}{2} - 1 = x$.

Tako dobimo
$$g(x) = \begin{cases} -x & ; \quad x < -2 \\ 2 & ; \quad -2 \leq x < 2 \\ x & ; \quad 2 \leq x. \end{cases}$$



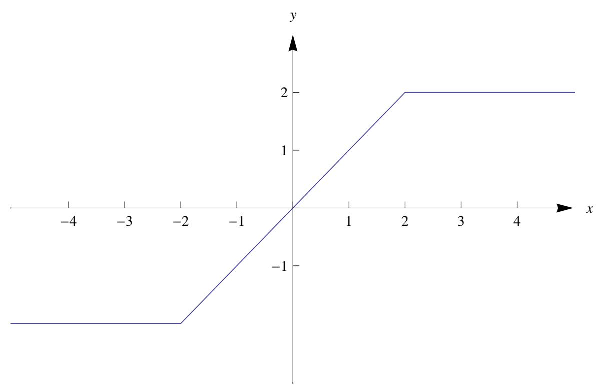
Slika 6.2: Graf funkcije f_2.



Slika 6.3: Graf funkcije h.

(d) Rešujemo podobno kot v primeru (c) in dobimo

$$h(x) = \begin{cases} -2 & ; \quad x < -2 \\ x & ; \quad -2 \leq x < 2 \\ 2 & ; \quad 2 \leq x. \end{cases}$$



Slika 6.4: Graf funkcije g.

∎

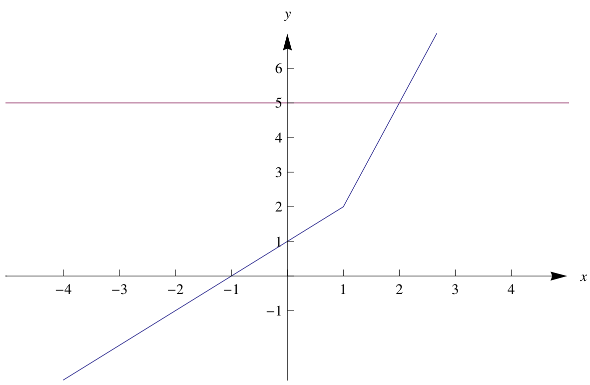
8. Reši naslednji enačbi grafično in računsko
   (a) $2x+|x-1|=5$,
   (b) $|x|=|x-1|+1$.

Rešitev. Če želimo poiskati rešitve enakosti, bo potrebno najprej zapisati enačbo brez absolutnih vrednosti in jo šele nato rešiti.

(a) Če upoštevamo absolutno vrednost $|x-1|$, razdelimo celotno realno os na intervala $x\in(-\infty,1)$ in $x\in[1,\infty)$.

- Za $x\in(-\infty,1)$ dobimo
$$2x-x+1=5$$
in iz tega sledi, da je $x=4$, ampak ker $4\notin(-\infty,1)$, nimamo rešitev na intevalu $(-\infty,1)$.
- Za $x\in[1,\infty)$ dobimo
$$2x+x-1=5$$
iz česar sledi, da je $x=2$, kar je rešitev začetne enačbe, saj je na intervalu $[1,\infty)$.

Rešitev enačbe je $x=2$.



Slika 6.5: Grafična rešitev $2x+|x-1|=5$.

(b) Razdelimo celotno realno os na ustrezne podintervale. Za lažje razumevanje zapišimo naslednjo tabelo

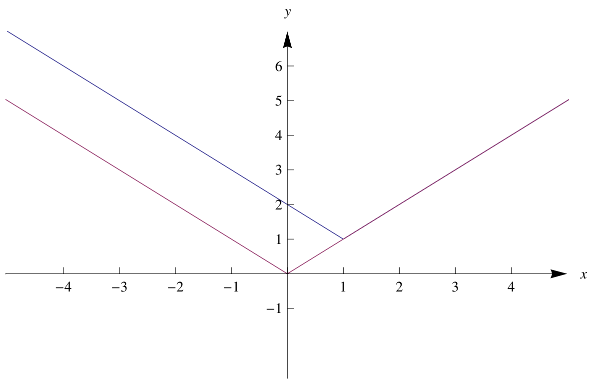
	$x<0$	$0\le x<1$	$1\le x$
$\lvert x\rvert$	$-x$	x	x
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$

- Za $x<0$ dobimo
$$-x=-x+1+1,$$
kar je protislovje in zato na intervalu $(-\infty,0)$ nimamo rešitev.
- Za $0\le x<1$ dobimo
$$x=-x+1+1$$
kar je tudi protislovje ($1\notin[0,1)$) in zato tudi na intervalu $[0,1)$ nimamo rešitev.
- Za $1\le x$ dobimo
$$x=x-1+1$$
in ta enakost velja ne glede na izbrani x. Rešitev je tako celoten interval $[1,\infty)$.

Iz tega sledi, da je rešitev interval $[1,\infty)$.

∎

9. Reši neenačbe
   (a) $|2x+4|<6$,
   (b) $|x+1|+|x-1|\le|x|$,
   (c) $|x^2+3x+2|<x+5$,
   (d) $|x^2-1|+1\le|x+2|$.



Slika 6.6: Grafična rešitev $|x| = |x-1| + 1$.

Rešitev.

(a) Če upoštevamo absolutno vrednost za $|2x+4|$, razdelimo celotno realno os na dva dela: $x \in (-\infty, -2)$ in $x \in [-2, \infty)$.

- Za $x \in (-\infty, -2)$ dobimo

$$\begin{aligned} -2x - 4 &< 6 \\ x &> -5. \end{aligned}$$

Iz tega sledi, da je na intervalu $(-\infty, -2)$ rešitev podinterval $(-5, -2)$.

- Za $x \in [-2, \infty)$ dobimo

$$\begin{aligned} &2x + 4 < 6 \\ &x < 1. \end{aligned}$$

Iz tega sledi, da je na intervalu $[-2, \infty)$ rešitev podinterval $[-2, 1)$.

Neenakost velja za vsak $x \in (-5, 1)$.

(b) Upoštevajmo absolutne vrednosti in zapišimo naslednjo tabelo

	$x < -1$	$-1 \le x < 0$	$0 \le x < 1$	$1 \le x$
$\lvert x+1 \rvert$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$	$x+1$
$\lvert x \rvert$	$-x$	$-x$	x	x
$\lvert x-1 \rvert$	$-x+1$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$

Obravnavali bomo štiri možnosti.

- Za $x < -1$ dobimo

$$\begin{aligned} -x - 1 - x + 1 &\le -x \\ 0 &\le x \end{aligned}$$

in iz tega sledi, da za $x < -1$ nimamo rešitve.

- Za $-1 \le x < 0$ dobimo

$$\begin{aligned} x + 1 - x + 1 &\le -x \\ -2 &\ge x \end{aligned}$$

in iz tega sledi, da za $-1 \le x < 0$ nimamo rešitve.

- Za $0 \le x < 1$ dobimo

$$\begin{aligned} x + 1 - x + 1 &\le x \\ 2 &\le x \end{aligned}$$

in iz tega sledi, da za $0 \le x < 1$ nimamo rešitve.

- Za $1 \leq x$ dobimo

$$\begin{aligned} x+1+x-1 &\leq x \\ x &\leq 0 \end{aligned}$$

in iz tega sledi, da za $1 \leq x$ nimamo rešitve.

Neenakost nima rešitve.

(c) Opazimo

$$|x^2+3x+2| = \begin{cases} x^2+3x+2 & ; \quad x \leq -2 \ \vee \ -1 \leq x \\ -(x^2+3x+2) & ; \quad -2 < x < -1. \end{cases}$$

- Za $x \leq -2 \ \vee \ -1 \leq x$ dobimo

$$\begin{aligned} x^2+3x+2 &< x+5 \\ (x+3)(x-1) &< 0 \end{aligned}$$

in to velja za $x \in (-3,1)$. Torej neenakost velja za vsak $x \in (-3,-2] \cup [-1,1)$.

- Za $-2 < x < -1$ dobimo

$$\begin{aligned} -x^2-3x-2 &< x+5 \\ 0 &< x^2+4x+7. \end{aligned}$$

Desna stran neenačbe je ves čas pozitivna in zato neenakost velja za vsak $x \in (-2,-1)$.

Neenakost velja za vsak $x \in (-3,1)$.

(d) Zapišimo naslednjo tabelo

	$x < -2$	$-2 \leq x < -1$	$-1 \leq x < 1$	$1 \leq x$
$\lvert x+2 \rvert$	$-x-2$	$x+2$	$x+2$	$x+2$
$\lvert x^2-1 \rvert$	x^2-1	x^2-1	$-x^2+1$	x^2-1

Obravnavali bomo tri možnosti.

- Za $x < -2$ dobimo

$$\begin{aligned} x^2-1+1 &\leq -x-2 \\ x^2+x+2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Leva stran neenačbe je ves čas pozitivna in zato neenačba nima rešitev.

- Za $-2 \leq x < -1 \ \vee \ 1 \leq x$ dobimo

$$\begin{aligned} x^2-1+1 &\leq x+2 \\ (x+1)(x-2) &\leq 0 \end{aligned}$$

in to velja za $x \in [-1,2]$. Ker gledamo $-2 \leq x < -1 \ \vee \ 1 \leq x$, dobimo $x \in [1,2]$.

- Za $-1 \leq x < 1$ dobimo

$$\begin{aligned} -x^2+1+1 &\leq x+2 \\ 0 &\leq x(x+1) \end{aligned}$$

in to velja za $x \in (-\infty,-1] \cup [0,\infty)$. Ker gledamo $-1 \leq x < 1$, dobimo $x \in [0,1) \cup \{-1\}$.

Neenakost velja za vsak $x \in \{-1\} \cup [0,2]$.

∎

10. Dana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \left| -\frac{x}{2} + 4 \right|.$$

(a) Načrtaj graf funkcije f.

(b) Poišči rešitve enačbe $f(x) = 3$.

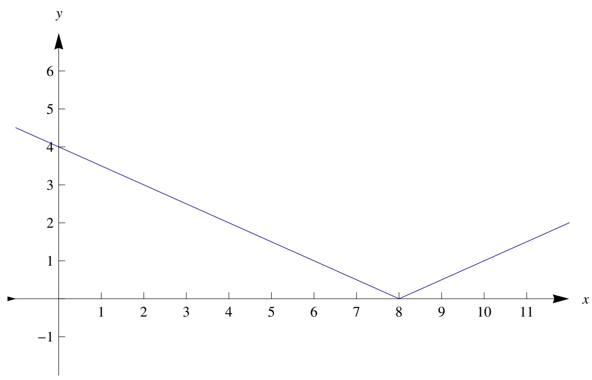
(c) Poišči rešitve enačbe $f(x) = 2x+5$.

(d) Poišči rešitve neenačbe $f(x) < 3$.

Rešitev.

(a) Vidimo, da je $-\frac{x}{2}+4 \geq 0$, ko je $x \leq 8$. Tako dobimo

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2}+4 & ; \quad x \leq 8 \\ \frac{x}{2}-4 & ; \quad x > 8. \end{cases}$$



Slika 6.7: Graf $f(x) = \left|-\frac{x}{2}+4\right|$.

(b) Iz (a) sledi, da obravnavamo naslednji dve možnosti:
- $-\frac{x}{2}+4 = 3$, ko je $x = 2$.
- $\frac{x}{2}-4 = 3$, ko je $x = 14$.

Torej $f(x) = 3$ velja za $x = 2$ in $x = 14$.

(c) Podobno kot v (b):
- $-\frac{x}{2}+4 = 2x+5$, ko je $x = -\frac{2}{5}$, saj ustreza pogoju $x \geq 8$.
- $\frac{x}{2}-4 = 2x+5$, ko je $x = -6$, ampak v tem primeru ne ustreza pogoju $x > 8$. V tem primeru ni rešitve.

Torej $f(x) = 2x+5$, če je $x = -\frac{2}{5}$.

(d) Pomagajmo si z (a) in dobimo $2 < x < 14$.

■

11. Dana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = |x^2 - 4x|.$$

(a) Načrtaj graf funkcije f.

(b) Reši enačbo $f(x) = 5$.

(c) Reši neenačbo $f(x) > 5$.

Rešitev.

(a) Vidimo, da je $x^2 - 4x \geq 0$, ko je $x \leq 0$ ali $4 \leq x$. Tako dobimo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & ; \quad x \leq 0 \ \vee \ 4 \leq x \\ -x^2 + 4x & ; \quad 0 < x < 4. \end{cases}$$

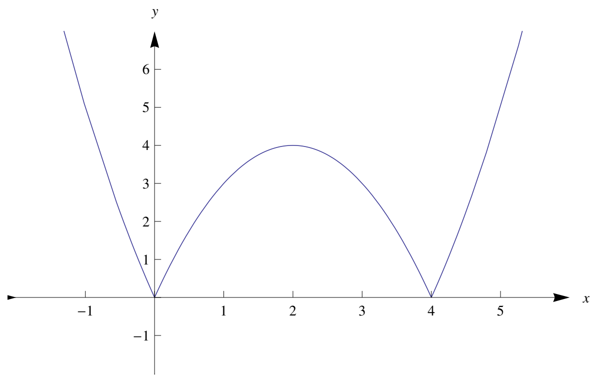
(b) Iz (a) sledi, da obravnavamo naslednji dve možnosti:
- Za $x \leq 0 \ \vee \ 4 \leq x$ dobimo $x^2 - 4x = 5$ in iz tega sledi $x = -1$ in $x = 5$.
- Za $0 < x < 4$ dobimo $-x^2 + 4x = 5$ in v tem primeru nimamo realnih rešitev.

Torej $f(x) = 5$ velja za $x = -1$ in $x = 5$.

(c) Rešujemo podobno kot v (b) in dobimo $x < -1$ ali $5 < x$.

■

12. Dana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = |x^2 - 5x + 4|.$$



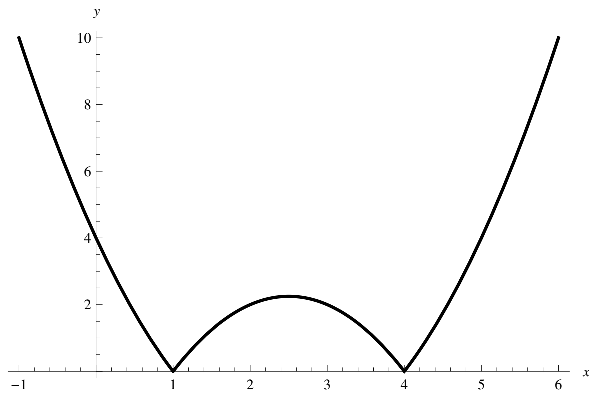
Slika 6.8: Graf $f(x) = |x^2 - 4x|$.

(a) Načrtaj graf funkcije f.
(b) Reši enačbo $f(x) = 1$.
(c) Reši neenačbo $f(x) > 1$.

Rešitev.

(a)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 4 & ; \quad x \leq 1 \ \vee \ 4 \leq x \\ -(x^2 - 5x + 4) & ; \quad 1 < x < 4. \end{cases}$$



Slika 6.9: Graf funkcije $f(x) = |x^2 - 5x + 4|$.

(b) Glede na zgornji predpis dobimo
- iz enačbe $x^2 - 5x + 4 = 1$, dobimo $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$,
- iz enačbe $-x^2 + 5x - 4 = 1$, dobimo $x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$.

(c) Glede na točki (a) in (b) dobimo rešitev $x \in \left(-\infty, \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}, \infty\right)$. ∎

13. Dana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{3x + 2}{x - 1}.$$

(a) Reši enačbo $|f(x)| = 4$.
(b) Reši neenačbo $|f(x)| > 4$.

Rešitev.

(a) Najprej $|f(x)|$ zapišimo takole

$$|f(x)| = \begin{cases} \frac{3x+2}{x-1} & ; \quad x \leq -\frac{2}{3} \vee 1 < x \\ -\frac{3x+2}{x-1} & ; \quad -\frac{2}{3} < x < 1. \end{cases}$$

Obravnavali bomo dve možnosti.

- Za $x \leq -\frac{2}{3} \vee 1 \leq x$

$$\begin{aligned} \frac{3x+2}{x-1} &= 4 \\ 3x+2 &= 4x-4 \\ x &= 6. \end{aligned}$$

- Za $-\frac{2}{3} < x < 1$

$$\begin{aligned} -\frac{3x+2}{x-1} &= 4 \\ -3x-2 &= 4x-4 \\ x &= \frac{2}{7}. \end{aligned}$$

$|f(x)| = 4$ velja za $x = \frac{2}{7}$ in $x = 6$.

(b) Postopek je podoben kot v točki (a) in dobimo $\frac{2}{7} < x < 1 \vee 1 < x < 6$. Lahko si tudi grafično pomagamo tako, da narišemo graf funkcije $|f(x)|$ in z njega s pomočjo točke (a) preberemo rešitev.

∎

14. Reši neenačbe

(a) $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| > 2$,

(b) $\left|\frac{x^2-1}{x-7}\right| < 2$,

(c) $\frac{1}{|x|} - x > 2$,

(d) $\left|\frac{x+4}{3x+2}\right| < \frac{1}{x}$.

Rešitev.

(a) Vsak lahko razmisli naslednje

$$\left|\frac{x+2}{x-1}\right| = \begin{cases} \frac{x+2}{x-1} & ; \quad x < -2 \vee 1 < x \\ -\frac{x+2}{x-1} & ; \quad -2 \leq x < 1. \end{cases}$$

Obravnavali bomo tri možnosti.

- Za $x < -2$ dobimo

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x-1} &> 2 \\ x+2 &< 2(x-1) \\ 4 &< x \end{aligned}$$

Iz $x < -2$ in $4 < x$ sledi, da ni rešitve na tem intervalu.

- Za $-2 \leq x < 1$ dobimo

$$\begin{aligned} -\frac{x+2}{x-1} &> 2 \\ x+2 &> -2(x-1) \\ 3x &> 0. \end{aligned}$$

Iz $-2 \leq x < 1$ in $3x > 0$ sledi, da je v tem primeru rešitev vsak $x \in (0,1)$.

- Za $1 < x$ dobimo

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x-1} &> 2 \\ x+2 &> 2(x-1) \\ 4 &> x. \end{aligned}$$

Iz $1 < x$ in $x < 4$ sledi, da je $x \in (1,4)$.

Neenakost velja za vsak $x \in (0,1) \cup (1,4)$.

(b) $\left|\frac{x^2-1}{x-7}\right| < 2$ Podobno kot v primeru (a) lahko vsak preveri

$$\left|\frac{x^2-1}{x-7}\right| = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-7} & ; \quad -1 \leq x \leq 1 \ \vee \ 7 < x \\ -\frac{x^2-1}{x-7} & ; \quad x < -1 \ \vee \ 1 < x < 7. \end{cases}$$

Obravnavali bomo tri možnosti.

- Za $x < -1 \ \vee \ 1 < x < 7$ dobimo

$$\begin{aligned} -\frac{x^2-1}{x-7} &< 2 \\ x^2-1 &< -2(x-7) \\ (x+5)(x-3) &< 0 \end{aligned}$$

in to velja za $-5 < x < 3$. Torej, to so vsi x, ki zadoščajo $-5 < x < -1$ in $1 < x < 3$.

- Za $-1 \leq x \leq 1$ dobimo

$$\begin{aligned} \frac{x^2-1}{x-7} &< 2 \\ x^2-1 &> 2(x-7) \\ x^2-2x+13 &> 0 \end{aligned}$$

in ta neenakost vedno velja. Iz tega sledi, da je rešitev vsak x, ki zadošca $-1 \leq x \leq 1$.

- Za $7 < x$ dobimo

$$\begin{aligned} \frac{x^2-1}{x-7} &< 2 \\ x^2-1 &< 2(x-7) \\ x^2-2x+13 &< 0 \end{aligned}$$

in ta neenakost nikoli ne velja, zato za $7 < x$ nimamo rešitev.

Neenakost velja za vsak $x \in (-5,3)$.

(c) Obravnavali bomo dve možnosti.

- Za $x < 0$ dobimo

$$\begin{aligned} -\frac{1}{x} - x &> 2 \\ -1-x^2 &< 2x \\ 0 &< x^2+2x+1. \end{aligned}$$

Ko upoštevamo $0 < x^2+2x+1$ in $x < 0$, dobimo, da velja za $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,0)$.

- Za $x > 0$ dobimo

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - x &> 2 \\ 1-x^2 &> 2x \\ 0 &> x^2+2x-1. \end{aligned}$$

Ko upoštevamo $x^2+2x-1 < 0$ in $x > 0$, dobimo, da velja za $0 < x < -1+\sqrt{2}$.

Neenakost velja za vsak $x \in (-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,-1+\sqrt{2})$.

(d) Vsak lahko sam razmisli, da je potrebno obravnavati spodnje štiri možnosti.

- Za $x \leq -4$ dobimo
$$\begin{aligned} \frac{x+4}{3x+2} &< \frac{1}{x} \\ (x+4)x &> 3x+2 \\ x^2+x-2 &> 0. \end{aligned}$$
Ko upoštevamo $x^2+x-2>0$ in $x \leq -4$, dobimo, da velja za vsak x, ki zadošča $x \leq -4$.
- Za $-4 < x < -\frac{2}{3}$ dobimo
$$\begin{aligned} -\frac{x+4}{3x+2} &< \frac{1}{x} \\ -(x+4)x &> 3x+2 \\ x^2+7x+2 &< 0. \end{aligned}$$
Ko upoštevamo $x^2+7x+2<0$ in $-4<x<-\frac{2}{3}$, dobimo, da velja za vsak x, ki zadošča $-4<x<-\frac{2}{3}$.
- Za $-\frac{2}{3}<x<0$ dobimo
$$\begin{aligned} \frac{x+4}{3x+2} &< \frac{1}{x} \\ (x+4)x &< 3x+2 \\ x^2+x-2 &< 0. \end{aligned}$$
Ko upoštevamo $x^2+x-2<0$ in $-\frac{2}{3}<x<0$, dobimo, da velja za vsak x, ki zadošča $-\frac{2}{3}<x<0$.
- Za $0<x$ dobimo
$$\begin{aligned} \frac{x+4}{3x+2} &< \frac{1}{x} \\ (x+4)x &> 3x+2 \\ x^2+x-2 &> 0. \end{aligned}$$
Ko upoštevamo $x^2+x-2>0$ in $0<x$ dobimo, da velja za vsak x, ki zadošča $1<x$.

Neenakost velja za vsak $x \in (-\infty,-\frac{2}{3})\cup(-\frac{2}{3},0)\cup(1,\infty)$.

∎

15. Reši neenačbi

(a) $|1-|x-1||<1$,

(b) $\left|\frac{1}{2-|x|}\right| \geq 1$.

Rešitev. Podobno kot v prejšnjih primerih bomo realna števila razdelili na podintervale.

(a)
- Za $1-|x-1| \geq 0$ dobimo
$$\begin{aligned} 1-|x-1| &< 1 \\ |x-1| &> 0 \end{aligned}$$
in to velja za vse realne $x \neq 1$. Ker pa imamo še pogoj $1-|x-1| \geq 0$ (to velja za $0 \leq x \leq 2$), dobimo, da velja za vsak x, ki zadošča $0 \leq x < 1$ ali $1 < x \leq 2$.
- Za $1-|x-1|<0$ dobimo
$$\begin{aligned} -1+|x-1| &< 1 \\ |x-1| &< 2 \end{aligned}$$
in to velja za $-1<x<3$. Ker pa imamo še pogoj $1-|x-1|<0$ (to velja za $x<0$ ali $2<x$), dobimo, da velja za vsak x, ki zadošča $-1<x<0$ ali $2<x<3$.

Neenakost velja za vsak $x \in (-1,1)\cup(1,3)$.

(b) • Za $2-|x|>0$ dobimo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2-|x|} &\geq 1\\ 1 &\geq 2-|x|\\ |x| &\geq 1\end{aligned}$$

in to velja za vse realne $x \leq -1$ ali $1 \leq x$. Ker pa imamo še pogoj $2-|x|>0$ (to velja za $-2<x<2$), dobimo, da velja za vsak x, ki zadošča $-2<x\leq -1$ ali $1\leq x<2$.

• Za $2-|x|<0$ dobimo

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2-|x|} &\geq 1\\ -1 &\leq 2-|x|\\ |x| &\leq 3\end{aligned}$$

in to velja za $-3<x<3$. Ker pa imamo še pogoj $2-|x|<0$ (to velja za $x<-2$ ali $2<x$), dobimo, da velja za vsak x, ki zadošča $-3\leq x<-2$ ali $2<x\leq 3$.

Neenakost velja za vsak $x \in [-3,-2)\cup(-2,-1]\cup[1,2)\cup(2,3]$.

∎

16. Reši neenačbi
   (a) $\left|\frac{x}{|x^2-1|-1}\right| < 1$,
   (b) $\left|\frac{x-|x^2+3|}{x-2}\right| < 2$

Rešitev.

(a) Rešujemo podobno kot predhodnem primeru. Računanje si lahko poenostavimo na naslednji način

$$|x| < ||x^2-1|-1|.$$

Izkaže se, da so rešitve neenačbe vsi $x \in (-\infty,-2)\cup(2,\infty)$.

(b) V tem primeru opazimo, da je $x^2+3>0$ za vsak $x\in\mathbb{R}$, zato si računanje za $x\in\mathbb{R}\backslash\{2\}$ tokrat poenostavimo na naslednji način

$$|x-x^2-3| < 2|x-2|.$$

Izkaže se, da je rešitev neenačbe vsak $x \in (\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2})$.

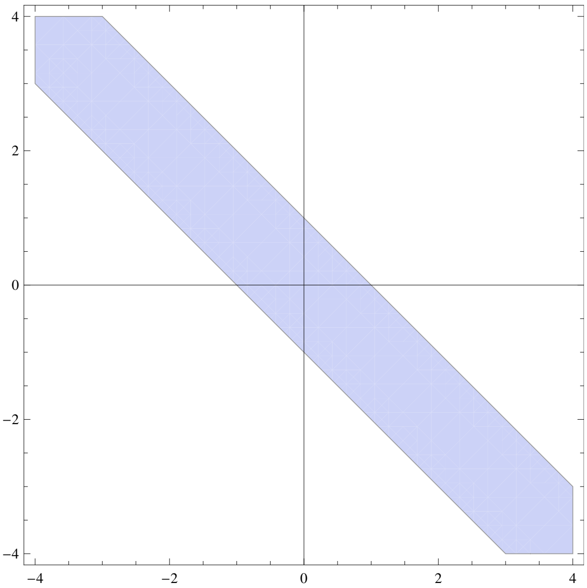
∎

17. V ravnini skiciraj naslednje množice točk
   (a) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x+y|\leq 1\}$,
   (b) $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y|\leq 1\}$,
   (c) $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x+y|+|x-y|\leq 2\}$,
   (d) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |2x-y|+|y-x+1|\leq 2\}$,
   (e) $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x^2-y^2|\leq 1\}$,
   (f) $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x^2-y|+|y-x|\leq 1\}$.

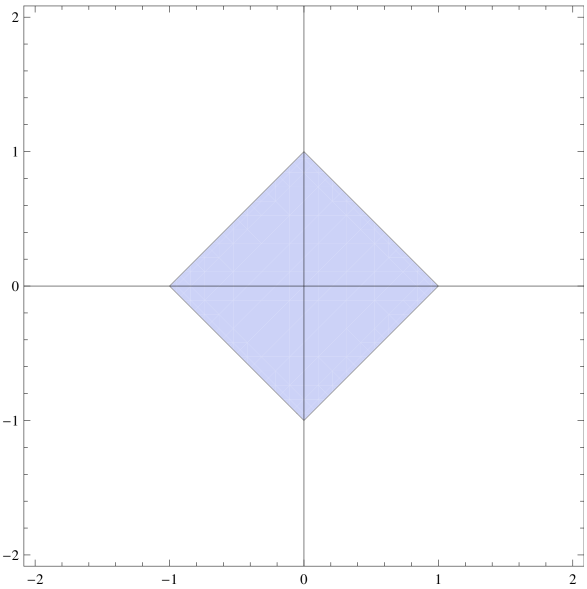
Rešitev.

(a) Rešujemo podobno kot v predhodnih nalogah. Računamo v dveh korakih. Če je $y\geq -x$, tedaj $y\leq 1-x$, če pa je $y\leq -x$, tedaj $-x-1\leq y$. To dvoje upoštevamo pri risanju slike 6.10.

(b) V tem primeru preuči štiri možnosti.
   i. Če $x\geq 0$ in $y\geq 0$, tedaj $x+y\leq 1$.
   ii. Če $x\geq 0$ in $y<0$, tedaj $x-y\leq 1$.
   iii. Če $x<0$ in $y\geq 0$, tedaj $-x+y\leq 1$.
   iv. Če $x<0$ in $y<0$, tedaj $-x-y\leq 1$.



Slika 6.10: Slika množice A.



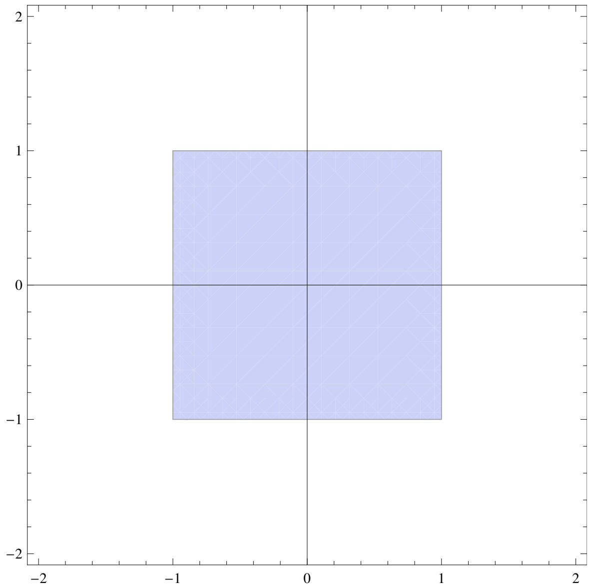
Slika 6.11: Slika množice B.

(c) Rešujemo podobno kot v (b).
(d) Rešujemo podobno kot v (b).
(e) Rešujemo podobno kot v (b).
(f) Rešujemo podobno kot v (b).

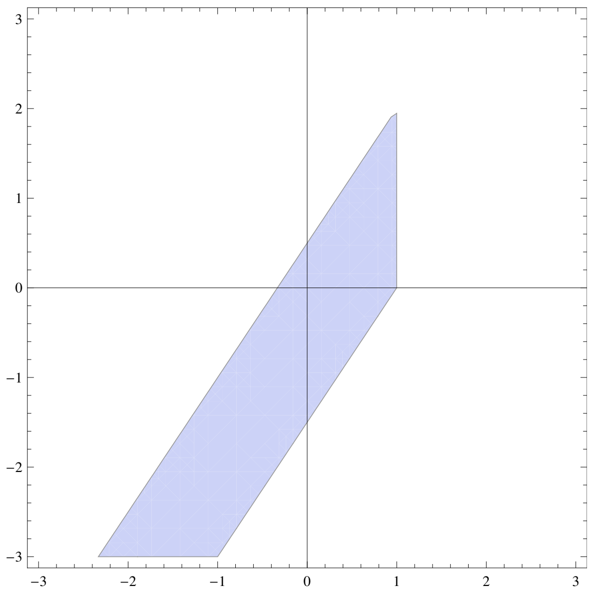
■

Kompleksna števila

1. Za podana kompleksna števila poišči $\mathscr{R}e(z)$, $\mathscr{I}m(z)$, $\bar{z}$, $|z|$.
   (a) $z = 3 + 2i$,
   (b) $z = -3i$,



Slika 6.12: Slika množice C.



Slika 6.13: Slika množice D.

(c) $z = \dfrac{1+i}{1-i} + 3 + i$,

(d) $z = \dfrac{5+10i}{1-2i} + \dfrac{10i}{1+3i}$.

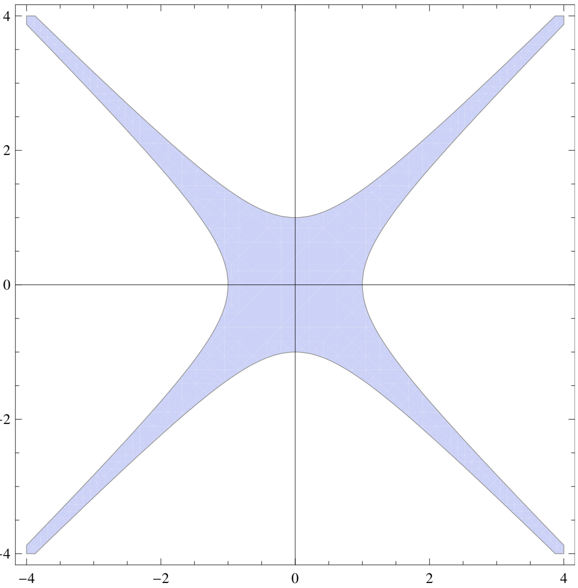
Rešitev.

(a) $\mathscr{R}e(3+2i) = 3,\ \mathscr{I}m(3+2i) = 2,\ \overline{3+2i} = 3-2i,\ |3+2i| = \sqrt{(3+2i)(3-2i)} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

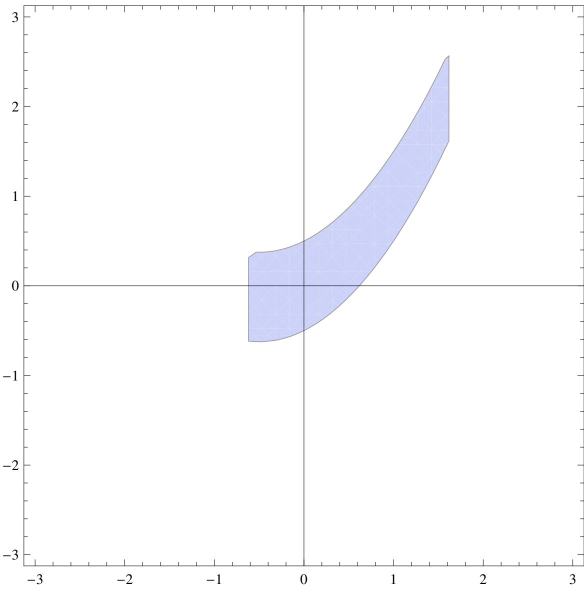
(b) $\mathscr{R}e(-3i) = 0,\ \mathscr{I}m(-3i) = -3,\ \overline{-3i} = 3i,\ |-3i| = \sqrt{(-3i)\cdot 3i} = \sqrt{9} = 3$.

(c) Najprej poenostavimo izraz

$$z = \frac{1+i}{1-i} + 3 + i = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} + 3 + i = \frac{2i}{2} + 3 + i = 3 + 2i.$$



Slika 6.14: Slika množice E.



Slika 6.15: Slika množice F.

$$\mathscr{R}e(3+2i)=3,\ \mathscr{I}m(3+2i)=2,\ \overline{3+2i}=3-2i,\ |3+2i|=\sqrt{13}.$$

(d) Najprej poenostavimo izraz

$$\begin{aligned} z &= \frac{5+10i}{1-2i}+\frac{10i}{1+3i}=\frac{5+10i}{1-2i}\cdot\frac{1+2i}{1+2i}+\frac{10i}{1+3i}\cdot\frac{1-3i}{1-3i} \\ &= -3+4i+i+3=5i. \end{aligned}$$

$$\mathscr{R}e(5i)=0,\ \mathscr{I}m(5i)=5,\ \overline{5i}=-5i,\ |5i|=\sqrt{5i\cdot(-5i)}=\sqrt{25}=5.$$

∎

2. Poenostavi izraza
   (a) $z=\dfrac{1}{i}-\dfrac{5i}{2-i}+i^3(1+i)$,

(b) $w = \left|\frac{(2+3i)^2}{1+i}\right| + \left|\frac{i^{15}}{i^{10}+2}\right|$.

Rešitev.

(a) $z = \frac{1}{i} - \frac{5i}{2-i} + i^3(1+i) = \frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i} - \frac{5i}{2-i}\cdot\frac{2+i}{2+i} - i(1+i) = -i+1-2i-i+1 = 2-4i.$

(b) $w = \left|\frac{(2+3i)^2}{1+i}\right| + \left|\frac{i^{15}}{i^{10}+2}\right| = \left|\frac{-5+12i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right| + \left|\frac{-i}{-1+2}\right| = \left|\frac{-5+12i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right| + 1 =$

$= \left|\frac{7+17i}{2}\right| + 1 = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{17}{2}\right)^2} + 1 = \frac{\sqrt{338}+2}{2} = \frac{13\sqrt{2}+2}{2}$

∎

3. Poišči vsa kompleksna števila, ki zadoščajo

(a) $\mathscr{Re}(z) + \mathscr{Im}(\bar{z}) = 0$,

(b) $\mathscr{Re}(z) + \mathscr{Im}(z) = 1$,

(c) $iz + z\bar{z} = \frac{3}{4} - i$,

(d) $|z - (3+4i)| = 2$,

Rešitev.

(a) Naj bo $z = a+bi$. Potem dobimo

$$\mathscr{Re}(a+bi) + \mathscr{Im}(\overline{a+bi}) = a - b = 0.$$

Iz tega sledi, da je $b = a$. Rešitev so vsi elementi množice

$$A = \{a + ai \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

(b) Naj bo $z = a+bi$. Potem dobimo

$$\mathscr{Re}(a+bi) + \mathscr{Im}(a+bi) = a + b = 1.$$

Iz tega sledi, da je $b = 1-a$. Rešitev so tako vsi elementi množice

$$B = \{a + (1-a)i \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

(c) Naj bo $z = a+bi$. Potem dobimo

$$i(a+bi) + (a+bi)(\overline{a+bi}) = ai - b + a^2 + b^2 = \frac{3}{4} - i,$$

od koder sledi sistem enačb

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - b &= \frac{3}{4} \\ a &= -1. \end{aligned}$$

Potrebno je izračunati b. Če v prvi enačbi upoštevamo $a^2 = 1$, dobimo

$$b^2 - b + \frac{1}{4} = \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = 0,$$

od koder sledi, da imamo eno rešitev $z = -1 + \frac{1}{2}i$.

(d) Naj bo $z = a+bi$. Potem dobimo

$$|(a+bi) - (3+4i)| = |(a-3) + (b-4)i| = \sqrt{(a-3)^2 + (b-4)^2} = 2,$$

od koder sledi

$$D = \{a + bi \mid a,b \in \mathbb{R},\ (a-3)^2 + (b-4)^2 = 4\}$$

Geometrijsko ta množica predstavlja krožnico s središčem (3,4) in polmerom 2.

∎

4. Poišči vsa kompleksna števila, ki zadoščajo
   (a) $z^2+4=0$,
   (b) $z^3=1-\sqrt{3}i$,
   (c) $z^4=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,
   (d) $z^7=2\sqrt{3}+2i$.

Rešitev. V večini primerov bomo uporabili polarni zapis kompleksnega števila.

(a) V tem primeru lahko direktno izračunamo

$$z^2=-4=4i^2,$$

od koder sledi, da imamo rešitivi $z_1=2i$ in $z_2=-2i$.

(b) Izračunajmo tako, da izračunamo r in φ.

$$r=|1-\sqrt{3}i|=\sqrt{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}=2$$
$$\tan\varphi=\frac{-\sqrt{3}}{1},\quad \varphi=\frac{5\pi}{3}$$

Velja

$$\begin{aligned} z_k&=\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{3}\right)\right)\\ &=\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right)\end{aligned}$$

za $k=0,1,2$. Tako dobimo

$$\begin{aligned} z_0&=\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{9}\right)\right)\\ z_1&=\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{9}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{9}\right)\right)\\ z_2&=\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{9}\right)+i\sin\left(\frac{17\pi}{9}\right)\right).\end{aligned}$$

(c) Izračunajmo r in φ:

$$r=\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}=1$$
$$\tan\varphi=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3},\quad \varphi=\frac{\pi}{3}$$

Velja

$$\begin{aligned} z_k&=\sqrt[4]{1}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3}\right)\right)\\ &=\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

za $k=0,1,2,3$. Vsak lahko sam izračuna konkretne vrednosti za $k=0,1,2,3$ (glej primer (b)).

(d) Izračunajmo r in φ:

$$r=\left|2\sqrt{3}+2i\right|=\sqrt{\left(2\sqrt{3}+2i\right)\left(2\sqrt{3}-2i\right)}=\sqrt{12+4}=4$$
$$\tan\varphi=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \varphi=\frac{\pi}{6}$$

Velja

$$
\begin{aligned}
z_k &= \sqrt[7]{4}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{7}\right)\right)\\
&= \sqrt[7]{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{42}+\frac{2k\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{42}+\frac{2k\pi}{7}\right)\right)
\end{aligned}
$$

za $k=0,1,2,3,4,5,6$. Vsak lahko sam izračuna konkretne vrednosti za $k=0,1,2,3,4,5,6$ (glej primer (b)).

∎

5. Izračunaj
   (a) $(1+\sqrt{3}i)^6$,
   (b) $(2\sqrt{3}-2i)^9$,
   (c) $(-45+45i)^{45}$,
   (d) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{2010}$.

   Rešitev. Uporabili bomo Moivreovo formulo.

   (a) Najprej izračunajmo r in φ.

$$
\begin{aligned}
r &= \left|1+\sqrt{3}i\right| = \sqrt{\left(1+\sqrt{3}i\right)\left(1-\sqrt{3}i\right)} = 2\\
\tan\varphi &= \frac{\sqrt{3}}{1},\ \ \varphi = \frac{\pi}{3}
\end{aligned}
$$

   Sedaj to upoštevajmo pri računu.

$$
(1+\sqrt{3}i)^6 = \left(2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^6 = 64\left(\cos\left(6\cdot\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(6\cdot\frac{\pi}{3}\right)\right) = 64
$$

   (b) Najprej izračunajmo r in φ.

$$
\begin{aligned}
r &= \left|2\sqrt{3}-2i\right| = \sqrt{\left(2\sqrt{3}-2i\right)\left(2\sqrt{3}+2i\right)} = 4\\
\tan\varphi &= \frac{-2}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \ \varphi = \frac{11\pi}{6}
\end{aligned}
$$

   Sedaj to upoštevajmo pri računu.

$$
\begin{aligned}
(2\sqrt{3}-2i)^9 &= \left(4\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)\right)^9 =\\
&= 262144\left(\cos\left(9\cdot\frac{11\pi}{6}\right)+i\sin\left(9\cdot\frac{11\pi}{6}\right)\right) = 262144i.
\end{aligned}
$$

   (c) Najprej izračunajmo r in φ.

$$
\begin{aligned}
r &= |-45+45i| = \sqrt{(-45+45i)(-45-45i)} = 45\sqrt{2}\\
\tan\varphi &= \frac{45}{-45} = -1,\ \ \varphi = \frac{3\pi}{4}
\end{aligned}
$$

   Sedaj to upoštevajmo pri računu.

$$
\begin{aligned}
(-45+45i)^{45} &= \left(45\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)\right)^{45} =\\
&= (45\sqrt{2})^{45}\left(\cos\left(45\cdot\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(45\cdot\frac{3\pi}{4}\right)\right) =\\
&= (45\sqrt{2})^{45}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right).
\end{aligned}
$$

(d) Najprej izračunajmo r in φ.

$$r=\left|\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}=1$$

$$\tan\varphi=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}},\quad \varphi=\frac{\pi}{4}$$

Sedaj to upoštevajmo pri računu.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{2010} &= \left(1\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^{2010}=\\ &=\left(\cos\left(2010\cdot\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(2010\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right)=i\end{aligned}$$

∎

6. Izračunaj
   (a) $z^2=(3-\sqrt{3}i)^3$
   (b) $z^6=(2-2i)^4$.

Rešitev. Uporabili bomo polarni zapis kompleksnega števila in Moivreovo formulo.

(a) Najprej izračunajmo r in φ.

$$r=\left|3-\sqrt{3}i\right|=\sqrt{\left(3-\sqrt{3}i\right)\left(3+\sqrt{3}i\right)}=2\sqrt{3}$$

$$\tan\varphi=\frac{-\sqrt{3}}{3},\quad \varphi=-\frac{\pi}{6}$$

Sedaj to upoštevajmo pri računu.

$$\begin{aligned}(3-\sqrt{3}i)^3 &= \left(2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\right)\right)^3=\\ &=24\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}+6k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}+6k\pi\right)\right)\end{aligned}$$

Direktno uporabimo formulo za iskanje korenov

$$\begin{aligned}z_k &= \sqrt{24\sqrt{3}}\left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+6k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+6k\pi}{2}\right)\right)\\ &=\sqrt{24\sqrt{3}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}+3k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+3k\pi\right)\right)\end{aligned}$$

za $k=0,1$. Konkretne rešitve za $k=0,1$ lahko bralec enostavno izračuna.

(b) Najprej izračunajmo r in φ.

$$r=|2-2i|=\sqrt{(2-2i)(2+2i)}=2\sqrt{2}$$

$$\tan\varphi=\frac{-2}{2}=-1,\quad \varphi=-\frac{\pi}{4}$$

Sedaj to upoštevajmo pri računu.

$$\begin{aligned}(2-2i)^4 &= \left(2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)\right)^4\\ &=64\left(\cos\left(-\pi+8k\pi\right)+i\sin\left(2\pi+8k\pi\right)\right)\end{aligned}$$

Direktno uporabimo formulo za iskanje korenov

$$\begin{aligned}z_k &= \sqrt[6]{64}\left(\cos\left(\frac{-\pi+8k\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi+8k\pi}{6}\right)\right)\\ &=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{4k\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{4k\pi}{3}\right)\right)\end{aligned}$$

za $k=0,1,2,3,4,5$. Konkretne rešitve za $k=0,1,2,3,4,5$ lahko vsak sam enostavno izračuna.

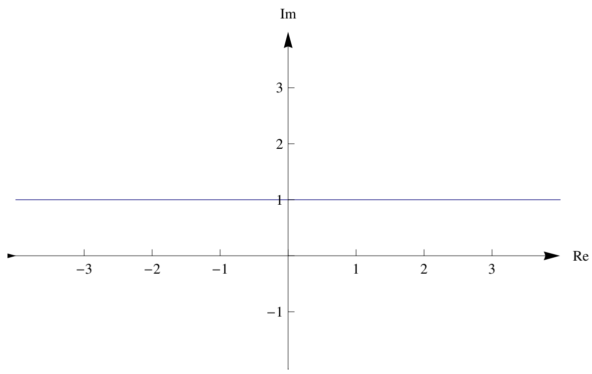
∎

7. V kompleksni ravnini skiciraj množico
   (a) $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathscr{R}e(iz) + \mathscr{I}m(\bar{z}) = -2\}$,
   (b) $B = \left\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2, -\frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \pi\right\}$,
   (c) $C = \{z \in \mathbb{C} : \mathscr{R}e(z^2) + z\bar{z} = 18\}$,
   (d) $D = \{z \in \mathbb{C} : |2z - i(z+1)| \leq \sqrt{20}\}$.

Rešitev. V vseh primerih naj bo $z = a + bi$.

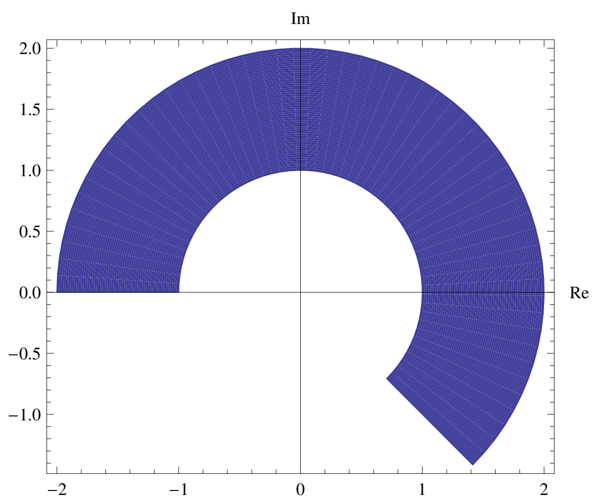
(a)

$$\begin{aligned} \mathscr{R}e(iz) + \mathscr{I}m(\bar{z}) &= -2 \\ \mathscr{R}e(i(a+bi)) + \mathscr{I}m(a-bi) &= -2 \\ -b - b &= -2 \\ b &= 1. \end{aligned}$$



Slika 6.16: Slika množice A.

(b) Sliko narišemo direktno, ker imamo vse podatke (sicer si pomagaj s polarnim zapisom kompleksnega števila).

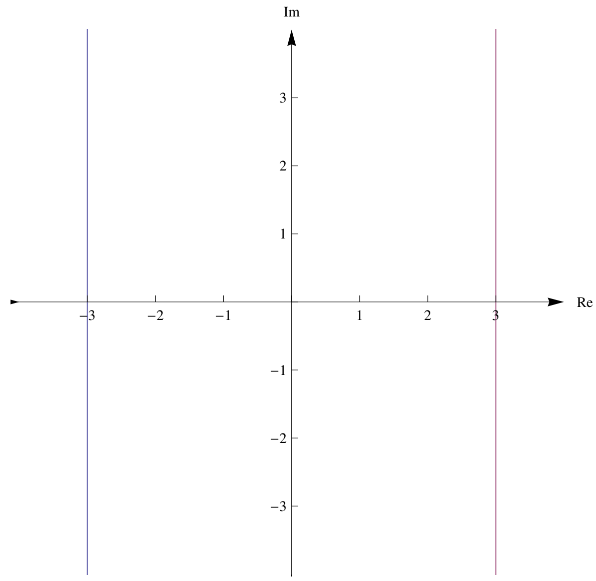


Slika 6.17: Slika množice B.

(c)

$$
\begin{aligned}
\mathscr{R}e(z^2)+|z\bar{z}| &= 18\\
\mathscr{R}e((a+bi)^2)+(a+bi)(a-bi) &= 18\\
a^2-b^2+a^2+b^2 &= 18\\
a^2 &= 9
\end{aligned}
$$

in to velja za $a=-3$ ali $a=3$.



Slika 6.18: Slika množice C ($a=-3$ ali $a=3$, b poljuben.)

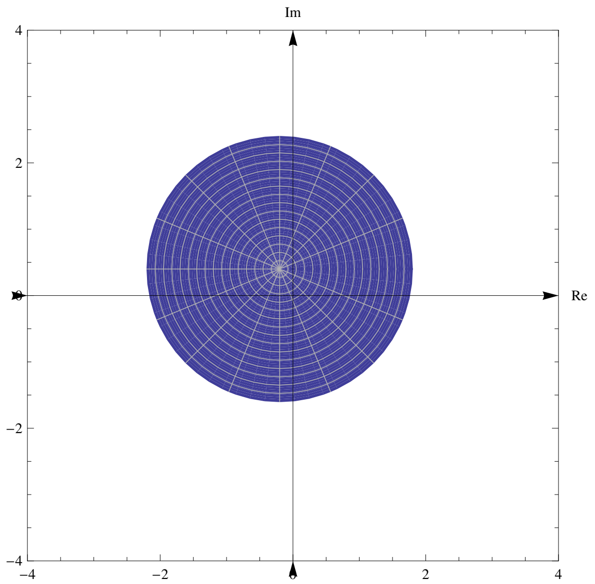
(d)

$$
\begin{aligned}
|2(a+bi)-i(a+bi+1)| &\leq \sqrt{20}\\
|(2a+b)+(2b-a-1)i| &\leq \sqrt{20}\\
\sqrt{(2a+b)^2+(2b-a-1)^2} &\leq \sqrt{20}\\
(2a+b)^2+(2b-a-1)^2 &\leq 20\\
4a^2+4ab+b^2+4b^2+a^2+1-4ab-4b+2a &\leq 20\\
5a^2+2a+5b^2-4b+1 &\leq 20\\
a^2+\frac{2}{5}a+b^2-\frac{4}{5}b+\frac{1}{5} &\leq 4\\
\left(a+\frac{1}{5}\right)^2-\frac{1}{25}+\left(b-\frac{2}{5}\right)^2-\frac{4}{25}+\frac{1}{5} &\leq 4\\
\left(a+\frac{1}{5}\right)^2+\left(b-\frac{2}{5}\right)^2 &\leq 4.
\end{aligned}
$$

■

8. V kompleksni ravnini nariši množico

$$A=\{z\in\mathbb{C}\mid |2zi-\bar{z}+\mathscr{I}m(4z)|\geq\sqrt{15}\}.$$



Slika 6.19: Slika množice D.

Rešitev. Naj bo $z = a + bi$.

$$\begin{aligned}
|2zi - \bar{z} + \mathscr{I}m(4z)| &\geq \sqrt{15} \\
|(-a+2b) + (2a+b)i| &\geq \sqrt{15} \\
\sqrt{(-a+2b)^2 + (2a+b)^2} &\geq \sqrt{15} \\
\sqrt{5a^2 + 5b^2} &\geq \sqrt{15}.
\end{aligned}$$

Posledično

$$a^2 + b^2 \geq 3.$$

Torej vse izven odprtega kroga s središčem v točki $(0,0)$ in radijem $\sqrt{3}$.

∎

9. V kompleksni ravnini čimbolj natančno nariši množico

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathscr{I}m(z^3) \leq 0\}.$$

Rešitev. Imamo dve naravni možnosti reševanja.

(a) Naj bo $z = a + bi$. Torej je v našem primeru potrebno rešiti neenačbo

$$(3a^2 - b^2)b \leq 0.$$

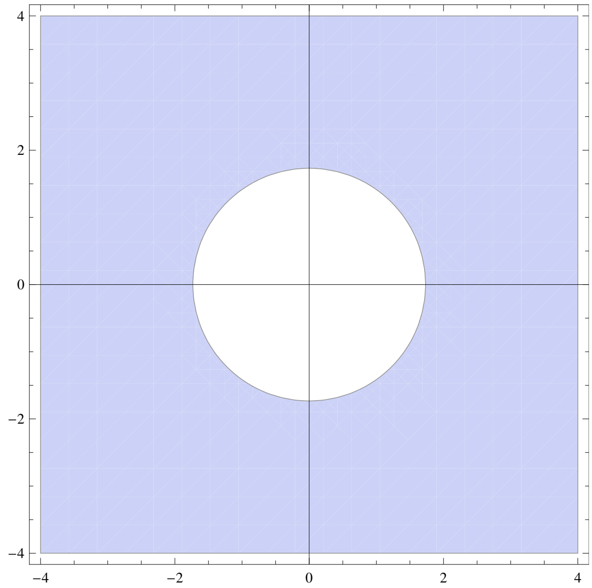
Ta neenačba je velja natanko tedaj, ko je $3a^2 - b^2 \leq 0$ in $b \geq 0$ ali $3a^2 - b^2 \geq 0$ in $b \leq 0$. Za lažje risanje zapišimo $\sqrt{3}|a| \leq |b|$ in $b \geq 0$ ali $\sqrt{3}|a| \geq |b|$ in $b \leq 0$. Glej sliko 6.21.

(b) Naj bo $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Upoštevamo Moivreovo formulo in posledično dobimo neenačbo

$$r^3 \sin(3\varphi) \leq 0.$$

Ker je $r \geq 0$, je dovolj obravnavati $\sin(3\varphi) \leq 0$, kar je ekvivalentno

$$-\pi + 2k\pi \leq 3\varphi \leq 2k\pi,$$

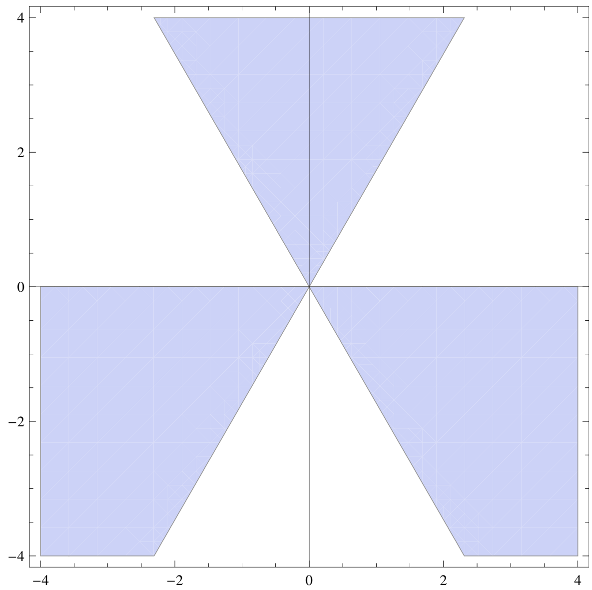


Slika 6.20: Slika množice A.

oziroma

$$\frac{-\pi+2k\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{2k\pi}{3},$$

kjer je $k \in \mathbb{Z}$ poljuben.



Slika 6.21: Slika množice A.

∎

10. V množici kompleksnih števil reši enačbo
    (a) $|z|+z=2+i$,
    (b) $\bar{z}=z^2$,
    (c) $iz^2+(-4-i)z=4i-2$,
    (d) $(1+i)z^3+1-i=0$,

(e) $z^4+6z^3+9z^2+100=0$, če je $z_1=1+2i$,
(f) $z^9+2iz^5-z=0$.

Rešitev. Uporabili bomo različne pristope reševanja.

(a) Uporabimo $z=a+ib$ in dobimo

$$\sqrt{a^2+b^2}+a+ib=2+i,$$

od koder sledi sistem enačb

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+b^2}+a&=2\\ b&=1.\end{aligned}$$

Iz enačbe $\sqrt{a^2+1}+a=2$ je potrebno izračunati a. Dobimo

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{a^2+1}\right)^2&=(2-a)^2\\ a^2+1&=4-4a+a^2\\ 4a&=3.\end{aligned}$$

Iz tega sledi, da je $a=\frac{3}{4}$ in zato imamo enolično rešitev enačbe $z=\frac{3}{4}+i$.

(b) Podobno kot v (a) uporabimo $z=a+ib$:

$$a-bi=a^2-b^2+2abi.$$

Iz tega dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned}a&=a^2-b^2\\ -b&=2ab.\end{aligned}$$

Glede na realno vrednost b obravnavajmo dve možnosti.

- Če je $b=0$, dobimo
$$a=a^2$$
in to velja, ko je $a=0$ ali $a=1$. Posledično smo dobili $z_1=0$ in $z_2=1$.
- Če je $b\neq 0$, iz druge enačbe dobimo, da je $a=-\frac{1}{2}$. Iz prve enačbe izračunajmo še b.
$$-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-b^2$$
in iz tega sledi, da je $b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Posledično dobimo $z_3=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ in $z_4=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Dobili smo štiri rešitve enačbe: $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ in $z_4=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(c) Enačbo preoblikujemo na naslednji način:

$$\begin{aligned}iz^2+(-4-i)z&=4i-2\\ z^2+\frac{-4-i}{i}z+\frac{2-4i}{i}&=0\\ z^2+(-1+4i)z+(-4-2i)&=0\end{aligned}$$

Sedaj uporabimo formulo za iskanje ničel kvadratne enačbe

$$z_{1,2}=\frac{1-4i\pm\sqrt{(-1+4i)^2+4(4+2i)}}{2}=\frac{1-4i\pm 1}{2}$$

in iz tega sledi $z_1=1-2i$ in $z_2=-2i$.

(d) Enačbo preoblikujemo na naslednji način:

$$\begin{aligned}(1+i)z^3+1-i&=0\\ z^3&=\frac{-1+i}{1+i}\\ z^3&=i\end{aligned}$$

Sedaj uporabimo polarni zapis kompleksnega števila za $r = 1$ in $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

(e) Pri reševanju te enačbe se bomo sklicali na trditev, da kompleksni koreni polinomske enačbe z realnimi koeficienti nastopajo v konjugiranih parih, zato je v našem primeru drugi koren $z_2 = 1-2i$. Najprej izračunajmo $(z-(1+2i))(z-(1-2i)) = z^2-2z+5$, sedaj pa delimo polinoma

$$(z^4+6z^3+9z^2+100)\ :(z^2-2z+5)\ = z^2+8z+20.$$

Poiskati je potrebno le še rešitve kvadratne enačbe $z^2+8z+20$. Velja

$$z_{3,4} = \frac{-8\pm\sqrt{64-80}}{2} = -4\pm 2i$$

in zato $z_3 = -4+2i$ in $z_4 = -4-2i$.

(f) Enačbo preoblikujemo na naslednji način

$$z^9+2iz^5-z = z(z^8+2iz^4-1) = z(z^4+i)^2.$$

Iz tega zapisa sledi, da je potrebno rešiti $z = 0$ in $z^4+i = 0$. Seveda je $z_1 = 0$. Enačbo $z^4+i = 0$ bomo rešili s pomočjo polarnega zapisa kompleksnega števila.

$$r = |-i| = \sqrt{-i\cdot i} = 1, \quad \varphi = \frac{3\pi}{2}.$$

Sledi

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[4]{1}\left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{4}\right)\right) \\ &= \cos\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

za $k = 0,1,2,3$ (vsak lahko sam vstavi podatke). Skupaj smo tako dobili pet enoličnih rešitev. ∎

11. V množici kompleksnih števil poišči vse rešitve enačbe

$$4z^4-16z^3+61z^2-90z+50 = 0,$$

če veš, da je ena od rešitev $z_1 = 1+3i$. Ali ležijo vse rešitve na isti krožnici s središčem v izhodišču? Utemelji!

Rešitev. Upoštevamo dejstvo, da tudi v tem primeru kompleksni koreni enačbe nastopajo v konjugiranih parih. Torej je tudi $z_2 = 1-3i$ rešitev enačbe. Tako dobimo $(z-1-3i)(z-1+3i) = z^2-2z+10$. Sedaj enačbo delimo z $z^2-2z+10$ in dobimo

$$4z^2-8z+5 = 0.$$

Ničle v tem primeru so rešitve enačbe $z_3 = \frac{2+i}{2}$, $z_4 = \frac{2-i}{2}$. Hitro opazimo, da rešitve začetne enačbe ne ležijo na isti krožnici. ∎

12. Reši sistem enačb
   (a) $|z+1+i| = 2,\ \mathscr{R}e(z+1+i) = 0,$
   (b) $|(1+i)\bar{z}| = 2,\ \mathscr{R}e((1+i)\bar{z}) = 0.$

Rešitev.

(a) Naj bo $z = a + ib$. Potem dobimo sistem enačb

$$|a+ib+1+i| = \sqrt{(a+1)^2+(b+1)^2} = 2$$
$$\mathscr{R}e(a+ib+1+i) = a+1 = 0.$$

Iz druge enačbe sledi, da je $a = -1$. Ker je $a = -1$, iz prve enačbe sledi

$$\sqrt{(b+1)^2} = 2$$

in zato je $b_1 = -3$ in $b_2 = 1$. Tako dobimo rešitvi $z_1 = -1+i$ in $z_2 = -1-3i$.

(b) Naj bo $z = a - ib$. Potem dobimo sistem enačb

$$|(1+i)(a-ib)| = |a+b+i(a-b)| = \sqrt{(a+b)^2+(a-b)^2} = 2$$
$$\mathscr{R}e((1+i)(a-ib)) = \mathscr{R}e(a+b+i(a-b)) = a+b = 0.$$

Iz druge enačbe sledi, da je $a = -b$. Upoštevamo to pri prvi enačbi in dobimo

$$\sqrt{(b+b)^2} = \sqrt{(2b)^2} = 2$$

in zato je $b_1 = -1$ in $b_2 = 1$. Tako dobimo rešitvi $z_1 = 1-i$ in $z_2 = -1+i$. ∎

13. Reši enačbo $z_1 + z_2 = 1 - i$, če je $Arg(z_1) = \frac{\pi}{6}$ in $Arg(z_2) = -\frac{\pi}{3}$.
Rešitev. Naj bo $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ in $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Upoštevamo $Arg(z_1) = \frac{\pi}{6}$ in $Arg(z_2) = -\frac{\pi}{3}$ in dobimo

$$z_1 = r_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$
$$z_2 = r_2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Vstavimo v $z_1 + z_2 = 1 - i$

$$r_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) + r_2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i.$$

Posledično dobimo sistem enačb

$$r_1\frac{\sqrt{3}}{2} + r_2\frac{1}{2} = 1$$
$$r_1\frac{1}{2} - r_2\frac{\sqrt{3}}{2} = -1,$$

od koder sledi $r_1 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ in $r_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Tako je $z_1 = \frac{3-\sqrt{3}+i(-1+\sqrt{3})}{4}$ in $z_2 = \frac{1+\sqrt{3}-i(\sqrt{3}+3)}{4}$. ∎

14. Reši enačbo $\mathscr{I}m(z_1 + z_2 + z_3) = 0$, če je $|z_1| = 1$, $|z_3| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $Arg(z_1) = Arg(z_3) = \frac{\pi}{6}$ in $Arg(z_2) = -\frac{\pi}{3}$.
Rešitev. Rešujemo podobno kot v prejšnji nalogi.
Naj bo $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ in $z_3 = r_3(\cos\varphi_3 + i\sin\varphi_3)$. Ko upoštevamo $Arg(z_1) = Arg(z_3) = \frac{\pi}{6}$ in $Arg(z_2) = -\frac{\pi}{3}$, dobimo

$$z_1 = r_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$
$$z_2 = r_2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$z_3 = r_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right).$$

Sedaj upoštevajmo še $|z_1| = 1$ in $|z_3| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ in zato je

$$
\begin{aligned}
|z_1| &= \left| r_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) \right| = |r_1| \cdot 1 = 1 \\
|z_3| &= \left| r_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) \right| = |r_3| \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

Iz tega sledi, da je $r_1 = 1$ in $r_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tako dobimo kompleksni števili $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ in $z_3 = \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$. Upoštevajmo še $\mathscr{I}m(z_1 + z_2 + z_3) = 0$

$$\mathscr{I}m(z_1 + z_2 + z_3) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} - r_2\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Sledi, da je $r_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}$. Tako je $z_2 = \frac{3+2\sqrt{3}}{12} - \frac{6+3\sqrt{3}}{12}i$. ∎

15. Izračunaj

$$|1+z|^2 + |1-z|^2$$

pri pogoju, da je z kompleksno število in velja $|z| = 1$.
Rešitev. Vemo $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = 1$. Zato

$$
\begin{aligned}
|1+z|^2 + |1-z|^2 &= (1+a)^2 + b^2 + (1-a)^2 + b^2 \\
&= 1 + 2a + a^2 + b^2 + 1 - 2a + a^2 + b^2 \\
&= 2 + 2(a^2+b^2) \\
&= 2 + 2\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

∎

16. Dokaži, da za poljubno kompleksno število oblike $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, velja

$$\frac{|a|+|b|}{\sqrt{2}} \leq |z|.$$

Rešitev. Preoblikujemo

$$
\begin{aligned}
\frac{|a|+|b|}{\sqrt{2}} &\leq \sqrt{a^2+b^2} \\
|a|+|b| &\leq \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} \\
(|a|+|b|)^2 &\leq 2(a^2+b^2) \\
|a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 &\leq 2|a|^2 + 2|b|^2 \\
0 &\leq |a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 \\
0 &\leq (|a|-|b|)^2
\end{aligned}
$$

in to velja za vsak $a, b \in \mathbb{R}$. ∎

17. Poišči kompleksno število, ki je enako oddaljeno od kompleksnih števil $z_1 = i$, $z_2 = 2 - i$ in $z_3 = 3 + 2i$.
Rešitev. Naj bo $z = a + bi$ iskano število. Razdaljo med dvema kompleksnima številoma računamo s pomočjo absolutne vrednosti razlike danih kompleksnih števil. V našem primeru tako dobimo

$$|z - z_1| = |z - z_2| = |z - z_3|.$$

Sedaj si nastavimo dve enačbi

$$
\begin{aligned}
|a + bi - i| &= |a + bi - 2 + i| \\
|a + bi - i| &= |a + bi - 3 - 2i|
\end{aligned}
$$

oziroma

$$
\begin{aligned}
a^2+(b-1)^2 &= (a-2)^2+(b+1)^2\\
a^2+(b-1)^2 &= (a-3)^2+(b-2)^2
\end{aligned}
$$

Po krajšanju kvadratnih členov dobimo sistem linearnih enačb z rešitvijo $z=\frac{7+3i}{4}$. ∎

18. Poišči vsa kompleksna števila z, za katera velja

$$z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R}.$$

Vse računsko utemelji in rezultat predstavi v kompleksni ravnini.

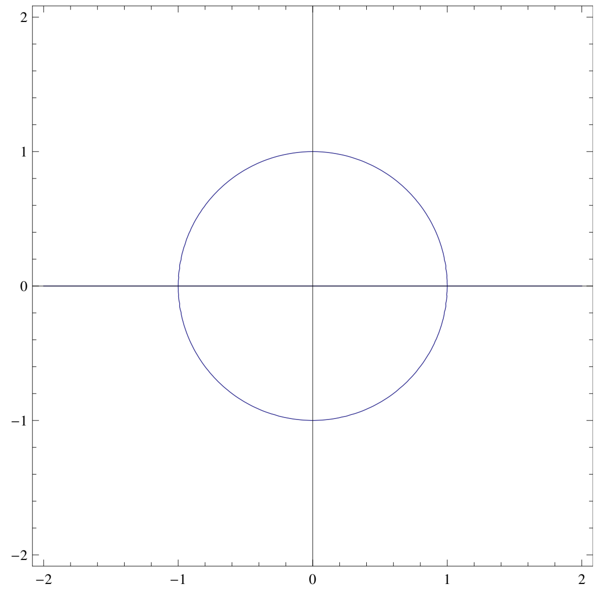
Rešitev. Seveda je $z\neq 0$, saj sicer ulomek ni dobro definiran.
Naj bo $z=a+bi$. Torej v našem primeru je

$$z+\frac{1}{z}=\frac{z^2+1}{z}=\frac{z^2\bar{z}+\bar{z}}{|z|^2}=\frac{(a^2+b^2)a+(a^2+b^2)bi+a-bi}{a^2+b^2}.$$

To število bo realno, če je

$$(a^2+b^2-1)b=0.$$

Iz tega sledi, da so to vsa kompleksna števila, ki ležijo na enotski krožnici in vsa kompleksna števila, ki ležijo na realni osi brez koordinatnega izhodišča. ∎



Slika 6.22: Kompleksna števila, ki zadoščajo $z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R}$.

Realne funkcije

1. Kateri od spodnjih predpisov, ki so podani s pomočjo grafa, je preslikava:
   (a) $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4\}$, $\Gamma(f)=\{(1,4),(2,4),(3,1),(4,2)\}$,
   (b) $g:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4\}$, $\Gamma(g)=\{(1,4),(2,1),(2,3),(3,2),(4,4)\}$,
   (c) $h:\{1,2,3,4,5,6\}\to\{1,2,3,4\}$, $\Gamma(h)=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$,
   (d) $k:\{1,2,3,4\}\to\mathbb{N}$, $\Gamma(k)=\{(1,5),(2,6),(3,1),(3,4),(4,4),(4,6)\}$?

   Rešitev.
   (a) f je preslikava.

(b) g ni preslikava, saj številu 2 priredi dva elementa (1 in 3).
(c) h je preslikava.
(d) k ni preslikava, saj številu 3 priredi dva elementa (1 in 4) in številu 4 priredi dva elementa (4 in 6).

■

2. Kateri od naslednjih predpisov je preslikava
(a) $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y = x^4 - x^2$,
(b) $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y = \sqrt{x^4 + x^2}$,
(c) $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y^2 = x^2 + x + 1$,
(d) $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+,\ y^2 = x^2 + x + 1$?

Rešitev.
(a) Je.
(b) Je.
(c) Ni (glej kodomeno).
(d) Je (glej kodomeno).

■

3. Preveri injektivnost in surjektivnost za naslednje preslikave
(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = x^2$,
(b) $f_2 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R},\ f_2(x) = x^2$,
(c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+,\ f_3(x) = x^2$,
(d) $f_4 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+,\ f_4(x) = x^2$.

Rešitev.
(a) Ni injektivna, ni surjektivna.
(b) Je injektivna, ni surjektivna.
(c) Ni injektivna, je surjektivna.
(d) Je injektivna, je surjektivna.

■

4. Kateri od naslednjih predpisov je injektivna oziroma surjektivna preslikava:
(a) $f : \{1,2,3,4\} \to \{-2,-1,1,2\},\ \Gamma)f) = \{(1,1),(2,-1),(3,2),(4,-2)\}$,
(b) $g : \{1,2,3,4\} \to \{-2,-1,1,2\},\ \Gamma(g) = \{(1,-1),(2,-2),(3,-1),(4,2)\}$,
(c) $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0,\ h(x) = |x|$,
(d) $k : \mathbb{N} \to \mathbb{Q},\ k(n) = \frac{1}{n}$,
(e) $o : \mathbb{Q} \to \mathbb{R},\ o(x) = \sqrt[3]{x^2}$,
(f) $p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}_0,\ p(x) = [x]$ (p predstavlja celi del od x; npr. $[\pi] = 3$ in $[-e] = -3$),
(g) $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ r(x) = \sqrt[3]{x^5}$,
(h) $s : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ s(x) = e^{x^2-1}$?

Rešitev.
(a) f je injektivna in surjektivna (preveri vse elemente).
(b) g ni injektivna (v -1 se slikata 1 in 3) in ni surjektivna (v 1 se nič ne slika).
(c) h ni injektivna (v 1 se slikata 1 in -1), je pa surjektivna (vzamemo kar pozitiven x: $x = |x|$).
(d) k je injektivna ($\frac{1}{n} \neq \frac{1}{m}$, če $m \neq n$) in ni surjektivna (npr. v 0 se nič ne slika).
(e) o ni injektivna (npr. $o(1) = 1 = o(-1)$) in ni surjektivna (npr. v -1 se nič ne slika).
(f) p ni injektivna (npr. $[\frac{3}{2}] = [1] = 1$), je pa surjektivna (za $n \in \mathbb{N}$ je $[n] = n$, za 0 pa $[\frac{1}{2}] = 0$).
(g) r je injektivna ($\sqrt[3]{x_1^5} \neq \sqrt[3]{x_2^5}$, če $x_1 \neq x_2$) in je surjektivna (če je $r(x) = y$, $x = \sqrt[5]{y^3}$).
(h) s je injektivna (($e^{x_1^2-1} \neq e^{x_2^2-1}$, če $x_1 \neq x_2$)) in ni surjektivna (npr. v e^{-2} se nič ne slika).

■

5. Kateri od naslednjih predpisov je bijektivna preslikava:
(a) $f : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\},\ \Gamma(f) = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$,
(b) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ g(n) = 3n^3$,
(c) $h : \mathbb{R}^+ \to (1,\infty),\ h(x) = \sqrt{x+1}$,
(d) $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ k(x) = 4x^4$.

Rešitev.
(a) Je bijektivna (preveri, da je injektivna in surjektivna).
(b) Ni bijektivna, ker ni surjektivna (npr. 1 nima originala).
(c) Je bijektivna (injektivnost: $\sqrt{x_1+1} \neq \sqrt{x_2+1}$, če je $x_1 \neq x_2$; surjektivnost: če je $h(x) = y$, $x = y^2 - 1$).
(d) Ni bijektivna, ker ni injektivna (npr. $k(-1) = 4 = k(1)$).

∎

6. Preslikava $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je podana s predpisom:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & ; \quad n \text{ je sod} \\ 3n+1 & ; \quad n \text{ je lih.} \end{cases}$$

Ali je preslikava f injektivna oziroma surjektivna?
Rešitev. Preslikava f ni injektivna (glej kam se slikata števili 1 in 8), je pa surjektivna, saj za vsako število m velja $f(2m) = m$. ∎

7. Naj $\mathbb{Z}_7$ predstavlja množico ostankov pri deljenju s številom 7 in $A = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$. Če je mogoče, konstruiraj preslikavo iz $\mathbb{Z}_7 \to A$, ki je:
(a) injektivna,
(b) surjektivna,
(c) bijektivna.
Rešitev.
(a) Da, npr. preslikava f, ki ji pripada graf $\Gamma(f) = \{(0,a),(1,b),(2,c),(3,d),(4,e),(5,f),(6,g)\}$.
(b) Ne, ker je $|A| = 8$ in $|\mathbb{Z}_7| = 7$.
(c) Ne, glej (b).

∎

8. Ali je funkcija $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, ki je podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \quad x \in [0,\infty) \cap \mathbb{Q} \\ \sqrt{2}x & ; \quad x \in [0,\infty) \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}), \end{cases}$$

injektivna oziroma surjektivna. Utemelji!
Rešitev. Ni injektivna, saj je $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = f(1)$, in ni surjektivna, saj ne obstaja število x, da bi zanj veljalo $f(x) = \sqrt{2}$. ∎

9. Izračunaj obratne preslikave, če obstajajo
(a) $f : \{2,3,4,6\} \to \{1,2,3,4\}$, $\Gamma(f) = \{(2,1),(3,1),(4,2),(6,3)\}$,
(b) $g : \{2,3,4,6\} \to \{1,2,3,4\}$, $\Gamma(g) = \{(2,1),(3,4),(4,2),(6,3)\}$,
(c) $h : \{2,3,4,6\} \to \{1,2,3,4,5\}$, $\Gamma(h) = \{(2,1),(3,4),(4,2),(6,5)\}$,
(d) $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k(x) = \frac{x}{2} - 1$,
(e) $o : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $o(x) = x^2 - 6x + 8$,
(f) $p : (-\infty,3] \to [-1,\infty)$, $p(x) = x^2 - 6x + 8$,
(g) $r : [3,\infty) \to [-1,\infty)$, $r(x) = x^2 - 6x + 8$,
(h) $s : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{1\}$, $s(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.
Rešitev.
(a) f^{-1} ne obstaja, ker ni injektivna.
(b) $g^{-1} = \{(1,2),(2,4),(3,6),(4,3)\}$.
(c) h^{-1} ne obstaja, ker ni surjektivna.
(d) $k^{-1}(x) = 2x + 2$.
(e) o^{-1} ne obstaja, ker ni niti injektivna niti surjektivna.

(f) Izpeljimo p^{-1} na naslednji način

$$\begin{aligned} y^2-6y+8&=x\\ (y-3)^2-9&=x-8\\ (y-3)^2&=x+1\\ y-3&=\pm\sqrt{x+1}\\ y&=3\pm\sqrt{x+1}. \end{aligned}$$

Upoštevamo, da $p:(-\infty,3]\to[-1,\infty)$ in dobimo $p^{-1}(x)=3-\sqrt{x+1}$.

(g) r^{-1} izpeljemo podobno kot p^{-1}. Upoštevati je le potrebno, da $r:[3,\infty)\to[-1,\infty)$ in zato dobimo $r^{-1}(x)=3+\sqrt{x+1}$.

(h) Izpeljimo s^{-1} na naslednji način

$$\begin{aligned} \frac{y+1}{y-1}&=x\\ y+1&=x(y-1)\\ y-xy&=-x-1\\ y&=\frac{-x-1}{1-x}\\ y&=\frac{x+1}{x-1}. \end{aligned}$$

Dobimo, da je $s^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

∎

10. Določi množici $X,Y\subset\mathbb{R}$ tako, da bo $f:X\to Y$, $f(x)=\frac{x-1}{x-2}$, bijektivna funkcija in nato izračunaj f^{-1}.
Rešitev. Izračunajmo najprej f^{-1}

$$\begin{aligned} \frac{y-1}{y-2}&=x\\ y-1&=x(y-2)\\ y-xy&=1-2x\\ y&=\frac{2x-1}{x-1}. \end{aligned}$$

S pomočjo tega dobimo $X=\mathbb{R}\backslash\{2\}$, $Y=\mathbb{R}\backslash\{1\}$ in $f^{-1}(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$. ∎

11. Dani sta množici $X=[1,\infty)$ in $Y=(0,2]$. Ali obstaja bijektivna preslikava f, ki slika X v Y?
Rešitev. Da, obstaja. Preveri, da funkcija s prepisom $f(x)=\frac{2}{x}$ zadošča temu pogoju. ∎

12. Izračunaj kompozituma $f\circ g$ in $g\circ f$, če je
   (a) $f:\{1,2,3,4,5\}\to\{a,b,c,d,e\}$, $\Gamma(f)=\{(1,c),(2,d),(3,a),(4,e),(5,b)\}$,
   $g:\{a,b,c,d,e\}\to\{1,2,3,4,5\}$ $\Gamma(g)=\{(a,1),(b,3),(c,2),(d,5),(e,4)\}$,
   (b) $f:\{1,2,3,4\}\to\{a,b,c,d,e\}$, $\Gamma(f)=\{(1,d),(2,a),(3,c),(4,b)\}$,
   $g:\{a,b,c,d,e\}\to\{1,2,3,4\}$ $\Gamma(g)=\{(a,1),(b,2),(c,3),(d,4),(e,2)\}$,
   (c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^3$,
   (d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$, $g:\mathbb{R}\to[1,\infty)$, $g(x)=x^2+1$.

   Ali obstajajo inverzi kompozitumov?
   Rešitev.
   (a) Izračunajmo: $f\circ g:\{a,b,c,d,e\}\to\{a,b,c,d,e\}$, $\Gamma(f\circ g)=\{(a,c),(b,a),(c,d),(d,b),(e,e)\}$, $g\circ f:\{1,2,3,4,5\}\to\{1,2,3,4,5\}$, $\Gamma(g\circ f)=\{(1,2),(2,5),(3,1),(4,4),(5,3)\}$, inverza obstajata $\Gamma((f\circ g)^{-1})=\{(a,b),(b,d),(c,a),(d,c),(e,e)\}$, $\Gamma((g\circ f)^{-1})=\{(1,3),(2,1),(3,5),(4,4),(5,2)\}$.

(b) Izračunajmo: $f \circ g : \{a,b,c,d,e\} \to \{a,b,c,d,e\}$, $f \circ g = \{(a,d),(b,a),(c,c),(d,b),(e,a)\}$, $g \circ f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$, $g \circ f = \{(1,4),(2,1),(3,3),(4,2)\}$, $(f \circ g)^{-1}$ ne obstaja, $(g \circ f)^{-1}$ pa obstaja, $\Gamma((g \circ f)^{-1}) = \{(4,1),(1,2),(3,3),(2,4)\}$.

(c) Izračunajmo: $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = x^3 + 1$, $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = (x+1)^3$, $(f \circ g)^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$, $(g \circ f)^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} - 1$.

(d) Izračunajmo: $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = 2(x^2+1) - 1$, $g \circ f : \mathbb{R} \to [1,\infty)$, $(g \circ f)(x) = (2x-1)^2 + 1$, inverza kompozitumov ne obstajata.

∎

13. Ali sta si preslikavi f, $f : [0,\infty) \to [-1,\infty)$, $f(x) = x^2 - 1$, in g, $g : [-1,\infty) \to [0,\infty)$, $g(x) = \sqrt{x+1}$, inverzni?

Rešitev. Da, saj je

$$f \circ g : [-1,\infty) \to [-1,\infty),\ (f \circ g)(x) = (\sqrt{x+1})^2 - 1 = x,$$

in

$$g \circ f : [0,\infty) \to [0,\infty),\ (g \circ f)(x) = \sqrt{(x^2-1)+1} = |x| = x.$$

∎

14. Določi naravno definicijsko območje realnih funkcij realne spremenljivke:

(a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$,

(b) $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x$,

(c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$,

(d) $f(x) = \dfrac{x}{2x^2 - 8}$,

(e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24}$,

(f) $f(x) = \sqrt{-x^2 - x + 2}$,

(g) $f(x) = \sqrt{\tan x}$,

(h) $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$,

(i) $f(x) = \log_2(\log_3(\log_4 x))$,

(j) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-x^2+4}{x^2-4x}}$,

(k) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$,

(l) $f(x) = \arccos\left(\dfrac{x-5}{x^2-1}\right)$,

(m) $f(x) = e^{\sqrt{|x|-x}}$,

(n) $f(x) = \dfrac{e^{\frac{x}{x+1}}}{\ln(x+1)}$,

(o) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-3}{2x-8}\right) + \dfrac{\sqrt{x+3}}{\cos(\pi x)}$,

(p) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 5} + \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{4-x}}$.

Rešitev.

(a) $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ (kvadratna funkcija).

(b) $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ (polinom četrte stopnje).

(c) $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$, saj $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$.

(d) $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} - \{-2,2\}$, saj je f racionalna funkcija in $2x^2 - 8 = 2(x-2)(x+2)$).

(e) $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} - \{-4,-2,1,3\}$, saj je f racionalna funkcije in $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = (x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$. Namig: pole poiščemo s pomočjo Hornerjevega algoritma.

(f) $\mathscr{D}_f = [-2,1]$, saj mora veljati $-x^2 - x + 2 \geq 0$. Tako je

$$-x^2 - x + 2 = -(x-1)(x+2) \geq 0$$

in to velja na intervalu $[-2,1]$.

(g) $\mathscr{D}_f = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left[k\pi, k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)$, saj mora veljati $\tan x \geq 0$.

(h) $\mathscr{D}_f = (e,\infty)$, saj je

$$\begin{aligned} \ln(\ln x) &> 0 \\ \ln x &> 1 \\ x &> e. \end{aligned}$$

(i) $\mathscr{D}_f = (4,\infty)$, saj je

$$\begin{aligned} \log_3(\log_4 x) &> 0 \\ \log_4 x &> 1 \\ x &> 4. \end{aligned}$$

(j) $\mathscr{D}_f = [-2,0)\cup[2,4)$, saj gledamo

$$\frac{-x^2+4}{x^2-4x} \geq 0.$$

Števec in imenovalec sta hkrati pozitivna na intervalu $[-2,0)$ oziroma hkrati negativna na $[2,4)$.

(k) $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_0^+$, saj gledamo

$$-1 \leq \frac{x-1}{x+1} \leq 1.$$

Imamo naslednji dve možnosti

- za $x < -1$ dobimo
$$-x-1 \geq x-1 \geq x+1$$
in to nikoli ne velja ($-2x \geq 0 \geq 2$);
- za $x > -1$ dobimo
$$-x-1 \leq x-1 \leq x+1$$
in to velja za $x \geq 0$.

(l) $\mathscr{D}_f = (-\infty,-3]\cup[2,\infty)$, saj gledamo

$$-1 \leq \frac{x-5}{x^2-1} \leq 1.$$

Imamo dve možnosti:

- za $x < -1$ ali $1 < x$ dobimo
$$\begin{array}{ccccc} -x^2+1 & \leq & x-5 & \leq & x^2-1 \\ 0 & \leq & x^2+x-6 & \leq & 2x^2-2 \\ 0 & \leq & (x-2)(x+3) & \leq & 2(x-1)(x+1) \end{array}$$
in to velja za $x \leq -3$ ali $2 \leq x$;
- za $-1 < x < 1$ dobimo (podobno kot prej)
$$0 \geq (x-2)(x+3) \geq 2(x-1)(x+1)$$
in to nikoli ne velja.

(m) $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$, saj $|x|-x \geq 0$ velja za poljuben $x \in \mathbb{R}$.

(n) $\mathscr{D}_f = (-1,0)\cup(0,\infty)$. Števec je definiran za $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Imenovalec je definiran za vsak $x > -1$ in je $\ln(x+1) \neq 0$, ko je $x \neq 0$.

(o) $\mathscr{D}_f = ([-3,3)\cup(4,\infty))\backslash \cup_{k\in\mathbb{Z}} \{k+\frac{1}{2}\}$.
Vidimo, da je $\frac{x-3}{2x-8} > 0$, ko je $x < 3$ ali $x > 4$. $\sqrt{x+3}$ je definirana za vsak $x \geq -3$, $\cos(\pi x) = 0$ za $x = \frac{1}{2}+k$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$ poljuben.

(p) $\mathscr{D}_f = (0,1)\cup(1,4)$. Vidimo, da je $x^2-6x+5 = (x-1)(x-5)$, $\ln(x)$ je definirana za vsak $x > 0$, $\sqrt{4-x}$ je definiran za vsak $x \leq 4$ ter $\sqrt{4-x} = 0$, ko je $x = 4$.

∎

15. Ali imata realni funkciji f in g enaki naravni definicijski območji
    (a) $f(x) = 2\ln x$, $g(x) = \ln x^2$,
    (b) $f(x) = \ln(\sin x)$, $g(x) = \sin(\ln x)$,
    (c) $f(x) = \sqrt{1-\ln^2 x}$, $g(x) = \sqrt{1-\ln x^2}$,
    (d) $f(x) = x^2+x+1$, $g(x) = e^{\ln(x^2+x+1)}$.

Rešitev.

(a) $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^+$, $D_g = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (gledamo $x^2 > 0$). Funkciji nimata enakih naravnih definicijskih območij.

(b) $\mathscr{D}_f = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} (2k\pi,(2k+1)\pi)$ (gledamo $\sin x > 0$), $D_g = \mathbb{R}^+$. Funkciji nimata enakih naravnih definicijskih območij.

(c) $\mathscr{D}_f = [e^{-1}, e]$, saj je

$$\begin{aligned} 1-\ln^2 x &\geq 0 \\ 1 &\geq \ln^2 x \\ 1 &\geq \ln x \geq -1 \\ e &\geq x \geq e^{-1}. \end{aligned}$$

$D_g = [-\sqrt{e}, \sqrt{e}]\backslash\{0\}$, saj je

$$\begin{aligned} 1-\ln x^2 &\geq 0 \\ 1 &\geq \ln x^2 \\ e &\geq x^2 \\ \sqrt{e} &\geq x \geq -\sqrt{e}. \end{aligned}$$

Funkciji nimata enakih naravnih defincijskih območij.

(d) $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R}$, saj je $x^2+x+1 > 0$ ne glede na $x \in \mathbb{R}$. Funkciji imata enaki naravni definicijski območji.

∎

16. Za naslednje funkcije določi $\mathscr{D}_f$, $\mathscr{Z}_f$ in f^{-1}.
    (a) $f(x) = \sqrt{2-4x}$,
    (b) $f(x) = 2^x + 2^{x+1}$,
    (c) $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - 1$,
    (d) $f(x) = \ln(3x-6)$,
    (e) $f(x) = \frac{-x+5}{x+1}$,
    (f) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{če} \quad x \leq 0 \\ x^2, & \text{če} \quad x > 0 \end{cases}.$

Ali vedno obstaja f^{-1}?

Rešitev.

(a) $\mathscr{D}_f = (-\infty, \frac{1}{2}]$, $\mathscr{Z}_f = [0,\infty)$, $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2-2}{-4}$.

(b) $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathscr{Z}_f = (0,\infty)$, $f(x) = 2^x + 2^{x+1} = 2^x(1+2) = 3\cdot 2^x$, $f^{-1}(x) = \log_2\left(\dfrac{x}{3}\right)$.

(c) $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} - \{0\}$, $\mathscr{Z}_f = (-1,0)\cup(0,\infty)$, $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{\ln(x+1)}$.

(d) $\mathscr{D}_f = (2,\infty)$, $\mathscr{Z}_f = \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{e^x+6}{3}$.

(e) $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} - \{-1\}$, $\mathscr{Z}_f = \mathbb{R} - \{-1\}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{-x+5}{x+1}$.

(f) $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathscr{Z}_f = \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \begin{cases} x & ; \quad x \leq 0 \\ \sqrt{x} & ; \quad x > 0 \end{cases}.$

∎

17. Preveri, da je funkcija $f : [-2,3) \to (-2,9]$,

$$f(x) = \begin{cases} -x-2 & ; \quad -2 \le x < 0 \\ 9-x^2 & ; \quad 0 \le x < 3 \end{cases}$$

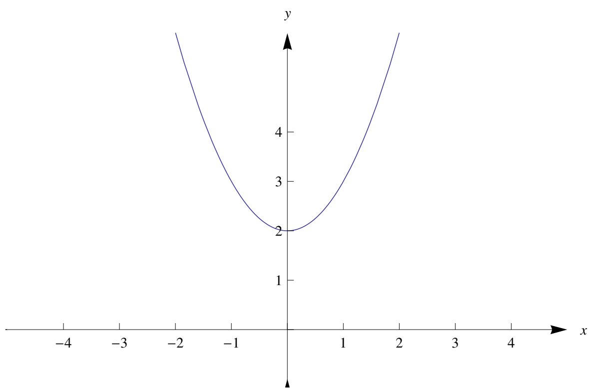
bijekcija in izračunaj njen inverz (pomagaj si s sliko).
Rešitev. Bijektivnost lahko vsak preveri.

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -x-2 & ; \quad -2 < x \le 0 \\ \sqrt{9-x} & ; \quad 0 < x \le 9. \end{cases}$$

∎

18. Določi naravno definicijsko območje in zalogo vrednosti ter nato skiciraj naslednje grafe funkcij:
   (a) $f(x) = x^2 + 2$,
   (b) $f(x) = |\ln(x-2)|$,
   (c) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$,
   (d) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$,
   (e) $f(x) = -\left(\frac{3}{2}\right)^x$,
   (f) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

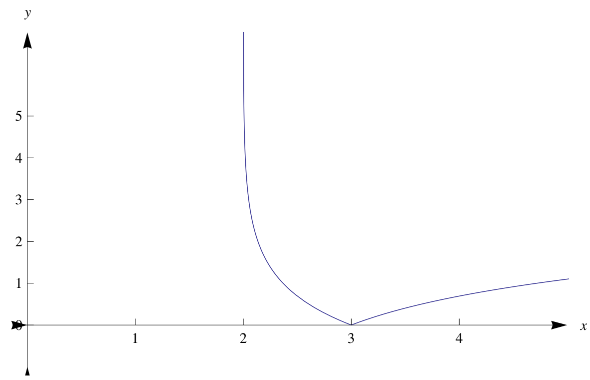
   Opomba: pomagaj si samo z osnovnimi lastnostmi elementarnih funkcij.
   Rešitev.
   (a) $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathscr{Z}_f = [2,\infty)$, slika 6.23.
   (b) $\mathscr{D}_f = (2,\infty)$, $\mathscr{Z}_f = [0,\infty)$, slika 6.24.
   (c) $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^+$, $\mathscr{Z}_f = \mathbb{R}$, slika 6.25.
   (d) $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathscr{Z}_f = (0,\infty)$, slika 6.26.
   (e) $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathscr{Z}_f = (-\infty,0)$, slika 6.27.
   (f) $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathscr{Z}_f = (0,\infty)$, slika 6.28.



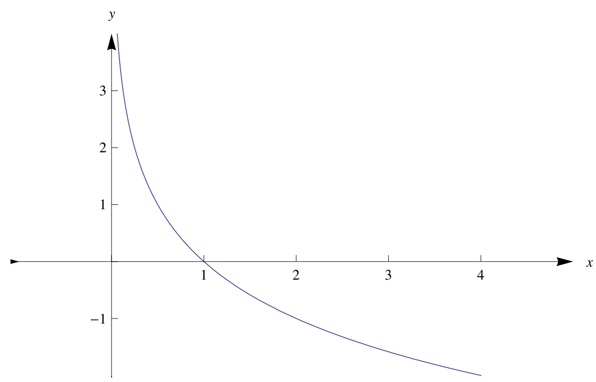
Slika 6.23: Primer 7(a).

∎

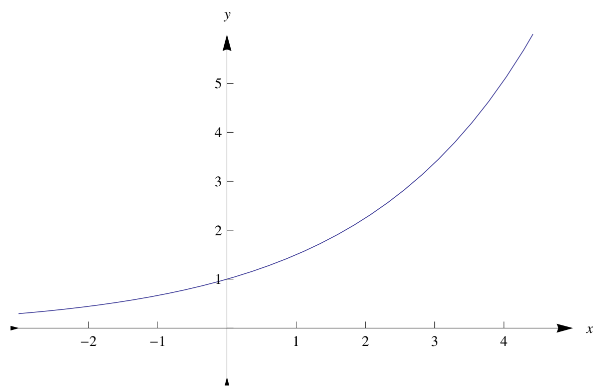
19. Določi največjo domeno in kodomeno glede na inkluzijo, da bo f bijektivna in nato izračunaj inverz funkcije f:
   (a) $f(x) = x^2 + 1$,
   (b) $f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$,
   (c) $f(x) = \dfrac{2x}{x-4}$,
   (d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.



Slika 6.24: Primer 7(b).



Slika 6.25: Primer 7(c).



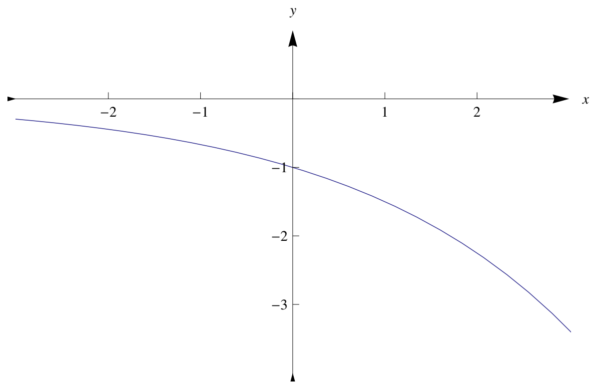
Slika 6.26: Primer 7(d).

Rešitev. Vsak lahko sam preveri, da za je izbrano domeno in kodomeno f res bijektivna.

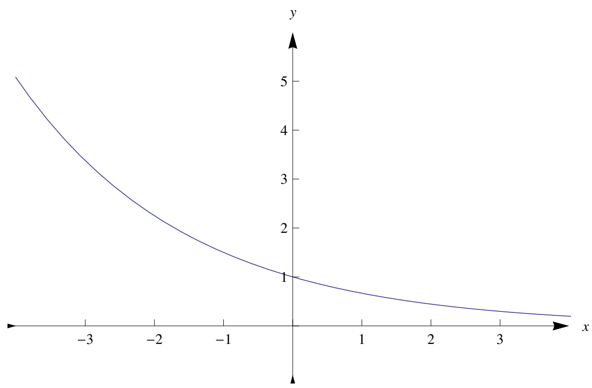
(a) Imamo več možnosti. Npr. $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_0^+$, kodomena $[1,\infty)$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$.

(b) $\mathscr{D}_f = [1,\infty)$, kodomena $\mathbb{R}_0^+$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$.

(c) $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} - \{4\}$, kodomena $\mathbb{R} - \{2\}$, $f^{-1}(x) = \frac{4x}{x-2}$.



Slika 6.27: Primer 7(e).



Slika 6.28: Primer 7(f).

(d) Imamo več možnosti. Npr. $\mathscr{D}_f = [2, \infty)$, kodomena $[4, \infty)$, izpeljimo $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x^2}{4} - x} + \frac{x}{2}$.

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{y^2}{y-1} \\
xy - x &= y^2 \\
y^2 - xy &= -x \\
\left(y - \frac{x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4} &= -x \\
y &= \pm\sqrt{\frac{x^2}{4} - x} + \frac{x}{2}.
\end{aligned}
$$

∎

20. Določi sodost oziroma lihost naslednjih funkcij:
   (a) $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x+2)^2}$,
   (b) $f(x) = \dfrac{\tan x}{x + x^5}$,
   (c) $f(x) = \dfrac{|x^3 - \sin x|}{x}$,
   (d) $f(x) = \dfrac{3^x + 1}{3^x - 1}$,
   (e) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$,

(f) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Rešitev.

(a) Funkcija je soda, saj velja

$$f(-x) = \sqrt[3]{(-x-2)^2} + \sqrt[3]{(-x+2)^2} = \sqrt[3]{(x+2)^2} + \sqrt[3]{(x-2)^2} = f(x).$$

(b) Funkcija je soda, saj velja

$$f(-x) = \frac{\tan(-x)}{-x+(-x)^5} = \frac{-\tan x}{-x-x^5} = \frac{-\tan x}{-(x+x^5)} = \frac{\tan x}{x+x^5} = f(x).$$

(c) Funkcija je liha, saj velja

$$f(-x) = \frac{|(-x)^3 - \sin(-x)|}{-x} = \frac{|-x^3+\sin x|}{-x} = -\frac{|x^3-\sin x|}{x} = -f(x).$$

(d) Funkcija je liha, saj velja

$$f(-x) = \frac{3^{-x}+1}{3^{-x}-1} = \frac{\frac{1+3^x}{3^x}}{\frac{1-3^x}{3^x}} = -\frac{3^x+1}{3^x-1} = -f(x).$$

(e) Funkcija je liha, saj velja

$$f(-x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln\left(\frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}\right) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1} = -f(x).$$

(f) Funcija je liha, saj velja

$$\begin{aligned}
f(-x) &= \ln\left(-x + \sqrt{1+(-x)^2}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)\cdot\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right) \\
&= \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{-1} \\
&= -\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \\
&= -f(x).
\end{aligned}$$

∎

21. Izračunaj kompozituma funkcij f in g ($f \circ g$, $g \circ f$)

(a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 7$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 + 3$,

(b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2^x$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - 1$,

(c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = e^x$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^-$, $g(x) = -x^2 - 1$,

(d) $f(x) = \begin{cases} x & ; \quad x < 0 \\ 0 & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} -1 & ; \quad x \leq 0 \\ x^2 & ; \quad x > 0 \end{cases}$,

(e) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ; \quad x \geq 0 \\ -\frac{1}{(x-1)^2} & ; \quad x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x+1 & ; \quad x \geq -1 \\ 0 & ; \quad x < -1 \end{cases}$,

(f) $f(x) = \begin{cases} x & ; \quad x < 0 \\ 0 & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad |x| \geq \frac{\pi}{2} \\ |\sin x| & ; \quad |x| < \frac{\pi}{2} \end{cases}$,

(g) $f(x) = e^x$, $g(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \leq 0 \\ \ln x & ; \quad x > 0 \end{cases}$,

(h) $f(x) = -2x+4$, $g(x) = \begin{cases} x^2-4 & ; \quad |x| \le 2 \\ 4x^2-x^4 & ; \quad |x| > 2 \end{cases}$,

(i) $f(x) = \begin{cases} -\frac{x^3+1}{x+1} & ; \quad x \in (-\infty,-1)\cup(-1,0) \\ e^{2x}-1 & ; \quad x \ge 0 \end{cases}$,

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{x}{x+1} & ; \quad x < -1 \\ 0 & ; \quad -1 \le x \le 0, \\ \arctan(x+1) & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

(j) $f(x) = \begin{cases} x+4 & ; \quad x < 0 \\ \frac{-2x^2}{x+1} & ; \quad x \ge 0 \end{cases}$,

$$g(x) = \begin{cases} e^x - e^4 & ; \quad x < 4 \\ 1-\sqrt{x^2+9} & ; \quad x \ge 4 \end{cases}.$$

Rešitev. Pri vsakem kompozitumu bomo opredelili naravno definicijsko območje in kodomeno.

(a) $f\circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^3+3) = 5(x^3+3)-7 = 5x^3+8$,
$g\circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(5x-7) = (5x-7)^3+3 = 125x^3-525x^2+735x-340$.

(b) $f\circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-1) = 2^{x-1}$,
$g\circ f : \mathbb{R} \to (-1,\infty)$, $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(2^x) = 2^x-1$.

(c) $f\circ g : \mathbb{R} \to (0,e^{-1}]$, $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(-x^2-1) = e^{-x^2-1}$,
$g\circ f : \mathbb{R} \to (-\infty,-1)$, $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(e^x) = -e^{2x}-1$,

(d) Najprej določimo kodomeno posamezih predpisov. Za lažje razumevanje naj bo $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 0$, $g_1(x) = -1$ in $g_2(x) = x^2$. Tako velja $f_1 : (-\infty,0) \to (-\infty,0)$, $f_2 : [0,\infty) \to \{0\}$, $g_1 : (-\infty,0] \to \{-1\}$, $g_2 : (0,\infty) \to (0,\infty)$. Sedaj ustrezno komponirajmo upoštevajoč naravno definicijsko območje in kodomeno posameznih predpisov

- $f\circ g$
  - $(f\circ g_1)(x) = f(g_1(x)) = f(-1) = f_1(-1) = -1$,
  - $(f\circ g_2)(x) = f(g_2(x)) = f(x^2) = f_2(x^2) = 0$.
- $g\circ f$
  - $(g\circ f_1)(x) = g(f_1(x)) = g(x) = g_1(x) = -1$,
  - $(g\circ f_2)(x) = g(f_2(x)) = g(0) = g_1(0) = -1$.

Tako smo dobili $(f\circ g)(x) = \begin{cases} -1 & ; \quad x \le 0 \\ 0 & ; \quad x > 0 \end{cases}$, $(g\circ f)(x) = -1$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

(e) Lahko rešujemo kot v prejšnjem primeru. Strnimo postopek: $f : [0,\infty) \to [-1,\infty)$, $f : (-\infty,0) \to (-1,0)$, $g : [-1,\infty) \to [0,\infty)$, $g : (-\infty,-1) \to \{0\}$.

- $f\circ g$
  - $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2-1 = x^2+2x$, če je $x \ge -1$,
  - $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(0) = -1$, če je $x < -1$.
- $g\circ f$
  - $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2-1) = x^2-1+1 = x^2$, če je $x \ge 0$,
  - $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(-(x-1)^{-2}) = -\frac{1}{(x-1)^2}+1$, če je $x < 0$.

$$(f\circ g)(x) = \begin{cases} x^2+2x, & ; \quad x \ge -1 \\ -1, & ; \quad x < -1 \end{cases},$$

$$(g\circ f)(x) = \begin{cases} x^2, & ; \quad x \ge 0 \\ \frac{-1}{(x-1)^2}+1, & ; \quad x < 0 \end{cases}.$$

(f) $f : (-\infty,0) \to (-\infty,0)$, $f : [0,\infty) \to \{0\}$, , $g : (-\infty,-\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2},\infty) \to \{1\}$, $g : (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to [0,1)$.

- $f\circ g$
  - $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(1) = 0$, če je $|x| \ge \frac{\pi}{2}$,
  - $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(|\sin x|) = 0$, če je $|x| < \frac{\pi}{2}$.
- $g\circ f$
  - $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x) = 1$, če je $x \le -\frac{\pi}{2}$,
  - $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x) = |\sin x|$, če je $-\frac{\pi}{2} < x < 0$,
  - $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(0) = 0$, če je $x \ge 0$.

$$(f\circ g)(x)=0, \text{ za vsak } x\in\mathbb{R},\ (g\circ f)(x)=\begin{cases}1 & ; \quad x\le -\frac{\pi}{2}\\ |\sin x| & ; \quad -\frac{\pi}{2}<x<0\\ 0 & ; \quad x\ge 0\end{cases},$$

(g) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, $g:(-\infty,0]\to\{1\}$, $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$.

- $f\circ g$
  - $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(1)=e$, če je $x\le 0$,
  - $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\ln x)=e^{\ln x}=x$, če je $x>0$.
- $g\circ f$
  - $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(e^x)=\ln e^x=x$, če je $x\in\mathbb{R}$.

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases}e & ; \quad x\le 0\\ x & ; \quad x>0\end{cases},\ (g\circ f)(x)=x, \text{ za vsak } x\in\mathbb{R}.$$

(h) $f:[1,3]\to[-2,2]$, $f:(-\infty,1)\to(2,\infty)$, $f:(3,\infty)\to(-\infty,-2)$, $g:[-2,2]\to[-4,0]$, $g:(-\infty,-2)\cup(2,\infty)\to\mathbb{R}^-$.

- $f\circ g$
  - $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2-4)=-2(x^2-4)+4=-2x^2+12$, če je $|x|\le 2$,
  - $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(4x^2-x^4)=-2(4x^2-x^4)+4=2x^4-8x^2+4$, če je $|x|>2$.
- $g\circ f$
  - $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-2x+4)=(-2x+4)^2-4=4x^2-16x+12$, če je $1\le x\le 3$,
  - $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-2x+4)=4(-2x+4)^2-(-2x+4)^4$, če je $x<1$ ali $x>3$.

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases}-2x^2+12 & ; \quad |x|\le 2\\ 2x^4-8x^2+4 & ; \quad |x|>2\end{cases},$$

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases}4x^2-16x+12 & ; \quad 1\le x\le 3\\ 4(-2x+4)^2-(-2x+4)^4 & ; \quad x<1\vee 3<x\end{cases}.$$

(i) $f:(-\infty,-1)\cup(-1,0)\to(-\infty,-1)$, $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $g:(-\infty,-1)\to(-\infty,-1)$, $g:[-1,0]\to\{0\}$, $g:(0,\infty)\to(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$.

- $f\circ g$
  - $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(-\frac{x}{x+1}\right)=-\frac{\left(-\frac{x}{x+1}\right)^3+1}{-\frac{x}{x+1}+1}=-\frac{3x^2+3x+1}{(x+1)^2}$, če je $x<-1$,
  - $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(0)=0$, če $-1\le x\le 0$,
  - $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\arctan(x+1))=e^{2(\arctan(x+1))}-1$, če je $x>0$,
- $g\circ f$
  - $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(-\frac{x^3+1}{x+1}\right)=-\frac{-\frac{x^3+1}{x+1}}{-\frac{x^3+1}{x+1}+1}=\frac{-x^2+x-1}{x^2-x}$, če je $x<0$,
  - $(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(0)=0$, če je $x=0$.
  - $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(e^{2x}-1)=\arctan(e^{2x}-1+1)=\arctan(e^{2x})$, če je $x>0$.

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases}-\frac{3x^2+3x+1}{(x+1)^2} & ; \quad x<-1\\ 0 & ; \quad -1\le x\le 0\\ e^{2(\arctan(x+1))}-1 & ; \quad x>0\end{cases},$$

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases}\frac{-x^2+x-1}{x^2-x} & ; \quad x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)\\ 0 & ; \quad x=0\\ \arctan(e^{2x}) & ; \quad x>0\end{cases}.$$

(j) Rešujemo podobno kot zgoraj

$$g(f(x))=\begin{cases}e^{x+4}-e^4 & ; \quad x<0\\ e^{\frac{-2x^2}{x+1}}-e^4 & ; \quad x\ge 0\end{cases}, f(g(x))=\begin{cases}e^x-e^4+4 & ; \quad x<4\\ 5-\sqrt{x^2+9} & ; \quad x\ge 4\end{cases}.$$

■

22. Izračunaj vsoto, razliko in produkt funkcij f in g,

$$f(x)=\begin{cases}|x| & ; \quad x\le 1\\ x^2 & ; \quad x>1\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}x^2 & ; \quad x\le -2\\ e^x & ; \quad -2<x\le 0\\ \sin x & ; \quad x>0\end{cases}.$$

Rešitev. Naj $*$ označuje poljubno operacijo ($+$, $-$ ali $\cdot$). Potem je

$$(f*g)(x) = \begin{cases} |x|*x^2, & ; \quad x \leq -2 \\ |x|*e^x, & ; \quad -2 < x \leq 0 \\ |x|*\sin x, & ; \quad 0 < x \leq 1 \\ x^2 * \sin x, & ; \quad x > 1 \end{cases}$$

∎

23. Razstavi f na osnovne elementarne funkcije
   (a) $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$,
   (b) $f(x) = \dfrac{x^2 - e^{\sin x}}{x}$.

   Rešitev.
   (a) $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = x$,
   $$f(x) = (f_1 \circ (f_2 + f_1 \circ (f_2 + f_1)))(x).$$
   (b) $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = e^x$, $f_3(x) = x^2$, $f_4(x) = \frac{1}{x}$,
   $$f(x) = ((f_3 - f_2 \circ f_1) \cdot f_4)(x).$$

∎

Limita in zveznost funkcije

1. Izračunaj naslednje limite funkcij:
   (a) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3+2x^2-6x-3}{x^2+4x-1}$,
   (b) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+3x+2}$,
   (c) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$,
   (d) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$,
   (e) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^4-4x^3-6x^2+4x+5}{x^4-x^3-3x^2+x+2}$,
   (f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^4-3x^2+1}{3x^4-x^3+5x}$,
   (g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^6-3x^3+x}{7x^7+5x^5+1}$,
   (h) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^5-7x^2}{x^4+13x+3}$,
   (i) $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2-1}\right)$.

   Rešitev.
   (a) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3+2x^2-6x-3}{x^2+4x-1} = -1$,
   (b) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+3x+2} = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+2)} = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x-1}{x+1} = 3$,
   (c) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2+x+1}{x+1} = \dfrac{3}{2}$,
   (d) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2-x+1}{x-1} = -\dfrac{3}{2}$,

(e) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^4-4x^3-6x^2+4x+5}{x^4-x^3-3x^2+x+2}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x-1)(x-5)(x+1)^2}{(x-1)(x-2)(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x-5}{x-2}=2$,

(f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^4-3x^2+1}{3x^4-x^3+5x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4(6-3\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4})}{x^4(3-\frac{1}{x}+5\frac{1}{x^3})}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6-3\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{3-\frac{1}{x}+5\frac{1}{x^3}}=2$,

(g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^6-3x^3+x}{7x^7+5x^5+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6(6-3\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5})}{x^7(7+5\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^7})}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6-3\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}}{x(7+5\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^7})}=0$,

(h) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-7x^2}{x^4+13x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5(2-7\frac{1}{x^3})}{x^4(1+13\frac{1}{x^3}+3\frac{1}{x^4})}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(2-7\frac{1}{x^3})}{1+13\frac{1}{x^3}+3\frac{1}{x^4}}=\infty$ ali rečemo, da limita ne obstaja,

(i) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$.

∎

2. Izračunaj naslednje limite funkcij z iracionalnimi členi:

(a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$,

(b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{\sqrt{2x-1}-1}$,

(c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$,

(d) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}\sqrt{x+7}-2\sqrt{x+7}-3\sqrt{x+2}+6}{x\sqrt{4x+1}-2\sqrt{4x+1}-3x+6}$,

(e) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x(x+1)}-x)$,

(f) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt[3]{1-x^3})$.

Rešitev.

(a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}\cdot\dfrac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+4-4}{x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\dfrac{1}{4}$,

(b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{\sqrt{2x-1}-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{\sqrt{2x-1}-1}\cdot\dfrac{2+\sqrt{x+3}}{2+\sqrt{x+3}}\cdot\dfrac{\sqrt{2x-1}+1}{\sqrt{2x-1}+1}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4-x-3}{2x-1-1}\cdot\dfrac{\sqrt{2x-1}+1}{2+\sqrt{x+3}}=\lim\limits_{x\to1}-\dfrac{x-1}{2(x-1)}\cdot\dfrac{\sqrt{2x-1}+1}{2+\sqrt{x+3}}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\left(-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2x-1}+1}{2+\sqrt{x+3}}\right)=-\dfrac{1}{4}$,

(c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\cdot\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x-1+x}{x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1$,

(d) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}\sqrt{x+7}-2\sqrt{x+7}-3\sqrt{x+2}+6}{x\sqrt{4x+1}-2\sqrt{4x+1}-3x+6}=$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+7}-3)}{(x-2)(\sqrt{4x+1}-3)}=$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+7}-3)}{(x-2)(\sqrt{4x+1}-3)}\cdot\dfrac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}\cdot\dfrac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3}\cdot\dfrac{\sqrt{4x+1}+3}{\sqrt{4x+1}+3}=$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x+2-4)(x+7-9)}{(x-2)(4x+1-9)}\cdot\dfrac{\sqrt{4x+1}+3}{(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{x+7}+3)}=$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)^2}{4(x-2)^2}\cdot\dfrac{\sqrt{4x+1}+3}{(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{x+7}+3)}=$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{4x+1}+3}{4(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{x+7}+3)}=\dfrac{1}{16}$,

(e) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x(x+1)}-x) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x(x+1)}-x}{1}\cdot\dfrac{\sqrt{x(x+1)}+x}{\sqrt{x(x+1)}+x} =$
$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x(x+1)}+x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \dfrac{1}{2},$

(f) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sqrt[3]{1-x^3}) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)\cdot\dfrac{x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}{x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} =$
$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1-x^3}{x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2\left(1-\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}+\sqrt[3]{\frac{1}{x^6}-2\frac{1}{x^3}+1}\right)} = 0.$

∎

3. S pomočjo $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ izračunaj naslednje limite:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$,

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(ax)}{x}$, kjer je $a\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ poljuben,

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 4x}$,

(e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$,

(f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$,

(g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$.

Rešitev.

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\sqrt{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x} = 1\cdot 0 = 0,$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1,$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(ax)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(ax)}{x}\cdot\dfrac{a}{a} = a\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(ax)}{ax} = a,$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 4x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 4x}\cdot\dfrac{4x}{4x} = \dfrac{1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\sin 4x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x} = \dfrac{1}{2},$

(e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\cos(t+\frac{\pi}{2})}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-\sin t}{t} = -1,$

(f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2\cos x}\cdot\dfrac{1+\cos x}{1+\cos x} =$
$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{\cos x(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{\cos x(1+\cos x)} =$
$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x(1+\cos x)} = \dfrac{1}{2},$

(g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos 2x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos^2 x-\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)} =$
$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{\cos x+\sin x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

∎

4. S pomočjo $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ izračunaj naslednje limite:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x+1}$,

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$,

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+x-2}{x^3-1}\right)^{x^2}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)^{\frac{2}{x}}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{\sin(x-1)}}$.

Rešitev.

(a) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{(x+1)(-1)^2}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^{-(x+1)(-1)}=e^{-1},$$

(b) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+1+1}{x-1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{x\cdot\frac{x-1}{x-1}\cdot\frac{2}{2}}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2x}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x-1}}=e^2,$$

(c) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+x-2}{x^3-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1+x-1}{x^3-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}\right)^{x^2}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+x+1}\right)^{x^2\cdot\frac{x^2+x+1}{x^2+x+1}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+x+1}\right)^{x^2+x+1\cdot\frac{x^2}{x^2+x+1}}=$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2+x+1}}=e,$$

(d) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+x+1}{x+1}\right)^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{2}{x}}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{2}{x}\cdot\frac{x+1}{x+1}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{x}\cdot\frac{2}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{x+1}}=e^2,$$

(e) $$\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{\sin(x-1)}}\overset{t=x-1}{=}\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{\sin t}\cdot\frac{t}{t}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}\cdot\frac{t}{\sin t}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}}=e.$$

∎

5. S pomočjo $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$ izračunaj naslednje limite:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(\cos x)}{x}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\cot^2 x\ln(\cos^2 x)$,

(d) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2x-x^2)}{x^2-2x+1}$,

(f) $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

Rešitev.

(a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}\cdot\frac{2}{2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}=2,$$

(b) $$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\sqrt{1-\sin^2 x})}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-\sin^2 x)^{\frac{1}{2}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-\sin^2 x)}{-\sin^2 x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{2x}=0,$$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\cot^2 x\ln(\cos^2 x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x\ln(1-\sin^2 x)}{\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\cos^2 x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\sin^2 x)}{\sin^2 x} = -1,$

(d) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e} = \lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-\ln e}{e\left(\frac{x}{e}-1\right)} = \dfrac{1}{e}\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln\left(\frac{x}{e}\right)}{\left(\frac{x}{e}-1\right)} = \dfrac{1}{e}.$

(e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2x-x^2)}{x^2-2x+1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1-1+2x-x^2)}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1-(x-1)^2)}{(x-1)^2} = -1,$

(f) $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(\dfrac{x+1-1}{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\ln\left(1-\frac{1}{x+1}\right)}{(-1)^2\frac{x+1}{x+1}} =$

$= -\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1-\frac{1}{x+1}\right)}{-\frac{1}{x+1}}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+1} = -1\cdot 1 = -1.$

■

6. S pomočjo $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$ izračunaj naslednje limite

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{2x}-1}{x},$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x},$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}x^{-1}\sinh x,$

(d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1},$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^{\frac{x+1}{x}}-2}{\frac{1}{2x}},$

(f) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{x}{x^2-1}}-1\right).$

Rešitev.

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{2x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{2x}-1}{x}\cdot\dfrac{2}{2} = 2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{2x}-1}{2x} = 2\cdot\ln 2,$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}\cdot\dfrac{\sin x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1,$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}x^{-1}\sinh x = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sinh x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+1-1-e^{-x}}{2x} =$

$= \dfrac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}+1}{-x}\right) = 1,$

(d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e\left(e^{x-1}-1\right)}{x-1} = e\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1} = e,$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^{\frac{x+1}{x}}-2}{\frac{1}{2x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\cdot 2^{\frac{1}{x}}-2}{\frac{1}{2x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}} = 4\cdot\ln 2,$

(f) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{x}{x^2-1}}-1\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(e^{\frac{x}{x^2-1}}-1\right)}{\frac{x}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{x}{x^2-1}}-1}{\frac{x}{x^2-1}}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\frac{x^2-1}{x}} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{x}{x^2-1}}-1}{\frac{x}{x^2-1}}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2-1} = 1\cdot 1 = 1.$

■

7. Določi realni števili a in b tako, da bo $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x+2}-ax-b\right) = 0.$

Rešitev. Za začetek zapišimo na eno ulomkovo črto

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x+2}-ax-b\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2-ax^2-bx-2ax-2b}{x+2}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(1-a)x^2-(2a+b)x+2-2b}{x+2}\right).\end{aligned}$$

Ker je limita enaka 0, mora biti stopnja števca strogo manjša od stopnje imenovalca. Tako dobimo sistem

$$\begin{aligned} 1-a&=0\\ 2a+b&=0, \end{aligned}$$

iz katerega sledi, da je $a=1$ in $b=-2$. ∎

8. Ali je funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & ; \quad x\neq 0\\ 0 & ; \quad x=0, \end{cases}$$

zvezna v točki $x=0$?

Rešitev. Funkcija f bo zvezna, če $\lim\limits_{x\uparrow 0} f(x)=0$ in $\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x)=0$. Toda

$$\lim_{x\uparrow 0} f(x)=\lim_{x\uparrow 0} e^{-\frac{1}{x}}=\infty,$$

saj je $\lim\limits_{x\uparrow 0}\left(-\frac{1}{x}\right)=\infty$ in zato f ni zvezna v 0. ∎

9. Ali je funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}-1} & ; \quad x\neq 0\\ 0 & ; \quad x=0, \end{cases}$$

zvezna na $\mathbb{R}$?

Rešitev. Potrebno je preveriti, ali je f zvezna v 0 (glej izrek, ki pravi, da so elementarne funkcije zvezne na svojih naravnih definicijskih območjih). Torej preverimo, ali je $\lim\limits_{x\uparrow 0} f(x)=0$ in $\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x)=0$. Izračunajmo vrednost leve limite funkcije f v točki 0 v nekaj korakih. Hitro vidimo, da $\frac{1}{x}\xrightarrow{x\uparrow 0}-\infty$. S tem rezultatom nadaljujemo in tako $e^{\frac{1}{x}}\xrightarrow{x\uparrow 0} 0$ in posledično $e^{\frac{1}{x}}-1\xrightarrow{x\uparrow 0}-1$. Sedaj vidimo, da je

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\xrightarrow{x\uparrow 0}-1,$$

od koder sklepamo, da f ni zvezna. Za vajo lahko vsak preveri, da je $\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x)=0$. ∎

10. Ali je funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} \frac{e^{x-1}+x-2}{x-1} & ; \quad x<1\\ 2 & ; \quad x=1\\ x^{\frac{x}{x-1}} & ; \quad x>1, \end{cases}$$

zvezna na $\mathbb{R}$?

Rešitev. Iz samega predpisa funkcije je potrebno preveriti, če je zvezna v 1. Torej je potrebno izračunati levo in desno limito od f v 1. Izračunajmo najprej levo limito

$$\begin{aligned} \lim_{x\uparrow 1}\frac{e^{x-1}+x-2}{x-1}&=\lim_{x\uparrow 1}\frac{e^{x-1}-1+x-1}{x-1}=\lim_{x\uparrow 1}\left(\frac{e^{x-1}-1}{x-1}+\frac{x-1}{x-1}\right)=\\ &=\lim_{x\uparrow 1}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}+\lim_{x\uparrow 0}\frac{x-1}{x-1}=2. \end{aligned}$$

Leva limita od f v 1 se ujema s funkcijsko vrednostjo. Preverimo še desno limito

$$\lim_{x\downarrow 1} x^{\frac{x}{x-1}}\overset{t=x-1}{=}\lim_{t\downarrow 0}(1+t)^{\frac{1}{t}\cdot(t+1)}=e^{\lim\limits_{t\downarrow 0}(t+1)}=e.$$

Ker $\lim\limits_{x\downarrow 1} f(x)\neq 2$, funkcija ni zvezna. ∎

11. Določi $f(0)$ tako, da bo funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$$f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$$
povsod zvezna.
Rešitev. Potrebno je izračunati $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right)=\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$
Torej je $f(0)=\frac{1}{2}$. ∎

12. Poišči točke nezveznosti funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$$f(x)=\begin{cases} e^x & ;\quad x\le 0\\ x-1 & ;\quad 0<x\le 1\\ \ln x & ;\quad x>1\end{cases}.$$
Rešitev. Glede na funkcijo je potrebno preveriti le zveznost v točkah $x_1=0$ in $x_2=1$. Vidimo, da $\lim\limits_{x\uparrow 0} e^x=1$ in $\lim\limits_{x\downarrow 0}(x-1)=-1$ in zato funkcija f v $x_1=0$ ni zvezna. Podobno izračunamo $\lim\limits_{x\uparrow 1}(x-1)=0$ in $\lim\limits_{x\downarrow 1}\ln x=0$. V tem primeru pa vidimo, da je f v $x_2=1$ zvezna. ∎

13. Določi realno število a, da bo funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$$f(x)=\begin{cases} a & ;\quad x\le 1\\ \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} & ;\quad x>1\end{cases}$$
zvezna na množici $\mathbb{R}$.
Rešitev. Potrebno je izračunati $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} &= \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x-1}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right)=\\ &=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$
Torej je $a=\frac{3}{2}$. ∎

14. Določi realno število a tako, da bo funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ki je podana s predpisom
$$f(x)=\begin{cases} 2^x+1 & ;\quad x<1\\ 4-ax^2 & ;\quad x\ge 1\end{cases}$$
povsod zvezna.
Rešitev. S pomočjo leve in desne limite v $x=1$ pridemo do realnega števila a. Vidimo, da je $\lim\limits_{x\uparrow 1}(2^x+1)=3$ in $\lim\limits_{x\downarrow 1}(4-ax^2)=4-a$. Torej za $a=1$ bo f zvezna. ∎

15. Določi realni števili a in b tako, da bo funkcija f, ki je podana s predpisom
$$f(x)=\begin{cases} \frac{a-x}{x-1} & ;\quad x<-1\\ bx-2 & ;\quad -1\le x\le 1\\ \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} & ;\quad x>1\end{cases}$$

zvezna na $\mathbb{R}$.

Rešitev. Izračunajmo levi in desni limiti v $x_1 = -1$ in $x_2 = 1$:

$$\lim_{x\uparrow -1} \frac{a-x}{x-1} = \frac{a+1}{-2} \qquad \lim_{x\downarrow -1}(bx-2) = -b-2$$

$$\lim_{x\uparrow 1}(bx-2) = b-2 \qquad \lim_{x\downarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x\downarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} = 0$$

Na podlagi tega dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} \frac{a+1}{-2} &= -b-2 \\ b-2 &= 0. \end{aligned}$$

Rešitvi sistema sta $a = 7$ in $b = 2$. ∎

16. Določi realni števili a in b tako, da bo funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x & ; \quad x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a\sin x + b & ; \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & ; \quad x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

zvezna na $\mathbb{R}$.

Rešitev. Izračunajmo levi in desni limiti v $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ in $x_2 = \frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x\uparrow -\frac{\pi}{2}}(-2\sin x) = 2 \qquad \lim_{x\downarrow -\frac{\pi}{2}}(a\sin x + b) = -a+b$$

$$\lim_{x\uparrow \frac{\pi}{2}} a\sin x + b = a+b \qquad \lim_{x\downarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$$

Tako dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} -a+b &= 2 \\ a+b &= 0. \end{aligned}$$

Rešitvi sistema sta $b = 1$ in $a = -1$. ∎

17. Določi polinom druge stopnje p tako, da bo funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) & ; \quad x < -1 \\ p(x) & ; \quad -1 \leq x \leq 2 \\ e^{x-2} + 3 & ; \quad x > 2, \end{cases}$$

zvezna in bo veljalo $f(0) = 0$.

Rešitev. Določiti je potrebno koeficiente polinoma $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, na intervalu $[-1, 2]$, da bo f zvezna (razmisli, da je za vsak $x \in \mathbb{R} \backslash (-1, 2)$ funkcija zvezna). Iz podatka $p(0) = 0$ dobimo, da je $c = 0$. Nadalje, $\lim_{x\uparrow -1} \cos\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = -1$, $\lim_{x\downarrow 2}(e^{x-2} + 3) = 4$, $p(-1) = a - b$ in $p(2) = 4a + 2b$ ter tako dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} a - b &= -1 \\ 4a + 2b &= 4 \end{aligned}$$

Rešitvi sistema sta $a = \frac{1}{3}$ in $b = \frac{4}{3}$ in zato ima polinom p predpis $p(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x$. ∎

18. Ali obstaja tak polinom p prve stopnje, da bo funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki je podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sh}(x+2)}} & ; \quad x < -2 \\ p(x) & ; \quad -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{\ln(1+4\sqrt{x})}{\sqrt{x^2+4x}} & ; \quad x > 0, \end{cases}$$

zvezna na množici realnih števil? Če obstaja, poišči predpis polinoma p.
Rešitev. Iščemo polinom s predpisom $p(x) = ax + b$. Izračunajmo limite.

$$\lim_{x\uparrow -2}\left(\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{\mathrm{sh}(x+2)}} = \lim_{x\uparrow -2}\left(1+\frac{x^2-4}{4}\right)^{\frac{e^{x+2}(e^{2x+4}-1)}{2}} = e^{-1}$$

$$\lim_{x\downarrow -2}(ax+b) = -2a+b$$

$$\lim_{x\uparrow 0}(ax+b) = ax+b = b$$

$$\lim_{x\downarrow 0}\frac{\ln(1+4\sqrt{x})}{\sqrt{x^2+4x}} = \lim_{x\downarrow 0}\frac{4\ln(1+4\sqrt{x})}{4\sqrt{x}\sqrt{x+4}} = 2.$$

Posledično je $b = 2$, $a = 1 - \frac{e^{-1}}{2}$. Torej $p(x) = \left(1 - \frac{e^{-1}}{2}\right)x + 2$. ∎

Zaporedja

1. V aritmetičnem zaporedju je vsota prvih osem členov 100, vsota drugega in šestega člena pa je 22. Izračunaj prvi člen in splošni člen zaporedja.
Rešitev. Vemo, da je

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & a_4 & + & a_5 & + & a_6 & + & a_7 & + & a_8 & = & 100 \\ & & & & & & & & & & & & a_2 & + & a_6 & = & 22. \end{array}$$

Ker je v aritmetičnem zaporedju velja $a_n = a_1 + d(n-1)$, dobimo

$$\begin{array}{ccccc} 8a_1 & + & 28d & = & 100 \\ 2a_1 & + & 6d & = & 22. \end{array}$$

Zato je $a_1 = 2$, $d = 3$ in posledično $a_n = 2 + 3(n-1) = -1 + 3n$. ∎

2. Poišči takšen x, da bodo števila v danem vrstnem redu 1, $\cos x$ in $\cos^2 x$ trije zaporedni členi aritmetičnega zaporedja.
Rešitev. Ker 1, $\cos x$ in $\cos^2 x$ tvorijo aritmetično zaporedje, je $d = \cos x - 1$ in $d = \cos^2 x - \cos x$. Iz tega sledi

$$\cos x - 1 = \cos^2 x - \cos x.$$

Dobimo kvadratno enačbo $\cos^2 x - 2\cos x + 1 = 0$, ki je ekvivalentna enačbi $(\cos x - 1)^2 = 0$. Rešitev te enačbe je množica $\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Posledično vsi elementi te množice ustrezajo pogoju naloge. ∎

3. Poišči takšen x, da bodo števila v danem vrstnem redu $\ln 3$, $\ln(2^x - 2)$ in $\ln(2^x + 4)$ prvi trije členi aritmetičnega zaporedja.
Rešitev. Ker $\ln 3$, $\ln(2^x - 2)$ in $\ln(2^x + 4)$ tvorijo aritmetično zaporedje, je $d = \ln(2^x - 2) - \ln 3$ in $d = \ln(2^x + 4) - \ln(2^x - 2)$. Posledično dobimo

$$\ln\left(\frac{2^x-2}{3}\right) = \ln\left(\frac{2^x+4}{2^x-2}\right)$$

oziroma

$$\begin{aligned} 3(2^x+4) &= (2^x-2)^2 \\ (2^x)^2 - 7\cdot 2^x - 8 &= 0 \\ (2^x-8)(2^x+1) &= 0. \end{aligned}$$

Ker 2^x ne zavzame negativnih vrednosti, je edina rešitev $x = 3$. ∎

4. Tretji člen geometrijskega zaporedja je 12, peti pa je 3. Izračunaj splošni člen zaporedja.
Rešitev. Vemo, da je

$$\begin{array}{ccccc} a_3 & = & a_1\cdot q^2 & = & 12 \\ a_5 & = & a_1\cdot q^4 & = & 3. \end{array}$$

in iz tega sledi, da je $q = \pm\frac{1}{2}$ in $a_1 = 48$. Glede na q imamo dve različni zaporedji $a_n = 48\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ in $a_n' = 48\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. ∎

5. Vsota treh števil je 40, vsota njihovih desetiških logaritmov pa 3. Poišči ta števila, če predstavljajo prve tri člene geometrijskega zaporedja.
Rešitev. Poiščimo števila a_1, a_2 in a_3 za katere velja

$$\begin{array}{rcrcrcl} a_1 & + & a_2 & + & a_3 & = & 40 \\ \log a_1 & + & \log a_2 & + & \log a_3 & = & 3. \end{array}$$

Če upoštevamo, da ta števila tvorijo geometrijsko zaporedje ($a_2 = a_1 q$, $a_3 = a_1 q^2$), dobimo

$$\begin{array}{rcl} a_1(1+q+q^2) & = & 40 \\ \log(a_1 q)^3 & = & 3. \end{array}$$

Tako dobimo $q = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ in zato dobimo dve rešitvi za števila a_1, a_2 in a_3. Torej $a_1 = \frac{20}{3-\sqrt{5}}$, $a_2 = 10$ in $a_3 = 5(3-\sqrt{5})$ ter $a_1 = \frac{20}{3+\sqrt{5}}$, $a_2 = 10$ in $a_3 = 5(3+\sqrt{5})$. ∎

6. Vsota števil a_1, a_2 in a_3, ki predstavljajo prve tri člene aritmetične zaporedja (a_n), je 6. Če k tretjemu številu prištejemo prvo število, prvo in drugo število pa ohranimo, dobimo prve tri člene geometrijskega zaporedja. Izračunaj a_1, a_2 in a_3.
Rešitev. Ker so a_1, a_2 in a_3 prvi trije členi aritmetičnega zaporedja, velja a_1, $a_2 = a_1 + d$ in $a_3 = a_1 + 2d$. Iz tega sledi

$$3a_1 + 3d = 6.$$

Tako dobimo, da je $a_2 = a_1 + d = 2$. Vemo tudi, da števila a_1, a_2 in $a_1 + a_3$ tvorijo geometrijsko zaporedje in zato je $q = \frac{a_3+a_1}{a_2} = \frac{2a_2+2d}{2} = 2$. Iz tega potem sledi, da je $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ in $a_3 = 3$. ∎

7. Izračunaj naslednje limite zaporedij:
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2n+1}{n^3+3n^2+3n+1}$,
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3}{3n^3+n^2+3n+1}$,
   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3+3}{3n^2+2n+1}$,
   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n-7}{2n+4}\right)^{13}$,
   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(2n^2+1)(3n^3+1)(4n^4+1)}{(n+1)(n^2+2)(n^3+3)(n^4+4)}$
   (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+7^n}{3+5\cdot 7^n}$,
   (g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n+1}+5^{n+1}}{3^n+5^n}$,
   (h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-3)^n}{1+(-3)^n}$,
   (i) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$,
   (j) $\lim\limits_{n\to\infty} (n-\sqrt{n^2+1})$,
   (k) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}+n}{n}$,
   (l) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$,
   (m) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}}{\sqrt{9n+1}}$
   (n) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$,
   (o) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{2}+1}$,

(p) $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln(n+1)-\ln(n))$,

(q) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1-n^2}{n^2+2n+1}}$,

(r) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n$,

(s) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n-1}$,

(t) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2}$,

(u) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n^2}$,

(v) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+n-2}{n^3-1}\right)^{n^2}$

(w) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln(n)-\ln(n+1))$,

(x) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi n^3-n^2}{2n(3n^2+1)}\right)$,

(y) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}$,

(z) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)}{(n+3)!}$.

Rešitev.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^3+3n^2+3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^3(1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3})}=0$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3}{3n^3+n^2+3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3}{n^3(3+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3})}=\frac{2}{3}$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^4+3}{3n^2+2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4(5+\frac{3}{n^4})}{n^2(3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}=\infty$ ali rečemo, da ta limita ne obstaja,

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-7}{2n+4}\right)^{13}=\left(\frac{3}{2}\right)^{13}$,

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n^2+1)(3n^3+1)(4n^4+1)}{(n+1)(n^2+2)(n^3+3)(n^4+4)}=24$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+7^n}{3+5\cdot 7^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7^n(\frac{1}{7^n}+1)}{7^n(\frac{3}{7^n}+5)}=\frac{0+1}{0+5}=\frac{1}{5}$,

(g) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+5^{n+1}}{3^n+5^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n(3\cdot(\frac{3}{5})^n+5)}{5^n((\frac{3}{5})^n+1)}=\frac{0+5}{0+1}=5$,

(h) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-3)^n}{1+(-3)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-3)^n}{(-3)^n(\frac{1}{(-3)^n}+1)}=\frac{1}{0+1}=1$,

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$,

(j) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2+1})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-\sqrt{n^2+1})(n+\sqrt{n^2+1})}{n+\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-1}{n+\sqrt{n^2+1}}=0$,

(k) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}+1=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1=\sqrt{1+0}+1=2$,

(l) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[3]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{n(1+\frac{1}{n})}=\frac{\sqrt[3]{0+0}}{1+0}=0$,

(m) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}}{\sqrt{9n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}\left(1+\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}+\frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\sqrt{9+\frac{1}{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt[6]{\frac{n^2}{n^3}}+\sqrt[4]{\frac{n}{n^2}}}{\sqrt{9+\frac{1}{n}}}=\dfrac{1+0+0}{\sqrt{9+0}}=\dfrac{1}{3},$

(n) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+n\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\sqrt{n}}{n^2}}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\sqrt{n}}{n^2}}}}=$
$=\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{0+0}}}=1,$

(o) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{2}+1}=\dfrac{1-1}{1+1}=0,$

(p) $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln(n+1)-\ln(n))=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\ln 1=0,$

(q) $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1-n^2}{n^2+2n+1}}=2^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n^2}{n^2+2n+1}}=2^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2(\frac{1}{n^2}-1)}{n^2(1+2\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}}=2^{\frac{0-1}{1+2\cdot 0+0}}=\dfrac{1}{2},$

(r) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}\cdot(-2)}=e^{-2},$

(s) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n\cdot\frac{3n-1}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n}}=e^3,$

(t) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1-1}{n+1}\right)^{n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)\cdot\frac{n+2}{-(n+1)}}=$
$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{-(n+1)}}=e^{-1},$

(u) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n^2-1}\right)^{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n^2-1}\right)^{\frac{n^2-1}{2}\cdot\frac{2n^2}{n^2-1}}=$
$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2-1}}=e^2,$

(v) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+n-2}{n^3-1}\right)^{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(n-1)(n^2+n+2)}{(n-1)(n^2+n+1)}\right)^{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+1+1}{n^2+n+1}\right)^{n^2}=$
$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2+n+1}\right)^{(n^2+n+1)\cdot\frac{n^2}{n^2+n+1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n+1}}=e,$

(w) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\ln(n)-\ln(n+1))=\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n=$
$=\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)\cdot\frac{n}{-(n+1)}}\right)=\ln e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{-(n+1)}}=\ln e^{-1}=-1,$

(x) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\dfrac{\pi n^3-n^2}{2n(3n^2+1)}\right)=\sin\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi n^3-n^2}{2n(3n^2+1)}\right)=\sin\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3(\pi-\frac{1}{n})}{2n^3(3+\frac{1}{n^2})}\right)=$
$=\sin\left(\dfrac{\pi-0}{2(3+0)}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2},$

(y) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n!((n+1)-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0,$

(z) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)}{(n+3)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!\cdot((n+2)+\frac{1}{n!})}{(n+3)(n+2)(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n\cdot n!})}{n^2(1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2})}=$
$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n\cdot n!}}{n(1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2})}=0.$

∎

8. Za naslednja zaporedja, ki so podana s splošnim členom, preveri monotonost, omejenost in konvergenco.

(a) $a_n = \dfrac{1}{3n+4}$,

(b) $a_n = \dfrac{1000n}{n^2+1}$,

(c) $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}$,

(d) $a_n = \dfrac{n^2+2}{n+1}$,

(e) $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$,

(f) $a_n = \sin(nx)$, kjer je $x \in \mathbb{R}^+$.

Rešitev.

(a) Zaporedje (a_n) je padajoče, saj je za poljuben $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\leq a_n \\ \frac{1}{3(n+1)+4} &\leq \frac{1}{3n+4} \\ 4 &\leq 7; \end{aligned}$$

navzdol je omejeno z 0, saj je $\frac{1}{3n+4} > 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$; navzgor je omejeno z 1, saj je padajoče in je $a_1 = \frac{1}{7} < 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{3n+4} = 0$.

(b) Zaporedje (a_n) je padajoče, saj za poljuben $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\leq a_n \\ \frac{1000(n+1)}{(n+1)^2+1} &\leq \frac{1000n}{n^2+1} \\ n^3+n^2+n+1 &\leq n^3+2n^2+2n \\ 1 &\leq n^2+n; \end{aligned}$$

navzdol je omejeno z 0, saj je $\frac{1000n}{n^2+1} > 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$; navzgor je omejeno s 501, saj je padajoče in je $a_1 = 500 < 501$; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1000n}{n^2+1} = 0$.

(c) Zaporedje (a_n) je naraščajoče, saj za poljuben $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\begin{aligned} a_n &\leq a_{n+1} \\ 1+\frac{n}{n+1} &\leq 1+\frac{n+1}{n+2} \\ n^2+2n &\leq n^2+2n+1 \\ 0 &\leq 1; \end{aligned}$$

navzdol je omejeno z 1, saj je $1+\frac{n}{n+1} > 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$; navzgor je omejeno z 2, saj je naraščajoče in limita je enaka 2; $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \dfrac{n}{n+1} = 2$.

(d) Zaporedje (a_n) je naraščajoče, saj za poljuben $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\begin{aligned} a_n &\leq a_{n+1} \\ \frac{n^2+2}{n+1} &\leq \frac{(n+1)^2+2}{n+1+1} \\ n^3+2n^2+2n+4 &\leq n^3+3n^2+5n+3 \\ 1 &\leq n^2+3n; \end{aligned}$$

navzdol je omejeno z 0, saj je $\frac{n^2+2}{n+1} > 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$; navzgor ni omejeno; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2}{n+1} = \infty$ (divergira).

(e) Zaporedje ni monotono, saj že $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{3}{2}$ in $a_3 = \frac{2}{3}$; navzdol je omejeno z 0, saj je $1 + \frac{(-1)^n}{n} > 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$; navzgor je omejeno z 2, saj je $\frac{(-1)^n}{n} < 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \dfrac{(-1)^n}{n} = 1$.

(f) Za $\forall x \in \mathbb{R}^+$, obstajajo $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$, $n_1 < n_2 < n_3$, za katere velja $n_1, n_3 \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \left(\dfrac{(2k-1)\pi}{x}, \dfrac{2k\pi}{x}\right)$, $n_2 \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \left(\dfrac{2k\pi}{x}, \dfrac{(2k+1)\pi}{x}\right)$. Posledično bosta a_{n_1} in a_{n_3} negativna, a_{n_2} pa pozitiven, kar pomeni, da zaporedje ni monotono. Ker je zaloga vrednosti funkcije sin interval $[-1,1]$, zato je zaporedje navzdol omejeno z -1, navzgor pa z 1. Zaporedje ni konvergentno, saj vrednosti oscilirajo med -1 in 1 (glej monotonost).

∎

9. Zaporedje (a_n) je podano s splošnim členom

$$a_n = \frac{2n-1}{2n+2}.$$

(a) Preveri monotonost, omejenost in konvergenco.
(b) Od katerega člena dalje se vsi členi zaporedja (a_n) razlikujejo od limitne vrednosti za manj od 0.01?

Rešitev.

(a) Zaporedje (a_n) je naraščajoče, saj za poljuben $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\begin{aligned} a_n &\le a_{n+1} \\ \frac{2n-1}{2n+2} &\le \frac{2n+1}{2n+4} \\ 4n^2+6n-4 &\le 4n^2+6n+2 \\ -4 &\le 2; \end{aligned}$$

navzdol je omejeno z 0, saj je $\frac{n-1}{2n+2} > 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$; navzgor je omejeno z 1, saj je naraščajoče in limita je enaka 1;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+2} = 1.$$

(b)

$$\begin{aligned} \left|\frac{2n-1}{2n+2} - 1\right| &< \frac{1}{100} \\ 1 - \frac{2n-1}{2n+2} &< \frac{1}{100} \\ 300 &< 2n+2. \end{aligned}$$

Torej od 150. člena naprej.

∎

10. Zaporedje (a_n) je podano s splošnim členom

$$a_n = \frac{3n}{n^2+3n+2}.$$

(a) Preveri monotonost, omejenost in konvergenco.
(b) Od katerega člena dalje se vsi členi zaporedja (a_n) razlikujejo od limitne vrednosti za manj od 0.01?

Rešitev.
(a) Zaporedje (a_n) je padajoče, saj za poljuben $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\leq a_n \\ \frac{3n+3}{(n+1)^2+3(n+1)+2} &\leq \frac{3n}{n^2+3n+2} \\ 2 &\leq n(n+1); \end{aligned}$$

navzdol je omejeno z 0, saj je $\frac{3n}{n^2+3n+2} > 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$; navzgor je omejeno z 1, saj je padajoče in $a_1 = \frac{1}{2} < 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n}{n^2+3n+2} = 0$.

(b)

$$\begin{aligned} \left|\frac{3n}{n^2+3n+2} - 0\right| &< \frac{1}{100} \\ 300n &< n^2+3n+2 \\ 0 &< n^2-297n+2. \end{aligned}$$

Po reševanju te kvadratne enačbe sledi, da od 297. člena naprej. ∎

11. Zaporedje (a_n) je podano s splošnim členom

$$a_n = \frac{n^2+n}{n^2+n+1}.$$

(a) Preveri monotonost, omejenost in konvergentnost.
(b) Od katerega člena dalje se vsi členi zaporedja (a_n) razlikujejo od limitne vrednosti za manj od 0.001?

Rešitev.
(a) Zaporedje (a_n) je naraščajoče, saj za poljuben $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\begin{aligned} a_n &\leq a_{n+1} \\ \frac{n^2+n}{n^2+n+1} &\leq \frac{(n+1)^2+n+1}{(n+1)^2+n+1+1} \\ 0 &\leq 2n+2; \end{aligned}$$

navzdol je omejeno z 0, saj je $\frac{n^2+n}{n^2+n+1} > 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$; navzgor je omejeno z 1, saj $\frac{n^2+n}{n^2+n+1} < 1$ za vsak $n \in \mathbb{N}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n}{n^2+n+1} = 1$.

(b)

$$\begin{aligned} \left|\frac{n^2+n}{n^2+n+1} - 1\right| &< \frac{1}{1000} \\ 1 - \frac{n^2+n}{n^2+n+1} &< \frac{1}{1000} \\ 0 &< n^2+n-999. \end{aligned}$$

Po reševanju te kvadratne enačbe sledi, da od 32. člena naprej. ∎

12. Razišči zaporedje (a_n), ki je podano s splošnim členom

$$a_n = \frac{n^5}{5^n}.$$

Rešitev. Zaporedje (a_n) ni monotono, saj $a_1 = \frac{1}{5}$, $a_2 = \frac{32}{25}$, $a_3 = \frac{243}{125}$ in $a_4 = \frac{1024}{625}$. Za lažje dokazovanje omejenosti preverimo, od katerega člena naprej je monotono. Dokažimo, da je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \Leftrightarrow n < 3.$$

Preverimo implikacijo samo v desno stran.

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{(n+1)^5}{5^{n+1}}}{\frac{n^5}{5^n}} &\geq 1 \\
\frac{(n+1)^5}{5n^5} &\geq 1 \\
(n+1)^5 &\geq 5n^5 \\
n+1 &\geq \sqrt[5]{5}n \\
2.7 &\geq n.
\end{aligned}$$

Torej je a_n padajoče od tretjega člena naprej. Navzdol je omejeno z 0, saj je $\frac{n^5}{5^n} > 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$; navzgor je omejeno z 2 (do tretjega člena je a_n naraščajoče, od tretjega člena pa padajoče); $\lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{5^n} = 0$. ∎

13. Ali je zaporedje (a_n), ki je podano s splošnim členom

$$a_n = \left(\frac{3n^2+3}{3n^2+1}\right)^{n^2},$$

omejeno? Utemelji.

Rešitev. Izračunajmo limito zaporedja.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2+3}{3n^2+1}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{3n^2+1}\right)^{\frac{3n^2+1}{2} \cdot \frac{2n^2}{3n^2+1}} = e^{\frac{2}{3}}$$

Ker je zaporedje konvergentno, zato je po izreku tudi omejeno. ∎

14. Ali je zaporedje (a_n), ki je podano rekurzivno

$$a_1 = \frac{9}{4},\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + \frac{9}{4}} \text{ za vsak } n \in \mathbb{N},$$

konvergentno? Utemelji!

Rešitev. Dokazali bomo, da je zaporedje monotono (padajoče) in omejeno. Najprej s pomočjo indukcije dokažimo, da je zaporedje padajoče.

Baza indukcije je trivialno izpolnjena. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in predpostavimo, da je $a_n \geq a_{n+1}$. Dokažimo, da je $a_{n+1} \geq a_{n+2}$.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &\geq a_{n+2} \\
\sqrt{a_n + \frac{9}{4}} &\geq \sqrt{a_{n+1} + \frac{9}{4}}
\end{aligned}$$

To seveda velja zaradi indukcijeske predpostavke.

Opazimo, da je zaporedje omejeno navzgor z a_1, saj je zaporedje padajoče. Zaporedje je omejeno navzdol z 0, saj so vsi členi zaporedja pozitivni.

Ker je zaporedje monotono in omejeno, po izreku sledi, da je konvergentno. ∎

15. Zaporedje (a_n) je podano rekurzivno

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{n + a_n} \text{ za vsak } n \in \mathbb{N}.$$

Ali je zaporedje konvergentno? Utemelji!

Rešitev. Vsi členi zaporedja so očitno pozitivni, zato lahko naredimo naslednjo oceno

$$a_{n+1} = \sqrt{n+a_n} \geq \sqrt{n}.$$

Ker zaporedje s členi $(\sqrt{n})$ divergira, zato tudi zaporedje (a_n) divergira. Posledično je odgovor ne. ∎

16. Zaporedje (a_n) je podano rekurzivno

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n+1} \text{ za vsak } n \in \mathbb{N}.$$

Preveri, da je (a_n) omejeno ter poišči zgornjo in spodnjo mejo.

Rešitev. S pomočjo matematične indukcije najprej dokažimo, da je zaporedje naraščajoče.
Baza indukcije je trivialno izpolnjena. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in predpostavimo $a_n \leq a_{n+1}$. Dokažimo $a_{n+1} \leq a_{n+2}$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\leq a_{n+2} \\ \sqrt{2a_n+1} &\leq \sqrt{2a_{n+1}+1} \\ a_n &\leq a_{n+1} \end{aligned}$$

in slednja vrstica velja zaradi indukcijske predpostavke.
Ker je naraščajoče, je navzdol omejeno s prvim členom zaporedja (tj. 1). Poiščimo še zgornjo mejo s pomočjo limite.
Predpostavimo, da je konvergentno.

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_n+1} = \sqrt{2L+1}$$

Dobimo dva kandidata: $L_1 = 1+\sqrt{2}$ in $L_2 = 1-\sqrt{2}$. Izberimo prvega, saj je večji od 1. Zanj dokažimo, da je zgornja meja.
Za a_1 je očitno. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in predpostavimo $a_n \leq 1+\sqrt{2}$. Dokažimo $a_{n+1} \leq 1+\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{2a_n+1} &\leq 1+\sqrt{2} \\ 2a_n+1 &\leq 1+2\sqrt{2}+2 \\ a_n &\leq 1+2\sqrt{2} \end{aligned}$$

in slednja vrstica je resnična zaradi indukcijske predpostavke. Torej, spodnja meja je 1, zgornja pa $1+\sqrt{2}$. ∎

17. Razišči zaporedje (a_n), ki je podano rekurzivno

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + 2 \text{ za vsak } n \in \mathbb{N}.$$

Rešitev.

- Monotonost
  Preverimo, da je zaporedje padajoče s pomočjo matematične indukcije. Res velja $a_2 \leq a_1$. Zato predpostavimo, da je $a_{n+1} \leq a_n$ in dokažimo, da je $a_{n+2} \leq a_{n+1}$.

$$\begin{aligned} a_{n+2} &\leq a_{n+1} \\ \frac{1}{6}a_{n+1}+2 &\leq \frac{1}{6}a_n+2 \\ a_{n+1} &\leq a_n. \end{aligned}$$

- Omejenost
  Ker je zaporedje padajoče, je navzgor omejeno s prvim členom $a_1 = 3$. Preverimo, da je navzdol omejeno z 0. Za a_1 to trivialno velja. Zato predpostavimo, da je $a_n > 0$, kjer je $n \in \mathbb{N}$, in dokažimo, da je tudi $a_{n+1} > 0$. Ker je $a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + 2$ in $a_n > 0$, imamo vsoto dveh pozitivnih členov in zato je $a_{n+1} > 0$.

- Limita zaporedja
  Zaporedje je konvergentno, ker je padajoče in navzdol omejeno. Naj bo $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Tako pridemo do zveze
  $$L = \frac{1}{6}L + 2$$
  in iz tega sledi, da je $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{12}{5}$.

∎

18. Razišči zaporedje (a_n), ki je podano rekurzivno
$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 2 \text{ za vsak } n \in \mathbb{N}.$$

Rešitev.

- Monotonost
  Preverimo, da je zaporedje naraščajoče s pomočjo matematične indukcije. Res velja $a_2 \geq a_1$, zato predpostavimo, da je $a_{n+1} \geq a_n$, kjer je $n \in \mathbb{N}$, in dokažimo, da je tudi $a_{n+2} \geq a_{n+1}$.
  $$\begin{aligned} a_{n+2} &\geq a_{n+1} \\ \frac{1}{2}a_{n+1} + 2 &\geq \frac{1}{2}a_n + 2 \\ a_{n+1} &\geq a_n. \end{aligned}$$
- Omejenost
  Ker je zaporedje naraščajoče, je navzdol omejeno z $a_1 = 2$. Preverimo, da je navzgor omejeno s 4. Za a_1 to trivialno velja. Zato predpostavimo, da $a_n < 4$, kjer je $n \in \mathbb{N}$, in dokažimo, da je tudi $a_{n+1} < 4$.
  $$\begin{aligned} \frac{1}{2}a_n + 2 &< 4 \\ a_n &< 4. \end{aligned}$$
- Limita zaporedja
  Zaporedje je konvergentno, ker je naraščajoče in navzgor omejeno. Naj bo $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Tako pridemo do zveze
  $$L = \frac{1}{2}L + 2$$
  in iz tega sledi, da je $\lim_{n\to\infty} a_n = 4$.

∎

19. Razišči zaporedje (a_n), ki je podano rekurzivno
$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n^2 - 2 \text{ za vsak } n \in \mathbb{N}.$$

Obravnavaj še primer, ko je $a_1 = 2$ oziroma $a_1 = 1$.

Rešitev.

- Monotonost
  Preverimo, da je zaporedje naraščajoče s pomočjo matematične indukcije. Res velja $a_2 \geq a_1$, zato predpostavimo, da je $a_{n+1} \geq a_n$, kjer je $n \in \mathbb{N}$, in dokažimo, da je tudi $a_{n+2} \geq a_{n+1}$.
  $$\begin{aligned} a_{n+2} &\geq a_{n+1} \\ a_{n+1}^2 - 2 &\geq a_n^2 - 2 \\ a_{n+1}^2 &\geq a_n^2. \end{aligned}$$
  Ker gledamo samo pozitivne člene, to res velja.

- Omejenost
  Ker je zaporedje naraščajoče, je zaporedje navzdol omejeno s prvim členom $a_1 = 3$. Hitro vidimo, da zaporedje ni navzgor omejeno (glej začetne člene zaporedja).
- Konvergenca
  Zaporedje ne konvergira, ker ni navzgor omejeno.

Vsak lahko sam preveri, da v primeru, ko je $a_1 = 2$ dobimo konstantno zaporedje s splošnim členom $a_n = 2$, ko pa je $a = 1$, pa dobimo, zaporedje $a_1 = 1$ in $a_n = -1$ za vsak $n = 2, 3, \ldots$. ∎

20. Zaporedje (a_n) je podano rekurzivno

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{3}{2a_n} \text{ za vsak } n \in \mathbb{N}.$$

Poišči limito zaporedja in dokaži, da vsi členi zaporedja ležijo na intervalu $[1, 3]$.

Rešitev.

- Naj bo $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Tako pridemo do zveze

$$L = \frac{L}{2} + \frac{3}{2L}.$$

  Iz tega dobimo

$$L^2 - 3 = 0.$$

  Tako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{3}$, saj so vsi členi zaporedja pozitivni.
- Preverimo, da je zaporedje navzdol omejeno z 1. Za $a_1 = 1$ je to res, zato predpostavimo, da je $1 \le a_n \le 3$ za nek $n \in \mathbb{N}$ in dokažimo, da je tudi $1 \le a_{n+1} \le 3$.

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{3}{2a_n} \le \frac{3}{2} + \frac{3}{2\cdot 1} = 3$$
$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{3}{2a_n} \ge \frac{1}{2} + \frac{3}{2\cdot 3} = 1$$

  in zato so res vsi členi na intervalu $[1, 3]$.

∎

21. Razišči zaporedje (a_n), ki je podano s splošnim členom

$$a_n = \underbrace{\ln(2 + \ln(2 + \ln(2 + \ldots \ln 2) \ldots))}_{n}.$$

Rešitev. Preden bomo raziskali zaporedje, zapišimo zaporedje kot $a_1 = \ln 2$ in $a_{n+1} = \ln(2 + a_n)$.

- Monotonost
  Preverimo, da je zaporedje naraščajoče s pomočjo matematične indukcije. Res velja $a_2 \ge a_1$, zato predpostavimo, da je $a_{n+1} \ge a_n$, kjer je $n \in \mathbb{N}$, in dokažimo, da je tudi $a_{n+2} \ge a_{n+1}$.

$$\begin{aligned} a_{n+2} &\ge a_{n+1} \\ \ln(2 + a_{n+1}) &\ge \ln(2 + a_n) \\ a_{n+1} &\ge a_n. \end{aligned}$$

- Omejenost
  Ker je zaporedje naraščajoče, je zaporedje navzdol omejeno z $a_1 = \ln 2$. Dokažimo, da je tudi navzgor omejeno. Predpostavimo, da obstaja $M \in \mathbb{R}$, za katerega je $a_n < M$ za poljuben $n \in \mathbb{N}$ in dokažimo, da je potem $a_{n+1} < M$. Za lažje razumevanje kar predpostavimo, da je $M = e$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \ln(2 + a_n) < \ln(2 + M) < \ln(M + M) = \ln(2M) \\ &= \ln 2 + \ln M < \ln M + \ln M = 2\ln M = 2\ln e \\ &< e. \end{aligned}$$

  Torej je zaporedje navzgor omejeno z e.

- Konvergenca
  Zaporedje je konvergentno, ker je naraščajoče in navzgor omejeno.

∎

22. Razišči zaporedje s členi
$$a_n = \underbrace{\sqrt{3\sqrt{3\ldots\sqrt{3}}}}_{n}.$$

Rešitev. Preden bomo raziskali zaporedje, zapišimo zaporedje na način $a_1 = \sqrt{3}$ in $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$. Vsak lahko sam preveri, da je to dobro definirano.

- Monotonost
  Preverimo, da je zaporedje naraščajoče s pomočjo matematične indukcije. Res velja $a_2 \geq a_1$, zato predpostavimo, da je $a_{n+1} \geq a_n$, kjer je $n \in \mathbb{N}$, in dokažimo, da je tudi $a_{n+2} \geq a_{n+1}$.
$$\begin{aligned} a_{n+2} &\geq a_{n+1} \\ \sqrt{3a_{n+1}} &\geq \sqrt{3a_n} \\ a_{n+1} &\geq a_n. \end{aligned}$$

- Omejenost
  Ker je zaporedje naraščajoče, je navzdol omejeno z $a_1 = \sqrt{3}$. Dokažimo, da je navzgor omejeno s 3. Za a_1 to trivialno velja. Predpostavimo, da je $a_n < 3$, kjer je $n \in \mathbb{N}$, in dokažimo, da je tudi $a_{n+1} < 3$.
$$\begin{aligned} a_{n+1} &< 3 \\ \sqrt{3a_n} &< 3 \\ a_n &< 3 \end{aligned}$$
  Torej je zaporedje navzgor omejeno s 3.
- Limita zaporedja
  Zaporedje je konvergentno, ker je naraščajoče in navzgor omejeno. Naj bo $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Tako pridemo do zveze
$$L = \sqrt{3L}$$
  in edina smiselna rešitev je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$, saj je $a_1 = \sqrt{3}$ in (a_n) je naraščajoče zaporedje.

∎

23. Dokaži ali ovrzi:
    (a) če zaporedje (a_n) konvergira, potem tudi zaporedje $(|a_n|)$ konvergira;
    (b) če zaporedje $(|a_n|)$ konvergira, potem tudi zaporedje (a_n) konvergira.

Rešitev.
(a) Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Ker zaporedje s členi a_n konvergira, potem obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, velja $|a_n - L| < \varepsilon$, kjer je $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Ker velja
$$||a_n| - |L|| \leq |a_n - L| < \varepsilon,$$
zaporedje s členi $|a_n|$ konvergira (razmisli, da za poljubni realni števili x in y velja ocena $||x| - |y|| \leq |x - y|$).
(b) Ta trditev ne velja. Protiprimer je zaporedje s splošnim členom $a_n = (-1)^n$.

∎

24. Poišči vsa stekališča podanih zaporedij
    (a) $1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots$,
    (b) $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$,
    (c) $a_n = (-1)^{n+1} + (-1)^n \dfrac{1}{n}$,

(d) $a_n = \sin\left(\dfrac{\pi + (-1)^n\pi}{4}\right)$.

Rešitev.

(a) 1,2,3.
(b) Vsa naravna števila.
(c) Za lihe n je 1, za sode n pa -1.
(d) Za lihe n je 0, za sode n pa 1.

∎

Vrste

1. Ugotovi, ali so podane vrste konvergentne. Če so, izračunaj vsoto.

(a) $1 - 1 + 2 - 2 + 3 - 3 + \ldots$,
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$,
(c) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$,
(d) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$,
(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$,
(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$,
(g) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$,
(h) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots$,
(i) $\sum_{n=\lfloor \frac{k}{2}+1 \rfloor}^{\infty} \frac{1}{(2n-k)(2n+k)}$, kjer je k poljubno naravno število,
(j) $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots$,
(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$,
(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$,
(m) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}$.

Rešitev.

(a) Delne vsote so $s_{2n-1} = n$ in $s_{2n} = 0$. Limita teh delnih vsot ne obstaja in zato vrsta divergira.
(b) Delne vsote so $s_1 = -1$, $s_2 = 1$, $s_3 = -2$, …. Limita teh delnih vsot ne obstaja in zato vrsta divergira.
(c) Delne vsote so $s_0 = 1$, $s_1 = 3$, $s_2 = 7$, …. Limita teh delnih vsot ne obstaja in zato vrsta divergira.
(d) Delne vsote so $s_0 = 1$, $s_1 = \frac{3}{2}$, $s_2 = \frac{7}{4}$, …, $s_n = \dfrac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$. Limita delnih vsot obstaja, zato izračunajmo vsoto vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

(e) Delne vsote so $s_0 = \frac{1}{3}$, $s_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{3}$, $s_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{19}{9}$, …, $s_n = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1-(\frac{2}{3})^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}$. Limita delnih vsot obstaja, zato izračunajmo vsoto vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9} + \frac{1}{3}\cdot\frac{8}{27} + \ldots = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = 1.$$

(f) Vrsta konvergira, saj je to geometrijska vrsta. Direktno izračunajmo vsoto vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \ldots = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}.$$

(g) Iz zaporedja prepoznamo, da je n-ti člen vrste

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Desno stran zgornje enačbe izračunamo tako, da zapišemo nastavek

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1},$$

kjer iščemo konstanti A in B. Tako dobimo sistem

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ A + B &= 0 \end{aligned}$$

in iz tega sledi $A = 1$ in $B = -1$. To upoštevamo pri s_n. Posledično

$$s_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ker je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$, zato je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

(h) Iz zaporedja prepoznamo, da je n-ti člen vrste

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

(glej naslednji splošnejši primer).To upoštevamo pri s_n. Posledično

$$s_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Ker je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$, zato je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}.$$

(i) Zapišimo n-ti člen malo drugače. Nastavimo, da je

$$\frac{1}{(2n-k)(2n+k)} = \frac{A}{2n-k} + \frac{B}{2n+k}.$$

Tako dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} 2A + 2B &= 0 \\ kA - kB &= 1 \end{aligned}$$

in iz tega sledi $A = \frac{1}{2k}$ in $B = -\frac{1}{2k}$. Zato je n-ti člen

$$\frac{1}{(2n-k)(2n+k)} = \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{2n-k} - \frac{1}{2n+k}\right).$$

Preden povemo, koliko je vsota vrste, si poglejmo $s_n + s_{n+k}$ (brez konstante $\frac{1}{2k}$).

$$\begin{aligned}
s_n + s_{n+k} &= \frac{1}{2n-k} - \frac{1}{2n+k} + \frac{1}{2(n+1)-k} - \frac{1}{2(n+1)+k} + \\
&+ \ldots + \frac{1}{2(n+k)-k} - \frac{1}{2(n+k)+k} \\
&= \frac{1}{2n-k} - \frac{1}{2n+k} + \frac{1}{2(n+1)-k} - \frac{1}{(2(n+1)+k)} + \\
&+ \ldots + \frac{1}{2n+k} - \frac{1}{2n+3k}
\end{aligned}$$

Opazimo, da se posamezni elementi pojavijo dvakrat in se odštejejo. Ker je n poljubno naravno število, se nam bo ta situacija vedno ponovila in zato je vsota vrste enaka

$$\sum_{n=\lfloor \frac{k}{2}+1 \rfloor}^{\lfloor \frac{k}{2}+1 \rfloor + k} \frac{1}{2k} \cdot \frac{1}{2n-k}.$$

(j) Poskusimo še na drug način izračunati vsoto vrste (lahko bi podobno kot v prejšnjih dveh primerih izračunali vsoto vrste). Delne vsote so $s_1 = \frac{1}{4}$, $s_2 = \frac{2}{7}$, $s_3 = \frac{3}{10}$, $\ldots$, $s_n = \frac{n}{3n+1}$. S pomočjo matematične indukcije lahko vsak dokaže, da je s_n res take oblike. Limita delnih vsot obstaja in je enaka $\frac{1}{3}$ in zato je vsota vrste enaka $\frac{1}{3}$.

(k) Zapišimo n-ti člen malo drugače. Nastavimo, da je

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{An+B}{n^2} + \frac{Cn+D}{(n+1)^2}.$$

Tako dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned}
A + C &= 0 \\
2A + B + D &= 0 \\
A + 2B &= 2 \\
B &= 1
\end{aligned}$$

in iz tega sledi $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$ in $D = -1$. Zato je n-ti člen

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

in posledično

$$s_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Ker je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1$, zato je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1.$$

(l) Zapišimo n-ti člen vrste malo drugače. Nastavimo, da je

$$\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{An+B}{(2n-1)^2} + \frac{Cn+D}{(2n+1)^2}.$$

Tako dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} 4A+4C&=0\\ 4A+4B-4C+4D&=0\\ A+4B+C-4D&=1\\ B+D&=0 \end{aligned}$$

in iz tega sledi $A=0$, $B=\frac{1}{8}$, $C=0$ in $D=-\frac{1}{8}$. Zato je n-ti člen

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)$$

in posledično

$$s_n=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right).$$

Ker je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)=\frac{1}{8}$, zato je

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{8}.$$

(m) Delne vsote so $s_0=2, s_1=3,\ldots,s_n=\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{5}}+\frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{5}}$. Limita delnih vsot obstaja in je enaka $\frac{25}{6}$ (kar je tudi vsota vrste).
Izračunajmo vsoto vrste še nekoliko drugače

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{2}{5}}+\frac{1}{1-\frac{3}{5}}=\frac{25}{6}.$$

∎

2. Pokaži, da je $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{4}{3}$, če je $a_n=\dfrac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$.

Rešitev. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}}{\frac{1-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}}=\frac{4}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{3^{n+1}}}=\frac{4}{3}.$ ∎

3. Z uporabo primerjalnega kriterija preuči konvergenco vrst:
   (a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10n+1}$,
   (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$,
   (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$,
   (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$,
   (e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$, $x\in\mathbb{R}$,
   (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+\cos n}{n^3+1}$,
   (g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^3+1}\right)^2$,

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

Rešitev.

(a) Ocenimo člen $\frac{1}{10n+1}$:

$$\frac{1}{10n+1} > \frac{1}{10n+10} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{n+1}.$$

Minoranta $\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ je divergentna vrsta in zato tudi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10n+1}$ divergira.

(b) Ocenimo člen $\frac{1+n}{1+n^2}$:

$$\frac{1+n}{1+n^2} > \frac{1+n}{1+2n+n^2} = \frac{1+n}{(1+n)^2} = \frac{1}{n+1}.$$

Minoranta $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ je divergentna vrsta in zato tudi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$ divergira.

(c) Ocenimo člen $\frac{\ln n}{n}$:

$$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n} \quad \text{za} \quad n > 3.$$

Minoranta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je divergentna vrsta in zato tudi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ divergira.

(d) Ocenimo člen $\frac{1}{n2^n}$:

$$\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}.$$

Majoranta $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ je konvergentna vrsta in zato tudi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ konvergira.

(e) Ocenimo člen $\frac{\sin nx}{2^n}$:

$$\frac{\sin nx}{2^n} < \frac{1}{2^n}.$$

Majoranta $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ je konvergentna vrsta in zato tudi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$ konvergira.

(f) Ocenimo člen $\frac{n+\cos n}{n^3+1}$:

$$\frac{n+\cos n}{n^3+1} < \frac{n+\cos n}{n^3} < \frac{n+1}{n^3} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}.$$

Majoranta je vsota konvergentnih vrst $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ in zato tudi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\cos n}{n^3+1}$ konvergira.

(g) Ocenimo člen $\left(\frac{n^2+1}{n^3+1}\right)^2$:

$$\left(\frac{n^2+1}{n^3+1}\right)^2 < \left(\frac{n^2+1}{n^3}\right)^2 < \left(\frac{n^2+2n+1}{n^3}\right)^2 = \left(\frac{(n+1)^2}{n^3}\right)^2$$
$$< \left(\frac{(n+n)^2}{n^3}\right)^2 = \frac{16n^4}{n^6} = \frac{16}{n^2}.$$

Majoranta $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{n^2}$ je konvergentna vrsta in zato tudi $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^3+1}\right)^2$ konvergira.

(h) Ocenimo člen $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+1)}} = \frac{1}{n+1}.$$

Minoranta $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+1}$ je divergentna vrsta in zato tudi $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ divergira.

■

4. Upoštevaj potrebni pogoj za konvergenco vrst in preuči konvergenco vrst:
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$,
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{2n+1}$,
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2+n+1}$.

Rešitev.

(a) Vrsta divergira, saj $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty > 0$.

(b) Vrsta divergira, saj $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n+1} = \dfrac{1}{2} > 0$.

(c) Velja sicer, da je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$, vendar ne konvergira zaporedje delnih vsot s_n, saj je

$$s_n = \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n+1} - 1.$$

(d) Velja sicer, da je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2+n+1} = 0$, vendar upoštevajmo primerjalni kriterij

$$\frac{n}{n^2+n+1} > \frac{n}{n^2+n+n} = \frac{n}{n^2+2n} = \frac{1}{n+2} > \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n}.$$

Minoranta je divergentna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n}$, zato tudi $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2+n+1}$ divergira.

■

5. Z uporabo kvocientnega oziroma D'Alembertovega kriterija preuči konvergenco vrst:
   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n}{2^n}$
   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a^n}{n!}$, kjer je a pozitivno realno število,
   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$,
   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n n!}{n^n}$,
   (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n n}{2^n(n+1)}$,
   (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$.

Rešitev.

(a) Velja

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$

in zato vrsta konvergira.

(b) Velja

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{a}{n+1} = 0 < 1$$

in zato vrsta konvergira.

(c) Velja

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2n+1}{(\sqrt{2})^{n+1}}}{\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{2}(2n-1)} = \frac{2}{2\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

in zato vrsta konvergira.

(d) Velja

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} 3\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)\cdot\frac{n}{-(n+1)}}$$
$$= 3e^{-1} > 1$$

in zato vrsta divergira.

(e) Velja

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^{n+1}(n+1)}{2^{n+1}(n+2)}}{\frac{3^n n}{2^n(n+1)}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)^2}{2n(n+2)} = \frac{3}{2} > 1$$

in zato vrsta divergira.

(f) Velja

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}}{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}(n+1)}{\sqrt{n}(n+2)} = 1$$

in ta kriterij nam nič ne pove o konvergenci vrste.

∎

6. Z uporabo korenskega oziroma Cauchyjevega kriterija preuči konvergenco vrst:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n^2}{3^n}\right)^n$,

(b) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{4n+5}\right)^n$,

(c) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n}{n+3}\right)^n$,

(d) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$,

(e) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n(n-1)}$,

(f) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

Rešitev.

(a) Velja
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{n^2}{3^n}\right)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3^n}=0<1$$
in zato vrsta konvergira.

(b) Velja
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{2n+3}{4n+5}\right)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{4n+5}=\frac{1}{2}<1$$
in zato vrsta konvergira.

(c) Velja
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{2n}{n+3}\right)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+3}=2>1$$
in zato vrsta divergira.

(d) Velja
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=e^{-1}<1$$
in zato vrsta konvergira.

(e) Velja
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n(n-1)}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{(n-1)}{2}\cdot 2}=e^2>1$$
in zato vrsta divergira.

(f) Velja
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$
in ta kriterij nam nič ne pove o konvergenci vrste.

■

7. Z uporabo Leibnizovega kriterija preuči konvergenco vrst:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{2^n}$.

Preveri ali so vrste tudi absolutno konvergentne!

Rešitev.

(a) Vrsta ni absolutno konvergentna, saj
$$\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{n}$$
(minoranta je harmonična vrsta). Preverimo lastnosti Leibnizovega kriterija:
- vrsta alternira,
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$,
- za vsak $n\in\mathbb{N}$ je $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\frac{1}{\sqrt{n}}$,

zato vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ (pogojno) konvergira.

(b) Vrsta ni absolutno konvergentna, saj

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

in ne zadošča osnovnemu pogoju za konvergenco vrste. Prav tako ne veljajo vse lastnosti Leibnizovega kriterija, saj $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ in zato vrsta divergira.

(c) Vrsta ni absolutno konvergentna, saj

$$\frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$$

(minoranta je harmonična vrsta). Preverimo lastnosti Leibnizovega kriterija:
- vrsta alternira,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$,
- za vsak $n \in \mathbb{N}$ je $\frac{1}{2n+3} < \frac{1}{2n+1}$.

Zato vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ (pogojno) konvergira. Kot zanimivost povejmo, da je to Leibnizova formula za število π, in velja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

(d) Vrsta celo absolutno konvergira, saj

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}} \right| = \frac{(n+1)^3}{2n^3} = \frac{1}{2} < 1$$

in zato ni potrebno uporabiti Leibnizovega kriterija za konvergenco vrste.

∎

8. Z uporabo Raabejevega kriterija preuči konvergenco vrst:
(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$,
(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$,
(c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^\alpha}$,
(d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{4^{n-1} \cdot ((n-1)!)^2}{((2n-1)!!)^2}$

Rešitev.

(a) Uporabimo Raabejev kriterij.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{(n+1)^\alpha}} - 1 \right) &= \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} - 1 \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^\alpha - n^\alpha}{n^{\alpha-1}} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^\alpha((1+\frac{1}{n})^\alpha - 1)}{n^{\alpha-1}} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1 \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^\alpha - 1}{\frac{1}{n}} \\
&= \alpha > 1
\end{aligned}$$

(na limito lahko gledamo kot na limito funkcije) in zato vrsta konvergira.

(b) Vrsta konvergira, saj je

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}}{\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)^2}}\right|-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n^2+2n+1-n^2}{n^2}\right)=2>1.$$

(c) Preden uporabimo Raabejev kriterij, naredimo naslednjo oceno

$$\frac{(\ln(n+1))^\alpha}{(\ln n)^\alpha}=\left(\frac{\ln n+\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right)^\alpha \doteq \left(1+\frac{\alpha}{n\ln n}\right).$$

Sedaj uporabimo Raabejev kriterij

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\frac{1}{(\ln n)^\alpha}}{\frac{1}{(\ln(n+1))^\alpha}}-1\right)\doteq \lim_{n\to\infty} n\left(1+\frac{\alpha}{n\ln n}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{\ln n}=0<1$$

in zato vrsta divergira.

(d) Ker je

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\frac{4^{n-1}\cdot((n-1)!)^2}{((2n-1)!!)^2}}{\frac{4^n\cdot(n!)^2}{((2n+1)!!)^2}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n+1)^2-4n^2}{4n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+1}{4n}\right)=1,$$

se z Raabejevim kriterijem ne moremo opredeliti o konvergenci vrste. ∎

9. Dokaži, če $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, potem tudi vrsta s členi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ konvergira.

Rešitev. Uporabili bomo Cauchyjev kriterij za konvergenco vrste:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira natanko tedaj, ko za vsako pozitivno realno število $\varepsilon>0$, obstaja tako naravno število n_0, da za vsaki naravni števili m in n, $n_0\le n\le m$, velja $|a_n+a_{n+1}+\ldots+a_m|<\varepsilon$.

S pomočjo Cauchyjevega kriterija enostavno dokažemo zgornjo trditev, saj

$$\left|\frac{a_n}{n}+\frac{a_{n+1}}{n+1}+\ldots+\frac{a_m}{m}\right|<|a_n+a_{n+1}+\ldots+a_m|<\varepsilon$$

(glej predpostavke Cauchyjevega kriterija). ∎

10. Naj bo $a_n\ge 0$ za vsak $n\in\mathbb{N}$. Dokaži:

(a) če vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, potem tudi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ konvergira;

(b) če vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, potem tudi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ divergira.

Rešitev.

(a) Uporabimo primerjalni kriterij

$$0\le\frac{a_n}{1+a_n}\le a_n$$

in zato vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ konvergira.

(b) Dokazali bomo ekvivalentno trditev: če konvergira $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$, potem konvergira $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Recimo, da $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ konvergira. Iz tega sledi, da velja potrebni pogoj za konvergenco vrste $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{1+a_n}=0$. Zato velja $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ in iz tega sledi $1\le 1+a_n\le 2$. Uporabimo primerjalni kriterij

$$0\le\frac{a_n}{2}\le\frac{a_n}{1+a_n}$$

in zato vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira. ∎

11. Dokaži, da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira natanko tedaj, ko konvergira $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.
Rešitev. Naj bo $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ in $t_n = a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^n a_{2^n}$.
Recimo, da s_n konvergira. Za poljuben $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, obstaja tak $k \in \mathbb{N}$, da velja $n \geq 2^k$. Potem

$$\begin{aligned}
s_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\
&\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k}) \\
&\geq a_1 + a_2 + (a_4 + a_4) + \ldots + (a_{2^k} + \ldots + a_{2^k}) \\
&\geq \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + \ldots + 2^{k-1} a_{2^k} \\
&= \frac{1}{2} t_k
\end{aligned}$$

in po primerjalnem kriteriju t_k konvergira, zato tudi $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergira.
Recimo, da t_n konvergira. Za poljuben $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, obstaja tak $k \in \mathbb{N}$, da velja $n \geq 2^k$. Potem

$$\begin{aligned}
s_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\
&\leq a_1 + (a_2 + a_3) + \ldots + (a_{2^k} + \ldots + a_{2^{k+1}-1}) \\
&\leq a_1 + (a_2 + a_2) + \ldots + (a_{2^k} + \ldots + a_{2^k}) \\
&= a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^k a_{2^k} \\
&= t_k
\end{aligned}$$

in po primerjalnem kriteriju s_k konvergira, tako posledično tudi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira. ∎

12. Naj bo $a_n \geq 0$ za vsako naravno število n. Dokaži, če $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, potem tudi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ konvergira.
Rešitev. Za dokaz te trditve bomo uporabili izrek Cauchy-Schwarz-Bunjakovski:
za poljubni zaporedji a_n, b_n velja

$$\left| \sum_{n=1}^{m} a_n b_n \right|^2 \leq \sum_{n=1}^{m} |a_n|^2 \cdot \sum_{n=1}^{m} |b_n|^2.$$

V našem primeru tako imamo

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n} \right|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\sqrt{a_n}|^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

in trditev je dokazana. ∎

13. Za katere $x \in \mathbb{R}$ konvergirajo naslednje vrste:
   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$,
   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n$,
   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^n}$,
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$,

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$,

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$,

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$,

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n(n-1)} (x-e)^n$.

Rešitev.

(a) Uporabimo korenski kriterij

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n} = 2.$$

Vrsta konvergira za tiste $x \in \mathbb{R}$, za katere velja

$$|x| < \frac{1}{q} = \frac{1}{2}.$$

Iz tega sledi, da vrsta konvergira za vsak $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Vsak lahko sam preveri, da na robovih intervala divergira.

(b) Uporabimo korenski kriterij

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1.$$

Vrsta konvergira za tiste $x \in \mathbb{R}$, za katere velja

$$|x-1| < \frac{1}{q} = \frac{1}{1}.$$

Iz tega sledi, da vrsta konvergira za vsak $x \in (0,2)$. Vsak lahko sam preveri, da na robovih intervala divergira.

(c) Uporabimo korenski kriterij

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1.$$

Vrsta konvergira za tiste $x \in \mathbb{R}$, za katere velja

$$\left|\frac{1}{x-1}\right| < \frac{1}{q} = \frac{1}{1}.$$

Iz tega sledi, da vrsta konvergira za vsak $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$. Vsak lahko sam preveri, da za $x = 0$ in $x = -2$ vrsta divergira.

(d) Uporabimo kvocientni kriterij

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Vrsta konvergira za tiste $x \in \mathbb{R}$, za katere velja

$$|x| < \frac{1}{q} = \frac{1}{1}.$$

Iz tega sledi, da vrsta konvergira za vsak $x \in [-1,1]$ (preveri, da konvergira tudi na robu intervala).

(e) Uporabimo kvocientni kriterij

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = 0.$$

Vrsta konvergira za vsa realna števila.

(f) Uporabimo korenski kriterij

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sqrt[n]{n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = 1.$$

Vrsta konvergira za tiste $x \in \mathbb{R}$, za katere velja

$$|x| < \frac{1}{q} = \frac{1}{1}.$$

Iz tega sledi, da vrsta konvergira za vsak $x \in (-1,1)$. Vsak lahko sam preveri, da za $x = 1$ divergira, za $x = -1$ pa konvergira. Posledično vrsta konvergira za vsak $x \in [-1,1)$.

(g) Uporabimo korenski kriterij

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1.$$

Vrsta konvergira za tiste $x \in \mathbb{R}$, za katere velja

$$|\ln x| < \frac{1}{q} = \frac{1}{1}.$$

Iz tega sledi, da vrsta konvergira za vsak $x \in (e^{-1}, e)$. Vsak lahko sam preveri, da za $x = e^{-1}$ in $x = e$ vrsta divergira.

(h) Uporabimo korenski kriterij

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n(n-1)}} = e^{-1}.$$

Vrsta konvergira za tiste $x \in \mathbb{R}$, za katere velja

$$|(x-e)| < \frac{1}{q} = \frac{1}{e^{-1}} = e.$$

Iz tega sledi, da vrsta konvergira za vsak $(0, 2e)$. Vsak lahko sam preveri, da za $x = 0$ in $x = 2e$ vrsta divergira.

∎

14. Za katera realna števila x konvergira vrsta

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2x}{1-x}\right)^n$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{n+1}}{(x^2-2)^n}$?

Rešitev.

(a) Upoštevamo korenski kriterij.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2x}{1-x}\right|^n} = \left|\frac{2x}{1-x}\right|$$

Rešujemo neenačbo

$$\left|\frac{2x}{1-x}\right| < 1.$$

Izkaže se, da je rešitev te enačbe vsak $x \in (-1, \frac{1}{3})$. Nadalje, za $x = -1$ in $x = \frac{1}{3}$ opazimo, da vrsta divergira.

Torej, vrsta konvergira za vsak $x \in (-1, \frac{1}{3})$, sicer divergira.

(b) Rešujemo podobno kot prej. Torej, s pomočjo korenskega kriterija dobimo pogoj $\left|\frac{x}{x^2-2}\right| < 1$. Posledično dobimo, da vrsta konvergira za vsak $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, \infty)$, sicer divergira.

∎

II. Diferencialni račun

7. Odvod funkcije

Definirali bomo odvod funkcije, si pogledali geometrijski pomen odvoda. V nadaljevanju bomo izpeljali pravila za odvajanja in spoznali različne primere uporabe odvoda.

7.1 Definicija odvoda funkcije

Definicija 7.1.1 Naj bo funkcija f definirana na neki okolici točke a. Izrazu

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

pravimo *diferenčni kvocient*. Funkcija f je *odvedljiva* v točki a, če obstaja limita diferenčnega kvocienta, ko gre h proti 0. Tej limiti rečemo *odvod* funkcije f v točki a in jo označimo z $f'(a)$:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\,.$$

Definicija 7.1.2 *Desni odvod* funkcije f v točki a je enak desni limiti diferenčnega kvocienta, *levi odvod* pa levi limiti.

Ni težko videti, da je funkcija f odvedljiva v točki a natanko tedaj, ko sta levi in desni odvod enaka.

Definicija 7.1.3 Funkcija $f:\mathscr{D}_f\to\mathbb{R}$ je *odvedljiva*, če je odvedljiva v vsaki točki definicijskega območja $\mathscr{D}_f$. Funkciji, ki x priredi $f'(x)$, pravimo *odvod* funkcije f.

■ **Zgled 7.1** Dana je funkcija $f(x) = x$. Poiščimo njen odvod $f'(x)$.

Naj bo x poljubna točka iz $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$. Izračunajmo limito diferenčnega kvocienta:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1\,. \end{aligned}$$

Zato je $(x)' = 1\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$. ■

■ **Zgled 7.2** Dana je funkcija $f(x) = \sin x$. Poiščimo njen odvod $f'(x)$.

Izračunajmo limito diferenčnega kvocienta:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \sin h}{h} \\ &= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{(\cos^2\frac{h}{2} - \sin^2\frac{h}{2}) - (\cos^2\frac{h}{2} + \sin^2\frac{h}{2})}{h} + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin^2\frac{h}{2}\frac{1}{2}}{h\frac{1}{2}} + \cos x \cdot 1 \\ &= \sin x \lim_{h\to 0}(-\sin\tfrac{h}{2}) \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} + \cos x \\ &= \sin x \cdot 0 \cdot 1 + \cos x \\ &= \cos x\,. \end{aligned}$$

Zato je $(\sin x)' = \cos x\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$. ■

■ **Zgled 7.3** Dana je funkcija $f(x) = c \in \mathbb{R}$. Poiščimo njen odvod $f'(x)$.

Izračunajmo limito diferenčnega kvocienta:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0\,. \end{aligned}$$

Vidimo da je odvod konstantne funkcije enak 0. ■

Izrek 7.1.1 Vsaka odvedljiva funkcija je zvezna.

Dokaz. Naj bo a poljubna točka iz definicijskega območja funkcije f in naj bo f odvedljiva v točki a. Definirajmo funkcijo $r(h)$:

$$r(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$$

oziroma

$$f(a+h)-f(a) = f'(a)h + r(h)h\,.$$

Limitirajmo desno stran enakosti:

$$\lim_{h\to 0}(f'(a)h + r(h)h) = 0\,,$$

kar pomeni, da je

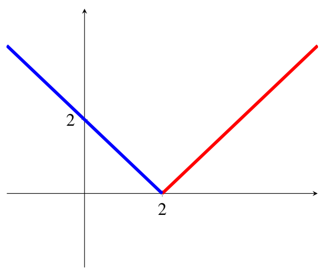
$$\lim_{h\to 0}(f(a+h)-f(a)) = \lim_{h\to 0} f(a+h) - f(a) = 0$$

in od tod sledi, da je

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)\,,$$

kar pomeni zveznost funkcije f v točki a. ∎

Ne velja pa obratno, da bi bila vsaka zvezna funkcija tudi odvedljiva, kar lahko vidimo na preprostem primeru funkcije na Sliki 7.1.



Slika 7.1: Funkcija $f(x) = |x-2|$ je zvezna v točki $a = 2$, ampak v njej ni odvedljiva.

7.2 Pravila za odvajanje

Če želimo uporabljati odvod, moramo znati odvajati funkcije in to bo jedro tega razdelka.

Izrek 7.2.1 Naj bosta funkciji f in g odvedljivi funkciji v točki a. Tedaj velja

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

(ii) $(fg)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)$,

(iii) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g^2(a)}$, pri čemer je $g(a) \neq 0$.

Dokaz. Vemo že, da je limita vsote/produkta/kvocienta enaka vsoti/produktu/kvocientu limit pri pogoju, da le-te obstajajo.

(i) Odvod vsote:

$$
\begin{aligned}
(f+g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(a+h)-f(a))+(g(a+h)-g(a))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} \\
&= f'(a)+g'(a)\,.
\end{aligned}
$$

(ii) Odvod produkta funkcij:

$$
\begin{aligned}
(fg)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(a+h)-(fg)(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)-f(a)g(a+h)+f(a)g(a+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(a+h)-f(a))g(a+h)+f(a)(g(a+h)-g(a))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} g(a+h) + \lim_{h\to 0} f(a) \frac{g(a+h)-g(a)}{h} \\
&= f'(a)g(a)+f(a)g'(a)\,.
\end{aligned}
$$

(iii) Pokažimo še odvod kvocienta funkcij. Na zvezi

$$\left(g\cdot\frac{f}{g}\right)'(a) = f'(a)$$

uporabimo pravilo produkta

$$g'(a)\left(\frac{f}{g}\right)(a)+g(a)\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = f'(a)$$

in izrazimo $\left(\frac{f}{g}\right)'(a)$

$$
\begin{aligned}
g(a)\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= f'(a)-g'(a)\frac{f(a)}{g(a)} \\
g(a)\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{g(a)} \\
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{g^2(a)}\,.
\end{aligned}
$$

∎

Posledica 7.2.2 Naj bosta funkciji f in g odvedljivi funkciji v točki a in c poljubna konstanta iz $\mathbb{R}$. Tedaj velja

(i) $(c\,f)'(a) = c\,f'(a)$,

(ii) $(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$.

Dokaz.

(i) Po pravilu za odvod produkta iz Izreka 7.2.1 je

$$(c\,f)'(a) = c'f(a) + cf'(a) = 0 + cf'(a) = cf'(a)\,.$$

(ii) Razlika je samo posebne primer vsote, zato je

$$(f-g)'(a) = (f+(-1)g)' = f'(a) + (-1)g'(a) = f'(a) - g'(a)\,.$$

∎

Iz Izreka 7.2.1 in Posledice 7.2.2 o pravilih za odvajanje v poljubni točki neposredno sledijo pravila za odvod dveh funkcij.

Izrek 7.2.3 Naj bosta f in g odvedljivi funkciji in c poljubna konstanta iz $\mathbb{R}$. Tedaj velja

(i) $(f \pm g)' = f' \pm g'$,

(ii) $(c\,f)' = c\,f'$,

(iii) $(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$,

(iv) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'\,g - f\,g'}{g^2}, \quad g \neq 0\,.$

∎

Pravilo o odvajanju produkta lahko posplošimo na več faktorjev.

Izrek 7.2.4 Naj bodo f_i odvedljive funkcije, $i = 1,2,\ldots,n$. Tedaj velja

$$(f_1 f_2 \cdots f_n)' = f_1' f_2 \cdots f_n + f_1 f_2' \cdots f_n + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_n'\,.$$

Dokaz. Uporabimo indukcijo po n:

- $n=2$: V tem primeru dobimo pravilo za odvod produkta iz Izreka 7.2.1.
- $n-1 \to n$: Prvih $n-1$ faktorjev gledamo kot celoto, uporabimo pravilo za odvod produkta iz Izreka 7.2.1:

$$\begin{aligned}
((f_1 f_2 \cdots f_{n-1}) f_n)' &= (f_1 f_2 \cdots f_{n-1})' f_n + (f_1 f_2 \cdots f_{n-1}) f_n' \\
&\underset{\text{ind. pred.}}{=} (f_1' f_2 \cdots f_{n-1} + f_1 f_2' \cdots f_{n-1} + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_{n-1}') f_n + \\
&\ (f_1 f_2 \cdots f_{n-1}) f_n' \\
&= f_1' f_2 \cdots f_n + f_1 f_2' \cdots f_n + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_n'\,.
\end{aligned}$$

∎

Posledica 7.2.5 Naj bo f odvedljiva funkcija in $n \in \mathbb{N}$. Tedaj je

$$(f^n)' = n f^{n-1} f' .$$

Dokaz. V Izreku 7.2.4 upoštevamo, da so vsi faktorji enaki, $f_i = f$ za vsak $i = 1, \cdots, n$. ∎

■ **Zgled 7.4** Izračunajmo odvod funkcije $f(x) = x^n$.

Ker je $x' = 1$, je po zgornji formuli

$$(x^n)' = n x^{n-1} x' = n x^{n-1} .$$

■

Eno najpomembnejših pravil za odvajanje je odvod kompozituma funkcij oziroma *verižno pravilo*.

Izrek 7.2.6 — Verižno pravilo. Naj bo funkcija g odvedljiva v točki a in naj bo f odvedljiva v točki $g(a)$. Tedaj je tudi $f \circ g$ odvedljiva v a in velja

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))\, g'(a) .$$

Dokaz. Označimo $b = g(a)$ in definirajmo funkciji $\alpha(h)$ in $\beta(k)$:

$$\begin{aligned} \alpha(h) &= \frac{g(a+h) - g(a)}{h} - g'(a) , \\ \beta(k) &= \frac{f(b+k) - f(b)}{k} - f'(b) , \end{aligned}$$

pri čemer je k odvisen od h:

$$k = g(a+h) - g(a) = \alpha(h)\, h + g'(a)\, h .$$

Pri tem velja

$$\lim_{h \to 0} \alpha(h) = 0, \ \lim_{k \to 0} \beta(k) = 0 .$$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(a+h) - (f \circ g)(a) &= f(g(a+h)) - f(g(a)) \\ &= f(g(a) + k) - f(g(a)) \\ &= f(b+k) - f(b) \\ &= f'(b)\, k + \beta(k)\, k \\ &= f'(b)(g(a+h) - g(a)) + \beta(k)\, (g(a+h) - g(a)) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ g)(a+h) - (f \circ g)(a)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f'(b)\, (g(a+h) - g(a))}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{\beta(k)\, (g(a+h) - g(a))}{h} \\ &= f'(b)\, g'(a) + 0 \cdot g'(a) = f'(g(a))\, g'(a) . \end{aligned}$$

∎

■ **Zgled 7.5** Poiščimo odvod funkcije $h(x) = \sin(5x)$.

Funkcija h je kompozitum funkcij $f(x) = \sin x$ in $g(x) = 5x$:

$$h(x) = f(g(x)) = \sin(5x).$$

Ker je $f'(x) = \cos x$ in $g'(x) = 5$, je po Izreku 7.2.6

$$h'(x) = f'(g(x))\,g'(x) = \cos(5x)\,5 = 5\cos(5x).$$

■

Izrek 7.2.7 Naj bo f odvedljiva funkcija. Če je $f'(x) \neq 0$ za vsako točko x iz definicijskega območja, tedaj je inverzna funkcija f^{-1} odvedljiva v točki $y = f(x)$ in velja

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Dokaz. Naj bo $y = f(x)$, tedaj je $f^{-1}(y) = x$ oziroma $f^{-1}(f(x)) = x$. Uporabimo Izrek 7.2.6:

$$\begin{aligned} (f^{-1}(f(x)))' &= x' \\ (f^{-1})'(f(x))f'(x) &= 1 \qquad \Rightarrow \\ (f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}. \end{aligned}$$

■

7.3 Odvodi elementarnih funkcij in višji odvodi

V nadaljevanju si poglejmo odvode elementarnih funkcij.

- *Polinomi in racionalne funkcije* Poglejmo si najprej odvode polinomov:

$$(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)' = a_n n x^{n-1} + \cdots + a_1.$$

Racionalno funkcijo odvajamo po pravilu za odvajanje kvocienta funkcij:

$$\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)' = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q^2(x)}.$$

- *Trigonometrične funkcije*

Poznamo že odvod funkcije sinus:

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Iz zveze

$$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$$

dobimo odvod funkcije kosinus

$$\begin{aligned}
(\cos x)' &= \big(\sin(\tfrac{\pi}{2} - x)\big)' \\
&= \cos(\tfrac{\pi}{2} - x)(\tfrac{\pi}{2} - x)' \\
&= \sin x(-1) \\
&= -\sin x .
\end{aligned}$$

Nadalje je odvod funkcije tangens enak:

$$\begin{aligned}
(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\
&= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} .
\end{aligned}$$

Na podoben način izpeljemo odvod funkcije kotangens:

$$\begin{aligned}
(\cot x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' \\
&= \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} \\
&= \frac{-1}{\sin^2 x} .
\end{aligned}$$

- *Ciklometrične funkcije*

Naj bo $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Tedaj je $\cos y > 0$ in velja

$$\frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} .$$

Za $|x| < 1$ je $\operatorname{asin} x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ in zato

$$\frac{1}{\cos(\operatorname{asin} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\operatorname{asin} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} .$$

Upoštevajmo Izrek 7.2.7 in izračunajmo odvod funkcije arkus sinus:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{asin} x)' &= \frac{1}{\cos(\operatorname{asin} x)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} , \ |x| < 1 .
\end{aligned}$$

Iz zveze

$$\operatorname{acos} x + \operatorname{asin} x = \frac{\pi}{2}$$

dobimo odvod funkcije arkus kosinus:

$$(\operatorname{acos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,\ |x| < 1\,.$$

Poiščimo odvod funkcije arkus tangens. Podobno kot pri funkciji arkus sinus uporabimo Izrek 7.2.7 in upoštevamo zvezo $\frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$:

$$\begin{aligned}(\operatorname{atan} x)' &= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\operatorname{atan} x)}} \\ &= \frac{1}{\tan^2(\operatorname{atan} x) + 1} \\ &= \frac{1}{x^2+1}\,.\end{aligned}$$

Iz zveze

$$\operatorname{acot} x + \operatorname{atan} x = \frac{\pi}{2}$$

dobimo odvod funkcije arkus kotangens:

$$(\operatorname{acot} x)' = -\frac{1}{x^2+1}\,.$$

- *Eksponentna funkcija*

Spomnimo se, da je

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a\,.$$

Uporabimo definicijo odvoda v točki:

$$\begin{aligned}(a^x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} \\ &= a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} \\ &= a^x \ln a\,.\end{aligned}$$

V posebnem primeru, ko je osnova enaka e, velja:

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$$

- *Logaritemska funkcija*

  Za izračun odvoda logaritemske funkcije ponovno uporabimo Izrek 7.2.7 in upoštevamo zgoraj izpeljan odvod eksponentne funkcije:

$$\begin{aligned}(\log_a x)' &= \frac{1}{a^{\log_a x}\ln a}\\ &= \frac{1}{x\ln a}.\end{aligned}$$

  Odvod naravnega logaritma je enak

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

- *Funkcija x^r, $r \in \mathbb{R}$*

  Z uporabo verižnega pravila poiščimo odvod funkcije $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(x^r)' &= \left(\mathrm{e}^{\ln x^r}\right)'\\ &= \left(\mathrm{e}^{r\ln x}\right)'\\ &= \mathrm{e}^{r\ln x}(r\ln x)'\\ &= \mathrm{e}^{\ln x^r}(r\tfrac{1}{x})\\ &= x^r\,(r\tfrac{1}{x})\\ &= rx^{r-1}.\end{aligned}$$

  Vidimo, da ta formula ne velja le za naravne eksponente oziroma potenčno funkcijo ($f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$), temveč za poljubni realni eksponent.

- *Hiperbolični funkciji*

  Izračunajmo odvod funkcije sinus hiperbolikus:

$$\begin{aligned}(\mathrm{sh}x)' &= \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)'\\ &= \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\\ &= \mathrm{ch}x.\end{aligned}$$

  Na podoben način izračunamo odvod funkcije kosinus hiperbolikus:

$$\begin{aligned}(\mathrm{ch}x)' &= \left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)'\\ &= \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\\ &= \mathrm{sh}x.\end{aligned}$$

TABELA ODVODOV ELEMENTARNIH FUNKCIJ:

$(x^r)' = r x^{r-1}$	$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\operatorname{asin} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{acos} x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{atan} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{acot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$

■ **Zgled 7.6** Izračunajmo odvode sestavljenih funkcij.

1. $f(x) = 10x^4 + 5x^3 - 3x + 9\,.$

   $f'(x) = 40x^3 + 15x^2 - 3\,.$

2. $f(x) = \ln(x + 5x^3)\,.$

   $$f'(x) = \frac{1}{x+5x^3}(1+15x^2)\,.$$

3. $f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{asin} x}\,.$

   $$f'(x) = \frac{1}{3}(\operatorname{asin} x)^{-\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

■

Z zaporednim odvajanjem večkrat odvedljive funkcije dobimo tako imenovane *višje odvode*.

Definicija 7.3.1 Naj bo f odvedljiva funkcija. Če je f' odvedljiva funkcija, potem njenemu odvodu pravimo *drugi odvod* funkcije f in ga označujemo z f'':

$$f'' = (f')'\,.$$

Induktivno definiramo n-ti odvod funkcije f:

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})', \, n \in \mathbb{N}.$$

Po dogovoru je ničelni odvod funkcije enak funkciji sami:

$$f^{(0)} = f.$$

Omenimo še, da prve tri odvode običajno zapisujemo s črticami, od tretjega naprej pa kot $f^{(n)}$.

■ **Zgled 7.7** Izračunajmo poljuben odvod funkcije $f(x) = x^n$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= n x^{n-1} \\
f''(x) &= n(n-1)x^{n-2} \\
f'''(x) &= n(n-1)(n-2)x^{n-3} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 x^0 = n! \\
f^{(k)}(x) &= 0, \, k > n.
\end{aligned}$$

■

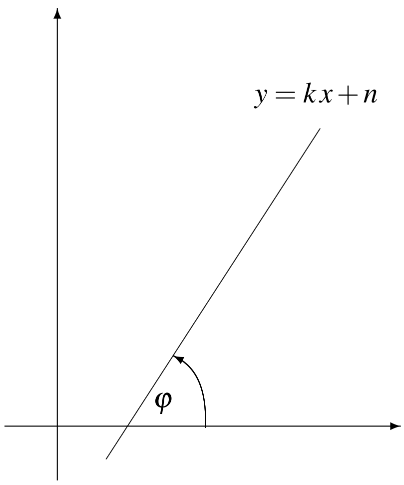
Na Zgledu 7.7 opazimo, da je n-ti odvod polinoma stopnje n konstanta, zato so vsi višji odvodi enaki nič.

8. Geometrijski pomen odvoda

8.1 Tangenta na graf funkcije

Preden si bomo pogledali geometrijski pomen odvoda, se spomnimo, da je tangens naklonskega kota φ premice, določene z $y = kx + n$, enak njenemu smernemu koeficientu (*glej Sliko 8.1*) :

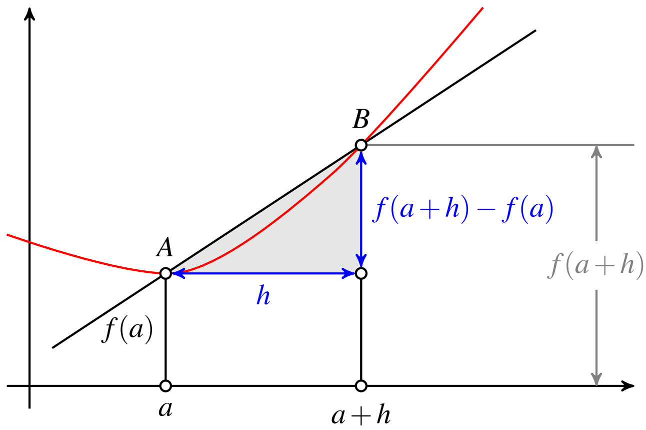
$$\tan\varphi = k\,.$$



Slika 8.1: Naklonski kot premice φ.

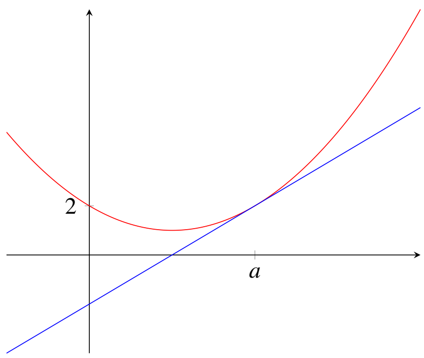
Naj bo funkcija f odvedljiva v točki a. Definirajmo točki $A(a, f(a))$ in $B(a+h, f(a+h))$, glej Sliko 8.2. Naj bo φ naklonski kot sekante skozi točki A in B. Opazimo, da je smerni koeficient sekante skozi točki A in B enak diferenčnemu kvocientu funkcije f v točki a

$$\tan\varphi = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\,.$$



Slika 8.2: Sekanta skozi točki $A(a, f(a))$ in $B(a+h, f(a+h))$.

Z manjšanjem h-ja prehajajo smerni koeficienti pripadajočih sekant k limiti diferenčnega kvocienta, sekanta pa limitira k tangenti, kar vidimo na Sliki 8.3.



Slika 8.3: Tangenta na graf funkcijev točki a.

Definicija 8.1.1 *Tangenta* na graf odvedljive funkcije f v točki a je premica, ki gre skozi točko $(a, f(a))$ in je njen smerni koeficient enak $f'(a)$.

Enačba tangente je

$$y(x) = f'(a)(x-a) + f(a)\,.$$

■ **Zgled 8.1** Dana je funkcija $f(x) = x^2$. Poiščimo enačbe tangent v točkah $0, -1, 2$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x\,.$$

Enačbe tangent so:

$$(0,0): \quad y(x) = 0\,,$$

$$(-1,1): \quad y(x) = -2(x+1)+1 = -2x-1\,,$$

$$(2,4): \quad y(x) = 4(x-2)+4 = 4x-4\,.$$

■

■ **Zgled 8.2** Poiščimo odvod in enačbo tangente na graf konstantne funkcije.

Naj bo $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0\,.$$

Enačba tangente je

$$y(x) = c\,,$$

kar pomeni, da je graf funkcije sam sebi tangenta. ■

8.2 Diferencial funkcije

Odvod funkcije je koristno orodje za obravnavo obnašanja funkcije na neki okolici točke. Pogledali bomo, kako sprememba neodvisne spremenljivke vpliva na spremembo odvisne spremenljivke ter s tem v zvezi vpeljali diferenciabilnost in diferencial funkcije. S pomočjo diferenciala bomo poiskali odvod implicitno podane funkcije.

DIFERENCIABILNOST FUNKCIJE

Naj bo $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ odvedljiva v točki $a \in \mathscr{D}_f$. Tedaj je

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h} = 0\,.$$

Če števec označimo z $o(h)$, lahko zapišemo

$$f(a+h)-f(a) = f'(a)h + o(h)\,,$$

kjer je $\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$. Za dovolj majhne h tako velja

$$f(a+h)-f(a) \approx f'(a)h\,.$$

Namesto s h-jem lahko uporabimo zapis z x-om, torej za $x = a+h$ je

$$f(x)-f(a) \approx f'(a)(x-a)\,,$$

če je le x dovolj blizu točke a. To pomeni, da lahko funkcijo f v okolici točke a dobro aproksimiramo s funkcijo

$$f(x) \approx f'(a)(x-a)+f(a)$$

in rečemo, da je funkcija f diferenciabilna v točki a. Pravimo, da smo funkcijo f v okolici točke a *linearizirali* z linearno funkcijo $y(x) = f'(a)(x-a)+f(a)$, ki je dejansko tangenta na graf funkcije f v točki a.

Definicija 8.2.1 Funkcija f je *diferenciabilna* v točki a, če obstajata realno število c in funkcija o takšni, da je

$$f(a+h) = f(a) + ch + o(h),$$

kjer je $\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

Iz definicij odvedljivosti in diferenciabilnosti sledi naslednji izrek.

Izrek 8.2.1 Funkcija f je v točki a diferenciabilna natanko tedaj, ko je v a odvedljiva. Nadalje, za diferenciabilno funkcijo f je $c = f'(a)$.

Dokaz.

($\Rightarrow$) Ker je f diferenciabilna v a, obstajta realno število c in funkcija o taki, da je

$$f(a+h) = f(a) + ch + o(h),$$

kjer je $\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$. Iz definicije diferenciabilnosti izrazimo c in limitiramo

$$\begin{aligned} c &= \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \frac{o(h)}{h} \quad /\lim \\ \lim_{h\to 0} c &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} \\ c &= f'(a) - 0 = f'(a). \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Ker je f v točki a odvedljiva, velja

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Tedaj je

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) = 0$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h} = 0$$

Števec v limiti je funkcija odvisna od h in jo označimo z o:

$$o(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h.$$

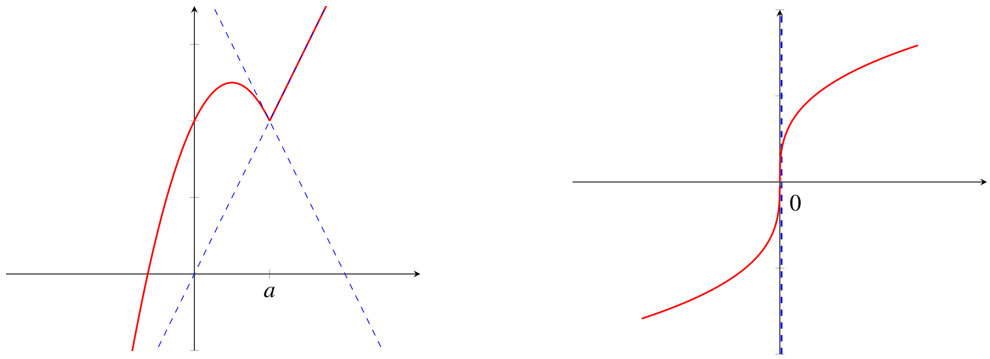
Tedaj je $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{o(h)}{h} = 0$ in f je diferenciabilna v a

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h).$$

∎

Intuitivno bi lahko rekli, da se diferenciabilnost nanaša na obstoj odvoda, medtem ko je odvajanje računski postopek za izračun odvoda.

Na Sliki 8.4 vidimo primera nediferenciabilnih funkcij. V prvem primeru (Slika 8.4 levo) ne moremo določiti, ali je naklon tangente pozitiven ali negativen, saj levi in desni odvod v toćki a ne sovpadata in posledično funkcija ni odvedljiva. V drugem primeru (Slika 8.4 desno) odvod ne obstaja odvod v točki 0, saj bi tangenta morala biti kar os y.



Slika 8.4: Funkciji nista diferenciabilni v točki a oziroma v točki 0.

Iz Izreka 7.1.1 in Izreka 8.2.1 direktno sledi naslednja ugotovitev.

Izrek 8.2.2 Če je funkcija f v točki a diferenciabilna, tedaj je v tej točki tudi zvezna. ■

■ **Zgled 8.3** Linearizirajmo funkcijo $f(x) = \ln x$ v okolici točke 1.

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1\,.$$

Ker je f odvedljiva v 1, saj je $f'(x) = \frac{1}{x}$ oziroma $f'(1) = 1$, je tudi diferenciabilna in za točke blizu 1 velja

$$\ln x \approx \ln 1 + 1(x-1) = x - 1\,.$$

Na primer, linearizacija v točki $x = 1.1$ da vrednost 0.100, medtem ko je vrednosti funkcije $f(1.1) = 0.095$. Če se oddaljimo od točke 1, je razlika veliko večja; v točki $x = 2$ je aproksimacijska vrednost 1, medtem ko je $f(2) = 0.693$.

■

■ **Zgled 8.4** Poiščimo $\sqrt{98}$.

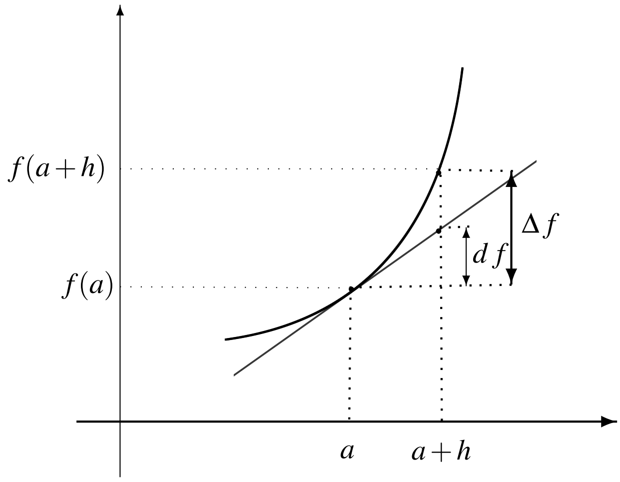
Nastavimo funkcijo $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 100$ in $x - a = -2$. Tedaj je $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ in

$$\sqrt{98} = f(98) \approx f(100) + f'(100)(-2) = 9.9000\,.$$

Za primerjavo poglejmo približek zaokrožen na štiri decimalna mesta, ki je $\sqrt{98} = 9.8995$. ■

Diferenčni kvocient funkcije f v točki a pogosto označimo z $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, kjer je $\Delta x = x - a = h$ razlika argumentov in $\Delta f = f(x) - f(a) = f(a+h) - f(a)$ razlika funkcijskih vrednosti. Če je funkcija f diferenciabilna v točki a, tedaj je

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &\approx f'(a)(x-a) \\ \Delta f &\approx f'(a)\Delta x\,. \end{aligned}$$



Slika 8.5: Diferencial funkcije.

To pomeni, da če se neodvisna spremenljivka x spremeni za Δx, tedaj se odvisna spremenljivka spremeni približno za $f'(a)\Delta x$.

Definicija 8.2.2 Če je funkcija f v točki a odvedljiva, tedaj je $f'(a)\Delta x$ *diferencial* funkcije f v točki a in pišemo

$$df = f'(a)\Delta x$$

oziroma

$$df = f'(a)h.$$

■ **Zgled 8.5** Poišči diferencial identitete $f(x) = x$.

Ker je odvod funkcije f v poljubni točki enak 1, je

$$\begin{aligned} df &= f'(x)\Delta x \\ dx &= \Delta x. \end{aligned}$$

■

V Zgledu 8.5 smo videli, da je $dx = \Delta x$, zato je diferencial funkcije f v poljubni točki x enak

$$df = f'(x)dx.$$

■ **Zgled 8.6** Poiščimo diferencial funkcije $f(x) = \sin x$.

Ker je odvod v poljubni točki x enak $\cos x$, je diferencial enak $d\sin x = \cos x\,dx$. ■

Odvod implicitno podane funkcije

Zaenkrat znamo odvajati samo eksplicitno podane funkcije, zato namenimo nekaj pozornosti še računanju odvoda implicitno podanih funkcij. Odvod implicitno podane funkcije najkorektneje podamo s tako imenovanimi *parcialnimi odvodi*, ki spadajo na področje funkcij več spremenljivk in jih na tem mestu ne bomo obravnavali. Tako se bomo poslužili uporabe diferenciala funkcije, kar bomo demonstrirali na naslednjem zgledu.

Recimo, da želimo poiskati odvod krivulje, podane z enačbo

$$y^4 + 2x^2y^2 + 6x^2 - 7 = 0\,.$$

Poiščemo diferencial funkcije za vsak člen posebej in upoštevamo že znana pravila za odvajanje:

$$4y^3\,dy + 2(2xy^2\,dx + 2x^2y\,dy) + 12x\,dx = 0\,.$$

Delimo enačbo z dx:

$$4y^3\,\frac{dy}{dx} + 2(2xy^2 + 2x^2y\frac{dy}{dx}) + 12x = 0\,.$$

Upoštevamo, da je $y'(x) = \frac{dy}{dx}$:

$$\begin{aligned} 4y^3\,y'(x) + 4xy^2 + 4x^2yy'(x) + 12x &= 0 \\ y'(x) &= \frac{-x(y^2+3)}{y(y^2+x^2)}\,. \end{aligned}$$

■ **Zgled 8.7** Poiščimo enačbo tangente na graf krivulje

$$2y + 5 - x^2 - y^3 = 0$$

v točki $(2,-1)$.

$$\begin{aligned} 2y'(x) - 2x - 3y^2\,y'(x) &= 0 \\ y'(x) &= \frac{2x}{2-3y^2} \\ y'(2) &= -4 \end{aligned}$$

Enačba tangente je $y(x) = -4(x-2) - 1 = -4x + 7$.

■

9. Uporaba odvoda

9.1 Izreki o srednji vrednosti

V tem razdelku bomo spoznali nekaj pomembnih izrekov v povezavi z odvodom, ki so nujni za razumevanje integralnega računa.

Definicija 9.1.1 Funkcija f ima v c *lokalni maksimum*, če obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak x iz intervala $(c-\delta, c+\delta)$ velja

$$f(x) \leq f(c).$$

Funkcija ima v točki c *lokalni minimum*, če obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak x iz intervala $(c-\delta, c+\delta)$ velja

$$f(x) \geq f(c).$$

Lokalni minimum in lokalni maksimum imenujemo tudi *lokalna ekstrema*.

Na primeru funkcije f na Sliki 9.1 vidimo, da ima funkcija f v točkah c_2 in c_4 lokalna minimuma, v točkah c_1 in c_3 pa lokalna maksimuma. Medtem ko je v c_2 obenem minimum funkcije, je maksimum funkcije dosežen v točki b.

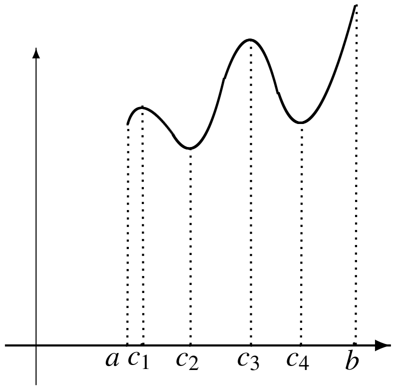
Izrek 9.1.1 Naj bo f odvedljiva v točki c in naj ima v c lokalni maksimum ali lokalni minimium. Tedaj je $f'(c) = 0$.

Dokaz. Recimo, da ima funkcija f v točki c lokalni maksimum. Tedaj za vsako dovolj majhno pozitivno število h velja

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0.$$

Izračunajmo desni odvod v točki c $(h > 0)$:

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$$



Slika 9.1: (Lokalni) minimumi in maksimumi.

in še levi odvod v točki c ($h < 0$):

$$\lim_{h \uparrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0\,.$$

Ker je f odvedljiva v točki c, sta levi in desni odvod enaka, zato je edina možnost, da imata oba vrednost 0.

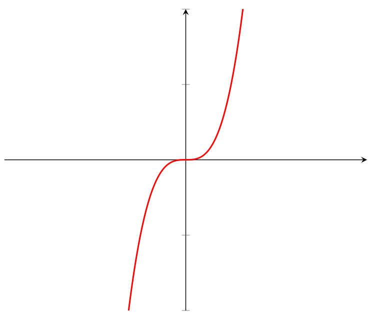
Podobno velja v primeru, ko ima funkcija v točki c lokalni minimum. ∎

Definicija 9.1.2 Točko c, v kateri je $f'(c) = 0$, imenujemo *stacionarna točka*.

Vsak lokalni ekstrem odvedljive funkcije je stacionarna točka, medtem ko obratno ne velja, kar vidimo na naslednjem zgledu.

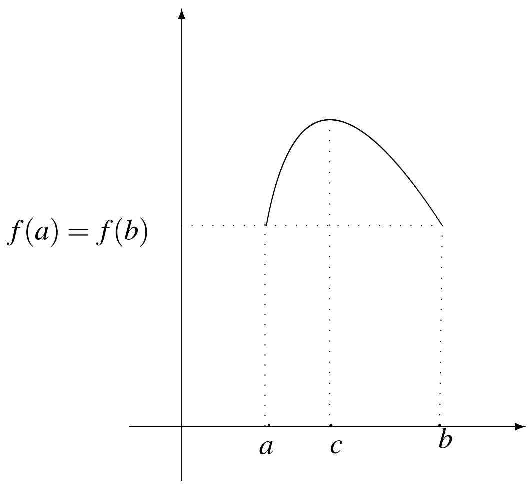
■ **Zgled 9.1** Poiščimo stacionarne točke funkcije $f(x) = x^3$ in preverimo, če so lokalni ekstemi.

Odvod je enak $f'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, kar pomeni, da ima f v 0 stacionarno točko. Ker je za pozitivne vrednosti $f(x) > 0$ in za negativne $f(x) < 0$, v $x = 0$ ni lokalnega ekstrema (glej Sliko 9.2). ■



Slika 9.2: Funkcija $f(x) = x^3$ v točki $x = 0$ nima lokalnega ekstrema.

Izrek 9.1.2 — Rolleov izrek. Naj bo funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna na $[a,b]$ in odvedljiva na (a,b). Če je $f(a) = f(b)$, tedaj obstaja takšna točka $c \in (a,b)$, da je $f'(c) = 0$ (*glej Sliko 9.3*).



Slika 9.3: Rolleov izrek.

Dokaz. Ker je f zvezna, po Izreku 3.3.9 doseže na intervalu $[a,b]$ maksimum in minimum. Ločimo dve možnosti.

(i) Maksimum in minimum sta dosežena v krajiščih intervala.

Ker je $f(a) = f(b)$, maksimum in minimum sovpadata in je funkcija f konstantna, kar pomeni, da je $f'(x) = 0$ za vsak $x \in (a,b)$.

(ii) Vsaj eden od maksimuma ali minimuma je dosežen v notranjosti intervala.

Naj se to zgodi v točki c. Tedaj je po Izreku 9.1.1 $f'(c) = 0$.

∎

Izrek 9.1.3 — Cauchyjev izrek. Naj bosta funkciji $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezni na $[a,b]$, odvedljivi na (a,b) in je $g'(x) \neq 0$ za vsak $x \in (a,b)$. Tedaj obstaja vsaj ena takšna točka $c \in (a,b)$, da je

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Dokaz. Po Izreku 9.1.2 je $g(b) \neq g(a)$, saj bi sicer obstajala točka $c \in (a,b)$ taka, da bi veljalo $g'(c) = 0$, kar bi bilo protislovno s predpostavkami izreka.

Definirajmo funkcijo $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ kot:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Vidimo, da je tudi F zvezna na $[a,b]$ in odvedljiva na (a,b). Izračunajmo $F(a)$ in $F(b)$:

$$\begin{aligned} F(a) &= f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(a) - g(a)) = 0, \\ F(b) &= f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(b) - g(a)) = 0, \end{aligned}$$

Uporabimo Rolleov Izrek 9.1.2 na funkciji F, kar nam da

$$\exists c \in (a,b) : F'(c) = 0\,.$$

Odvod funkcije F je

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$$

in vrednost odvoda v točki c je enaka

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c) = 0$$

oziroma

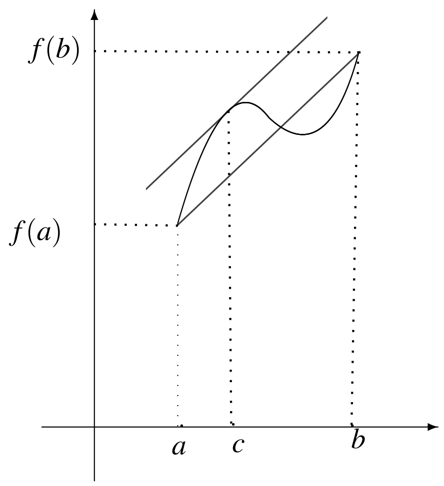
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,.$$

∎

Izrek 9.1.4 — Lagrangeov izrek. Naj bo funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna na $[a,b]$ in odvedljiva na (a,b). Tedaj obstaja vsaj ena takšna točka $c \in (a,b)$, da je

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)\,.$$

Dokaz. V Cauchyjevem Izreku 9.1.3 uporabimo funkcijo $g(x) = x$ (*glej Sliko 9.4*). ∎



Slika 9.4: Lagrangeov izrek.

Lagrangeov Izrek 9.1.4 pravi, da na intervalu (a,b) obstaja točka c, v kateri je tangenta na graf funkcije f vzporedna daljici skozi točki $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$.

Posledica 9.1.5 Če je odvod funkcije $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ v vsaki točki enak 0, tedaj je funkcija konstantna.

Dokaz. Izberimo poljubni točki $x_1, x_2 \in (a,b)$ in naj bo $x_1 < x_2$. Tedaj je $f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ zvezna in odvedljiva in po Lagrangeovem Izreku 9.1.4 obstaja $x_3 \in (x_1, x_2)$ takšna, da velja

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_3)(x_2 - x_1) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)\,.$$

∎

Posledica 9.1.6 Če imata funkciji $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ v vsaki točki enak odvod, se razlikujeta kvečjemu za konstanto $C \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Odvod razlike funkcij f in g je enak

$$(f-g)' = f' - g' = 0$$

in po Posledici 9.1.5 je $f - g = C \in \mathbb{R}$. ∎

9.2 L'Hospitalovo pravilo

Spoznali bomo pomembno pravilo, ki zelo poenostavi izračun limite funkcije v primerih, ko gre za nedoločene izraze tipa

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}\,.$$

(i) *Nedoločenost tipa* $\frac{0}{0}$

Obravnavamo $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, kjer je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

Izrek 9.2.1 Naj bosta funkciji f in g odvedljivi na neki okolici točke a (razen morda v točki a sami). Naj bosta funkciji g in g' na tej okolici različni od 0 in naj bo $f(a) = g(a) = 0$. Tedaj velja, če obstaja $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, tedaj obstaja tudi $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ in velja enakost

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

Dokaz. Izberimo poljuben $x > a$. Tedaj funkcija na intervalu $[a,x]$ zadošča pogojem Cauchyjega izreka 9.1.3, ki pravi, da obstaja taka točka $c_x \in (a,x)$ da velja:

$$\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \underbrace{=}_{f(a)=g(a)=0} \frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

Če obstaja desna limita $\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$, ko gre $x \to a$ (torej gre tudi $c_x \to a$), velja

$$\lim_{x\downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

Na analogen način uporabimo Cauchyjev izrek za poljuben $x < a$ oziroma interval $[x,a]$, ter dobimo še levo limito

$$\lim_{x\uparrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\uparrow a} \frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

Ker sta funkciji f in g odvedljivi in je odvedljiv tudi njun kvocient, sta zgornji limiti enaki, s čimer zaključimo dokaz.

∎

■ **Zgled 9.2** Izračunajmo $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin x + x\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2\cos x - x\sin x}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

■

Vse ostale v uvodu naštete nedoločenosti lahko z enostavnimi algebrskimi prijemi prevedemo na izraz tipa $\frac{0}{0}$.

(ii) *Nedoločenost tipa* $\frac{\infty}{\infty}$

Obravnavamo $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, kjer je $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$.

Situacijo lahko prevedemo na (i):

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Dejansko pa velja analogen izrek kot v primeru (i), kar poenostavi sam izračun limite.

■ **Zgled 9.3** Izračunajmo $\lim_{x\to 0}\frac{\cot x}{\ln x}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cot x}{\ln x} &= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}}\\ &= -\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin^2 x}\\ &= -\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\sin x\cos x}\\ &= -\infty.\end{aligned}$$

■

(iii) *Nedoločenost tipa* $0\cdot\infty$

Obravnavamo $\lim_{x\to a}(f(x)g(x))$, kjer je $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ in $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$.

Situacijo lahko prevedemo na (i):

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

ali pa tudi (ii)

$$f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

■ **Zgled 9.4** Izračunajmo $\lim_{x\to 0} x \cot x$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} x\cot x &= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\frac{1}{\cot x}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} \\ &= 1.\end{aligned}$$

■

(iv) *Nedoločenost tipa* $\infty - \infty$

Obravnavamo $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))$, kjer je $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ in $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$.

Situacijo lahko prevedemo na primer (i):

$$f(x)-g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)}\frac{1}{f(x)}}.$$

■ **Zgled 9.5** Izračunajmo $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x} \\ &= 0.\end{aligned}$$

■

(v) *Nedoločenosti tipa* $1^\infty, \infty^0, 0^0$

Obravnavamo $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$, kjer f in g v bližini točke a ustrezata zgoraj opisanim situacijam.

Vse tri situacije lahko prevedemo na primer (iii), če iskane limite najprej logaritmiramo, kar nam omogoča Izrek 3.3.6 (o limiti kompozituma zveznih funkcij):

$$\ln \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} \ln f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a}(g(x)\ln f(x)).$$

Poglejmo posamezne situacije:

$$\begin{aligned} \infty^0 &: \quad 0 \cdot \ln \infty \longmapsto 0 \cdot \infty \\ 1^\infty &: \quad \infty \cdot \ln 1 \longmapsto \infty \cdot 0 \\ 0^0 &: \quad 0 \cdot \ln 0 \longmapsto 0 \cdot (-\infty)\,. \end{aligned}$$

Zatem podobno kot v (iii) preoblikujemo limite na primer (i) ali (ii).

■ **Zgled 9.6** Izračunajmo $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x}$.

To je prvi tip zgoraj naštetih limit. Naj bo $A = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x}$. Izračunajmo $\ln A$:

$$\begin{aligned} \ln \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} &= \lim_{x\to\infty} \ln x^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \ln x \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Izračunamo zdaj iskano limito

$$\ln A = 0 \Rightarrow A = \mathrm{e}^0 = 1\,.$$

■

9.3 Taylorjeva vrsta

Taylorjeva formula nam omogoči, da večkrat odvedljive funkcije, ki so na videz zelo zapletene, na okolici točke aproksimiramo s potenčno vrsto.

Definicija 9.3.1 Naj bo f poljubna, večkrat odvedljiva funkcija, $a \in \mathscr{D}_f$ in $n \in \mathbb{N}$. Tedaj je

$$Q_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

n-ti Taylorjev polinom za funkcijo f.

Z nekaj premisleka opazimo, da velja:

$$\begin{aligned} Q_n(a) &= f(a) \\ Q_n'(a) &= f'(a) \\ &\vdots \\ Q_n^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a) \end{aligned}$$

medtem ko za $Q_n^{(n+1)}(a)$ in $f^{(n+1)}(a)$ ne moremo vedeti, ali sta enaka.

Izrek 9.3.1 (Taylorjeva formula) Naj bo funkcija f $(n+1)$-krat odvedljiva na odprtem intervalu I in naj bo $a \in I$. Za vsak $x \in I$ obstaja tak $\xi \in I$, ki leži med a in x, da je

$$f(x) = Q_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Dokaz. Definirajmo

$$r_n(x) = f(x) - Q_n(x) \quad \text{in} \quad p(x) = (x-a)^{n+1}.$$

Izberimo poljuben $x \neq a$. Najprej opazimo, da je $r_n(a) = p(a) = 0$. Večkratna zaporedna uporaba Cauchyjevega Izreka 9.1.3 da obstoj takih točk $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}$, da velja

$$\begin{aligned}
\frac{r_n(x)}{p(x)} &= \frac{r_n(x) - r_n(a)}{p(x) - p(a)} = \frac{r_n'(\xi_1)}{p'(\xi_1)} \\
&= \frac{r_n'(\xi_1) - r_n'(a)}{p'(\xi_1) - p'(a)} = \frac{r_n''(\xi_2)}{p''(\xi_2)} \\
&= \cdots \\
&= \frac{r_n^{(n)}(\xi_n) - r_n^{(n)}(a)}{p^{(n)}(\xi_n) - p^{(n)}(a)} = \frac{r_n^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{p^{(n+1)}(\xi_{n+1})}.
\end{aligned}$$

Označimo $\xi_{n+1} = \xi$ in upoštevajmo, da je $p^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!$. Izračunajmo $(n+1)$ odvod funkcije r_n v točki ξ:

$$r_n^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - Q_n^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi).$$

Torej velja

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) - Q_n(x)}{(x-a)^{n+1}} &= \frac{r_n(x)}{p(x)} \\
&= \frac{r_n^{(n+1)}(\xi)}{p^{(n+1)}(\xi)} \\
&= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},
\end{aligned}$$

pri čemer ξ leži med a in x. ∎

Taylorjeva formula torej pravi

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots \\
&\quad \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{r_n(x)}.
\end{aligned}$$

Funkcijo r_n imenujemo *ostanek Taylorjeve formule*. Če je f polinom stopnje kvečjemu n, je $r_n(x) = 0$. Tedaj je

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k .$$

Posebej zanimive so funkcije, za katere velja

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0 .$$

Tedaj namesto o Taylorjevi formuli govorimo o *Taylorjevi vrsti* in rečemo, da smo funkcijo f razvili v Taylorjevo vrsto, ki je pravzaprav potenčna vrsta. Iz prejšnjega poglavja pa znamo preverjati konvergenco takšnih vrst. Poglejmo si nekaj primerov.

■ **Zgled 9.7** Razvijmo funkcijo e^x v Taylorjevo vrsto v okolici točke 0.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x &= 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^4}{4!} + \tfrac{x^5}{5!} + \ldots + r_n(x) \\ &= 1 + x + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^4}{24} + \tfrac{x^5}{120} + \ldots + r_n(x) . \end{aligned}$$

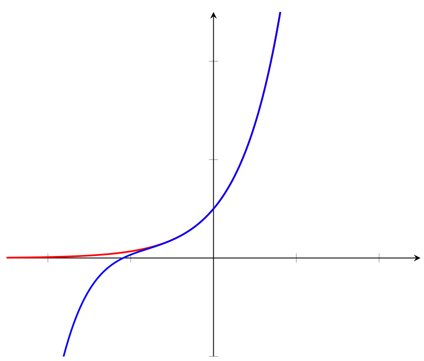
Na Sliki 9.5 vidimo funkcijo in njeno aproksimacijo s prvimi petimi členi Taylorjeve vrste. Poiščimo interval absolutne konvergence te potenčne vrste:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}}{\frac{|x^n|}{n!}} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1 ,$$

kar pomeni, da je vrsta absolutno konvergentna za vsak x. Ostanek

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1} \longrightarrow 0 ,$$

ker smo funkcijo razvijali v okolici točke 0.



Slika 9.5: Graf funkcije e^x (rdeča) in aproksimacija s Taylorjevim polinomom stopnje 5 (modra) v točki 0.

■

■ **Zgled 9.8** Razvijmo funkciji $\cos x$ in $\sin x$ v Taylorjevo vrsto v okolici točke 0.

Razvoja funkcij sta

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \tfrac{x^7}{7!} + \tfrac{x^9}{9!} - \ldots + r_n(x) \quad \text{in} \\ \cos x &= 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \tfrac{x^6}{6!} + \tfrac{x^8}{8!} - \tfrac{x^{10}}{10!} + \ldots + r_n(x)\,.\end{aligned}$$

Absolutno konvergenco in napako dobimo na podoben način kot v prejšnjem primeru.

■

Zaenkrat smo se ukvarjali samo z realnimi funkcijami, sedaj pa poglejmo, kaj nam da kompleksna eksponentna funkcija

$$f(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{a+ib}\,, a, b \in \mathbb{R}\,.$$

Razvijmo jo v potenčno vrsto:

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{ib} &= 1 + (ib) + \frac{(ib)^2}{2!} + \frac{(ib)^3}{3!} + \frac{(ib)^4}{4!} + \frac{(ib)^5}{5!} + \ldots \\ &= \left(1 - \tfrac{b^2}{2!} + \tfrac{b^4}{4!} - \tfrac{b^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(b - \tfrac{b^3}{3!} + \tfrac{b^5}{5!} - \ldots\right) \\ &= \cos b + i \sin b\,.\end{aligned}$$

Tako za poljubna $a, b \in \mathbb{R}$ dobimo *Eulerjevo formulo*

$$\mathrm{e}^{a+ib} = \mathrm{e}^a \cdot \mathrm{e}^{ib} = \mathrm{e}^a(\cos b + i \sin b)\,.$$

Zato lahko modificiramo polarni zapis kompleksnega števila v obliko, s katero je še posebej preprosto računati

$$z = a + ib = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = r\mathrm{e}^{i\varphi}\,.$$

9.4 Monotonost funkcije in lokalni ekstremi

Monotonost funkcije

Ni težko videti, da so smerni koeficienti tangent naraščajoče funkcije nenegativni in ravno nasprotno velja za padajoče funkcije. To zvezo podaja naslednji izrek.

Izrek 9.4.1 Naj bo funkcija $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ odvedljiva. Tedaj velja

(i) $f'(x) > 0, \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ strogo naraščajoča,

(ii) $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ naraščajoča,

(iii) $f'(x) < 0, \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ strogo padajoča,

(iv) $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ padajoča.

Dokaz.

(i) Za poljuben par $x_1, x_2 \in (a,b)$, kjer je $x_1 < x_2$, je po Lagrangeovem izreku mogoče najti $x_3 \in (x_1, x_2)$ tak, da je

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_3)\,.$$

Ker je $f'(x) > 0$ za vsak x, velja

$$f'(x_3) > 0 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0\,,$$

kar pomeni, da je f strogo naraščajoča.

(ii) $(\Rightarrow)$ Pokažemo podobno kot (i). $(\Leftarrow)$ Pokazati moramo, da če je f naraščajoča, tedaj je $f'(x) \geq 0$ za vsak $x \in (a,b)$. Poglejmo diferenčni kvocient

$$D = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,.$$

Za $h > 0$ je $D \geq 0$ in enako velja za $h < 0$. V vsakem primeru je diferenčni kvocient večji ali enak 0 in potemtakem tudi njegova limita in s tem odvod.

(iii),(iv) Pokažemo podobno kot prvi dve točki.

∎

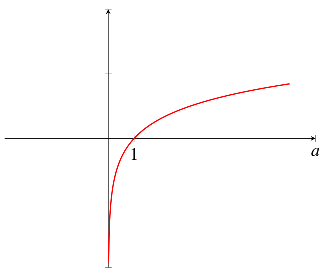
Omenimo še primer, ki pokaže, zakaj v točki (i) ne velja ekvivalenca. Za funkcijo $f(x) = x^3$ velja, da je strogo naraščajoča, vendar je $f'(0) = 0$.

■ **Zgled 9.9** Pokažimo, da je $f(x) = \mathrm{sh}\,x$ strogo naraščajoča funkcija.

Odvod je enak $f'(x) = \mathrm{ch}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ in je povsod pozitiven, zato je f strogo naraščajoča. ■

■ **Zgled 9.10** Preuči monotonost eksponentne funkcije $f(x) = a^x$ v odvisnosti od osnove a.

Odvod eksponentne funkcije je enak $f'(x) = a^x \ln a$. Ker je $a^x > 0$ za vsak x, je predznak odvoda odvisen od faktorja $\ln a$. Na Sliki 9.6 vidimo, da bo za $a > 1$ eksponentna funkcija a^x strogo naraščajoča in za $0 < a < 1$ je eksponentna funkcija a^x strogo padajoča.



Slika 9.6: Graf funkcije $\ln a$.

■

Lokalni ekstremi

Vemo že, da je $f'(a) = 0$ potrebni pogoj za nastop lokalnega ekstrema v točki a, ni pa tudi zadostni pogoj. Če je f vsaj 2-krat odvedljiva, lahko zadostni pogoj za nastop lokanega ekstrema podamo s pomočja drugega odvoda.

Izrek 9.4.2 Naj bo f (vsaj) 2-krat odvedljiva na neki okolici točke a in naj bo $f'(a) = 0$. Tedaj velja:

(i) če je $f''(a) < 0$, tedaj ima f v točki a lokalni maksimum,

(ii) če je $f''(a) > 0$, tedaj ima f v točki a lokalni minimum.

Dokaz.

(i) Naj bo $f'(a) = 0$ in $f''(a) < 0$. Zaradi $f''(a) < 0$ je po Izreku 9.4.1 funkcija f' strogo padajoča na neki okolici točke a, kar pomeni, da obstaja $\delta > 0$ tak, da

$$f'(x) > f'(a) = 0, \forall x \in (a-\delta, a) \quad \text{in}$$

$$f'(x) < f'(a) = 0, \forall x \in (a, a+\delta).$$

To pomeni, da je na δ-okolici točke a f' na levi strani pozitiven, na desni pa negativen. Sledi, da je f na intervalu $(a-\delta, a)$ strogo naraščajoča, na $(a, a+\delta)$ pa strogo padajoča, kar pomeni, da ima v a lokalni maksimum.

(ii) Pokažemo podobno kot točko (i).

∎

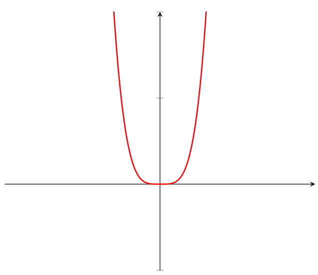
Lahko se zgodi, da je v stacionarni točki tudi drugi odvod enak nič. Tedaj je odgovor na to, ali je v tej točki ekstrem, odvisen od predznaka višjih odvodov, a se pri tem ne bomo spuščali v podrobnosti.

■ **Zgled 9.11** Poiščimo lokalne ekstreme funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$.

$$f'(x) = 4x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$f''(x) = 12x^3 \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 0.$$

S pomočjo Izreka 9.4.2 ne moremo odločiti ali je v točki $x = 0$ ekstrem, čeprav vemo, da je tam lokalni minimum (glej Sliko 9.7).



Slika 9.7: Funkcija $f(x) = x^4$ ima v točki 0 lokalni minimum.

■

■ **Zgled 9.12** Poiščimo pozitivni števili, katerih vsota je enaka 100, njun produkt pa je največji možen.

Naj bosta iskani števili x in y. Tedaj iščemo lokalni maksimum funkcije

$$f(x,y) = xy\,.$$

Ker je to funkcija dveh spremenljivk, moramo uporabiti znan pogoj $x + y = 100$, s čimer dobimo funkcijo ene spremenljivke:

$$\begin{aligned} f(x) &= x(100-x) \\ \\ f'(x) &= 100-2x = 0 \\ x &= 50 \\ y &= 50\,. \end{aligned}$$

■

Omenimo še, kako iščemo minimume in maksimume na zaprtih intervalih. Na odprtem intervalu poiščemo lokalne ekstreme in poleg teh pregledamo še vrednosti v krajiščih intervala. V tem primeru govorimo o *globalnih ekstremih*.

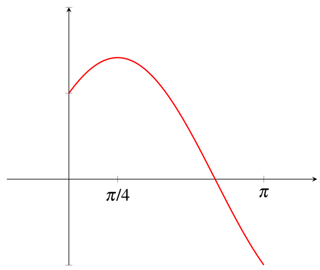
■ **Zgled 9.13** Poiščimo globalne ekstreme funkcije $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x + \cos x$.

$$\begin{aligned} f'(x) = \cos x - \sin x = 0 \quad &\Rightarrow \quad \tan x = 1 \Rightarrow x = \tfrac{\pi}{4} \\ f''(x) = -\sin x - \cos x \quad &\Rightarrow \quad f''(\tfrac{\pi}{4}) < 0 \Rightarrow \text{lokalni maksimum} \\ & \quad\quad f(\tfrac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\,. \end{aligned}$$

Vrednosti v robovih definicijskega območja sta

$$f(0) = 1 \quad \text{in} \quad f(\pi) = -1\,,$$

kar pomeni, da imamo v točki π globalni minimum, v točki $\frac{\pi}{4}$ pa globalni maksimum (glej Sliko 9.8.



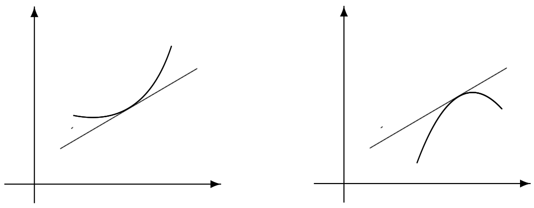
Slika 9.8: Globalna ekstrema funkcije $f(x) = \sin x + \cos x$na intervalu $[0,\pi]$.

■

9.5 Konveksnost in konkavnost funkcije

Nadaljevali bomo v prejšnjem razdelku začeto zgodbo o vplivu odvoda na lastnosti funkcije.

Za uvod v definicijo konveksnosti in konkavnosti funkcije si poglejmo primere grafov funkcij na Sliki 9.9.



a) b)

Slika 9.9: a) Konveksna in b) konkavna funkcija.

Definicija 9.5.1 Funkcija f je *konveksna* na $[a,b]$, če tangenta v poljubni točki intervala leži pod grafom funkcije oziroma za vsak $x \in [a,b]$ velja

$$f(x) \geq f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)\,,\; x_0 \in (a,b)\,.$$

Funkcija f je *konkavna* na $[a,b]$, če tangenta v poljubni točki intervala leži nad grafom funkcije oziroma za vsak $x \in [a,b]$ velja

$$f(x) \leq f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)\,,\; x_0 \in (a,b)\,.$$

Očitno velja, da je f konveksna natanko tedaj, ko je $-f$ konkavna.

Izrek 9.5.1 Naj bo f definirana na $[a,b]$.

(i) Če je $f''(x_0) > 0$ za vsak $x_0 \in (a,b)$, tedaj je funkcija f na intervalu $[a,b]$ konveksna.

(ii) Če je $f''(x_0) < 0$ za vsak $x_0 \in (a,b)$, tedaj je funkcija f na intervalu $[a,b]$ konkavna.

Dokaz.

(i) Ker je $f''(x_0) > 0$ za vsak $x_0 \in (a,b)$, je f' (strogo) naraščajoča funkcija na (a,b). Izberimo točko x_0 na intervalu (a,b). Tedaj je $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$ enačba tangente na graf funkcije f v točki x_0. Nadalje naj bo x poljubna točka na (a,b), različna od x_0. Po Lagrangeovem Izreku 9.1.4 obstaja med točkama x in x_0 točka x_1, za katero velja

$$f(x) = f'(x_1)(x-x_0) + f(x_0)\,.$$

Če je $x > x_0$, je $x_1 > x_0$ in ker je f' naraščajoča funkcija, je tudi $f'(x_1) > f'(x_0)$. Zato velja

$$\begin{aligned}
f'(x_1) &> f'(x_0) && / \cdot (x-x_0) > 0\\
f'(x_1)(x-x_0) &> f'(x_0)(x-x_0) && / + f(x_0)\\
f'(x_1)(x-x_0) + f(x_0) &> f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)\\
f(x) &> y(x)\,.
\end{aligned}$$

Če pa je $x < x_0$, je $x_1 < x_0$ in ker je f' naraščajoča funkcija, je tudi $f'(x_1) < f'(x_0)$. Zato velja

$$\begin{aligned}
f'(x_1) &< f'(x_0) && / \cdot (x - x_0) < 0 \\
f'(x_1)(x - x_0) &> f'(x_0)(x - x_0) && / + f(x_0) \\
f'(x_1)(x - x_0) + f(x_0) &> f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\
f(x) &> y(x) .
\end{aligned}$$

(ii) Dokažemo na analogen način kot točko (i).

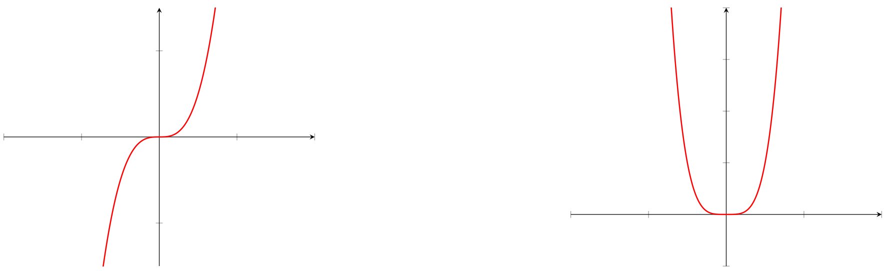
■

■ **Zgled 9.14** Preučimo konveksnost oziroma konkavnost funkcij $f(x) = x^3$ in $g(x) = x^4$.

Izračunajmo drugi odvod obeh funkcij:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 6x , \\
g''(x) &= 12x^2 .
\end{aligned}$$

To pomeni, da je f za pozitivne vrednosti konveksna in za negativne konkavna, medtem ko je g povsod konveksna (glej Sliko 9.10).



Slika 9.10: Grafa funkcij $f(x) = x^3$ (levo) in $f(x) = x^4$ (desno).

■

Definicija 9.5.2 Funkcija f ima v točki c *prevoj*, če obstaja taka okolica točke c, da je f na eni strani točke c konveksna, na drugi pa konkavna.

Izrek 9.5.2 Če odvedljiva funkcija v stacionarni točki nima lokalnega ekstrema, ima v njej prevoj.

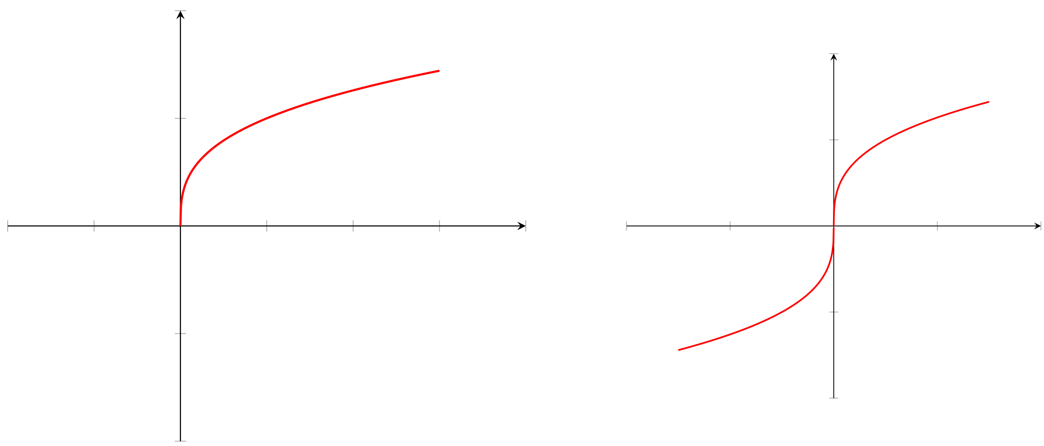
Dokaz. Naj obstaja tak $\delta > 0$, da je f konveksna na $(c - \delta, c)$. Ker je $f'(c) = 0$, je tangenta na graf funkcije f v točki c vzporedna z x osjo, in zato je f na $(c - \delta, c)$ nujno padajoča funkcija. Ker v točki c ni lokalnega ekstrema, je f padajoča tudi na desni strani točke c, tj. na intervalu $(c, c + \delta)$. če je f tudi na $(c, c + \delta)$ konveksna, tangenta v točki c ne more biti vzporedna z x osjo, zatorej je f na tem intervalu konkavna. ■

Na Sliki 9.10 vidimo, da ima funkcija $f(x) = x^3$ v točki $x = 0$ prevoj.

9.6 Graf funkcije

Verjetno bi se bili naravno vprašati, v čem je smisel risanja grafov funkcij "peš", ko imamo na voljo precej programov, ki so sposobni še precej več. Prvi razlog je ta, da je za razumevanje različnih matematičnih pojmov koristno imeti vsaj približno predstavo o tem, kako izgleda graf funkcije in zakaj je takšen kot je.

Drugi razlog je v tem, da tehnologiji ne gre slepo zaupati, saj nam ne da zmeraj natančnih rezultatov. Za ilustracijo je na Sliki 9.11 (levo) narisan graf funkcije $f(x) = \sqrt[3]{x}$, kot ga nariše program *WolframAlpha*, ki je del zelo močnega računskega sistema *Wolfram Mathematica*. Program upošteva za definicijsko območje samo pozitivne argumente, kar seveda ni pravilno. Na Sliki 9.11 (desno) je pravilno narisan graf te funkcije.



Slika 9.11: Graf funkcije $f(x) = \sqrt[3]{x}$ narisana z WolframAlpho (levo) in "peš" (desno).

Pri risanju grafa funkcije upoštevamo naslednje:

- definicijsko območje in preverimo sodost/lihost ter periodičnost funkcije,
- ničle funkcije in po potrebi nekaj točk na grafu funkcije,
- asimptote funkcije in obnašanje na robu definicijskega območja,
- stacionarne točke in lokalne ekstreme,
- območja monotonosti in konveksnosti/konkavnosti funkcije.

Vse naveden pojme razen asimptot smo že omenili, zato na kratko poglejmo še te. *Asimptoto* na graf funkcije f lahko definiramo kot črto ali krivuljo za katero velja, da je razlika med njo in funkcijo manjša, bodisi ko gre x proti neskončnosti, bodisi y, lahko pa tudi oba. *Vertikalno asimptoto* imenujemo tudi *pol*.

Najpreprosteje je iskati asimptote racionalne funkcije $f(x) = \dfrac{p_n(x)}{p_m(x)}$, kjer je števec polinom stopnje n in imenovalec polinom stopnje m. Če je $n < m$, je asimptota funkcije f os x. V nasprotnem že vemo, da lahko polinoma delimo

$$f(x) = \frac{p_n(x)}{p_m(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{p_m(x)},$$

kjer sta q in r polinoma, pri čemer je slednji stopnje kvečjemu $m-1$. Limitiranje funkcije f bodisi v pozitivni ali negativni del neskončnosti pokaže, da se graf funkcije f približuje grafu polinoma q, saj gre kvocient polinomov r in p_m proti nič. Zato je asimptota polinom q.

Zgled 9.15 Poiščimo asimptote funkcije $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x-1}$.

Ker je

$$f(x) = \frac{x^3-8}{x-1} = x^2+x+1-\frac{7}{x-1},$$

je asimptota kvadratna funkcija $y(x) = x^2+x+1$, vertikalna asimptota oziroma pol pa je določen z $x=1$. ■

Za funkcijo, ki ni racionalna, lahko poiščemo na dokaj preprost način asimptoto, če je le-ta premica. Asimptoto funkcije f, ki je oblike $y = kx+n$, določimo po formulah:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{in} \quad n = \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

V primeru, ko gre x proti pozitivni neskončnosti, govorimo o *desni asimptoti*, podobno, če gledamo limito v negativno neskončnost, dobimo *levo asimptoto*:

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{in} \quad n = \lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx).$$

Za $k\neq 0$ asimptoto imenujemo *poševna asimptota* in za $k=0$ govorimo o *vodoravni asimptoti*.

Zgled 9.16 Skicirajmo graf funkcije $f(x) = xe^x$.

Definicijsko območje je enako $\mathbb{R}$, ničlo ima v točki $x=0$. Desne asimptote ni, leva asimptota je os x, kar izračunamo s pomočjo L'Hospitalovega pravila:

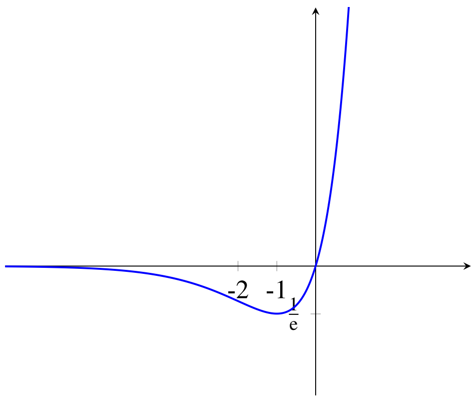
$$\begin{aligned}
k &= \lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0\\
n &= \lim_{x\to-\infty}(xe^x-0)\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\\
&\underset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}} = 0.
\end{aligned}$$

Nadalje sta prvi in drugi odvod enaka:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^x(x+1)\\
f''(x) &= e^x(x+2).
\end{aligned}$$

Lokalni minimum je tako v točki $(-1,-e^{-1})$, interval naraščanja je $[-1,\infty)$, padanja $(\infty,-1]$, konveksna je na $(-2,\infty)$ in konkavna na $(\infty,-2)$.

Na Sliki 9.12 vidimo graf funkcije $f(x) = xe^x$.



Slika 9.12: Graf funkcije $f(x) = xe^x$.

■

9.7 Uporaba v kemiji

V želji, da osvojeno znanje približamo bralcu, si bomo pogledali konkretni primer uporabe odvoda v kemiji. Ta razdelek je zgolj informativne narave, z namenom da bi študenti spoznali uporabno vrednosti diferencialnega računa.

Splošna plinska enačba opisuje obnašanje idealnega plina in se glasi

$$pV = nRT\,,$$

pri čemer je

p	...	pritisk,
V	...	prostornina,
T	...	temperatura,
R	...	splošna plinska konstanta,
n	...	množina snovi.

O idealnem plinu govorimo, kadar zanemarimo velikost delcev, ki ga sestavljajo in njihovo medsebojno interakcijo. Posplošitev splošne plinske enačbe, ki upošteva velikost delcev in njihovo medsebojno interakcijo, je Van der Waalsova enačba stanja, ki jo je podal Johannes Diderik van der Waals l. 1873 in opisuje realne pline. Glasi se

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT\,,$$

pri čemer

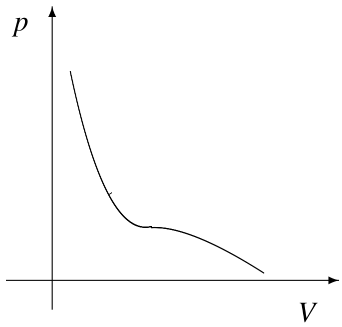
a	...	določa interakcijo med delci,
b	...	določa prostornino delcev v tekočini.

Parametra a in b sta odvisna od snovi, ki jo opisujemo.

Vsak realni plin lahko utekočinimo. To dosežemo s stiskanjem in/ali ohlajanjem, odvisno od posameznega plina. Za vsak plin obstaja temperatura, nad katero ga ne moremo utekočiniti. To temperaturo imenujemo *kritična temperatura* in jo označujemo T_c. Realni plin lahko utekočinimo le pod ali pri kritični temperaturi. Pritisk, ki ga za to potrebujemo, je *kritični pritisk* p_c in prostornina, ki ustreza T_c ter p_c, je *kritična prostornina* V_c. S skupno besedo T_c, p_c in V_c imenujemo *kritične konstante*.

Obstajajo plini, imenovani stalni plini, ki imajo kritično temperaturo pod sobno temperaturo. Če jih želimo utekočiniti, moramo te pline ohladiti do temperature pod njihovo T_c, kar pomeni pod sobno temperaturo. To so na primer He, H_2, N_2, O_2, Ne, Ar, ... Poznamo pa veliko snovi, ki imajo T_c nad sobno temperaturo. Pri sobni temperaturi so te snovi v tekočem ali celo trdnem agregatnem stanju. Recimo voda ima T_c pri $647,1\,K$ (standardna sobna temperatura je $298,2$ K). Vodo lahko utekočinimo pri poljubni temperaturi nižji od $T_c = 647,1$ K. Nad temperaturo vrelišča vode, ki je $398,2$ K, bi za ohranitev tekočega stanja vode morali delovati s pritiskom, ki bi bil višji od normalnega zračnega pritiska.

Za opis stanja snovi velikokrat uporabljamo $p-V$ diagram, kjer pritisk snovi p prikažemo kot funkcijo prostornine V, pri čemer je temperatura konstantna. To krivuljo imenujemo *izoterma* (*glej Sliko 9.13*).



Slika 9.13: $p-V$ diagram.

Iz $p-V$ diagrama je razvidno, da se plin utekočini v prevoju izoterme pri T_c, saj krivulja prehaja iz konveksne v konkavno. Točko prevoja imenujemo *kritična točka* in ustreza kritičnim konstantam. Računsko to pomeni, da moramo poiskati prvi in drugi odvod funkcije $p(V)$ in rešiti enačbi $p(V)' = 0$ in $p(V)'' = 0$.

Izrazimo najprej p kot funkcijo spremenljivke V:

$$p(V) = \frac{nRT}{V-nb} - \frac{an^2}{V^2}\,.$$

Izračunamo oba odvoda, ju enačimo z 0 in rešimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} p'(V) &= \frac{-nRT}{(V-nb)^2} + \frac{2an^2}{V^3} &= 0 \\ p''(V) &= \frac{2nRT}{(V-nb)^3} - \frac{6an^2}{V^4} &= 0\,. \end{aligned}$$

Pomnožimo prvo enačbo z $\frac{2}{V-nb}$ in obe seštejmo:

$$\begin{aligned}
\frac{4an^2}{V^3(V-nb)} - \frac{6an^2}{V^4} &= 0 \qquad\qquad / \cdot \frac{V^3}{2an^2} \\
\frac{2}{V-nb} &= \frac{3}{V} \\
2V &= 3V - 3nb \\
V_c = V &= 3nb\,.
\end{aligned}$$

Sedaj lahko izračunamo T_c in p_c:

$$\begin{aligned}
\frac{-nRT}{(3nb-nb)^2} + \frac{2an^2}{27n^3b^3} &= 0 \\
\frac{RT}{4nb^2} &= \frac{2a}{27nb^3} \\
T_c = T &= \frac{8a}{27bR}\,.
\end{aligned}$$

Ker poznamo kritično prostornino in temperaturo, lahko izračunamo še kritični pritisk:

$$\begin{aligned}
p_c &= \frac{nR\frac{8a}{27bR}}{3nb-nb} - \frac{an^2}{9n^2b^2} \\
&= \frac{a}{27b^2}\,.
\end{aligned}$$

10. Rešene naloge

Odvod funkcije

1. Po definiciji izračunaj odvode funkcij, ki so podane s predpisi:
   (a) $f(x) = x^2$,
   (b) $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$,
   (c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x > 0$,
   (d) $f(x) = \cos x$.

   Rešitev.

   (a) $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \\ = \lim_{h\to 0}(2x+h) = \lim_{h\to 0} 2x + \lim_{h\to 0} h = 2x,$$

   (b) $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \\ = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

   (c) $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x^2 - (x+h)^2}{x^2(x+h)^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 - x^2 - 2xh - h^2}{hx^2(x+h)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{-2x-h}{x^2(x+h)^2} = \\ = \lim_{h\to 0} \frac{-2x}{x^2(x+h)^2} - \lim_{h\to 0} \frac{h}{x^2(x+h)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{-2x}{x^2(x+h)^2} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3},$$

   (d) $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} = \\ = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \sin h}{h} = \\ = \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\left(\cos^2 \frac{h}{2} - \sin^2 \frac{h}{2}\right) - \left(\cos^2 \frac{h}{2} + \sin^2 \frac{h}{2}\right)}{h} - \sin x = \\ = \cos x \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin^2 \frac{h}{2}}{2 \cdot \frac{h}{2}} - \sin x = -\cos x \lim_{h\to 0} \sin \frac{h}{2} - \sin x = -\cos x \cdot 0 - \sin x = -\sin x.$$

   ∎

2. Izračunaj odvode funkcij, ki so podane eksplicitno:

(a) $f(x) = x^{13} + 2x^2 + x + 4$

(b) $f(x) = \frac{1}{x} + 6\frac{1}{x^7} + \frac{1}{x^{13}}$,

(c) $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$,

(d) $f(x) = \left(2x^{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{4x+1}\right)^n$, kjer je $n \in \mathbb{N}$ poljuben,

(e) $f(x) = \ln(\log_5 x)$,

(f) $f(x) = x^3 e^{3x}$,

(g) $f(x) = x2^{x^2+2}$,

(h) $f(x) = \ln(\cos x)\sin 2x$,

(i) $f(x) = \left(\tan(ax) + \frac{1}{\cos(ax)}\right)^n$, kjer sta $a, n \in \mathbb{N}$ poljubna,

(j) $f(x) = \frac{\arctan x}{\arcsin(x^2)}$,

(k) $f(x) = \frac{\cosh x + e^x}{-\sinh x}$,

(l) $f(x) = x^x$,

(m) $f(x) = (\sin x)^{\ln x}$.

Rešitev. Pri odvajanju bomo uporabljali že znane odvode elementarnih funkcij in lastnosti odvoda (odvod vsote, odvod razlike, odvod produkta, odvod kvocienta in verižno pravilo).

(a) $f'(x) = \left(x^{13} + 2x^2 + x + 4\right)' = 13x^{12} + 4x + 1$,

(b) $f'(x) = \left(\frac{1}{x} + 6\frac{1}{x^7} + \frac{1}{x^{13}}\right)' = \left(x^{-1} + 6x^{-7} + x^{-13}\right)' = -x^{-2} - 42x^{-8} - 13x^{-14} =$
$= -\frac{1}{x^2} - 42\frac{1}{x^8} - 13\frac{1}{x^{14}}$,

(c) $f'(x) = \left(\sqrt{x^2+x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}} \cdot \left(x^2+x\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}} \cdot (2x+1)$,

(d) $f'(x) = \left(\left(2x^{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{4x+1}\right)^n\right)' = n\left(\left(2x^{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{4x+1}\right)^{n-1}\right) \cdot \left(2x^{\frac{3}{2}} + (4x+1)^{\frac{1}{4}}\right)' =$

$$= n\left(\left(2x^{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{4x+1}\right)^{n-1}\right) \cdot \left(3x^{\frac{1}{2}} + \frac{(4x+1)'}{4(4x+1)^{\frac{3}{4}}}\right) =$$

$$= n\left(\left(2x^{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{4x+1}\right)^{n-1}\right) \cdot \left(3x^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{4(4x+1)^{\frac{3}{4}}}\right) =$$

$$= n\left(\left(2x^{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{4x+1}\right)^{n-1}\right) \cdot \left(3x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(4x+1)^3}}\right),$$

(e) $f'(x) = (\ln(\log_5 x))' = \frac{1}{\log_5 x} \cdot (\log_5 x)' = \frac{1}{\log_5 x} \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 5}$,

(f) $f'(x) = \left(x^3 e^{3x}\right)' = (x^3)' \cdot e^{3x} + x^3 \cdot \left(e^{3x}\right)' = 3x^2 e^{3x} + x^3 e^{3x} \cdot (3x)' = 3x^2 e^{3x} + 3x^3 e^{3x}$,

(g) $f'(x) = \left(x2^{x^2+2}\right)' = (x)' \cdot 2^{x^2+2} + x \cdot \left(2^{x^2+2}\right)' = 2^{x^2+2} + x2^{x^2+2} \cdot \ln 2 \cdot \left(x^2+2\right)' =$
$= \left(1 + 2 \cdot \ln 2 \cdot x^2\right) 2^{x^2+2}$,

(h) $f'(x) = (\ln(\cos x)\sin 2x)' = (\ln(\cos x))' \cdot \sin 2x + \ln(\cos x) \cdot (\sin 2x)' =$
$= \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' \cdot \sin 2x + \ln(\cos x) \cdot \cos 2x \cdot (2x)' = -\frac{\sin x}{\cos x}\sin 2x + 2\ln(\cos x)\cos 2x$,

(i) $f'(x) = \left(\left(\tan(ax) + \frac{1}{\cos(ax)}\right)^n\right)' = n\left(\tan(ax) + \frac{1}{\cos(ax)}\right)^{n-1} \cdot \left(\tan(ax) + \frac{1}{\cos(ax)}\right)' =$

$$= n\left(\tan(ax) + \frac{1}{\cos(ax)}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{a}{\cos^2(ax)} - \frac{(\cos(ax))'}{\cos^2(ax)}\right) =$$

$$= n\left(\tan(ax) + \frac{1}{\cos(ax)}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{a}{\cos^2(ax)} + \frac{a\sin(ax)}{\cos^2(ax)}\right) =$$

$$= n\left(\tan(ax) + \frac{1}{\cos(ax)}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{a + a\sin(ax)}{\cos^2(ax)}\right),$$

(j) $f'(x) = \left(\dfrac{\arctan x}{\arcsin(x^2)}\right)' = \dfrac{(\arctan x)' \cdot \arcsin(x^2) - \arctan x \cdot \left(\arcsin(x^2)\right)'}{(\arcsin(x^2))^2} =$

$$= \frac{\frac{1}{1+x^2} \cdot \arcsin(x^2) - \arctan x \cdot \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}}{(\arcsin(x^2))^2},$$

(k) $f'(x) = \left(\dfrac{\cosh x + e^x}{-\sinh x}\right)' = \dfrac{(\cosh x + e^x)' \cdot (-\sinh x) - (\cosh x + e^x) \cdot (-\sinh x)'}{\sinh^2 x} =$

$$= \frac{(\sinh x + e^x) \cdot (-\sinh x) - (\cosh x + e^x) \cdot (-\cosh x)}{\sinh^2 x} =$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x - (\sinh x - \cosh x)\, e^x}{\sinh^2 x},$$

(l) $f'(x) = (x^x)' = \left(e^{\ln x^x}\right)' = \left(e^{x \ln x}\right)' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x \cdot \left(\ln x + x \cdot \dfrac{1}{x}\right) = x^x \cdot (\ln x + 1),$

(m) $f'(x) = \left((\sin x)^{\ln x}\right)' = \left(e^{\ln(\sin x)^{\ln x}}\right)' = \left(e^{\ln x \cdot \ln(\sin x)}\right)' = \left(e^{\ln x \cdot \ln(\sin x)}\right) \cdot (\ln x \cdot \ln(\sin x))' =$

$$= (\sin x)^{\ln x} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot \ln(\sin x) + \ln x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}\right) = (\sin x)^{\ln x} \cdot \left(\frac{\ln(\sin x)}{x} + \ln x \cdot \cot x\right).$$

■

3. Izračunaj odvode implicitno podanih funkcij:
   (a) $x^2 + 2xy + 5 = 0,$
   (b) $(x + xy)y^2 = 0,$
   (c) $\arctan \dfrac{x}{2y} = \ln x + 5y,$
   (d) $\sin\left(\dfrac{1}{xy}\right) = \cos(xe^y),$
   (e) $x^y = y^x.$

Rešitev. V vseh primerih y predstavlja $y(x)$. V prvem primeru bomo preverili, da je odvod implicitno podane funkcije enak odvodu eksplicitno podane funkcije.

(a) Odvod implicitno podane funkcije $x^2 + 2xy + 5 = 0$ je

$$2x + 2y + 2xy' = 0.$$

Če funkcijo izrazimo eksplicitno, dobimo

$$y = \frac{-x^2 - 5}{2x},$$

od koder sledi

$$y' = \frac{-2x^2 + 10}{4x^2} = \frac{-x^2 + 5}{2x^2}.$$

Preverimo, da smo res v obeh primerih dobili enako. Če iz $2x + 2y + 2xy' = 0$ izrazimo y' in upoštevamo y, dobimo

$$y' = \frac{-2x - 2 \cdot \frac{-x^2-5}{2x}}{2x} = \frac{-2x^2 - 10}{4x^2} = \frac{-x^2 + 5}{2x^2}.$$

Opazimo, da se odvoda res ujemata.

(b) $(1 + y + xy')y^2 + (x + xy) \cdot (2yy') = 0,$

(c) $\dfrac{1}{1 + \left(\frac{x}{2y}\right)^2} \cdot \left(\dfrac{2y - 2xy'}{4y^2}\right) = \dfrac{1}{x} + 5y',$

(d) $\cos\left(\dfrac{1}{xy}\right) \cdot \left(-\dfrac{y + xy'}{(xy)^2}\right) = -\sin(xe^y) \cdot \left(e^y + xe^y \cdot y'\right),$

(e) Izraz $x^y = y^x$ pretvorimo v $e^{y\ln x} = e^{x\ln y}$ in sedaj odvajamo

$$e^{y\ln x} \cdot \left(y' \ln x + \frac{y}{x}\right) = e^{x\ln y} \cdot \left(\ln y + \frac{xy'}{y}\right)$$
$$x^y \cdot \left(y' \ln x + \frac{y}{x}\right) = y^x \cdot \left(\ln y + \frac{xy'}{y}\right).$$

∎

4. Izračunaj n-ti odvod funkcije f, ki je podana s predpisom $f(x) = x^2 e^x$.
Rešitev. To nalogo bomo rešili na naslednji način: najprej bomo s pomočjo večkratnega odvajanja prišli do teze, zapisali to tezo in jo nato dokazali s pomočjo matematične indukcije.

$$\begin{array}{lclclcl}
f(x) & = & x^2e^x & & & & \\
f'(x) & = & x^2e^x & + & 2xe^x & & \\
f''(x) & = & x^2e^x & + & 4xe^x & + & 2e^x \\
f^{(3)}(x) & = & x^2e^x & + & 6xe^x & + & 6e^x \\
f^{(4)}(x) & = & x^2e^x & + & 8xe^x & + & 12e^x \\
f^{(5)}(x) & = & x^2e^x & + & 10xe^x & + & 20e^x
\end{array}$$

Na podlagi teh odvodov predpostavimo formulo (glej koeficiente pred členi v odvodih)

$$f^{(n)}(x) = x^2e^x + 2nxe^x + n(n-1)e^x$$

in sedaj dokažimo, da ta formula velja za vsa naravna števila. Za $n = 1$ to trivialno velja. Za izbran $n \in \mathbb{N}$ predpostavimo indukcijsko predpostavko $f^{(n)}(x) = x^2e^x + 2nxe^x + n(n-1)e^x$, in dokažimo, da velja tudi

$$f^{(n+1)}(x) = x^2e^x + 2(n+1)xe^x + (n+1)ne^x.$$

Dokazali bomo tako, da bomo odvajali $f^{(n)}(x)$.

$$\begin{aligned}
\left(f^{(n)}(x)\right)' &= x^2e^x + 2xe^x + 2nxe^x + 2ne^x + n(n-1)e^x \\
&= x^2e^x + (2n+2)xe^x + (n^2+2n-n)e^x \\
&= x^2e^x + 2(n+1)xe^x + (n+1)ne^x.
\end{aligned}$$

S tem je formula dokazana. ∎

5. Izračunaj n-ti odvod funkcije f, ki je podana s predpisom $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$.
Rešitev. Najprej poiščimo takšni realni števili A in B, da bo veljalo

$$\frac{x+1}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}.$$

Iz tega posledično dobimo sistem dveh enačb z dvema neznankama

$$\begin{aligned}
A + B &= 1 \\
2A - 2B &= 1
\end{aligned}$$

Iz tega sledi, da je $A = \frac{3}{4}$ in $B = \frac{1}{4}$. Torej bomo v nadaljevanju odvajali

$$f(x) = \frac{3}{4(x-2)} + \frac{1}{4(x+2)}.$$

Odvajajmo

$$\begin{array}{lclcl}
f(x) & = & \dfrac{3}{4(x-2)} & + & \dfrac{1}{4(x+2)} \\
f'(x) & = & \dfrac{3\cdot(-1)}{4(x-2)^2} & + & \dfrac{-1}{4(x+2)^2} \\
f''(x) & = & \dfrac{3\cdot(-1)\cdot(-2)}{4(x-2)^3} & + & \dfrac{(-1)\cdot(-2)}{4(x+2)^3} \\
f'''(x) & = & \dfrac{3\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)}{4(x-2)^4} & + & \dfrac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)}{4(x+2)^4} \\
 & \vdots & & & \\
f^{(n)}(x) & = & \dfrac{3\cdot(-1)^n n!}{4(x-2)^{n+1}} & + & \dfrac{(-1)^n\cdot n!}{4(x+2)^{n+1}}.
\end{array}$$

S pomočjo matematične indukcije dokažimo, da formula res velja. Naredimo zgolj indukcijski korak

$$\begin{aligned}\left(f^{(n)}(x)\right)' &= \left(\frac{3\cdot(-1)^n n!}{4(x-2)^{n+1}}\right)' + \left(\frac{(-1)^n\cdot n!}{4(x+2)^{n+1}}\right)'\\ &= \frac{3\cdot(-1)^n n!\cdot(-(n+1))}{4(x-2)^{n+2}} + \frac{(-1)^n\cdot n!\cdot(-(n+1))}{4(x+2)^{n+2}}\\ &= \frac{3\cdot(-1)^{n+1}(n+1)!}{4(x-2)^{n+2}} + \frac{(-1)^{n+1}\cdot(n+1)!}{4(x+2)^{n+2}}.\end{aligned}$$

∎

Geometrijski pomen odvoda

1. Določi enačbo tangente na graf funkcije f, ki je podana s predpisom $f(x)=\ln(x^2+4x+1)$, v točki $T(0,y)$.
   Rešitev. Smerni koeficient tangente na graf funkcije v $x=0$ je enak $f'(0)$. Odvod funkcije f je enak

   $$f'(x)=\frac{2x+4}{x^2+4x+1}$$

   in zato je $f'(0)=k_t=4$. Ker graf poteka skozi točko $(0,f(0))=(0,0)$, dobimo enačbo tangente

   $$y=4x.$$

   ∎

2. Zapiši enačbo tangente na graf funkcije f, ki je podana s predpisom $f(x)=x^3-x+1$, ki je vzporedna s premico $y=2x-1$. Poišči še enačbo pripadajoče normale na graf funkcije.
   Rešitev. Tangente na graf funkcije f so vzporedne z y, ko je $f'(x)=2$. Tako dobimo enačbo

   $$3x^2-1=2,$$

   iz katere sledita rešitvi $x_1=-1$ in $x_2=1$. Posledično dobimo točki $(-1,f(-1))=(-1,1)$ in $(1,f(1))=(1,1)$. Sedaj poiščimo enačbo tangente na graf funkcije f v točki $(-1,1)$. Smerni koeficient tangente je 2 in zato dobimo enačbo

   $$1=2\cdot(-1)+n.$$

   Tako dobimo enačbo tangente na graf funkcije f v točki $(-1,1)$, ki je enaka

   $$y=2x+3.$$

   Podobno dobimo enačbo tangente na graf funkcije f v točki $(1,1)$, ki je enaka

   $$y=2x-1.$$

   Smerni koeficient normale na graf funkcije je $k_n=-\frac{1}{k_t}$, kjer je k_t smerni koeficient tangente na graf funkcije. Tako imamo v našem primeru

   $$1=-\frac{1}{2}\cdot(-1)+n$$

   in enačba normale na graf funkcije f skozi $(-1,1)$ je enaka

   $$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}.$$

   Podobno poiščemo normalo v $(1,1)$ in dobimo

   $$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}.$$

   ∎

3. Poišči vse točke, v katerih je smerni koeficient normale na graf funkcije f, $f(x) = x - \cos x$, enak -1.
   Rešitev. Odvod funkcije f je $f'(x) = 1 + \sin x$. Če upoštevamo zvezo med smernim koeficientom tangente in normale, dobimo, da je potrebno poiskati tiste $x \in \mathbb{R}$, za katere velja
   $$-\frac{1}{1+\sin x} = -1$$
   oziroma
   $$\sin x = 0.$$
   Rešitev je tako množica točk $\left\{(k\pi, k\pi - (-1)^k) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. ∎
4. Zapiši enačbo vseh tangent na graf funkcije f, $f(x) = \frac{\sin x}{1-\cos x}$, ki so vzporedne s premico z enačbo $x + 2y + 3 = 0$.
   Rešitev. Najprej implicitno obliko enačbo premice $x + 2y + 3 = 0$ preoblikujemo v eksplicitno obliko $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$. Tako iščemo tiste $x \in \mathbb{R}$, za katere velja
   $$\frac{1}{\cos x - 1} = -\frac{1}{2}$$
   oziroma
   $$\cos x = -1.$$
   Rešitev tega je množica $\{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Ker so vse funkcijske vrednosti množice $\{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ enake 0, dobimo števno enačb
   $$0 = -\frac{1}{2}(\pi + 2k\pi) + n, \text{ kjer je } k \in \mathbb{Z}.$$
   Tako za vsak $k \in \mathbb{Z}$ dobimo tangento
   $$y_{t_k} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(\pi + 2k\pi).$$
   ∎
5. Za katere vrednosti $a \in \mathbb{R}$ je premica z enačbo $2x + y = 0$ vzporedna tangenti grafa funkcije f,
   $$f(x) = a(x-2)^2,$$
   v točki $(\frac{3}{2}, y)$?
   Rešitev. Tangenta na graf funkcije bo vzporedna s premico $2x + y = 0$, ko bo $f'(\frac{3}{2}) = -2$. Ko odvajamo in vstavimo vrednosti, dobimo
   $$2a\left(\frac{3}{2} - 2\right) = -2.$$
   Izrazimo a in dobimo, da je $a = 2$, kar pomeni, da je $f(x) = 2(x-2)^2$. ∎
6. Funkciji f, $f(x) = ax^2 - 9a$, določi parameter a tako, da bosta tangenti na graf funkcije f v njegovih presečiščih z abscisno osjo pravokotni.
   Rešitev. Funkcija f (ne glede na vrednost a) seka abscisno os v $x_0 = -3$ in $x_1 = 3$. Ker morata biti tangenti pravokotni, dobimo
   $$6a = \frac{1}{6a}$$
   (odvod funkcije f je enak $f'(x) = 2ax$). Tako dobimo, da je $a_1 = -\frac{1}{6}$ in $a_2 = \frac{1}{6}$. ∎
7. Funkcija f je podana s predpisom $f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 4$. V katerih točkah tangenta na graf funkcije f oklepa z abscisno osjo kot $\frac{\pi}{4}$?
   Rešitev. Upoštevamo, da je $f'(x) = \tan\varphi$. V našemo primeru dobimo enačbo
   $$3x^2 - 12x + 10 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right).$$
   Ta kvadratna enačba ima rešitvi $x_1 = 1$ in $x_2 = 3$ ter tako dobimo točki $(1,1)$ in $(3,-1)$. ∎

8. Funkciji f in g sta podani s predpisoma $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ in $g(x) = 2x + \sin x + 1$. Preveri, da se funkciji f in g sekata v $x_0 = 0$ in nato izračunaj kot med grafoma funkcij v točki $T(x_0, y)$.
Rešitev. Funkciji se sekata v $x_0 = 0$, saj je $f(0) = g(0) = 1$. Kot med grafoma funkcij izračunamo s formulo $\tan\varphi = \left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$, kjer je φ kot med grafoma funkcij, k_1 in k_2 pa sta smerna koeficienta tangent na graf funkcij v neki točki. V našem primeru $k_1 = f'(0) = \frac{1}{2}$ in $k_2 = g(0) = 3$. Tako dobimo
$$\tan\varphi = \left|\frac{\frac{1}{2} - 3}{1 + \frac{1}{2}\cdot 3}\right|$$
in zato je $\varphi = \frac{\pi}{4}$. ∎

9. Naj bo a realno število in $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkciji, ki sta podani s predpisoma $f(x) = x^2 - 7x + 6$ in $g(x) = (x-1)(x^2 + ax - 2)$.
   (a) Za katere vrednosti parametra a se grafa funkcij f in g v točki (1,0) sekata pod kotom $\frac{\pi}{4}$?
   (b) Za katere vrednosti $x_0 \in \mathbb{R}$ tangenta na graf funkcije f v točki $(x_0, f(x_0))$ poteka skozi točko (0,2)?

   Rešitev.
   (a) Vidimo, da se f in g res sekata v (1,0). Naj bo $k_1 = f'(1)$ in $k_2 = g'(1)$. Če želimo, da se grafa funkcij sekata v točki $(1,0)$ pod kotom $\frac{\pi}{4}$, potem mora veljati $\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right| = 1$. V našem primeru dobimo
   $$\left|\frac{a-1+5}{1-5(a-1)}\right| = 1.$$
   Ko rešimo to enačbo, dobimo rešitvi $a_1 = \frac{1}{3}$ in $a_2 = \frac{5}{2}$.
   (b) Uporabili bomo naslednjo obliko enačbe premice
   $$y - y_0 = k(x - x_0),$$
   kjer je k smerni koeficient premice in (x_0, y_0) točka, skozi katero poteka premica.
   Smerni koeficient tangente na graf funkcije f v točki (x_0, y_0) je $f'(x_0) = 2x_0 - 7$. Ker vemo, da poteka tangenta na graf funkcije f skozi $(0,2)$ in (x_0, y_0), dobimo
   $$2 - y_0 = (2x_0 - 7)(0 - x_0).$$
   Upoštevajmo, da je $y_0 = f(x_0)$ in tako dobimo
   $$2 - x_0^2 + 7x_0 - 6 = -2x_0^2 + 7x_0.$$
   Ničli te kvadratne enačbe sta $x_{0_1} = -2$ in $x_{0_2} = 2$, kar je tudi končna rešitev naše naloge. ∎

10. Za poljubni realni števili a in b je funkcija $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podana s predpisom
$$f_{a,b}(x) = \frac{\sin x}{2 + a\sin x + b\cos x}.$$
Med vsemi funkcija $f_{a,b}$ poišči tisto, ki bo imela lokalni ekstrem v točki $(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3})$.
Rešitev. Dovolj je poiskati realna parametra a in b. Ker točka $(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3})$ leži na grafu funkcije, dobimo prvo enačbo
$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 + a\frac{\sqrt{3}}{2} + b\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$
Ker je v $(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3})$ tudi lokalni ekstrem $f_{a,b}$, je potrebno odvajati $f_{a,b}$
$$f'_{a,b}(x) = \frac{\cos x(2 + a\sin x + b\cos x) - \sin x(a\cos x - b\sin x)}{(2 + a\sin x + b\cos x)^2} = \frac{2\cos x + b}{(2 + a\sin x + b\cos x)^2}.$$
Iz pogoja $f'_{a,b}(\frac{\pi}{3}) = 0$ dobimo $1 + b = 0$. Iskani rešitvi sta $a = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ $b = -1$. ∎

11. Ali obstajajo točke krivulji $\mathscr{K}$, ki je podana z enačbo $x^3+y^3=3xy$, v katerih je tangenta vzporedna z abscisno osjo oziroma z ordinatno osjo? Če obstajajo, jih poišči.
Rešitev. Pomagali si bomo z odvodom implicitno podane funkcije.

$$\begin{aligned} 3x^2+3y^2y' &= 3y+3xy' \\ y' &= \frac{y-x^2}{y^2-x} \end{aligned}$$

Za točke v katerih je tangenta vzporedna z abscisno osjo velja pogoj $y=x^2$, za točke v katerih pa je tangenta vzporedna z ordinatno osjo pa velja pogoj $x=y^2$. Bralec lahko sedaj sam poišče te točke. ■

Uporaba odvoda

1. S pomočjo diferenciala izračunaj približne vrednosti
   (a) $\sqrt{16,16}$,
   (b) $\ln(1,25)$,
   (c) $\tan(\frac{44\pi}{180})$.
   Rešitev. V vseh primerih bomo uporabili formulo $f(a+h)\doteq f(a)+f'(a)h$. Cilj je prepoznati a, h in f.
   (a) $a=16$, $h=0,16$ in $f(x)=\sqrt{x}$,
   $$\sqrt{16,16}\doteq\sqrt{16}+\frac{1}{2\sqrt{16}}\cdot 0,16=4,02.$$
   (b) $a=1$, $h=0,25$, $f(x)=\ln x$,
   $$\ln(1,25)\doteq\ln(1)+\frac{1}{1}\cdot 0,25=0,25.$$
   (c) V tem primeru bomo rezultat izrazili s pomočjo števila π.
   $a=\frac{\pi}{4}$, $h=-\frac{\pi}{180}$, $f(x)=\tan x$,

   ■

2. S pomočjo diferenciala dokaži, da za $0\le\varepsilon<\frac{1}{100}$, velja
   $$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\doteq 1-\frac{\varepsilon}{2}.$$
   Rešitev. Sklicali se bomo na formulo $f(a+h)\doteq f(a)+f'(a)h$. V tem primeru je $a=0$, $h=\varepsilon$ in $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Ko odvajamo funkcijo f, dobimo $f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{(1+x)^3}}$. Izračunane podatke vstavimo v formulo in dobimo
   $$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\doteq\frac{1}{\sqrt{1+0}}-\frac{1}{2\sqrt{(1+0)^3}}\cdot\varepsilon=1-\frac{\varepsilon}{2}.$$
   ■

3. S pomočjo diferenciala dokaži, da za $y,z\in\mathbb{R}$, $|z|<|y|$, velja
   $$\sqrt[3]{y^3+z}\doteq y+\frac{z}{3y^2}.$$
   Rešitev. Rešujemo podobno kot v nalogi 2. V tem primeru je $a=y^3$, $h=z$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$ in $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Uporabimo formulo in dobimo
   $$\sqrt[3]{y^3+z}\doteq\sqrt[3]{y^3}+\frac{1}{3\sqrt[3]{y^6}}\cdot z=y+\frac{z}{3y^2}.$$
   ■

4. S pomočjo Lagrangeovega izreka dokaži, da ima enačba $e^x = x+1$ eno samo rešitev.
Rešitev. Opazimo, da je $x = 0$ rešitev navedene enačbe. Dokazali bomo, da je edina.
Naj bo $t > 0$ in $f : [0,t] \to \mathbb{R}$, ki je podana s predpisom $f(x) = e^x - x - 1$. Upoštevajmo Lagrangeov izrek za f: obstaja $c \in (0,t)$, za katerega velja
$$(e^t - t - 1) - (e^0 - 0 - 1) = (e^c - 1)(t - 0).$$
Iz tega dobimo enačbo
$$e^t - 1 = te^c.$$
Ker je po predpostavki $e^x = x+1$, upoštevamo to pri prejšnji enačbi in dobimo
$$t = te^c.$$
Ta enakost velja le v primeru, ko je $t = 0$ – protislovje (predposavili smo, da je $t > 0$).
V primeru, ko je $t < 0$ dokažemo podobno. ∎

5. Dokaži neenakosti
   (a) $\ln(x+1) < x$, za $x \in \mathbb{R}^+$,
   (b) $1 + x \leq e^x$, za $x \in \mathbb{R}$,
   (c) $\sin x < x$, za $x \in \mathbb{R}^+$.

Rešitev.
   (a) Naj bo $f(x) = x - \ln(x+1)$. Opazimo, da je $f(x) = 0$, ko je $x = 0$. Nadalje, odvod te funkcije je $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$. Ker je $f'(x) > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}^+$, je f strogo naraščajoča (nima lokalnega ekstrema) in posledično neenakost res velja.
   (b) Naj bo $f(x) = e^x - x - 1$. Opazimo, da je $f(x) = 0$, ko je $x = 0$. Za vsak $x \in \mathbb{R}^+$ je $f'(x) = e^x - 1 > 0$ in zato neenakost velja (glej primer (a)). Podobno za negativne vrednosti. Natančneje, za vsak x, kjer je $x \in \mathbb{R}^-$, je $f'(x) = e^x - 1 < 0$ kar pomeni, da je f na tem območju padajoča, torej je $x + 1 < e^x$. Torej neenakost velja za vsak $x \in \mathbb{R}$.
   (c) Trivialno je res, da je $\sin x < x$ za $x > \frac{\pi}{2}$, saj je $\sin x \leq 1$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, zato preverimo neenakost samo za $0 < x < \frac{\pi}{2}$.
   Naj bo $f(x) = x - \sin x$. Vidimo, da je $f(x) = 0$, ko je $x = 0$. Ker je $f'(x) = 1 - \cos x > 0$ za vsak $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, zato neenakost res velja (glej primer (a)).

∎

6. Dokaži enakosti
   (a) $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$, za vsak $x \in [-1,1]$,
   (b) $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{2}$, za vsak $x \in [-1,1]$.

Rešitev. V tej nalogi bomo uporabili posledico Lagrangeovega izreka (lahko pa med drugim nanjo gledamo kot na posledico Rolleovega izreka). Ta pravi, če je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, ki je odvedljiva na (a,b) in zanjo velja $f'(x) = 0$, za vsak $x \in (a,b)$, potem je f konstantna funkcija (razmisli).
   (a) Najprej vpeljimo funkcijo $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x + \arccos x$, in jo odvajajmo.
   $$f'(x) = (\arcsin x + \arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$
   Seveda to res zadošča posledici Lagrangeovega izreka. Do konstante $\frac{\pi}{2}$ pridemo tako, da izračunamo $f(-1)$.
   (b) Podobno kot v (a) primeru: vpeljemo funkcijo $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan x + \operatorname{arccot} x$, in jo odvajamo. Dobimo
   $$f'(x) = (\arctan x + \operatorname{arccot} x)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{1+x^2} = 0.$$
   Vidmo, da je odvod enak 0. Do konstante $\frac{\pi}{2}$ pridemo tako, da izračunamo $f(-1)$.

∎

7. Naj bo $[a,b]$ poljuben interval na realni osi in naj bo $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ funkcija, ki je podana s predpisom $f(x)=2x^2-x$. Dokaži, da število c, ki nastopa v Lagrangeovi formuli $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$, aritmetična sredina od a in b.

Rešitev. Izračunamo odvod funkcije f, $f'(x)=4x-1$, in izrazimo c iz enačbe

$$2b^2-b-2a^2+a=(4c-1)(b-a).$$

Dobimo, da je $c=\frac{a+b}{2}$. ∎

8. S pomočjo L'Hospitalovega pravila izračunaj naslednje limite
   (a) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln x$,
   (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{x}$,
   (c) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot(2x)$,
   (d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x-\sin x}{x^2}$,
   (e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\cot x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$,
   (f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}$,
   (g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)}$,
   (h) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2e^{-x^2}$,
   (i) $\lim\limits_{x\to\infty}x^ne^{-x}$, kjer je $n\in\mathbb{N}$ poljuben,
   (j) $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}$.

Rešitev.

(a) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{-2}=0$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{x}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x\ln 3-2^x\ln 2}{1}=\ln 3-\ln 2=\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot(2x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos(2x)}{\sin(2x)}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(2x)-2x\sin(2x)}{2\cos(2x)}=\dfrac{1-0}{2}=\dfrac{1}{2}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x-\sin x}{x^2}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+xe^x-\cos x}{2x}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x+xe^x+\sin x}{2}=\dfrac{2+0+0}{2}=1$,

(e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\cot x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x\sin x}{\cos x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{2x\sin x-\pi}{2\cos x}\right)\overset{L'H}{=}$
$\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2\sin x+2x\cos x}{-2\sin x}=\dfrac{2-0}{-2}=-1$,

(f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-4(\pi-2x)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{-4\sin x(\pi-2x)}\overset{L'H}{=}$
$\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\sin x}{-4\cos x(\pi-2x)+8\sin x}=\dfrac{-1}{0+8}=-\dfrac{1}{8}$,

(g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{1}{\frac{x-1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{x-1}{x+1}\right)\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{1}{1}\right)=-1$,

(h) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2e^{-x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^{x^2}}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{2xe^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^{x^2}}=0$,

(i) $\lim\limits_{x\to\infty}x^ne^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{e^x}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}\overset{L'H}{=}\dots\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n!}{e^x}=0$,

(j) $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{-2}{x^3}}{\frac{-2}{x^3}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}}=\infty$ oziroma limita ne obstaja.

∎

9. S pomočjo L' Hospitalovega pravila in lastnosti zveznih funkcij izračunaj naslednje limite
   (a) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-1)^{\frac{1}{x}}$,
   (b) $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x)^{1-x}$,
   (c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$,
   (d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$,
   (e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$,
   (f) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{e^{2(x-1)}+x-1}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$.

   Rešitev. V tej nalogi bomo uporabili naslednji izrek iz prvega poglavja: če je g zvezna funkcija v točki a in f zvezna funkcija v točki $g(a)$, tedaj je

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right).$$

   (a) Označimo $L=\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-1)^{\frac{1}{x}}$. Izračunajmo $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(x^2-1)^{\frac{1}{x}}$.

$$\lim_{x\to\infty}\ln(x^2-1)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2-1)}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x^2-1}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2-1} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2}{2x} = 0$$

   Uporabimo izrek in dobimo $\ln L = 0$. Sledi $L=1$.

   (b) Označimo $L=\lim\limits_{x\to 1}(\ln x)^{1-x}$.

$$\lim_{x\to 1}\ln(\ln x)^{1-x} = \lim_{x\to 1}\ln(\ln x)^{1-x} = \lim_{x\to 1}(1-x)\ln(\ln x) = \lim_{x\to 1}\frac{\ln(\ln x)}{\frac{1}{1-x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x\ln x}}{\frac{1}{(1-x)^2}} =$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)^2}{x\ln x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1}\frac{-2(1-x)}{\ln x+\frac{x}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{-2(1-x)}{\ln x+1} = 0.$$

   Dobimo, da je $\ln L = 0$ ter posledično je $L=1$.

   (c) Označimo $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

$$\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{1-x^2} = 2$$

   Dobimo, da je $\ln L = 2$ in zato je $L=e^2$.

   (d) Označimo $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

$$\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)\cdot\frac{-2x}{(1+x^2)^2}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{1+x^2} = -1$$

   Dobimo, da je $\ln L = -1$ ter posledično je $L=e^{-1}$.

   (e) Označimo $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$.

$$\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}-\ln e}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} =$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{(1+x)^2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

Dobimo, da je $\ln L = -\frac{1}{2}$ ter posledično je $L = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

(f) Označimo $L = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{e^{2(x-1)}+x-1}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$.

$$\lim_{x\to 1}\ln\left(\frac{e^{2(x-1)}+x-1}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(\frac{e^{2(x-1)}+x-1}{2x-1}\right)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(e^{2(x-1)}+x-1\right)-\ln(2x-1)}{x-1} \overset{L'H}{=}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{2e^{2(x-1)}+1}{e^{2(x-1)}+x-1}-\frac{2}{2x-1}}{1} = 1$$

Dobimo, da je $\ln L = 1$ in zao je $L = e$. ∎

10. Razvij funkcijo f, ki je podana s predpisom $f(x) = \ln(x+1)\sin x$, v Taylorjev polinom v okolici točke $x = 0$ do členov 3. reda.
Rešitev. V našem primeru je potrebno funkcijo f odvajati do tretjega reda

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\sin x}{x+1}+\ln(x+1)\cos x \\
f''(x) &= -\frac{\sin x}{(x+1)^2}+2\frac{\cos x}{x+1}-\ln(x+1)\sin x \\
f'''(x) &= 2\frac{\sin x}{(x+1)^3}-3\frac{\cos x}{(x+1)^2}-3\frac{\sin x}{x+1}-\ln(x+1)\cos x
\end{aligned}$$

Vstavimo ustrezne vrednosti v Taylorjevo formulo in dobimo

$$f(x) = x^2-\frac{x^3}{2}+r(x),$$

kjer je $r(x)$ nek ostanek 4. reda. ∎

11. Razvij funkcijo $f : [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}$, ki je podana s predpisom $f(x) = \sin^2 x$, v Taylorjev polinom v okolici točke $x = 0$ do členov 5. reda in oceni napako.
Rešitev. Ko zaporedoma odvajamo f, dobimo

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2\sin x\cos x = \sin 2x \\
f''(x) &= 2\cos 2x \\
f'''(x) &= -4\sin 2x \\
f^{(4)}(x) &= -8\cos 2x \\
f^{(5)}(x) &= 16\sin 2x \\
f^{(6)}(x) &= 32\cos 2x.
\end{aligned}$$

Vstavimo ustrezne vrednosti v Taylorjevo formulo in dobimo

$$f(x) = x^2-\frac{x^4}{3}+r(x).$$

Ocenimo še $r(x)$ na intervalu $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

$$|r(x)| = \left|\frac{32\cos(2\xi)}{6!}x^6\right| = \frac{32}{720}|\cos(2\xi)|\cdot|x^6| \le \frac{32}{720}\cos(0)\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^6 < 0,011.$$

∎

12. Razvij funkcijo $f : [\frac{9}{10}, \frac{12}{10}] \to \mathbb{R}$, ki je podana s predpisom $f(x) = x^3 \ln x$, v Taylorjev polinom v ničli funkcije f do členov 4. reda ter oceni napako.
Rešitev. Razvili bomo Taylorjev polinom do členov 4. reda za $x = 1$. Izračunajmo odvode.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2\ln x + x^2 \\ f''(x) &= 6x\ln x + 5x \\ f'''(x) &= 6\ln x + 11 \\ f^{(4)}(x) &= \frac{6}{x} \\ f^{(5)}(x) &= -\frac{6}{x^2} \end{aligned}$$

Vstavimo vrednosti v Taylorjevo formulo in dobimo

$$f(x) = (x-1) + \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{11}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{4}(x-1)^4 + r(x).$$

Ocenimo še napako $r(x)$ na intervalu $[\frac{9}{10}, \frac{12}{10}]$

$$|r(x)| = \left|\frac{-\frac{6}{\xi^2}}{5!}(x-1)^5\right| = \frac{1}{20\xi^2}|x-1|^5 \le \frac{1}{20\left(\frac{9}{10}\right)^2}|0,2|^5 < 0,00002.$$

∎

13. Razvij funkcijo f, ki je podana s predpisom $f(x) = xe^{-x}$, v Taylorjevo vrsto okolici točke $x = 0$ in poišči njeno konvergenčno območje.
Rešitev. Ker je potrebno funkcijo f razviti v Taylorjevo vrsto, izračunajmo n-ti odvod funkcije f.

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x} - xe^{-x} \\ f''(x) &= -2e^{-x} + xe^{-x} \\ f'''(x) &= 3e^{-x} - xe^{-x} \\ f^{(4)}(x) &= -4e^{-x} + xe^{-x} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}ne^{-x} + (-1)^n xe^{-x}. \end{aligned}$$

Zgornjo formulo lahko dokaženo s pomočjo matematične indukcije. Na podlagi odvodov zapišimo Taylorjevo vrsto

$$f(x) = x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}x^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{(n-1)!}.$$

Pred obravnavo $r(x)$ določimo konvergenčno območje Taylorjeve vrste.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n}{n!}}{\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\right| = 0.$$

Iz tega sledi, da vrsta konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$. Preverimo še $r(x)$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{((n+1)-\xi)(-1)^n e^{-\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \le \lim_{n\to\infty} e^{-\xi}\left(\left|\frac{x^{n+1}}{n!}\right| + \left|\frac{x^{n+1}\xi}{(n+1)!}\right|\right) = 0.$$

Torej za vsak $x \in \mathbb{R}$ lahko f zapišemo v Taylorjevo vrsto

$$f(x) = x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}x^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{(n-1)!}.$$

∎

14. Razvij funkcijo f, ki je podana s predpisom $f(x)=\ln x$, v Taylorjevo vrsto v okolici točke $x=1$ in poišči njeno konvergenčno območje.
Rešitev. Najprej poiščimo n-ti odvod funkcije f.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x}\\
f''(x) &= -\frac{1}{x^2}\\
f'''(x) &= \frac{2}{x^3}\\
f^{(4)}(x) &= -\frac{6}{x^4}\\
&\vdots\\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}
\end{aligned}$$

Na podlagi odvodov zapišimo Taylorjevo vrsto

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}+\ldots\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}.
\end{aligned}$$

Pred obravnavo $r(x)$, določimo konvergenčno območje Taylorjeve vrste.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n}{n+1}}{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| = 1.$$

Posledično dobimo neenakost

$$|x-1|<1$$

in zato $0<x<2$. S pomočjo Leibnizovega kriterija preverimo, da vrsta konvergira tudi pri $x=2$. Obravnavajmo še $r(x)$. Torej dokažimo, da velja

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\frac{n!}{\xi^{n+1}}}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}\right| = 0$$

v okolici $x=1$. Tako imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\frac{n!}{\xi^{n+1}}}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\,\frac{(x-1)^{n+1}}{\xi^{n+1}}\right|\\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\left(\frac{x-1}{\xi}\right)^{n+1}\right|.
\end{aligned}$$

Izraza $1\le x<2$ in $1<\xi<x$ preoblikujemo v $0\le x-1<1$ in $1<\xi$ in zato je $\frac{x-1}{\xi}<1$. Posledično dobimo

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\left(\frac{x-1}{\xi}\right)^{n+1}\right| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\cdot 1\right| = 0.$$

Za $0<x<1$ bomo uporabili

$$r(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-a)^n(x-\xi)^n$$

(ena od oblik zapisa ostanka). V našem primeru dobimo

$$r(x)=\frac{x-1}{\xi}\left(1-\frac{x}{\xi}\right).$$

Ker je $0 < x < \xi < 1$ je $0 < 1 - \frac{x}{\xi} < 1$ je tako

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x-1}{\xi}\left(1-\frac{x}{\xi}\right)^n = \frac{x-1}{\xi}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{\xi}\right)^n = 0.$$

Torej smo dokazali, da za vsak $0 < x \leq 2$ lahko f zapišemo v Taylorjevo vrsto, ki je oblike

$$f(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}.$$

∎

15. S pomočjo znanih Taylorjevih vrst razvij funkcije v Taylorjevo vrsto v okolici točke a. V vseh primerih določi tudi konvergenčno območje.
    (a) $f(x) = xe^x$, $a = 0$,
    (b) $f(x) = xe^{-x}$, $a = 0$,
    (c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $a = 0$,
    (d) $f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$, $a = 0$,
    (e) $f(x) = \dfrac{1}{2x-x^2}$, $a = 1$,
    (f) $f(x) = \ln x$, $a = 1$,
    (g) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{2-x}\right)$, $a = 1$,
    (h) $f(x) = (x^2+1)\sin x$, $a = 0$,

Rešitev.

(a) V tem primeru si bomo pomagali z dejstvom $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

$$f(x) = xe^x = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}$$

Ker Taylorjeva vrsta za eksponentno funkcijo konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$, tudi izračunana vrsta konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$.

(b) Rešili bomo podobno kot v prejšnjem primeru

$$f(x) = xe^{-x} = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n!}$$

Tudi v tem primeru vrsta konvergira vsak $x \in \mathbb{R}$.

(c) Pomagali si bomo s formulo $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, za vsak $x \in (-1,1)$.

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n.$$

Opazimo, da vrsta konvergira za vsak $x \in (-1,1)$.

(d) Računamo podobno kot prejšnjem primeru

$$f(x) = \frac{1}{1-2x} = \frac{1}{1-(2x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n.$$

V tem primeru vrsta kovergira za vsak $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(e) Ponovno si bomo pomagali z geometrijsko vrsto.

$$f(x) = \frac{1}{2x-x^2} = \frac{1}{1-(x-1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}((x-1)^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^{2n}$$

Ta vrsta konvergira za vsak $x \in (0,2)$.

(f) Pomagali si bomo z znano Taylorjevo vrsto $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$, ki konvergira za vsak $x\in(-1,1]$.

$$f(x)=\ln x=\ln(1+x-1)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}.$$

Vrsta konvergira za vsak $x\in(0,2]$.

(g) Rešujemo podobno kot v prejšnjem primeru

$$\begin{aligned}f(x)&=\ln\left(\frac{x}{2-x}\right)=\ln x-\ln(2-x)=\ln(1+x-1)-\ln(1-(x-1))=\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(x-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n}(x-1)^n=\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}(x-1)^{2n-1}\end{aligned}$$

Vrsta konvergira za vsak $x\in[0,2)$.

(h) Pomagali si bomo z znano Taylorjevo vrsto $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, ki konvergira za vsak $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}f(x)&=(x^2+1)\sin x=(x^2+1)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+3}}{(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\\&=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(4n^2+2n-1)}{(2n+1)!}x^{2n+1}\end{aligned}$$

Vrsta konvergira za vsak $x\in\mathbb{R}$.

■

16. Razvij funkcijo f, ki je podana s predpisom $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+2}$, v Taylorjevo vrsto v okolici točke $a=0$ in določi njeno konvergenčno območje.
Rešitev. Izpeljimo kar s pomočjo geometrijske vrste

$$\frac{x^2-1}{2+x^2}=1-\frac{3}{2+x^2}=1-\frac{3}{2}\frac{1}{1-(-\frac{x^2}{2})}=1-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n=-\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n3x^{2n}}{2^{n+1}}.$$

Vrsta konvergira za vsak x, za katerega velja $|-\frac{x^2}{2}|<1$. To pomeni, da vrsta konvergira za vsak $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. ■

17. Razvij funkcijo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ki je podana s predpisom

$$f(x)=\frac{x^2-x}{e^x},$$

v Taylorjevo vrsto v okolici točke $a=0$ in s pomočjo le-te izračunaj vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n!}.$$

Rešitev. Najprej bomo razvili funkcijo f v Taylorjevo vrsto v točki $a=0$

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{x^2-x}{e^x}=(x^2-x)e^{-x}=(x^2-x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{n+2}}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{n+1}}{n!}=\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n+1}}{(n-1)!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{n+1}}{n!}=-x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n!}x^{n+1}\end{aligned}$$

Vrsta konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$. Izračunajmo še vsoto vrste.

Opazimo, če v izpeljano Taylorjevo vrsto vstavimo $x = 1$, dobimo ravno vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n!}$.

Torej dobimo enačbo

$$f(1) = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n!}.$$

Ker je $f(1) = 0$, zato je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n!} = 1.$$

∎

18. Razvij funkcijo f, ki je podana s predpisom $f(x) = x\ln(2+x)$, v Taylorjevo vrsto v okolici točke $a = 0$ in s pomočjo le-te izračunaj vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}.$$

Rešitev. Najprej izpeljimo pripadajočo Taylorjevo vrsto.

$$f(x) = x\ln(2+x) = x\ln\left(2\left(1+\frac{x}{2}\right)\right) = x\ln 2 + x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n \cdot 2^n} = x\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n \cdot 2^n}.$$

Vrsta konvergira za vsak $x \in (-2, 2]$. Izračujnamo še vsoto vrste. Opazimo naslednje

$$f(1) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}.$$

Torej

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n} = \ln\frac{3}{2}.$$

∎

19. Aproksimiraj funkcijo f, ki je podana s predpisom $f(x) = \sin x$, s prvimi tremi neničelnimi členi Taylorjeve vrste na intervalu $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ in oceni napako aproksimacije.

Rešitev. Razvili bomo v Taylorjev polinom do členov 6. reda za $x = 0$. Izračunajmo odvode.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \\ f''(x) &= -\sin x \\ f'''(x) &= -\cos x \\ f^{(4)}(x) &= \sin x \\ f^{(5)}(x) &= \cos x \\ f^{(6)}(x) &= -\sin x \end{aligned}$$

Zato je

$$f(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + r(x).$$

Ocenimo še napako

$$|r(x)| = \left|\frac{-\sin\xi}{6!}x^6\right| = \left|\frac{\sin\xi}{6!}\right| \cdot |x|^6 \leq \left|\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{6!}\right| \cdot \left|\frac{\pi}{6}\right|^6 < 0{,}0001.$$

∎

20. Oceni napako aproksimacije $\sqrt[3]{x+1} \doteq 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$ na intervalu $[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$.

Rešitev. Preverimo, da je $\sqrt[3]{x+1} \doteq 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$ aproksimacija s Taylorjevo vrsto za $a = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}} \\ f''(x) &= \frac{-2}{9\sqrt[3]{(1+x)^5}} \\ f'''(x) &= \frac{10}{27\sqrt[3]{(1+x)^8}} \end{aligned}$$

Ko vstavimo vrednost $a=0$, opazimo, da je res aproksimacija s Taylorjevo formulo. Ocenimo še napako.

$$|r(x)| = \left| \frac{\frac{10}{27\sqrt[3]{(1+\xi)^8}}}{3!} x^3 \right| \leq \frac{5}{81\sqrt[3]{(1-\frac{1}{10})^8}} \left(\frac{1}{10}\right)^3 < 0{,}012.$$

∎

21. S pomočjo Taylorjeve formule izračunaj $\sqrt{5}$ z natančnostjo do 10^{-4}.
Rešitev. Taylorjeva formula je še posebej uporabna, ko je $a=0$. Zato bomo $\sqrt{5}$ preoblikovali na naslednji način:

$$\sqrt{5} = \sqrt{4+1} = 2\sqrt{1+\frac{1}{4}}.$$

Tako prepoznamo $f(x) = 2\sqrt{1+x}$ in sedaj odvajajmo

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x}} \\
f''(x) &= -\frac{1}{2\sqrt{(1+x)^3}} \\
f'''(x) &= \frac{3}{4\sqrt{(1+x)^5}} \\
f^{(4)}(x) &= -\frac{15}{8\sqrt{(1+x)^7}} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^{n-1}\sqrt{(1+x)^{2n-1}}}.
\end{aligned}$$

Preverimo, za kateri n je $|r(x)| < 10^{-4}$. Če razpišemo $r(x)$, dobimo

$$\left| \frac{(-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n\sqrt{(1+x)^{2n+1}}}}{(n+1)!} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right| < 10^{-4}.$$

Po nekaj zaporednih računanjih se izkaže, da je $n=6$. Tako je potrebno izračunati vsoto prvih petih členov Taylorjeve vrste za funkcijo f.

$$\sqrt{5} \doteq 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{3!}\frac{3}{2^2}\left(\frac{1}{4}\right)^3 - \frac{1}{4!}\frac{3\cdot 5}{2^3}\left(\frac{1}{4}\right)^4 + \frac{1}{5!}\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2^4}\left(\frac{1}{4}\right)^5 = 2{,}236076$$

∎

22. Upoštevaj pomen prvih dveh odvodov in nariši naslednje grafe funkcij:
    (a) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x-2}$,
    (b) $f(x) = \dfrac{1+2x}{2-2x}$,
    (c) $f(x) = x\ln^2 x$,
    (d) $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x}$,
    (e) $f(x) = x + \sqrt{1-x}$,
    (f) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$,
    (g) $f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x}}$,
    (h) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2-1}$.

Rešitev. V prvem primeru bomo podrobno opisali vse postopke, v preostalih primerih pa le glavne rezultate.

(a) Narišimo graf funkcije f, ki je podana s predpisom $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x-2}$.

i. Naravno definicijsko območje
$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} - \{2\}$, saj imamo racionalno funkcijo.

ii. Ničle funkcije
Iščemo tiste $x \in \mathscr{D}_f$ za katere je $f(x) = 0$. Ker imamo racionalno funkcijo, nas zanima, kdaj je števec enak 0. V našem primeru imamo $x_{1,2} = 1$.

iii. Asimptote funkcije
Določi bomo navpične, vodoravne in poševne asimptote. Navpične asimptote nam določajo kar poli funkcije. V našem primeru imamo eno navpično asimptoto z enačbo $x_n = 2$ (običajno si pomagamo z $\mathscr{D}_f$).
Sedaj določimo vodoravne in poševne asimptote. Hitro vidimo, da imamo v našem primeru ali vodoravno ali poševno asimptoto. Določiti moramo k in n v formuli

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx - n).$$

Najprej izračunamo k s pomočjo formule

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x},$$

nato pa še n

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx).$$

Podobni razmislek je tudi, ko $x \to -\infty$. V našem primeru je

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{(x-1)^2}{x-2}}{x} = 1 \text{ in } n = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x-1)^2}{x-2} - x\right) = 0.$$

Dobili smo enačbo poševne asimptote: $y = x$. Analogno razmislimo za $x \to -\infty$.

iv. Stacionarne točke, lokalni ekstremi in prevoji
Stacionarne točke so tisti $x \in \mathscr{D}_f$, za katere je $f'(x) = 0$. V našem primeru rešujemo

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = 0$$

in dobimo stacionarni točki $x_{s,1} = 1$ in $x_{s,2} = 3$.
Kandidate za lokalne ekstreme dobimo na podlagi stacionarnih točk. V našem primeru bomo opazovali $x_{l,1} = 1$ in $x_{l,2} = 3$. Če želimo določiti, če imamo lokalne ekstreme, je potrebno najprej izračunati $f''(x)$.

$$f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3}.$$

Sedaj, če je x_0 stacionarna točka, velja naslednje
- če je $f''(x_0) < 0$, potem je v x_0 lokalni maksimum,
- če je $f''(x_0) > 0$, potem je v x_0 lokalni minimum,
- če je $f''(x_0) = 0$, potem z drugim odvodom ni mogoče določiti, ali je v x_0 lokalni ekstrem.

Tako imamo v našem primeru v $x_{l,1}$ lokalni maksimum, v $x_{l,2}$ pa lokalni minimum.
S pomočjo drugega odvoda določimo prevoj. To so tisti $x \in \mathscr{D}_f$, za katere je $f''(x) = 0$. V našem primeru takih vrednosti ni.

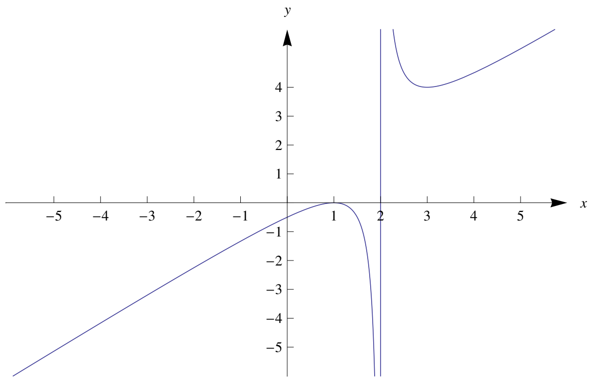
v. Območja naraščanja in padanja
Za nek interval $(a,b) \subseteq \mathscr{D}_f$ velja
- če za vsak $x \in (a,b)$, $f'(x) < 0$, potem je f na (a,b) padajoča,
- če za vsak $x \in (a,b)$, $f'(x) > 0$, potem je f na (a,b) naraščajoča.

Prvi odvod smo izračunali že v prejšnji točki. S preprostim računanjem dobimo, da je f na intervalih $[1,2)$ in $(2,3]$ padajoča, na intervalih $(-\infty,1]$ in $[3,\infty)$ pa naraščajoča.

vi. Območja konveksnosti in konkavnosti
Za nek interval $(a,b) \subseteq \mathscr{D}_f$ velja
- če za vsak $x \in (a,b)$, $f''(x) < 0$, potem je f na (a,b) konkavna,
- če za vsak $x \in (a,b)$, $f''(x) > 0$, potem je f na (a,b) konveksna.

Drugi odvod smo izračunali dve točki nazaj. S preprostim računom dobimo, da je f na $(-\infty,2)$ konkavna, na $(2,\infty)$ pa konveksna.

Sedaj s pomočjo teh točk narišemo graf funkcije f.



Slika 10.1: Graf funkcije f, $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x-2}$.

(b) $f(x) = \dfrac{1+2x}{2-2x}$

i. Naravno definicijsko območje
$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

ii. Ničle funkcije
$x_1 = -\frac{1}{2}$.

iii. Asimptote funkcije
Enačba navpične asimptote je $x_n = 1$, enačba vodoravne asimptote pa je $y = -1$.

iv. Stacionarne točke, lokalni ekstremi in prevoji
Odvoda funkcije: $f'(x) = \dfrac{3}{2(x-1)^2}$, $f''(x) = -\dfrac{3}{(x-1)^3}$.
Stacionarnih točk ni. Lokalnih ekstremov ni. Prevoja ni.

v. Območja naraščanja in padanja
Narašča na vsakem od intervalov $\mathscr{D}_f$.

vi. Območja konveksnosti in konkavnosti
Konveksna na $(-\infty,1)$, konkavna na $(1,\infty)$.

(c) $f(x) = x\ln^2 x$

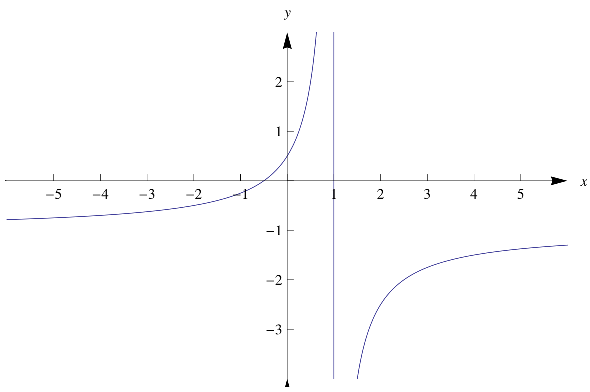
i. Naravno definicijsko območje
$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^+$.

ii. Ničle funkcije
$x_1 = 1$.

iii. Asimptote funkcije
Asimptot ni. Za lažje risanje izračunamo vrednosti na robu $\mathscr{D}_f$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \quad \text{in} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

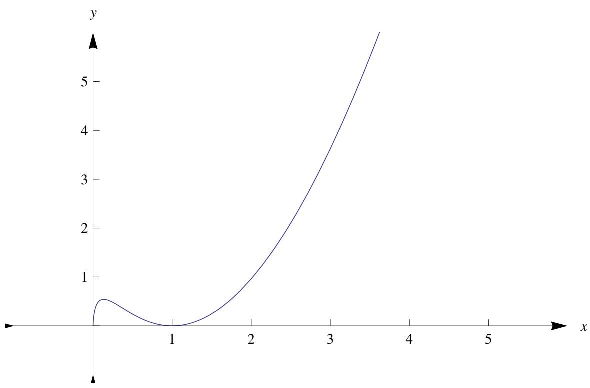
iv. Stacionarne točke, lokalni ekstremi in prevoji
Odvoda funkcije: $f'(x) = \ln^2 x + 2\ln x$, $f''(x) = \dfrac{2(\ln x + 1)}{x}$.
Stacionarni točki: $x_{s,1} = e^{-2}$, $x_{s,2} = 1$. Lokalna ekstrema: $x_{e,1} = e^{-2}$, lokalni maksimum; $x_{e,2} = 1$, lokalni minimum. Prevoj $x_p = e^{-1}$.



Slika 10.2: Graf funkcije f, $f(x) = \frac{1+2x}{2-2x}$.

v. Območja naraščanja in padanja
Narašča na intervalih $(0, e^{-2}]$ in $[1, \infty)$, padajoča na intervalu $[e^{-2}, 1]$.

vi. Območja konveksnosti in konkavnosti
Konveksna na intervalu $[e^{-1}, \infty)$, konkavna na intervalu $(0, e^{-1}]$.



Slika 10.3: Graf funkcije f, $f(x) = x\ln^2 x$.

(d) $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x}$

i. Naravno definicijsko območje
$\mathscr{D}_f = (-1, 0) \cup (0, \infty)$.

ii. Ničle funkcije
Ničel ni.

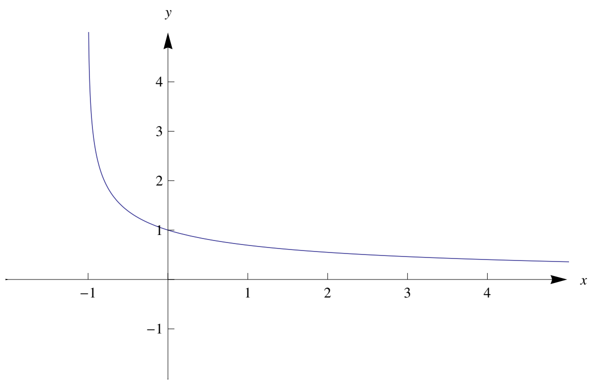
iii. Asimptote funkcije
Enačba vodoravne asimptote je $y(x) = 0$. Za lažje risanje izračunamo vrednost na robu $\mathscr{D}_f$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \infty \quad in \quad \lim_{x \to 0} f(x) = 1.$$

iv. Stacionarne točke, lokalni ekstremi in prevoji
Odvoda funkcije: $f'(x) = \dfrac{x - (x+1)\ln(x+1)}{(x+1)x^2}$,
$f''(x) = \dfrac{-3x^2 - 2x + 2(x+1)^2 \ln(x+1)}{x^3(x+1)^2}$.
Stacionarnih točk ni (izkaže se, da je $\frac{x}{x+1} \neq \ln(x+1)$; pomagaj si z grafi elementarnih funkcij). Lokalnih ekstremov ni. Prevoja ni.

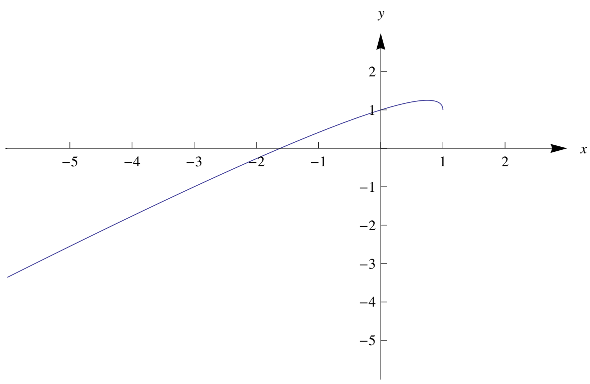
v. Območja naraščanja in padanja
Padajoča je na vsakem od intervalov $\mathscr{D}_f$.

vi. Območja konveksnosti in konkavnosti
Konveksna je vsakem od intervalov $\mathcal{D}_f$.



Slika 10.4: Graf funkcije f, $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$.

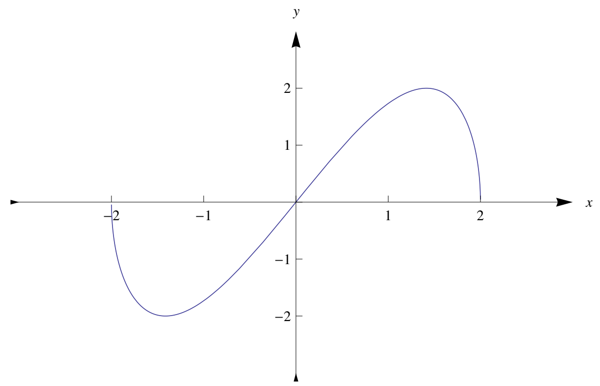
(e) $f(x) = x + \sqrt{1-x}$
i. Naravno definicijsko območje
$\mathcal{D}_f = (-\infty, 1]$.
ii. Ničle funkcije
$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
iii. Asimptote funkcije
Asimptot ni.
iv. Stacionarne točke, lokalni ekstremi in prevoji
Odvoda funkcije: $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$, $f''(x) = -\dfrac{1}{4\sqrt{(1-x)^3}}$.
Stacionarna točka: $x_s = \frac{3}{4}$. Lokalni ekstrem: $x_e = \frac{3}{4}$, lokalni maksimum. Prevoja ni.
v. Območja naraščanja in padanja
Padajoča na intervalu $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$, naraščajoča na intervalu $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$.
vi. Območja konveksnosti in konkavnosti
Konkavna na celem $\mathcal{D}_f$.



Slika 10.5: Graf funkcije f, $f(x) = x + \sqrt{1-x}$.

(f) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$
i. Naravno definicijsko območje
$\mathcal{D}_f = [-2, 2]$.
ii. Ničle funkcije
$x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2$.

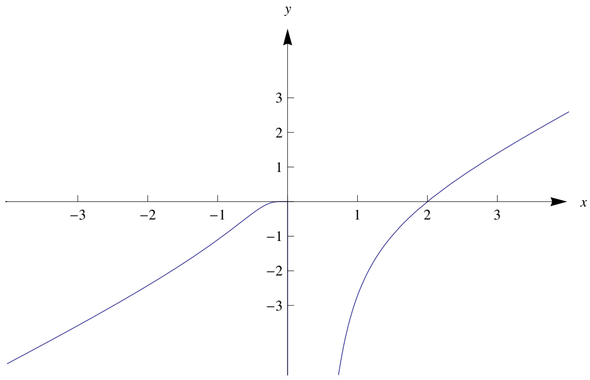
iii. Asimptote funkcije
Asimptot ni.
iv. Stacionarne točke, lokalni ekstremi in prevoji
Odvoda funkcije: $f'(x) = -\dfrac{2(x^2-2)}{\sqrt{4-x^2}}$, $f''(x) = \dfrac{2(x^3-6x)}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.
Stacionarni točki: $x_{s,1} = -\sqrt{2}, x_{s,2} = \sqrt{2}$. Lokalna ekstrema: $x_{e,1} = -\sqrt{2}$, lokalni minimum; $x_{e,2} = \sqrt{2}$ lokalni maksimum. Prevoj $x_p = 0$.
v. Območja naraščanja in padanja
Padajoča na intervalih $[-2,-\sqrt{2}]$ in $[\sqrt{2},2]$, naraščajoča na intervalu $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.
vi. Območja konveksnosti in konkavnosti
Konveksna na intervalu $[-2,0]$, konkavna na intervalu $[0,2]$.



Slika 10.6: Graf funkcije f, $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$.

(g) $f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x}}$
i. Naravno definicijsko območje
$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} - \{0\}$.
ii. Ničle funkcije
$x_1 = 2$.
iii. Asimptote funkcije
Navpična asimptota: $x_n = 0$.
Poševna asimptota: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-2)e^{\frac{1}{x}}}{x} = 1$,
$n = \lim\limits_{x\to\infty} \left((x-2)e^{\frac{1}{x}} - x\right) = -1$, $y(x) = x-1$; podobno za $x \to -\infty$.
Za natančnejše risanje: $\lim\limits_{x\uparrow 0}(x-2)e^{\frac{1}{x}} = 0$, $\lim\limits_{x\downarrow 0}(x-2)e^{\frac{1}{x}} = -\infty$.
iv. Stacionarne točke, lokalni ekstremi in prevoji
Odvoda funkcije: $f'(x) = \dfrac{x^2-x+2}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$, $f''(x) = -\dfrac{3x+2}{x^4}e^{\frac{1}{x}}$.
Stacionarnih točk ni. Lokalnih ekstremov ni.
Prevoj: $x_p = -\frac{2}{3}$.
v. Območja naraščanja in padanja
Narašča na vsakem od intervalov $\mathscr{D}_f$.
vi. Območja konveksnosti in konkavnosti
Konveksna na $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right]$; konkavna na intervalih $\left[-\frac{2}{3}, 0\right)$ in $(0,\infty)$.

(h) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2-1}$
i. Naravno definicijsko območje
$\mathscr{D}_f = \mathbb{R} - \{-1,1\}$.
ii. Ničle funkcije
Ničel ni.
iii. Asimptote funkcije



Slika 10.7: Graf funkcije f, $f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x}}$.

Navpična asimptota: $x_{n,1} = -1, x_{n,2} = 1$.

Poševna asimptota: $k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{e^x}{x^2-1}}{x} = 0$,

$n = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x^2-1} = 0$, $y(x) = 0$; ko $x \to \infty$, asimptota ne obstaja.

Za natančnejše risanje: $\lim\limits_{x\uparrow-1} \dfrac{e^x}{x^2-1} = \infty$, $\lim\limits_{x\downarrow-1} \dfrac{e^x}{x^2-1} = -\infty$, $\lim\limits_{x\uparrow 1} \dfrac{e^x}{x^2-1} = -\infty$,

$\lim\limits_{x\downarrow 1} \dfrac{e^x}{x^2-1} = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^2-1} = \infty$.

iv. Stacionarne točke, lokalni ekstremi in prevoji

Odvoda funkcije: $f'(x) = \dfrac{e^x(x^2-2x-1)}{(x^2-1)^2}$,

$f''(x) = \dfrac{e^x(x^4-4x^3+4x^2+4x+3)}{(x^2-1)^3}$.

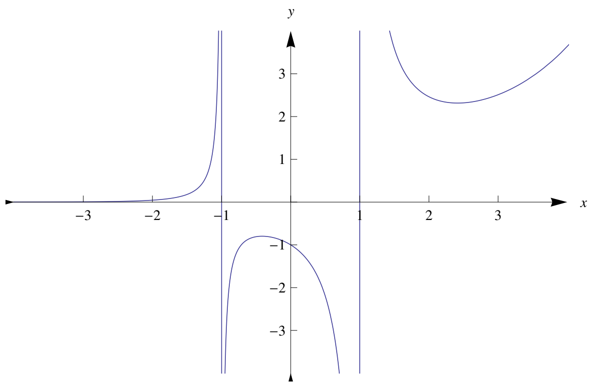
Stacionarni točki: $x_{s,1} = 1-\sqrt{2}, x_{s,2} = 1+\sqrt{2}$. Lokalna ekstrema: $x_{e,1} = 1-\sqrt{2}$, lokalni maksimum; $x_{e,2} = 1+\sqrt{2}$, lokalni minimum. Prevoja ni.

v. Območja naraščanja in padanja

Narašča na intervalih $(-\infty,-1)$ in $(-1, 1-\sqrt{2}]$ in $[1+\sqrt{2},\infty)$, pada na intervalih $[1-\sqrt{2}, 1)$ in $(1, 1+\sqrt{2}]$.

vi. Območja konveksnosti in konkavnosti

Konveksna na intervalih $(-\infty,-1)$ in $(-1,\infty)$; konkavna na intervalu $(-1,1)$.



Slika 10.8: Graf funkcije f, $f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x}}$.

∎

23. Poišči tisti pozitivni realni števili, katerih vsota je 1000 in imata največji možni produkt.

Rešitev. Iščemo takšna $x,y \in \mathbb{R}$, da velja

$$x + y = 1000$$
$$x \cdot y = \max.$$

Sedaj iz prve enačbe izrazimo y in ga vstavimo v drugo enačbo. Posledično dobimo funkcijo, ki je odvisna od x

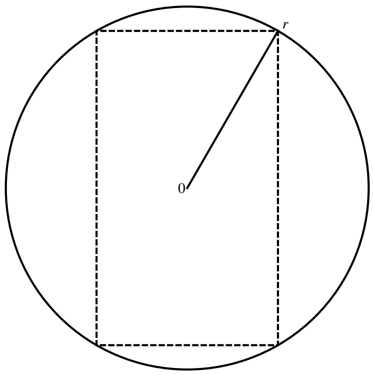
$$f(x) = x(1000 - x).$$

Seveda $f : [0,1000] \to \mathbb{R}$. Ekstrem te funkcije bo končna rešitev. Vidimo

$$f'(x) = 100 - 2x$$

in $f'(x) = 0$, ko je $x = 500$. Sedaj pa s pomočjo drugega odvoda preverimo, da v $x = 500$ funkcija f doseže maksimum. Ker je $f''(500) = -2 < 0$, je v $x = 500$ res največji možni produkt in zato $x = y = 500$ iskana rešitev. ∎

24. Izmed vseh pravokotnikov, ki jih lahko včrtamo v krog s polmerom r, poišči tistega z največjo ploščino.
Rešitev.



Slika 10.9: V krog včrtan pravokotnik.

Iščemo takšni stranici $x,y \in \mathbb{R}$ pravokotnika, da velja

$$x \cdot y = \max.$$

Podobno kot v nalogi 23 želimo zapisati funkcijo ene spremenljivke, zato je potrebno dobiti zvezo med x in y. S slike 10.9 je razvidno, da

$$x^2 + y^2 = (2r)^2.$$

Iz tega dobimo, da je $y = \sqrt{(2r)^2 - x^2}$ (pozor: gledamo koren s pozitivnim predznakom, saj bi koren z negativnim predznakom pomenil negativno dolžino, kar ni mogoče). Tako dobimo funkcijo $f : [0,2r] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x \cdot \sqrt{(2r)^2 - x^2}.$$

Omenimo, da je $f(0) = f(2r) = 0$. Za iskanje ekstremov odvajajmo f,

$$f'(x) = \sqrt{(2r)^2 - x^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{(2r)^2 - x^2}}$$

in $f'(x) = 0$, ko je $x = \sqrt{2}r$ (podobno kot y vzamemo pozitivno rešitev). Preverimo, da je res maksimum.

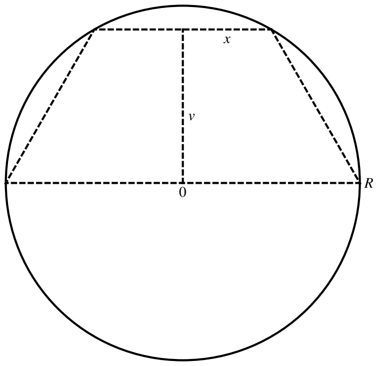
$$f''(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{(2r)^2 - x^2}} - \frac{2x}{\sqrt{(2r)^2 - x^2}} - \frac{2x^3}{2\sqrt{((2r)^2 - x^2)^3}}$$

Vidimo, da je $f''(\sqrt{2}r) < 0$ in zato $x = y = \sqrt{2}r$ iskana rešitev. ∎

25. Med trapezi, katerih osnovnica je interval $[-R,R]$ na abscisni osi in so včrtani v polkrog

$$x^2+y^2 \leq R^2, \qquad y \geq 0,$$

poišči tistega z največjo ploščino.
Rešitev.



Slika 10.10: V polkrog včrtan trapez.

Iščemo takšni vrednosti $x, v \in \mathbb{R}$ s slike 10.10, da velja

$$v \cdot \frac{2R+2x}{2} = \max .$$

Poiščimo zvezo med v in x. S slike 10.10 je razvidno, da $x^2+v^2 = R^2$ in zato $v = \sqrt{R^2-x^2}$. Tako dobimo funkcijo $f : [0,R] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = (R+x) \cdot \sqrt{R^2-x^2}.$$

Opazimo $f(0) = f(R) = 0$. Za iskanje ekstremov odvajajmo f,

$$f'(x) = \sqrt{R^2-x^2} - \frac{x(x+R)}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

in $f'(x) = 0$, ko je $x = \frac{R}{2}$. Z drugim odvodom preverimo, da je res $f''\left(\frac{R}{2}\right) < 0$ in zato je $x = \frac{R}{2}$ ter $v = R\frac{\sqrt{3}}{2}$ iskana rešitev. ∎

26. Dana je funkcija $f(x) = -x^2+1$ in na območje med grafom funkcije f in abscisno osjo včrtamo pravokotnik tako, da ena stranica pravokotnika leži na abscisi. Izmed vseh takšnih pravokotnikov poišči tistega, ki ima največjo ploščino.
Rešitev. Ničli funkcije sta $x_1 = -1$ in $x_2 = 1$. Želimo takšni stranici pravokotnika a in b, da je $\max = a \cdot b$. Ker je graf funkcije simetričen glede na ordinatno os, se osredotočimo na prvi kvadrant. Naj bo $c = \frac{a}{2}$ (c je stranica pravokotnika v prvem kvadrantu). Imamo zvezo $b = f(c) = -c^2+1$ in zato dobimo funkcijo $g : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$g(c) = c \cdot (-c^2+1) = -c^3+c.$$

Za iskanje ekstremov odvajajmo g,

$$g'(c) = -3c^2+1$$

in $g'(c) = 0$, ko je $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (prvi kvadrant). Preverimo, da je v $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ res maksimum g. Ker je

$$g''(c) = -6c,$$

dobimo $g''(\frac{1}{\sqrt{3}}) < 0$. Posledično sta iskani rešitvi $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ in $b = \frac{2}{3}$. ∎

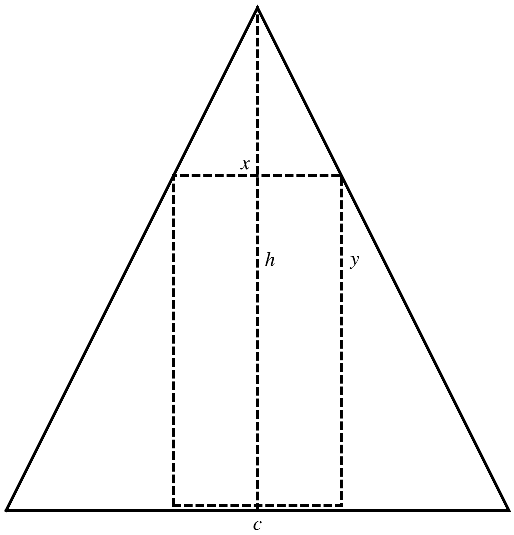
27. Med vsemi enakokrakimi trikotniki z obsegom 2 poišči tistega, za katerega bo veljalo, da bo prostornina vrtenine, ki nastane z vrtenjem trikotnika okoli osnovnice, največja.
Rešitev. Obseg o enakokrakega trikotnika z osnovnico x in krakoma y se izračuna po formuli $o = x + 2y$. Vrtenino, ki jo dobimo, lahko gledamo tudi drugače. Natančneje, če bi vrteli samo pravokotni trikotnik, ki nam ga določajo višina na osnovnico, polovica osnovnice in krak enakokrakega trikotnika (intuitivno povedano, enakokrak trikotnik prerežemo po višini na osnovnico), potem bi dobili stožec, kar pa pomeni, da je naša vrtenina sestavljena iz dveh stožcev. Volumen stožca s polmerom r in višino h se računa po formuli $V = \frac{\pi}{3} r h^2$. Označimo višino trikotnika na x s v_x. Tako je naš volumen vrtenine
$$V = 2\frac{\pi}{3}\frac{x}{2}v_x^2.$$
Stranice $\frac{x}{2}$, v_x in y tvorijo pravokotni trikotnik, zato $\left(\frac{x}{2}\right) + v_x^2 = y^2$. Če še upoštevamo $o = x + 2y$, dobimo $v_x^2 = \left(\frac{2-x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$ ter tako dobimo funkcijo $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = 2\frac{\pi}{3}\frac{x}{2}\left(\left(\frac{2-x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right) = \frac{\pi}{3}(x - x^2).$$
Za iskanje ekstremov odvajajmo f,
$$f'(x) = \frac{\pi}{3}(1 - 2x)$$
in $f'(x) = 0$, ko je $x = \frac{1}{2}$. Z drugim odvodom preverimo, da je res maksimum. Ker je
$$f''(x) = -\frac{2\pi}{3},$$
zato je volumen res maksimalen. Tako smo dobili iskani rešitvi $x = \frac{1}{2}$ in $y = \frac{3}{4}$. ∎

28. Poišči dimenzije najcenejšega rezervoarja z vodo s kvadratno osnovo in pravokotnimi stranicami, ki bo držal a^3 kubične metre, če kvadratni meter stranice stane 10 evrov, kvadratni meter osnove stane 15 evrov in kvadratni meter pokrova stane 5 evrov.
Rešitev. Telo, ki je opisano, je kvader. Volumen se tako izračuna po formuli
$$V = x^2 \cdot y,$$
kjer je x stranica kvadrata osnove, y pa preostala stranica kvadra. Če upoštevamo, da je $V = a^3$, lahko izrazimo $y = \frac{a^3}{x^2}$ Cena izdelave se izračuna po formuli
$$\text{cena} = 15x^2 + 10 \cdot 4xy + 5 \cdot x^2.$$
Če upoštevamo $y = \frac{a^3}{x^2}$, dobimo funkcijo $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$,
$$\text{cena} = f(x) = 20x^2 + 40\frac{a^3}{x}.$$
Za izračun ekstrema najprej odvajajmo
$$f'(x) = 40x - 40a^3\frac{1}{x^2}$$
in velja $f'(x) = 0$, ko je $x = a$. Preverimo, da je v $x = a$ res minimum f. Ker je
$$f''(x) = 40 + 80a^3\frac{1}{x^3},$$
enostavno preverimo, da je $f''(a) > 0$. Tako smo dobili iskani stranici kvadra $x = y = a$. ∎

29. Zgraditi želimo silos v obliki valja, ki ima na vrhu polsfero. Volumen silosa je 50π kubičnih metrov. Cena kvadratnega metra pločevine za valj je 10 evrov, za streho pa 15 evrov. Določi dimenzije silosa tako, da bo cena najnižja.
Rešitev. Naj bo V volumen in P površina opisanega telesa. Volumen in površina krogle se izračunata
$$V_K = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad P_K = 4\pi r^2,$$
kjer je r polmer krogle, volumen in površina valja pa
$$V_V = \pi r^2 v, \quad P_V = 2\pi r^2 + 2\pi r v,$$
kjer je r polmer osnovne ploskve in v višina valja. V našem primeru vemo, da je
$$V = \pi r^2 v + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = 50\pi.$$
Iz te enačbe izrazimo v
$$v = \frac{50\pi - \frac{2}{3}\pi r^3}{\pi r^2} = \frac{150 - 2r^3}{3r^2}.$$
Cena je vsota cen izdelave plašča valja in polovice površine krogle
$$\text{cena}_P = 10\cdot 2\pi r v + 15\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\pi r^2 = 20\pi r v + 30\pi r^2.$$
Ker želimo imeti funkcijo ene spremenljivke, upoštevamo v in dobimo funkcijo $f : (0, \sqrt[3]{75}] \to \mathbb{R}$,
$$f(r) = \text{cena}_P = 20\pi r\frac{150-2r^3}{3r^2} + 30\pi r^2 = 20\pi\frac{150-2r^3}{3r} + 30\pi r^2.$$
Za iskanje ekstremov odvajajmo f,
$$f'(r) = 20\pi\left(-\frac{50}{r^2} - \frac{4}{3}r\right) + 60\pi r$$
in $f'(r) = 0$, ko je $r = \sqrt[3]{30}$. Preverimo, da je v $r = \sqrt[3]{30}$ res minimum f. Ker je
$$f''(x) = 20\pi\left(2\frac{50}{r^3} - \frac{4}{3}\right) + 60\pi,$$
enostavno preverimo, da je $f''(\sqrt[3]{30}) > 0$. Iskani rešitvi naloge sta $r = \sqrt[3]{30}$ in $v = \sqrt[3]{30}$. ∎

30. Med vsemi trikotniki s stranico $a = 1$ in obsegom $o = 6$, poišči tistega z največjo ploščino.
Rešitev. Obseg trikotnika se računa po formuli $o = a + b + c$ in v našem primeru primeru dobimo zvezo
$$b + c = 5$$
ter posledično $c = 5 - b$. Želimo, da je ploščina trikotnika maksimalna in v našem primeru bomo uporabili Heronovo obrazec
$$\text{pl} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$
kjer je $s = \frac{o}{2}$. V našem primeru dobimo funkcijo $f : [2,3] \to \mathbb{R}$, ki je odvisna od b
$$f(b) = \sqrt{3(3-1)(3-b)(3-5+b)} = \sqrt{6(-b^2+5b-6)}.$$
Za iskanje ekstremov odvajajmo f,
$$f'(b) = \frac{-12b+30}{2\sqrt{6(-b^2+5b-6)}} = \frac{-6b+15}{\sqrt{6(-b^2+5b-6)}}$$
in $f'(b) = 0$, ko je $b = \frac{5}{2}$. Z drugim odovodom preverimo, da imamo pri $b = \frac{5}{2}$ maksimum. Ker je
$$f''(b) = -\frac{6}{\sqrt{6(-b^2+5b-6)}} - \frac{(-6b+15)^2}{\sqrt{6(-b^2+5b-6)}},$$
vidimo, da je $f''(\frac{5}{2}) < 0$. Tako smo dobili $b = c = \frac{5}{2}$ (kar pomeni, da je rešitev ravno enakokrak trikotnik). ∎

31. V enakokraki trikotnik včrtamo pravokotnik tako, da leži ena stranica pravokotnika na osnovnici trikotnika. Izmed vseh takšnih pravokotnikov poišči tistega, ki ima največjo ploščino.
Rešitev. Upoštevajmo podobnost trikotnikov



Slika 10.11: V enakokraki trikotnik včrtan pravokotnik.

$$\frac{c}{2} : h = \frac{x}{2} : (h - y)$$

iz katere sledi, da je $y = \frac{h(c-x)}{c}$. Tako dobimo funkcijo $f : [0, c] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x \cdot y = hx - \frac{h}{c}x^2.$$

Za iskanje ekstremov odvajajmo f,

$$f'(x) = h - 2\frac{h}{c}x$$

in $f'(x) = 0$, ko je $x = \frac{c}{2}$. Z drugim odvodom preverimo, da je vrednost $x = \frac{c}{2}$ res maksimum, saj iz

$$f''(x) = -\frac{2h}{c}$$

sledi $f''(\frac{c}{2}) < 0$. Dobili smo iskani rešitvi $x = \frac{c}{2}$ in $y = \frac{h}{2}$. ∎

32. Med vsemi tangentami na graf funkcije f, ki je podana s predpisom $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, poišči enačbe vseh tistih, katere oklepajo z osjo x največji možni kot. Ta kot tudi izračunaj.
Rešitev. Kot pod katerim tangenta na graf funkcije f seka absicno osjo dobimo s pomočjo odvoda.

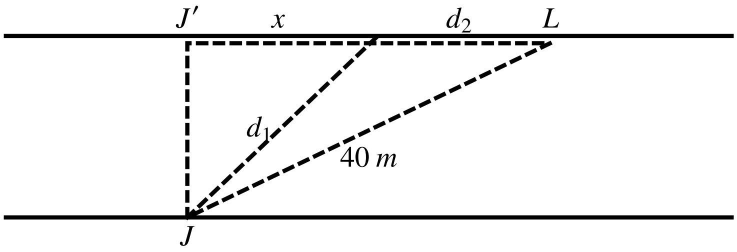
$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}.$$

Ker je tangens naraščajoča funkcija, je dovolj videti za katere x je $f'(x)$ največja možna vrednost. Torej f' ponovno odvajamo in enačimo z 0.

$$f''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(x^2+1)^3}.$$

Posledično dobimo točki v katerih je izpolnjen pogoj: $T_1(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4})$ in $T_2(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4})$.
Smerna koeficient tangent v točkah T_1 in T_2 sta $k_1 = \frac{3\sqrt{3}}{16}$ in $k_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{16}$, enačbi tangent pa $y = \frac{3\sqrt{3}x+9}{16}$ in $y = \frac{3\sqrt{3}x+15}{16}$. ∎

33. Racak Jaka želi prečkati 20 metrov široko reko tako, da bo prišel do račke Lili čim hitreje, glej Sliko 10.12. Razdalja med njima je 40 metrov. Jakova maksimalna hitrost plavanja je $1\frac{m}{s}$, maksimalna hitrost tekanja pa je $2\frac{m}{s}$. Kako naj Jaka prečka reko, da bo čim hitreje prepotoval pot? Ob tem predpostavimo, da je reka zelo počasna in tok reke zanemarimo.
Rešitev. Naj bo J' kraj na drugem bregu reke, ki je nasproti J. Potem je $L'J = \sqrt{40^2 - 20^2}$. Ker



Slika 10.12: Račka Lili in racak Jaka.

imamo različni hitrosti za plavanje in tekanje, bo potrebno čas potovanja T računati

$$T = \frac{d_1}{1\frac{m}{s}} + \frac{d_2}{2\frac{m}{s}},$$

kjer sta d_1 in d_2 dolžini na sliki. Posledično $f : [0,40] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+20^2}}{1} + \frac{\sqrt{40^2-20^2} - x}{2}.$$

Odvajajmo f

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+400}} - \frac{1}{2}$$

in $f'(x) = 0$, ko je $x = \frac{20}{\sqrt{3}}$. Ker je

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+400}} - \frac{2x^2}{2\sqrt{(x^2+400)^3}},$$

vidimo, da je $f''(\frac{20}{\sqrt{3}}) > 0$. Tako smo dobili $d_1 = \frac{40\sqrt{3}}{3}$ metrov in $d_2 = 20\sqrt{3} - \frac{20\sqrt{3}}{3} = \frac{40\sqrt{3}}{3}$ metrov. ∎

III. Integralni račun

11. Nedoločeni integral

V prejšnjem poglavju smo dani funkciji f poiskali odvod f' ali diferencial $df = f'(x)\,\mathrm{d}x$. Sedaj pa nas zanima obratno - kako dobiti iz znanega odvoda prvotno funkcijo.

Za motivacijo poglejmo primer iz fizike. Hitrost je enaka spremembi poti po času, zato je

$$v(t) = \frac{ds}{\mathrm{d}t} = s'(t)\,.$$

Zanima nas kako bi dobili $s(t)$? Naredimo obratno računsko operacijo in rečemo, da je $s(t)$ nedoločeni integral od $v(t)$.

11.1 Definicija nedoločenega integrala

Definicija 11.1.1 Naj bo znana funkcija $f : \mathscr{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Funkcija F, za katero v vsaki točki iz $\mathscr{D}$ velja

$$F'(x) = f(x)$$

se imenuje *nedoločeni integral* funkcije f.

Nedoločeni integral funkcije f označimo

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Operacija, s katero poiščemo funkciji f njen nedoločeni integral, je *nedoločeno integriranje*, simbol $\int$ je *integracijski znak*, f je *integrand*, diferencial $f(x)\,\mathrm{d}x$ pa je *izraz pod integracijskim znakom*.

■ **Zgled 11.1** Poišči funkcijo $F(x)$, če je $F'(x) = \frac{1}{x}$.

Iščemo funkcijo, katere odvod je enak $\frac{1}{x}$:

$$F'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \ln x \quad \text{ali} \quad F(x) = \ln x - 5 \quad \text{ali} \quad F(x) = \ln x + 100 \quad \text{ali} \ldots$$

■

Izrek 11.1.1 Naj bo $f : \mathscr{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pri čemer je $\mathscr{D}$ interval (lahko tudi neomejen). Če je F nedoločeni integral funkcije f, je njen nedoločeni integral tudi funkcija $F+C$, kjer je C poljubna konstanta. Vsak nedoločeni integral funkcije f je oblike $F+C$.

Dokaz. Ker je $F'(x) = f(x)$, je tudi $(F(x)+C)' = f(x)$. Torej je prvi del izreka dokazan.

Za dokaz drugega dela izreka naj bo $G(x)$ poljuben nedoločeni integral funkcije $f(x)$, torej naj velja $G'(x) = f(x)$. Pokazati moramo, da je $G(x) = F(x)+C$. Velja

$$(G(x)-F(x))' = G'(x) - F'(x) = 0\,.$$

Po posledici Lagrangeovega izreka je tedaj

$$G(x) - F(x) = C \quad \text{oziroma}$$

$$G(x) = F(x) + C\,.$$

■

Izrek pove, da če poznamo odvod funkcije, ne poznamo natančno same funkcije, ampak je ta znana do aditivne konstante natančno. Od tod izvira ime nedoločeni integral. Konstanta C v Izreku 11.1.1 se imenuje *integracijska konstanta*. Zato bomo nedoločeni integral funkcije $f(x)$ pisali

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C\,,$$

kjer velja $F'(x) = f(x)$ in je C poljubna konstanta.

■ **Zgled 11.2** Poiščimo nedoločeni integral $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x$.

Zanima nas katero funkcijo moramo odvajati, da dobimo funkcijo sinus:

$$f(x) = \sin x = F'(x) \Leftrightarrow F(x) = -\cos x + C\,.$$

■

Na podoben način lahko iz tabele odvodov elementarnih funkcij dobimo tabelo osnovnih integralov.

TABELA OSNOVNIH INTEGRALOV ($C \in \mathbb{R}$):

$\int x^r \, \mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, r \neq -1$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
$\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C$
$\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\cot x + C$
$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{asin}\frac{x}{a} + C$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\lvert\frac{a+x}{a-x}\rvert + C$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{atan}\frac{x}{a} + C$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\lvert x + \sqrt{x^2-a^2}\rvert + C$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\lvert\frac{x-a}{x+a}\rvert + C$

O veljavnosti formul se prepričamo tako, da z odvajanjem funkcije na desni strani dobimo integrand na levi strani. Izpeljimo nekatere:

1. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{atan}\frac{x}{a} + C$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{a}\operatorname{atan}\frac{x}{a} + C\right)' &= \frac{1}{a}\,\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\left(\frac{x}{a}\right)' + 0 \\
&= \frac{1}{a^2}\,\frac{a^2}{x^2+a^2} \\
&= \frac{1}{x^2+a^2}\,.
\end{aligned}$$

2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\lvert x + \sqrt{x^2-a^2}\rvert + C$

Najprej ugotovimo, da je funkcija $\sqrt{x^2 - a^2}$ definirana za $\lvert x\rvert \geq \lvert a\rvert$.

$$
\begin{aligned}
\left(\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C\right)' &= \begin{cases} \left(\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C_1\right)' & ; \quad x+\sqrt{x^2-a^2}>0 \\[2ex] \left(\ln(-x-\sqrt{x^2-a^2})+C_2\right)' & ; \quad x+\sqrt{x^2-a^2}<0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right)}{x+\sqrt{x^2-a^2}} & ; \quad x+\sqrt{x^2-a^2}>0 \\[4ex] \dfrac{\left(-1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right)}{-x-\sqrt{x^2-a^2}} & ; \quad x+\sqrt{x^2-a^2}<0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\dfrac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}} & ; \quad x+\sqrt{x^2-a^2}>0 \\[3ex] \dfrac{-1}{-x-\sqrt{x^2-a^2}}\dfrac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}} & ; \quad x+\sqrt{x^2-a^2}<0 \end{cases} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,.
\end{aligned}
$$

11.2 Pravila za integriranje

Le-ta izpeljemo iz ustreznih pravil za odvajanje.

Trditev 11.2.1 Integral vsote dveh funkcij je vsota integralov obeh členov:

$$\int (f_1(x)+f_2(x))\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int f_2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Dokaz. Naj bo $F_1(x) = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x$ in $F_2(x) = \int f_2(x)\,\mathrm{d}x$. Ker je po definiciji nedoločenega integrala $F_i'(x) = f_i(x)$, $i = 1,2$, od tod sledi

$$(F_1(x)+F_2(x))' = f_1(x)+f_2(x)$$

oziroma

$$\int (f_1(x)+f_2(x))\,\mathrm{d}x = F_1(x)+F_2(x) = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int f_2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

■

Pravilo lahko posplošimo na poljubno število členov.

Izrek 11.2.2

$$\int (f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x))\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int f_2(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + \int f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Dokaz. Uporabimo indukcijo po n. Baza indukcije je pokazana v Trditvi 11.2.1. Indukcijski korak je preprost in ga naj bralec za vajo naredi sam. ■

Izrek 11.2.3 Če je funkcija pod integralskim znakom pomnožena z neničelno konstanto, smemo le-to nesti pred integralski znak

$$\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Dokaz. Naj bo $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$. Tedaj je

$$(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$$

in integral funkcije $kf(x)$ je enak

$$\int kf(x)\,\mathrm{d}x = kF(x) = k\int f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

∎

Iz Trditve 11.2.1 in Izreka 11.2.3 neposredno sledi naslednja posledica.

Posledica 11.2.4
$$\int (f_1(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int f_2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Dokaz. Razlika je samo poseben primer vsote

$$\int (f_1(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x = \int (f_1(x) + (-1)f_2(x))\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + (-1)\int f_2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

∎

Tudi razliko lahko posplošimo na več členov.

Izrek 11.2.5

$$\int (f_1(x) - f_2(x) - \cdots - f_n(x))\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int f_2(x)\,\mathrm{d}x - \cdots - \int f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Dokaz. Dokaz sledi iz Izrekov 11.2.2 in 11.2.3. ∎

UVEDBA NOVE SPREMENLJIVKE OZIROMA SUBSTITUCIJA

Izrek 11.2.6 — Uvedba nove spremenljivke. Naj bo $x = x(t)$ odvedljiva funkcija. Če ima funkcija f nedoločeni integral, obstaja tudi nedoločeni integral funkcije $f(x(t))x'(t)$ in velja

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x(t))x'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Dokaz. Naj ima funkcija f nedoločeni integral F, torej

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\,.$$

Če v F postavimo $x = x(t)$, dobimo novo funkcijo $F(x(t))$. Po pravilu za verižno odvajanje velja

$$(F(x(t)))' = F'(x(t))x'(t) = f(x(t))x'(t)\,,$$

torej res obstaja integral funkcije $f(x(t))x'(t)$ in je enak zvezi iz izreka. ∎

■ **Zgled 11.3** Izračunajmo nedoločena integrala z vpeljavo nove spremenljivke.

1. $\int e^{5x+3}\,\mathrm{d}x$

   Izračunamo ga tako, da postavimo $5x+3=t$, tedaj je $x=\frac{t-3}{5}$ in $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{5}$ ter

$$\int e^{5x+3}\,\mathrm{d}x=\int e^t\,\frac{1}{5}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{5}e^t+C=\frac{1}{5}e^{5x+3}+C\,.$$

2. $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

   Izračunamo ga tako, da postavimo $\tan x=t$. Tedaj je $\frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ oziroma $\mathrm{d}x=\cos^2 x\,\mathrm{d}t$ in

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\int \frac{t}{\cos^2 x}\cos^2 x\,\mathrm{d}t=\int t\,\mathrm{d}t=\frac{t^2}{2}+C=\frac{\tan^2 x}{2}+C\,.$$

■

INTEGRACIJA PO DELIH ("INTEGRATIO PER PARTES")

To integracijsko metodo dobimo iz formule za odvajanje produkta. Naj bosta $u=u(x)$ in $v=v(x)$ odvedljivi funkciji. Odvod produkta je

$$(uv)'=u'v+uv'\,.$$

Torej je po definiciji nedoločenega integrala

$$uv=\int u'v\,\mathrm{d}x+\int uv'\,\mathrm{d}x\,.$$

Od tod dobimo

$$\int uv'\,\mathrm{d}x=uv-\int vu'\,\mathrm{d}x$$

in upoštevamo, da je $v'(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}v$ ter $u'(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$

$$\int u\,\mathrm{d}v=uv-\int v\,\mathrm{d}u\,.$$

Integral od $u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ prevedemo na integral $v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$. Metoda je uspešna le tedaj, ko je v zadnji enačbi integral na desni enostavnejši kot integral na levi. Poglejmo nekaj zgledov.

■ **Zgled 11.4** Izračunajmo nedoločeni integral $\int x\sin x\,\mathrm{d}x$.

Izračunamo ga tako, da postavimo $u=x$ in $\mathrm{d}v=\sin x\,\mathrm{d}x$. Tedaj je $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$ in $v=\int\mathrm{d}v=\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x$, zato

$$\int u\,\mathrm{d}v=uv-\int v\,\mathrm{d}u=-x\cos x-\int(-\cos x)\,\mathrm{d}x=-x\cos x+\sin x+C\,.$$

■

■ **Zgled 11.5** Izračunajmo nedoločeni integral $\int x^n \ln x \, \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}$.

Izračunamo ga tako, da postavimo $u = \ln x$ in $\mathrm{d}v = x^n \, \mathrm{d}x$. Tedaj je $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$ in $v = \int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, zato

$$
\begin{aligned}
\int u \, \mathrm{d}v &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
&= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C \\
&= \frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x - \frac{1}{n+1}) + C .
\end{aligned}
$$

■

11.3 Integracijske metode

Poiskati nedoločeni integral je bistveno težja naloga od odvajanja, saj nedoločenega integrala ni možno zmeraj izraziti s končnim številom osnovnih elementarnih funkcij. V nadaljevanju si bomo pogledali prijeme za integracijo funkcije določenega tipa.

INTEGRIRANJE RACIONALNIH FUNKCIJ

Polinom integriramo členoma

$$\int (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) \, \mathrm{d}x = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \cdots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + C .$$

■ **Zgled 11.6** Izračunajmo nedoločeni integral $\int (3x^5 - 4x + 2) \, \mathrm{d}x$.

Členoma integriramo polinom in dobimo

$$\int (3x^5 - 4x + 2) \, \mathrm{d}x = \frac{x^6}{2} - 2x^2 + 2x + C .$$

■

Racionalna funkcija je kvocient dveh polinomov, torej iščemo

$$\int \frac{p_m(x)}{p_n(x)} \, \mathrm{d}x ,$$

kjer sta p_m in p_n polinoma stopenj m oziroma n. Naj bo $m \geq n$. Iz izreka o deljenju polinomov vemo, da tedaj obstajata polinoma q in r, slednji stopnje kvečjemu $n-1$, takšna da velja

$$p_m(x) = q(x) p_n(x) + r(x)$$

oziroma
$$\frac{p_m(x)}{p_n(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{p_n(x)}\,.$$
Ker polinom zmamo integrirati, moramo obdelati le primer, ko je stopnja števca nižja od stopnje imenovalca. Iščemo torej
$$\int \frac{r(x)}{p_n(x)}\,\mathrm{d}x\,,$$
kjer je stopnja polinoma r manjša od n. Naj bo
$$p_n(x) = (x-x_1)^{\alpha}(x-x_2)^{\beta}\cdots(x-x_m)^{\mu}\,,$$
pri čemer je $\alpha+\beta+\cdots+\mu = n$ (lahko privzamemo, da je vodilni koeficient enak ena). Racionalno funkcijo $\frac{r(x)}{p_n(x)}$ pišemo v obliki vsote *parcialnih ulomkov*
$$\begin{aligned}\frac{r(x)}{p_n(x)} &= \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_\alpha}{(x-x_1)^\alpha} + \\ &+ \frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \cdots + \frac{B_\beta}{(x-x_2)^\beta} + \\ &+ \cdots + \frac{M_1}{x-x_m} + \frac{M_2}{(x-x_m)^2} + \cdots + \frac{M_\mu}{(x-x_m)^\mu}\,.\end{aligned}$$
Pri tem so $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha, B_1, B_2, \ldots, B_\beta, \ldots, M_1, M_2, \ldots, M_\mu$ konstante. Dokaz za obstoj teh konstant v splošnem primeru bomo izpustili. V konkretnih numeričnih prierih nižjih stopenj teh konstant ni težko izračunati.
Lahko se zgodi, da je katera od ničel polinoma p_n kompleksna. Naj bo torej $x_1 = \alpha + i\beta$ kompleksna ničla. Tedaj je tudi $\overline{x_1} = \alpha - i\beta$ kompleksna ničla polinoma p_n. Izkaže se, da lahko pripadajoča parcialna ulomka zapišemo
$$\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-\overline{x_1}} = \frac{A_1}{x-\alpha-i\beta} + \frac{A_2}{x-\alpha+i\beta} = \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\,,$$
kjer je $p = -2\alpha$ in $q = \alpha^2+\beta^2$, B in C pa sta konstanti. V primeru večkratne kompleksne ničle postopamo podobno kot pri večkratni realni ničli.

V razcepu racionalne funkcije na parcialne ulomke se pojavita dva tipa izrazov in sicer
$$\frac{A}{(x-c)^l} \qquad \text{in} \qquad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}\,,$$
pri čemer je x^2+px+q nerazcepni polinom (v množici $\mathbb{R}$).

■ **Zgled 11.7** Poišči nastavek za razcep na parcialne ulomke za funkcijo $\dfrac{x^2+1}{(3x+1)(x+4)^3(3x^2+4)^2}$.

Ker je imenovalec že faktoriziran, imamo nastavek
$$\begin{aligned}\frac{x^2+1}{(3x+1)(x+4)^3(3x^2+4)^2} &= \frac{A_1}{3x+1} + \frac{B_1}{x+4} + \frac{B_2}{(x+4)^2} + \frac{B_3}{(x+4)^3} \\ &+ \frac{C_1x+D_1}{3x^2+4} + \frac{C_2x+D_2}{(3x^2+4)^2}\end{aligned}$$
■

Izračun neznanih konstant, ki jih imenujemo tudi neznani koeficienti, privede do reševanja sistema linearnih enačb. Metodo bomo prikazali na primeru.

■ **Zgled 11.8** Funkcijo $\dfrac{3x^3+15x^2-11x+13}{x^4+2x^3-2x^2+2x-3}$ razcepi na parcialne ulomke.

Najprej moramo faktorizirati imenovalec. Glede na koeficiente vidimo, da je 1 ničla imenovalca. Uporabimo Hornerjev algoritem in zatem faktoriziramo dobljeni polinom tretje stopnje:

$$x^4+2x^3-2x^2+2x-3=(x-1)(x+3)(x^2+1)\,.$$

Nastavek za razcep na parcialne ulomke je enak

$$\frac{3x^3+15x^2-11x+13}{(x-1)(x+3)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{Cx+D}{x^2+1}\,.$$

Odpravimo ulomke in dobimo:

$$\begin{aligned}3x^3+15x^2-11x+13 &= x^3(A+B+C)+x^2(3A-B+2C+D)+\\ &\quad x(A+B-3C+2D)+3A-B-3D\,.\end{aligned}$$

Če hočemo, da bosta obe strani enaki, moramo enačiti istoležne koeficiente pred potencami spremenljivke x. Sledijo enačbe:

$$\begin{aligned}A+B+C &= 3\\ 3A-B+2C+D &= 15\\ A+B-3C+2D &= -11\\ 3A-B-3D &= 13\end{aligned}$$

Rešitev teh enačb je

$$A=\frac{5}{2}, B=-\frac{5}{2}, C=3, D=-1\,.$$

Razcep je tako

$$\frac{3x^3+15x^2-11x+13}{x^4+2x^3-2x^2+2x-3}=\frac{5}{2(x-1)}-\frac{5}{2(x+3)}+\frac{3x-1}{x^2+1}\,.$$

■

■ **Zgled 11.9** Funkcijo $\dfrac{2x^3+x^2+x+2}{x^4-x^3-x+1}$ razcepi na parcialne ulomke.

Najprej faktoriziramo imenovalec in nato naredimo nastavek

$$\begin{aligned}\frac{2x^3+x^2+x+2}{x^4-x^3-x+1} &= \frac{2x^3+x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\\ &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}\,.\end{aligned}$$

Na podoben način kot v prejšnjem primeru izračunamo konstante

$$A=C=D=1, B=2\,.$$

■

■ **Zgled 11.10** Funkcijo $\dfrac{4x^3-3x^2+6x+20}{x^4-2x^3-8x+16}$ razcepi na parcialne ulomke.

Postopamo podobno kot prej in dobimo

$$\begin{aligned}\frac{4x^3-3x^2+6x+20}{x^4-2x^3-8x+16} &= \frac{4x^3-3x^2+6x+20}{(x-2)^2(x^2+2x+4)}\\ &= \frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+4}.\end{aligned}$$

Na podoben način kot v obeh prejšnjih primerih izračunamo konstante

$$A=\frac{4}{3},\, B=\frac{13}{3},\, C=\frac{8}{3},\, D=\frac{10}{3}.$$

■

Integral racionalne funkcije je torej vsota integrala polinoma in integralov parcialnih ulomkov oblike

$$\frac{A}{(x-c)^k} \qquad \text{in} \qquad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k},$$

pri čemer je $k \geq 1$ in x^2+px+q nerazcepni polinom. Če bomo znali izračunati integrale parcialnih ulomkov, bomo znali integrirati celotno racionalno funkcijo. Poglejmo posamezne možnosti.

Realna in enkratna ničla:

$$\int \frac{A}{x-c}\,\mathrm{d}x = A\ln|x-c|+C$$

■ **Zgled 11.11** Izračunajmo nedoločeni integral $\displaystyle\int \frac{5}{x-2}\,\mathrm{d}x$.

To je preprost integral v katerem za imenovalec vpeljemo novo spremenljivko $t=x-2$. Tedaj je $\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$ in

$$\int \frac{5}{x-2}\,\mathrm{d}x = 5\int\frac{\mathrm{d}t}{t} = 5\ln|t|+C = 5\ln|x-2|+C.$$

■

Realna in večkratna ničla:

$$\int \frac{A}{(x-c)^k}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{1-k}\frac{1}{(x-c)^{k-1}}+C,\, k>1$$

■ **Zgled 11.12** Izračunajmo nedoločeni integral $\int \frac{4}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x$.

Vpeljemo novo spremenljivko $t = x-1$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$ in dobimo

$$\int \frac{4}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x = 4\int \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = -2t^{-2} + C = \frac{-2}{(x-1)^2} + C.$$

■

Kompleksna in enkratna ničla:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x, \quad D = p^2-4q < 0$$

Imenovalec, ki je nerazcepni polinom z diskrimanto $D = p^2-4q < 0$, zapišemo v obliki popolnega kvadrata:

$$\begin{aligned} x^2+px+q &= (x+\tfrac{p}{2})^2 + q - \tfrac{p^2}{4} = (x+\tfrac{p}{2})^2 + \tfrac{4q-p^2}{4} \\ &= (x+\tfrac{p}{2})^2 + \tfrac{-D}{4} = (x+\tfrac{p}{2})^2 + (\tfrac{\sqrt{-D}}{2})^2. \end{aligned}$$

Uvedemo novo spremenljivko $t = x+\frac{p}{2}$, tedaj je $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$. Izračunajmo najprej

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2 + (\frac{\sqrt{-D}}{2})^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t^2 + (\frac{\sqrt{-D}}{2})^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\frac{\sqrt{-D}}{2}}\,\mathrm{atan}\frac{t}{\frac{\sqrt{-D}}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{-D}}\,\mathrm{atan}\frac{2x+p}{\sqrt{-D}} + C. \end{aligned}$$

Za izračun prvotnega integrala upoštevajmo zvezo

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

oziroma

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln f(x) + C.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + B - \frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x + (B - \frac{Ap}{2})\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q} \\ &= \tfrac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + (B - \tfrac{Ap}{2})\tfrac{2}{\sqrt{-D}}\,\mathrm{atan}\tfrac{2x+p}{\sqrt{-D}} + C. \end{aligned}$$

■ **Zgled 11.13** Izračunajmo nedoločeni integral $\int \frac{x^2+x+4}{(x^2+2)(x-1)}\,\mathrm{d}x$.

Naredimo razcep na parcialne ulomke in izračunamo posamezna integrala:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+x+4}{(x^2+2)(x-1)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{-x}{x^2+2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{x-1}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int \frac{-(x\cdot 2)\cdot\frac{1}{2}}{x^2+2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{x-1}\,\mathrm{d}x = \\
&= -\tfrac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{x-1}\,\mathrm{d}x = \\
&= -\tfrac{1}{2}\ln(x^2+2) + 2\ln|x-1| + C \\
&= \ln\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+2}} + C\,.
\end{aligned}$$

■

Kompleksna in večkratna ničla:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x, \qquad D = p^2-4q<0,\ k>1$$

Integral razdelimo na dva integrala:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\frac{2B-Ap}{2}}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x\,.$$

Prvega izračunamo podobno kot prej:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x &= \frac{A}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^k} = \\
&= -\frac{A}{2(k-1)}\,\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + C\,.
\end{aligned}$$

Za drugega uporabimo rekurzivno formulo:

$$\frac{2B-Ap}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^k} =$$

$$\frac{2B-Ap}{2}\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{2(k-1)(q-\frac{p^2}{4})(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)(q-\frac{p^2}{4})}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^{k-1}}\right)$$

■ **Zgled 11.14** Izračunajmo nedoločeni integral $\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

Nastavek za razcep na parcialne ulomke je enak

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2)} = \frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

Rešitev sistema linearnih enačb je

$$A=1, B=-1, C=-2, D=-3, E=-4.$$

Izračunajmo posamezne integrale

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} = \ln|x-2|+C_1,$$

$$\int \frac{-x-2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-\frac{1}{2}(2x)-2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-2\mathrm{atan}x+C_2,$$

$$\int \frac{-3x-4}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-\frac{3}{2}(2x)-4}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+1}-4\left(\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\mathrm{atan}x\right)+C_3.$$

Rezultat je enak

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{|x-2|}{\sqrt{x^2+1}}-4\mathrm{atan}x-\frac{3+4x}{2(x^2+1)}+C.$$

■

■ **Zgled 11.15** Izračunajmo nedoločeni integral $\int \frac{2x^3+x^2+x+2}{x^4-x^3-x+1}\,\mathrm{d}x$.

Razcep na parcialne ulomke smo naredili v Zgledu 11.9, zato samo izračunajmo ustrezne integrale:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3+x^2+x+2}{x^4-x^3-x+1}\,\mathrm{d}x &= \int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{x+1}{x^2+x+1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \ln(|x-1|\sqrt{x^2+x+1})-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{atan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.\end{aligned}$$

■

Videli smo, da lahko izračunamo integral vsake racionalne funkcije. Kadar ima imenovalec racionalne funkcije večkratne ničle (realne ali kompleksne), lahko uporabimo *metodo Ostrogradskega*, s katero prevedemo integracijo na primer, ko ima imenovalec samo enkratne ničle.

Naj bo imenovalec $p(x)$ racionalne funkcije $\frac{r(x)}{p(x)}$ oblike

$$\begin{aligned}p(x) &= (x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\cdots(x-x_n)^{\alpha_n} \\ &\cdot(x^2+a_1x+b_1)^{\beta_1}(x^2+a_2x+b_2)^{\beta_2}\cdots(x^2+a_mx+b_m)^{\beta_m},\end{aligned}$$

pri čemer so vsi kvadratni polinomi nerazcepni. Razstavimo ga na faktorja $p_1(x)$ in $p_2(x)$, kjer je $p_2(x)$ produkt vseh faktorjev v $p(x)$ v prvi potenci

$$p_2(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_n)(x^2+a_1x+b_1)\cdots(x^2+a_mx+b_m)$$

in zato

$$\begin{aligned} p_1(x) &= (x-x_1)^{\alpha_1-1}\cdots(x-x_n)^{\alpha_n-1} \\ &\quad\cdot(x^2+a_1x+b_1)^{\beta_1-1}\cdots(x^2+a_mx+b_m)^{\beta_m-1}\,. \end{aligned}$$

Integral zapišemo v obliki

$$\int \frac{r(x)}{p(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{r_1(x)}{p_1(x)} + \int \frac{r_2(x)}{p_2(x)}\,\mathrm{d}x\,,$$

kjer sta r_1 in r_2 polinoma z nedoločenimi koeficienti za eno stopnjo nižja od stopnje polinomov p_1 in p_2. Celoten izraz odvajamo

$$\left(\int \frac{r(x)}{p(x)}\,\mathrm{d}x\right)' = \left(\frac{r_1(x)}{p_1(x)}\right)' + \left(\int \frac{r_2(x)}{p_2(x)}\,\mathrm{d}x\right)'$$

$$\frac{r(x)}{p(x)} = \left(\frac{r_1(x)}{p_1(x)}\right)' + \frac{r_2(x)}{p_2(x)}$$

$$\frac{r(x)}{p(x)} = \frac{r_1'(x)p_1(x) - r_1(x)p_1'(x)}{p_1^2(x)} + \frac{r_2(x)}{p_2(x)}\,.$$

Zatem odpravimo ulomke in z enačenjem istoležnih koeficientov na obeh straneh identitete dobimo sistem linearnih enačb za neznane koeficiente iz polinomov r_1 in r_2. Z rešitvijo sistema linearnih enačb prevedemo začetni integral na integral racionalne funkcije z enkratnimi koreni.

■ **Zgled 11.16** Z metodo Ostrogradskega izračunaj nedoločeni integral $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$.

Nastavek je enak

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \int \frac{Cx+D}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Z odvajanjem dobimo

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{-(Ax^2+2Bx-A)}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}\,.$$

Pomnožimo z najmanjšim skupnim imenovalcem:

$$1 = -Ax^2 - 2Bx + A + Cx^3 + Dx^2 + Cx + D$$

oziroma

$$1 = Cx^3 + x^2(D-A) + x(C-2B) + A + D\,.$$

Istoležni koeficienti na obeh straneh identitete morajo biti enaki, zato dobimo sistem enačb, katerega rešitev je

$$A = D = \frac{1}{2},\ B = C = 0\,.$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} &= \frac{\frac{x}{2}}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} \\ &= \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{atan} x + C\,.\end{aligned}$$

■

INTEGRIRANJE FUNKCIJ SINUS IN KOSINUS

Za integracijo kotnih funkcij sinus in kosinus sta zelo uporabni naslednji zvezi, ki linearizirata obe funkciji:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

in

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}\,.$$

Zvezi je preprosto izpeljati:

$$\begin{aligned}\cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\ &\quad /\text{seštejemo} \\ \cos^2 x - \sin^2 x &= \cos(2x) \\ \hline \cos^2 x &= \tfrac{1}{2}(1+\cos(2x))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\ &\quad /\text{odštejemo} \\ \cos^2 x - \sin^2 x &= \cos(2x) \\ \hline \sin^2 x &= \tfrac{1}{2}(1-\cos(2x))\end{aligned}$$

Poglejmo tipične primere integralov funkcij sinus in kosinus.

$$\boxed{\int \sin^m x\,\mathrm{d}x,\ \int \cos^m x\,\mathrm{d}x}$$

Če je m liho število večje od 1, torej $m = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, je možno integrand zapisati v obliki

$$\sin^m x = (1-\cos^2 x)^k \sin x\,.$$

Z uvedbo nove spremenljivke $\cos x = t$ prevedemo primer na integral polinoma. V drugem primeru zapišemo

$$\cos^m x = (1-\sin^2 x)^k \cos x$$

in uvedemo $\sin x = t$.

Če je m sodo število, torej $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, uporabimo zvezo

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}\,.$$

S tem se stopnja eksponenta zniža za polovico. Dokler je eksponent sodo število, postopek ponavljamo, ko pa pridemo do lihega eksponenta uporabimo metodo v prejšnjem primeru. V drugem primeru uporabimo zvezo

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}\,.$$

■ **Zgled 11.17** Izračunajmo $\int cos^4 x \,\mathrm{d}x$.

Integral je enak

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x \,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{4}(1+2\cos(2x)+\cos^2(2x)) \,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{4}\left(1+2\cos(2x)+\frac{1+\cos(4x)}{2}\right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{3x}{8}+\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{32}\sin(4x)+C\,.\end{aligned}$$

■

$$\int \sin^m x \cos^n x \,\mathrm{d}x$$

Če je vsaj en eksponent lih, postopamo tako kot v prejšnjem lihem primeru, sicer uporabimo postopek za sodi primer.

■ **Zgled 11.18** Izračunajmo nedoločena integrala.

1. $\int \cos^3 x \sin^3 x \,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x \sin^3 x \,\mathrm{d}x &= \int (\cos x \sin^3 x - \sin^5 x \cos x) \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{6}\sin^6 x + C\,.\end{aligned}$$

2. $\int \cos^2 x \sin^2 x \,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \sin^2 x \,\mathrm{d}x &= \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\frac{1-\cos(2x)}{2} \,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{4}(1-\cos^2(2x)) \,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{4}\left(1-\frac{1+\cos(4x)}{2}\right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{8}-\frac{1}{32}\sin(4x)+C\,.\end{aligned}$$

■

$$\int \sin(ax)\cos(bx)\,\mathrm{d}x,\ \int \sin(ax)\sin(bx)\,\mathrm{d}x,\ \int \cos(ax)\cos(bx)\,\mathrm{d}x,\ a,b \in \mathbb{R}$$

Zanima nas samo situacija $a \neq b$, ker imamo sicer že znani primer. Uporabimo formule

$$\sin(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}\left(\sin((a-b)x) + \sin((a+b)x)\right),$$

$$\sin(ax)\sin(bx) = \frac{1}{2}\left(\cos((a-b)x) - \cos((a+b)x)\right),$$

$$\cos(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}\left(\cos((a-b)x) + \cos((a+b)x)\right).$$

Izpeljemo jih iz adicijskih izrekov:

$$\begin{array}{rcl} \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha & = & \sin(\alpha+\beta) \\ & & \qquad\qquad /\text{seštejemo} \\ \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha & = & \sin(\alpha-\beta) \\ \hline \\ \sin\alpha\cos\beta & = & \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta & = & \cos(\alpha-\beta) \\ & & \qquad\qquad /\text{seštejemo, odštejemo} \\ \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & = & \cos(\alpha+\beta) \\ \hline \\ \cos\alpha\cos\beta & = & \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)) \\ \sin\alpha\sin\beta & = & \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)) \end{array}$$

■ **Zgled 11.19** Izračunajmo nedoločeni integral $\int \cos(3x)\sin x\,\mathrm{d}x$.

Upoštevamo izpeljane zveze in dobimo

$$\begin{aligned} \textstyle\int \cos(3x)\sin x\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2}(\sin(-2x)+\sin(4x))\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\cos(2x) - \frac{1}{8}\cos(4x) + C. \end{aligned}$$

■

■ **Zgled 11.20** Izračunajmo nedoločeni integral $\int \cos(2x)\cos(4x)\,\mathrm{d}x$.

Upoštevamo izpeljane zveze in dobimo

$$\begin{aligned} \textstyle\int \cos(2x)\cos(4x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2}(\cos(2x)+\cos(6x))\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{12}\sin(6x) + C. \end{aligned}$$

■

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx,\ \int e^{ax}\cos(bx)\,dx,\ a,b\in\mathbb{R}$$

Označimo prvi integral z I in drugega z J. Integriramo po delih $u = e^{ax}$, $dv = \sin(bx)\,dx$. Potem je $du = ae^{ax}\,dx$ in $v = -\frac{1}{b}\cos(bx)$ in

$$I = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos(bx) + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos(bx) = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos(bx) + \frac{a}{b}J\,.$$

Podobno

$$J = \frac{1}{b}e^{ax}\sin(bx) - \frac{a}{b}I$$

od koder sledi

$$J = \frac{1}{b}e^{ax}\sin(bx) + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos(bx) - \frac{a^2}{b^2}J\,.$$

Zato velja

$$J = e^{ax}\frac{b\sin(bx) + a\cos(bx)}{a^2+b^2} + C$$

in

$$I = e^{ax}\frac{a\sin(bx) - b\cos(bx)}{a^2+b^2} + C\,.$$

Univerzalna substitucija:

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

Vpeljemo novo spremenljivko $t = \tan\frac{x}{2}$. Tedaj je

$$x = 2\operatorname{atan} t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt\,.$$

Nadalje velja

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin(2\tfrac{x}{2}) = 2\sin\tfrac{x}{2}\cos\tfrac{x}{2} = 2\tan\tfrac{x}{2}\cos^2\tfrac{x}{2}\\ &= \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos(2\tfrac{x}{2}) = \cos^2\tfrac{x}{2} - \sin^2\tfrac{x}{2} = \cos^2\tfrac{x}{2}(1-\tan^2\tfrac{x}{2})\\ &= \frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}(1-\tan^2\frac{x}{2}) = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,.\end{aligned}$$

■ **Zgled 11.21** Z uporabo univerzalne substitucije izračunajmo nedoločeni integral $\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$.

Uporabimo izpeljane formule in dobimo

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1+t^2}{2t}\,\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \ln|\tan\tfrac{x}{2}|+C\,.\end{aligned}$$

■

INTEGRIRANJE FUNKCIJ POD KORENSKIM ZNAKOM (IRACIONALNIH FUNKCIJ)

$$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,\mathrm{d}x,\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{(ax+b)^m}},\ n,m\in\mathbb{N}$$

V obeh primerih uvedemo novo spremenljivko $t = ax+b$. Tedaj je $\mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}x$ in

$$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int t^{\frac{m}{n}}\,\mathrm{d}t$$

in

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{(ax+b)^m}} = \frac{1}{a}\int t^{\frac{-m}{n}}\,\mathrm{d}t\,.$$

Oba integrala že znamo izračunati.

$$\int f\left(\sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ \ldots,\ \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$$

Pri tem mora biti $ad-bc\neq 0$ in v integral uvedemo novo spremenljivko

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^r\,,$$

kjer je r najmanjši skupni večkratnik korenskih eksponentov $n_1,n_2,\ldots,n_k$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Kvadratno funkcijo pod korenski znakom preoblikujemo na popolni kvadrat:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$$

in uvedemo novo spremenljivko $t = x+\frac{b}{2a}$. S tem dobimo enega od naslednjih osnovnih integralov:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}},\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad \text{ali} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}\,.$$

■ **Zgled 11.22** Izračunajmo nedoločene integrale.

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x+5}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+1)^2+4}}\\ &= \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+4}}\\ &= \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5})+C\,.\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2-2x+3}}$

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2-2x+3}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-(x+1)^2}}\\ &= \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4-t^2}}\\ &= \operatorname{asin}\tfrac{x+1}{2}+C\,.\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-4x^2+8x}}$

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-4x^2+8x}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{1-(x-1)^2}}\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}\\ &= \tfrac{1}{2}\operatorname{asin}(x-1)+C\,.\end{aligned}$$

■

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$$

Tu je p_n poljuben polinom stopnje n. Ta tip integrala zahteva poseben nastavek

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x = q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+D\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,.$$

Pri tem je q_{n-1} polinom z neznanimi koeficienti stopnje kvečjemu $n-1$ in D neznana konstanta. Koeficiente polinoma q_{n-1} in konstanto D določimo tako, da najprej nastavek odvajamo, nato odpravimo ulomke in enačimo istoležne koeficiente pred potencami spremenljivke x na levi in desni strani. Metodo si poglejmo na Zgledu 11.23.

Zgled 11.23 Izračunajmo nedoločeni integral $\int \frac{x^2-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= (Ax+B)\sqrt{1-x^2}+C\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} && /' \\
\frac{x^2-2x}{\sqrt{1-x^2}} &= A\sqrt{1-x^2}+\frac{-2x(Ax+B)}{2\sqrt{1-x^2}}+C\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
x^2-2x &= x^2(-2A)+x(-B)+A+C && \Rightarrow \\
& A=-\tfrac{1}{2},\ B=2,\ C=\tfrac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Integral je tako enak

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \left(-\frac{x}{2}+2\right)\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{1}{2}\left((4-x)\sqrt{1-x^2}+\operatorname{asin}x\right)+D.
\end{aligned}$$

■

11.4 Neelementarni integrali

Nekaterih integralov ne moremo izraziti z elementarnimi funkcijami, lahko pa si pomagamo z razvojem v potenčno vrsto. Integracija funkcijskih vrst temelji na izreku ki pravi, da smemo (enakomerno) konvergentno funkcijsko vrsto členoma integrirati. To pomeni, da smemo potenčno vrsto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ integrirati na simetričnem podintervalu intervala $(-R,R)$, kjer je R konvergenčni polmer potenčne vrste. Poglejmo primera takšnih integralov.

$$\begin{aligned}
\frac{e^x}{x} &= \frac{1}{x}+1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\cdots \\
\frac{\sin x}{x} &= 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots
\end{aligned}$$

Integriramo po členih in dobimo:

$$\begin{aligned}
\int\frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x &= C+\ln|x|+x+\frac{x^2}{2\cdot 2!}+\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^4}{4\cdot 4!}+\cdots \\
\int\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x &= C+x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\frac{x^7}{7\cdot 7!}+\cdots
\end{aligned}$$

Ti funkciji imenujemo *integralni sinus*

$$Si(x) = C + x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \cdots$$

in *integralna eksponentna funkcija*

$$Ei(x) = C + \ln|x| + x + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} + \cdots .$$

Bralec naj sam premisli o konvergenčnem območju posamezne funkcije.

12. Določeni integral

Definirali bomo določeni integral, ki zaenkrat s prejšnjim razdelkom nima skupnega prav ničesar razen podobnosti v imenu, in pogledali njegove lastnosti.

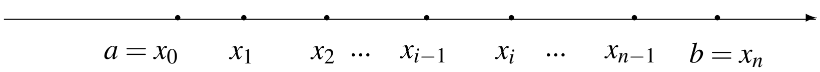
12.1 Definicija določenega integrala

Naj bo $[a,b]$ poljuben zaprti interval in f neka omejena funkcija na tem intervalu. Množica točk $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ je *delitev* intervala $[a,b]$, če je

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

Delitev intervala vidimo na Sliki 12.1. Dolžina i-tega intervala je

$$d_i = x_i - x_{i-1}\,,\ i = 1, \ldots, n\,.$$

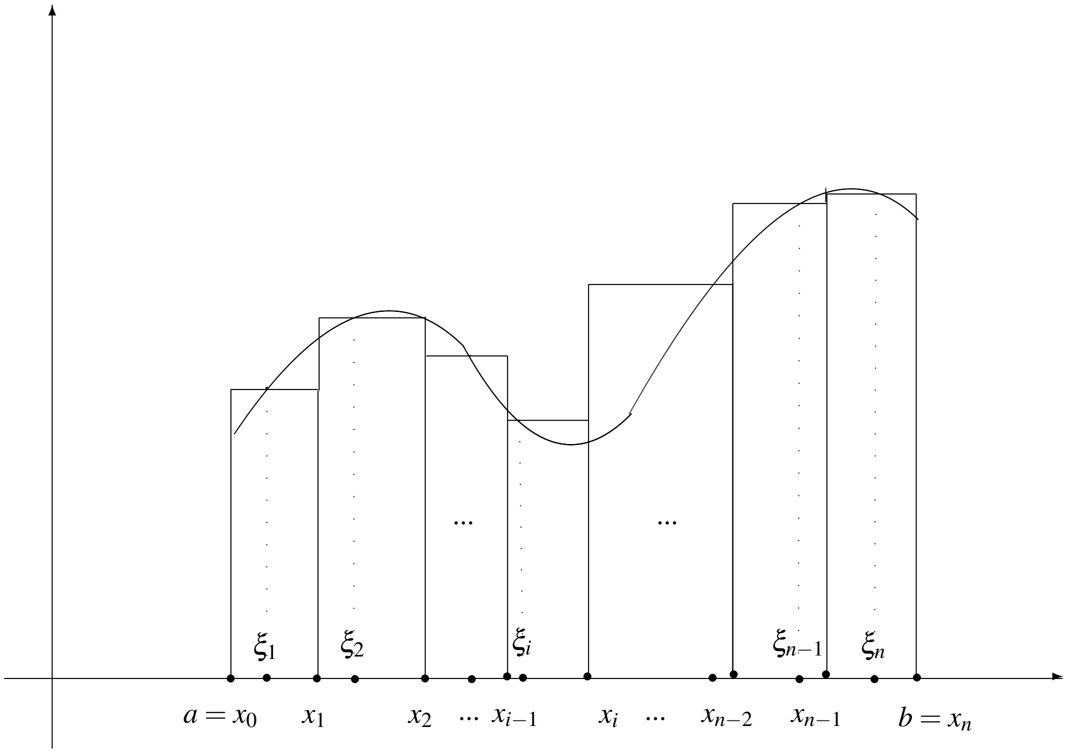


Slika 12.1: Delitev intervala $[a,b]$.

Velja $d_1 + d_2 + \ldots + d_n = x_n - x_0 = b - a$. Označimo $d = \max\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$. Na vsakem podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$ izberimo poljubno točko ξ_i. Vsoto

$$R_D(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) d_i$$

imenujemo *Riemannova integralska vsota* funkcije f za delitev D intervala $[a,b]$ (*glej Sliko 12.2*). Dani delitvi D pripada v splošnem veliko različnih integralskih vsot, ker izbiramo točke na podintervalih poljubno.



Slika 12.2: Riemannova integralska vsota.

Definicija 12.1.1 Če obstaja limita

$$I = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) d_i ,$$

potem število I imenujemo določeni integral funkcije f na intervalu $[a,b]$ in označimo

$$I = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x .$$

Definicija 12.1.2 Naj bo D delitev intervala $[a,b]$. Delitev D' je *nadaljevanje delitve* D, če je D' delitev intervala $[a,b]$ in velja $D \subseteq D'$.

To pomeni, da je število I določeni integral funkcije f na intervalu $[a,b]$, če se od njega ločijo vse integralske vsote funkcije f za vse zadosti drobne delitve poljubno malo:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists D : D \subseteq D' \Rightarrow |R_{D'}(f) - I| < \varepsilon .$$

Definicija 12.1.3 Funkcija je na intervalu $[a,b]$ *integrabilna*, ko na tem intervalu obstaja njen določeni integral.

Interval $[a,b]$ je *integracijski interval*, število a je *spodnja meja*, število b pa *zgornja meja* integrala.

12.2 Integrabilnost funkcij

Riemannova vsota funkcije f z delitvijo D ni enolično določena, zato bomo Riemannovo vsoto za izbrano delitev ocenili z dvema bolj določenima vsotama. Na ta način lahko obravnavamo le na intervalu $[a,b]$ omejene funkcije.

Definicija 12.2.1 *Spodnja Darbouxova vsota* funkcije f na intervalu $[a,b]$ za delitev D je število

$$s_D(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i\, d_i\,,$$

zgornja Darbouxova vsota funkcije f na intervalu $[a,b]$ za delitev D je število

$$S_D(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i\, d_i\,,$$

kjer sta

$$m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x) \qquad \text{in} \qquad M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x)\,.$$

Trditev 12.2.1 Naj bo D delitev intervala $[a,b]$ in f omejena funkcija na tem intervalu. Tedaj velja

$$s_D(f) \le R_D(f) \le S_D(f)\,.$$

Dokaz. Naj bo $[x_{i-1},x_i]$ poljuben podinterval delitve D. Tedaj veljajo ocene:

$$\begin{array}{ccccc}
m_i & \le & f(\xi_i) & \le & M_i \\
m_i\, d_i & \le & f(\xi_i)\, d_i & \le & M_i\, d_i \\
\sum_{i=1}^{n} m_i\, d_i & \le & \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, d_i & \le & \sum_{i=1}^{n} M_i\, d_i \\
s_D(f) & \le & R_D(f) & \le & S_D(f)\,.
\end{array}$$

∎

Izrek 12.2.2 Za delitvi $D \subseteq D'$ je

$$s_D(f) \le s_{D'}(f) \le S_{D'}(f) \le S_D(f)\,.$$

Dokaz. Naj bo $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ poljubna delitev. Nadaljevanje D' delitve D naredimo tako, da delitvi D dodamo novo delilno točko x', ki naj pripada nekemu podintervalu $[x_{k-1},x_k]$. Tedaj je $[x_{k-1},x'] \cup [x',x_k] = [x_{k-1},x_k]$. Označimo

$$m^* = \inf_{[x_{k-1},x']} f(x) \qquad \text{in} \qquad m^{**} = \inf_{[x',x_k]} f(x)$$

in očitno velja $m_k \le m^*$ in $m_k \le m^{**}$. Tedaj lahko naredimo oceno:

$$\begin{aligned}
s_D(f) &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} m_i\, d_i = \sum_{i=1}^{k-1} m_i\, d_i + m_k\, d_k + \sum_{i=k+1}^{n} m_i\, d_i \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{k-1} m_i\, d_i + m_k\,(x_k - x_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i\, d_i \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{k-1} m_i\, d_i + m_k\,(x' - x_{k-1}) + m_k\,(x_k - x') + \sum_{i=k+1}^{n} m_i\, d_i \\
&\le \textstyle\sum_{i=1}^{k-1} m_i\, d_i + m^*\,(x' - x_{k-1}) + m^{**}\,(x_k - x') + \sum_{i=k+1}^{n} m_i\, d_i \\
&= s_{D'}(f)\,.
\end{aligned}$$

Podobno pokažemo oceno za zgornjo vsoto.

Če ima delitev D' več delilnih točk, oceni prav tako veljata, kar brez težav pokažemo z matematično indukcijo.

∎

Posledica 12.2.3 Za poljubni delitvi D_1 in D_2 danega intervala velja

$$s_{D_1}(f) \le S_{D_2}(f)\,.$$

Dokaz. Naj bo $D_1 \cup D_2 = D$. Ker je D nadaljevanje delitev tako D_1 kot D_2, po Izreku 12.2.2 velja

$$s_{D_1}(f) \le s_D(f) \le S_D(f) \le S_{D_2}(f)\,.$$

∎

Posledica 12.2.4 Naj bo $\mathscr{D}$ množica vseh delitev intervala $[a,b]$ in f omejena funkcija na tem intervalu. Tedaj obstaja supremum

$$\sup\{s_D(f) | D \in \mathscr{D}\} = I_s(f)\,,$$

ki ga imenujemo *spodnji integral* funkcije f na intervalu $[a,b]$. Podobno obstaja infimum

$$\inf\{S_D(f) | D \in \mathscr{D}\} = I_S(f)\,,$$

ki ga imenujemo *zgornji integral* funkcije f na intervalu $[a,b]$. Nadalje velja

$$I_s(f) \le I_S(f)\,.$$

Dokaz. Zaradi Posledice 12.2.3 obstajata tako zgoraj navedena supremum, kot tudi infimum.

∎

Zdaj znamo dovolj, da lahko preverimo integrabilnost funkcij.

Izrek 12.2.5 Funkcija f je integrabilna na $[a,b]$ natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja takšna delitev D intervala $[a,b]$, da je

$$S_D(f) - s_D(f) < \varepsilon\,.$$

Dokaz. Pokažimo najprej v eno smer, torej na bo f integrabilna na $[a,b]$. Zato za $\forall\varepsilon>0$ obstaja taka delitev D_1' intervala $[a,b]$, da za vsako delitev $D_1' \subseteq D_1$ velja

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - R_{D_1}(f)\right| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Po definiciji supremuma obstaja na vsakem podintervalu $[x_{i-1},x_i]$ takšna točka c_i, da velja

$$M_i - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(c_i) \le M_i\,.$$

Pomnožimo z d_i in seštejemo po vseh podintervalih ter tako dobimo

$$S_{D_1}(f) - \frac{\varepsilon}{4} < R_{D_1}(f) <\le S_{D_1}(f)$$

oziroma

$$|S_{D_1}(f) - R_{D_1}(f)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Zato velja

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S_{D_1}(f)\right| &= \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - R_{D_1}(f) + R_{D_1}(f) - S_{D_1}(f)\right| \\
&\le \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - R_{D_1}(f)\right| + |R_{D_1}(f) - S_{D_1}(f)| \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Na podoben način pokažemo, da tudi za delitev D_2 velja

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - s_{D_2}(f)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tedaj za delitev $D_1 \cup D_2 = D$ velja

$$\begin{aligned}
S_D(f) - s_D(f) &\le S_{D_1}(f) - s_{D_2}(f) = |S_{D_1}(f) - s_{D_2}(f)| \\
&= \left|S_{D_1}(f) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - s_{D_2}(f)\right| \\
&\le \left|S_{D_1}(f) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - s_{D_2}(f)\right| \\
&< \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Pokažimo še v obratno smer. Za vsak $\varepsilon>0$ obstaja taka delitev intervala $[a,b]$, da je $S_D(f) - s_D(f) < \varepsilon$. Uporabimo Posledico 12.2.4 in sklepamo

$$0 \le I_S(f) - I_s(f) \le S_D(f) - s_D(f) < \varepsilon\,.$$

Ker mora neenakost veljati za vsak $\varepsilon>0$, to pomeni, da mora biti $I_S(f) = I_s(f)$. Označimo $I = I_S(f) = I_s(f)$, torej je

$$I = \sup\{s_D(f) | D \in \mathscr{D}\} = \inf\{S_D(f) | D \in \mathscr{D}\}\,.$$

Ker je I infimum vseh zgornjih Darbouxovih vsot, za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja taka delitev D_1, da je $I \leq S_{D_1}(f) < I + \varepsilon$. Podobno, ker je I supremum vseh spodnjih Darbouxovih vsot, obstaja taka delitev D_2, da velja $I - \varepsilon < s_{D_2}(f) \leq I$. Za delitev $D = D_1 \cup D_2$ tako velja

$$I - \varepsilon < s_{D_2}(f) \leq s_D(f) \leq R_D(f) \leq S_D(f) \leq S_{D_1}(f) < I + \varepsilon$$

oziroma

$$I - \varepsilon < R_D(f) < I + \varepsilon \Rightarrow |R_D(f) - I| < \varepsilon$$

in $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. ∎

Iz dokaza Izreka 12.2.5 neposredno sledi naslednja posledica.

Posledica 12.2.6 Funkcija f je integrabilna natanko tedaj, ko je $R_D(f) = I_s(f) = I_S(f)$. ∎

S pomočjo Izreka 12.2.5 lahko pokažemo integrabilnost dveh razredov funkcij.

Izrek 12.2.7 Če je funkcija f na intervalu $[a,b]$ monotona, tedaj je integrabilna.

Dokaz. Premislimo najprej, da če je $f(a) = f(b)$, tedaj je f konstantna funkcija in je seveda integrabilna na $[a,b]$. Naj bo torej $f(a) \neq f(b)$ in funkcija f na $[a,b]$ monotono naraščajoča. Tedaj je za vsako delitev D intervala $[a,b]$ $m_i = f(x_{i-1})$ in $M_i = f(x_i)$. Zato je

$$\begin{aligned} S_D(f) - s_D(f) &= \textstyle\sum_{i=1}^n f(x_i)\,d_i - \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\,d_i \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))\,d_i\,. \end{aligned}$$

Izberemo poljuben $\varepsilon > 0$ in tako delitev D' intervala $[a,b]$, da je

$$\max\{d_i | i = 1,2,\ldots,n\} < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} = \Delta\,.$$

Tedaj je

$$\begin{aligned} S_{D'}(f) - s_{D'}(f) &= \textstyle\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})\,d_i \\ &< \textstyle\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))\,\Delta \\ &= \Delta \textstyle\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \Delta(f(b) - f(a)) = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Podobno dokažemo, če je f monotono padajoča na $[a,b]$. ∎

Podoben, zelo pomemben izrek velja za zvezne funkcije, a ker dokaz zahteva uporabo pojma enakomerna zveznost, ki je ne poznamo, ga bomo izpustili.

Izrek 12.2.8 Vsaka zvezna funkcija na intervalu $[a,b]$ je na tem intervalu tudi integrabilna. ∎

Omenimo samo, da obrat izreka ne velja, kar bomo videli v nadaljevanju.

12.3 Lastnosti določenega integrala

Za začetek poglejmo, da obstajajo funkcije, ki so omejene, a niso integrabilne. Ena takih je *Dirichletova funkcija*:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & ; \quad x\in\mathbb{Q} \\ \\ 0 & ; \quad x\notin\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zato bomo v nadaljevanju pri izpeljavi lastnosti določenega integrala zmeraj predpostavili, da je funkcija integrabilna, saj nam omejenost ne jamči obstoja določenega integrala.

Trditev 12.3.1 Naj bosta $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabilni funkciji ter λ in μ poljubni konstanti. Tedaj je na $[a,b]$ integrabilna tudi funkcija $\lambda f(x)+\mu g(x)$ in

$$\int_a^b(\lambda f(x)+\mu g(x))\,\mathrm{d}x=\lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\mu\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dokaz. Naj bo D poljubna delitev intervala $[a,b]$ na n podintervalov. Tedaj je integralska vsota

$$\begin{aligned} R_D(\lambda f+\mu g) &= \textstyle\sum_{i=1}^n(\lambda f(\xi_i)+\mu g(\xi_i))\,d_i \\ &= \lambda\textstyle\sum_{i=1}^n f(\xi_i)d_i+\mu\sum_{i=1}^n g(\xi_i)d_i \\ &= \lambda R_D(f)+\mu R_D(f). \end{aligned}$$

Če je delitev D dovolj drobna, se leva stran enakosti poljubno majhno loči od števila $\int_a^b(\lambda f(x)+\mu g(x))\,\mathrm{d}x$, desna pa od števila $\lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\mu\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. ∎

Izrek je mogoče posplošiti na več členov.

Izrek 12.3.2

$$\int_a^b\left(\sum_{k=1}^n\lambda_k f_k(x)\right)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^n\lambda_k\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Dokaz. Uporabimo indukcijo po n, kar naj bralec za vajo naredi sam. ∎

Trditev 12.3.3 Če je funkcija f na intervalu $[a,b]$ integrabilna in c katerokoli število med a in b, je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dokaz. Naj bo D taka delitev $D=\{x_0,\ldots,x_n\}$ intervala $[a,b]$, da je c ena od delilnih točk. Naj bo $c=x_m$, $0<m<n$. Tedaj lahko zapišemo integralsko vsoto kot

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)d_i=\sum_{i=1}^m f(\xi_i)d_i+\sum_{i=m+1}^n f(\xi_i)d_i.$$

Ker je f integrabilna, za dovolj drobno delitev D limitirajo integralske vsote k identiteti iz izreka. ∎

Tudi ta izrek je mogoče posplošiti na več členov.

Izrek 12.3.4

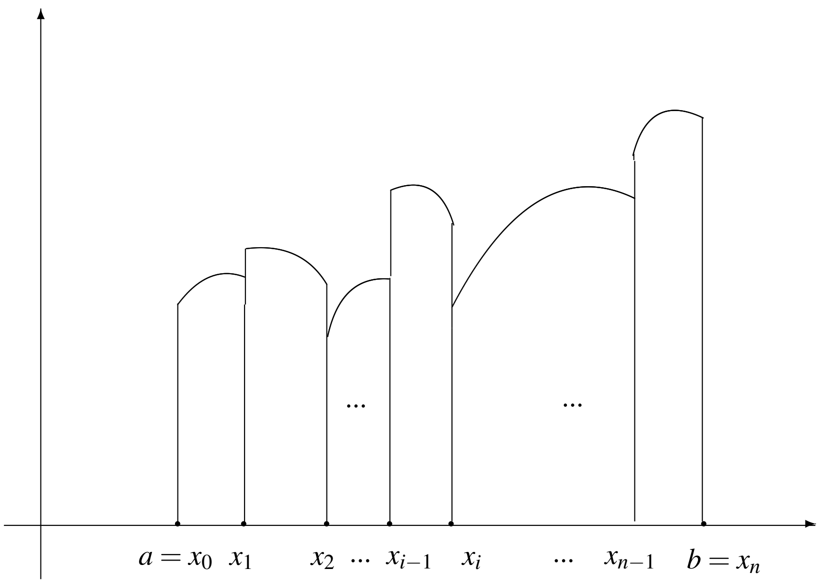
$$\int_{a_1}^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Dokaz. Uporabimo indukcijo po n, kar naj bralec za vajo naredi sam. ∎

Definicija 12.3.1 Funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je *odsekoma zvezna*, če obstaja taka delitev intervala

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b\,,$$

da na vsakem intervalu $[a_{i-1}, a_i]$ obstaja zvezna funkcija $f_i(x)$, da je $f(x) = f_i(x)$ za vsak $x \in (a_{i-1}, a_i)$ (*glej Sliko 12.3*).



Slika 12.3: Odsekoma zvezna funkcija.

Če je f odsekoma zvezna, tedaj je zvezna povsod razen v končno mnogo točkah. Očitno iz Izreka 12.2.8 in Trditve 12.3.3 sledi, da je tudi odsekoma zvezna funkcija integrabilna. To pomeni, da obrat Izreka 12.2.8 ne velja (ni res, da iz integrabilnosti funkcije sledi zveznost).

Trditev 12.3.5 Če v integralu zamenjamo meji, dobi integral nasproten predznak:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Dokaz. Če zamenjamo meji, je treba v integralski vsoti nadomestiti $d_i = x_i - x_{i-1}$ z $-d_i = x_{i-1} - x_i$, zato dobi vsaka integralska vsota samo nasproten predznak in integral, ki je limita integralskih vsot, prav tako. ∎

Posledica 12.3.6
$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Dokaz.
$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow 2\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

∎

Lema 12.3.7 Naj bo f integrabilna na $[a,b]$ in naj bosta m in M natančni spodnja in zgornja meja funkcije f na $[a,b]$. Tedaj je

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a)\,.$$

Dokaz. Naj bo $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ delitev intervala $[a,b]$. Izberimo poljubno točko ξ_i na vsakem od podintervalov $[x_{i-1}, x_i]$. Tedaj velja:

$$\begin{array}{ccccc}
m & \le & f(\xi_i) & \le & M \\
m\,d_i & \le & f(\xi_i)\,d_i & \le & M\,d_i \\
\sum_{i=1}^n m\,d_i & \le & \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,d_i & \le & \sum_{i=1}^n M\,d_i \\
m\sum_{i=1}^n d_i & \le & \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,d_i & \le & M\sum_{i=1}^n d_i \\
m(b-a) & \le & \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,d_i & \le & M(b-a) \\
m(b-a) & \le & R_D(f) & \le & M(b-a)
\end{array}$$

Ker je f integrabilna, je

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a)\,.$$

∎

Izrek 12.3.8 — O srednji vrednosti. Naj bo m natančna spodnja meja in M natančna zgornja meja na intervalu $[a,b]$ integrabilne funkcije f. Tedaj obstaja taka vrednost $c \in [m,M]$, da je
$$\int_a^b f(x) = c(b-a)\,.$$
Če pa je funkcija f tudi zvezna, je $c = f(\xi)$ za neki $\xi \in [a,b]$.

Dokaz. Iz Leme 12.3.7 neposredno sledi

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M$$

in prvi del je dokazan. Drugi del izreka sledi iz tega, da zvezna funkcija zavzame vse vrednosti med m in M. ∎

Število c imenujemo *srednja vrednost* funkcije f na intervalu $[a,b]$, zato ta izrek imenujemo *izrek o srednji vrednosti*.

13. Zveza med obema integraloma

V tem razdelku bomo našli povezavo med prejšnjima dvema razdelkoma, ki sta bila na videz precej nepovezana.

Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Zamenjajmo konstantno zgornjo mejo b v določenem integralu $\int_a^b f$ s spremenljivko $x \in [a,b]$ ter definirajmo

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

V tem primeru ne moremo vpeljati x kot integracijske spremenljivke, saj smo x fiksirali, zato pišemo na primer t.

Izrek 13.0.1 Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Tedaj je njen določeni integral $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $x \in [a,b]$, odvedljiva funkcija in velja $F' = f$.

Dokaz. Izberimo poljubni točki x in $x+h$ z intervala $[a,b]$. Ker je

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$$

je

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Ker je f zvezna, izrek o srednji vrednosti pove, da za vsak h obstaja točka $\xi \in [x, x+h]$ taka, da je

$$F(x+h) - F(x) = f(\xi)h$$

oziroma

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi)\,.$$

(Pri tem velja $m \leq f(\xi) \leq M$, kjer sta m in M natančni meji funkcije f na $[a,b]$.)
Opazimo, da če gre h proti 0, gre ξ proti x in ker je f zvezna funkcija, je

$$\lim_{h\to 0} f(\xi) = f(x)$$

in zato

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)\,.$$

∎

Posledica 13.0.2 Nedoločeni integral zvezne funkcije f obstaja.

Dokaz. Videli smo, sa je funkcija $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ en možen nedoločeni integral fun kcije f, preostali so oblike $F(x)+C$, kjer je C poljubna konstanta. ∎

Posledica 13.0.3 — Newton-Leibnizova formula. Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Če je F nedoločeni integral funkcije f, potem je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,.$$

Dokaz.

Dokažimo najprej Newton-Leibnizovo formulo za $F_0(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Tedaj je

$$F_0(a) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{in} \qquad F_0(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Torej je

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F_0(b) - F_0(a)\,.$$

Po prejšnjem izreku je F_0 nedoločeni integral funkcije f. Torej smo Newton-Leibnizovo formulo dokazali za en nedoločeni integral, namreč za funkcijo F_0.

Nadalje pokažimo Newton-Leibnizovo formulo za poljuben nedoločeni integral F. Tedaj obstaja taka konstanta C, da je

$$F(x) = F_0(x) + C, \qquad \forall x \in [a,b]\,.$$

Torej velja

$$F(b) - F(a) = (F_0(b)+C) - (F_0(a)+C) = F_0(b) - F_0(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

∎

Pogosto namesto $F(b) - F(a)$ uporabljamo zapis

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b\,.$$

Poglejmo vpliv vpeljave nove spremenljivke in integracije po delih na meje v določenem integralu.

Izrek 13.0.4 — Uvedba nove spremenljivke. Naj bo f zvezna funkcija in $x = x(t)$ zvezno odvedljiva funkcija. Tedaj je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^d f(x(t))x'(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

pri čemer je $a = x(c)$ in $b = x(d)$.

Dokaz. Naj bo F nedoločeni integral funkcije f (ta obstaja, ker je f zvezna). Tedaj je

$$(F(x(t)))' = F'(x(t))x'(t) = f(x(t))x'(t)\,.$$

Newton-Lebnizova formula pove, da je

$$\int_c^d f(x(t))x'(t)\,\mathrm{d}t = F(x(t))\Big|_c^d = F(x(d)) - F(x(c)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

∎

■ **Zgled 13.1** Izračunajmo določeni integral $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$, $a > 0$ z vpeljavo nove spremenljivke $x = x(t) = a\sin t$.

Izračunamo $dx = a\cos t\;\mathrm{d}t$ in izrazimo $t = \operatorname{asin}\frac{x}{a}$. Tedaj je spodnja meja enaka $\operatorname{asin}\frac{0}{a} = 0$ in zgornja meja je enaka $\operatorname{asin}\frac{a}{a} = \frac{\pi}{2}$. Dobimo integral

$$\begin{aligned}
\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\,a\cos t\;\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sqrt{\cos^2 t}\,\cos t\;\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2|\cos t|\,\cos t\;\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t\;\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\,\frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin(2t)}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{a^2\pi}{4}\,.
\end{aligned}$$

■

Poglejmo si integracijo sode oziroma lihe funkcije na simetričnem intervalu $[-a, a]$.

- Naj bo $f(x)$ soda funkcija, torej $f(x) = f(-x)$ za vsak $x \in [-a,a]$. Vpeljemo novo spremenljivko $x = -t$:

$$
\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{a}^{0} f(-t)\,(-\,\mathrm{d}t) + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}
$$

- V primeru, ko je f liha funkcija, torej ko velja $f(-x) = -f(x)$, na podoben način dobimo

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Nazadnje poglejmo, kako se Newton-Leibnizova formula odraža pri integraciji po delih. Zapišimo integracijo po delih

$$\int u dv = uv - \int v du$$

v obliki

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Uporaba Newton-Leibnizove formule da

$$
\begin{aligned}
\int_{a}^{b} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x &= \left(u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x \right)\Big|_{a}^{b} \\
&= (u(x)v(x))\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}
$$

■ **Zgled 13.2** Izračunajmo določeni integral $\int_{0}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$.

Uporabimo integracijo po delih in sicer je $u = x$ in $\mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x$. Tedaj je $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ in $v = -\cos x$:

$$\int_{0}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = (-x\cos x)\Big|_{0}^{\pi} + \int_{0}^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = \pi\,.$$

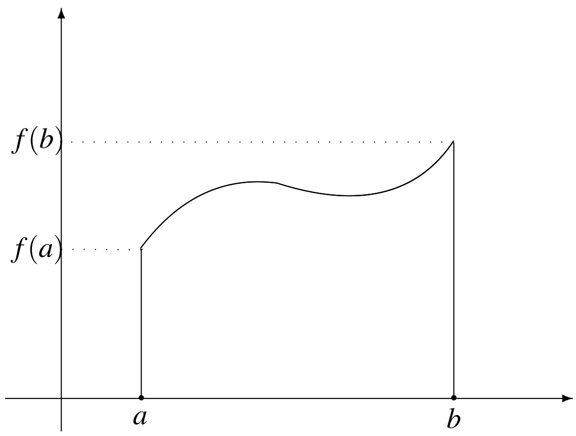
■

14. Uporaba določenega integrala

14.1 Ploščina lika

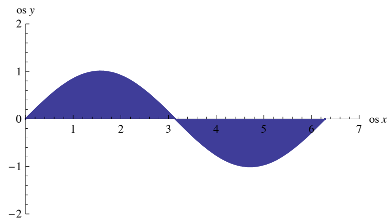
Poglejmo najpreprostejšo uporabo določenega integrala oziroma njegov geometrijski pomen. Naj bo f integrabilna na $[a,b]$ in nenegativna. Lik, omejen s krivuljami $x=a, x=b, y=0, y=f(x)$, imenujemo *krivočrtni trapez* T, katerega ploščino bomo označili S_T in ga vidimo na Sliki 14.1. Z večanjem števila delilnih točk delitve D intervala $[a,b]$ Riemannova integralska vsota $R_D(f)$ konvergira k ploščini S_T, zato je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S_T\,.$$



Slika 14.1: Krivočrtni trapez.

■ **Zgled 14.1** Izračunaj ploščino lika, ki je omejen z grafom funkcije sinus na intervalu $[0, 2\pi]$ in osjo x.



Slika 14.2: Območje, ki je določeno s funkcijo sinus.

Območje sestavljata dva ploščinsko enako velika dela, kot je to razvidno s Slike 14.2, zato je ploščina S enaka:

$$S = 2 \int_0^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = 4\,.$$

■

S pomočjo geometrijske interpretacije določenega integrala sta naslednji trditvi precej očitni; v sama dokaza se ne bomo spuščali.

Trditev 14.1.1 Naj bosta $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezni, $f(x) \leq g(x)$ za vsak $x \in [a, b]$. Ploščina lika, ki ga omejujejo premice $x = a$, $x = b$ ter grafa funkcij f in g, je določena z

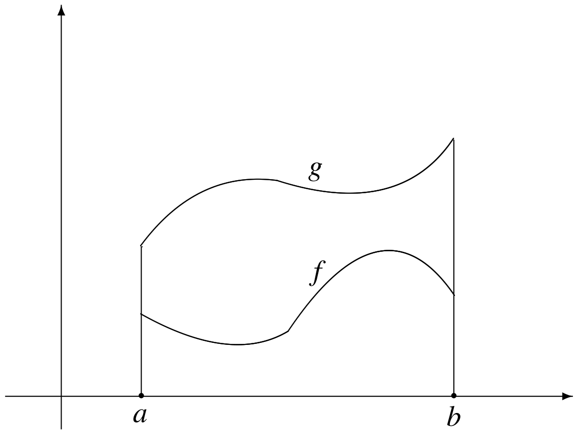
$$\int_a^b (g(x) - f(x)) \, \mathrm{d}x\,.$$

■

Trditev 14.1.2 Če je f integrabilna na intervalu $[a, b]$, je $|f|$ prav tako integrabilna na tem intervalu in velja

$$\left| \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x) \, \mathrm{d}x|\,.$$

■



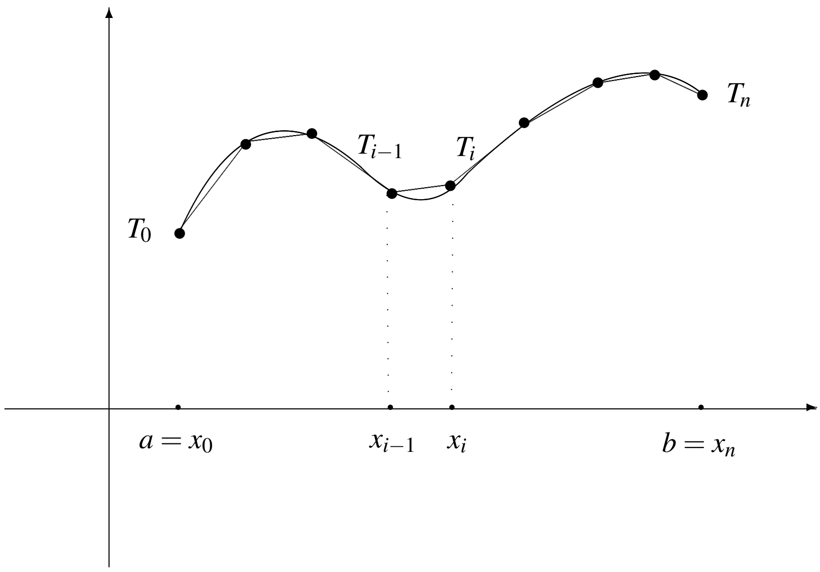
Slika 14.3: Ploščina območja med dvema funkcijama.

14.2 Dolžina loka

Naj bo $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija ter $D=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ delitev intervala $[a,b]$. Definirajmo točke

$$T_i=(x_i,f(x_i)),\ i=0,1,\ldots,n\,.$$

Daljice $T_{i-1}T_i$, $i=1,...,n$, sestavljajo *poligonsko črto* $T_0T_1\cdots T_n$, ki jo vidimo na Sliki 14.4.



Slika 14.4: Dolžina loka oziroma poligonske črte.

Dolžina posamezne daljice je po Pitagorovem izreku enaka

$$
\begin{aligned}
\overline{T_{i-1}T_i} &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \\
&\underbrace{=}_{\text{Lagrangeov izrek}} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + f'(c_i)^2 (x_i - x_{i-1})^2} \\
&= \sqrt{d_i^2 (1 + f'(c_i)^2)} \\
&= d_i \sqrt{1 + f'(c_i)^2}, \qquad c_i \in (x_{i-1}, x_i)
\end{aligned}
$$

Dolžina poligonske črte je vsota dolžin posameznih daljic

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{T_{i-1}T_i} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\, d_i = R_D(\sqrt{1 + f'2}).$$

Zato je naravno definirati dolžino loka funkcije f na sledeč način.

Definicija 14.2.1 *Dolžina loka* ℓ odvedljive funkcije f na $[a,b]$ je enaka

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x.$$

■ **Zgled 14.2** Izračunajmo dolžino loka funkcije $f(x) = x$ na $[0,1]$.

Ker je $f'(x) = 1$, je dolžina loka:

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{2}.$$

■

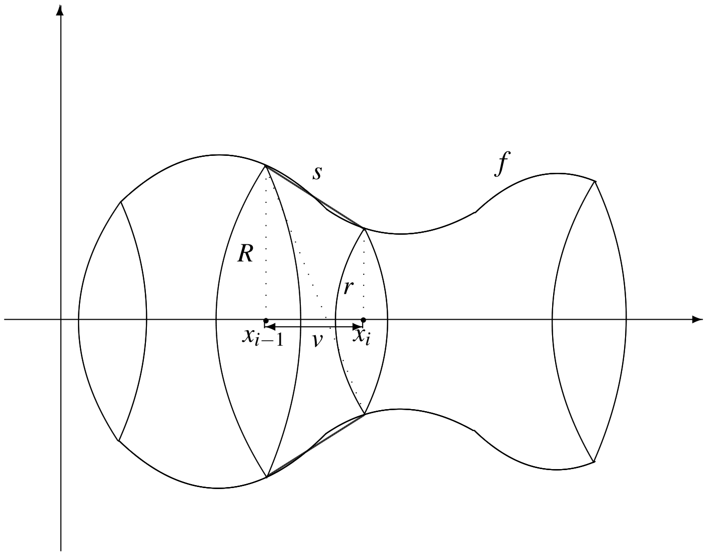
14.3 Prostornina in površina rotacijskega telesa

Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna nenegativna funkcija. Z vrtenjem grafa funkcije f okoli x osi dobimo *rotacijsko ploskev*, ki omejuje *rotacijsko telo*, ki ga vidimo na Sliki 14.5. Zanimata nas prostornina V in površina P tako nastalega rotacijskega telesa.

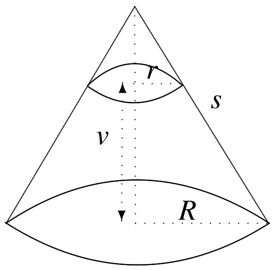
Spomnimo se najprej prostornine prisekanega stožca (*glej Sliko 14.6*), ki je podana z

$$V = \frac{\pi v}{3}(R^2 + r^2 + Rr),$$

pri čemer sta r in R polmera osnovnih ploskev (krogov), v je višina in s stranski rob prisekanega stožca.



Slika 14.5: Rotacijsko telo.



Slika 14.6: Prisekani stožec.

Naj bo $D = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ delitev intervala $[a,b]$. Krivuljo $f(x)$ na $[a,b]$ aproksimiramo s poligonsko črto $T_0T_1...T_n$, kjer je $T_i = f(x_i)$. Dolžina i-tega podintervala naj bo kot običajno d_i. To telo je prisekani stožec, za katerega je

$$r = f(x_{i-1}), R = f(x_i) \quad \text{ali} \quad R = f(x_{i-1}), r = f(x_i)$$

in

$$v = d_i\,,$$

kot je to razvidno s Slike 14.5.

Prostornina rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem poligonske črte, je zato enaka

$$V = \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi d_i}{3}(f(x_{i-1})^2 + f(x_i)^2 + f(x_{i-1})f(x_i))\,.$$

Ker je f zvezna funkcija in sta x_{i-1} in x_i blizu skupaj, je

$$f(x_{i-1}) \approx f(x_i) \approx f(\xi_i)\,,$$

kjer je $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$. Tako je

$$\begin{aligned} V &\approx \textstyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\pi d_i}{3} 3 f(\xi_i)^2 \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \pi f(\xi_i)^2 d_i \\ &= R_D(\pi f^2)\,. \end{aligned}$$

Naravno je vpeljati prostornino rotacijskega telesa na sledeč način.

Definicija 14.3.1 *Prostornina rotacijskega telesa*, ki nastane z vrtenjem grafa zvezne funkcije na intervalu $[a,b]$ okoli osi x, je enaka

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Na podoben način bomo izračunali površino rotacijskega telesa. Poglejmo najprej še površino plašča prisekanega stožca, ki je enaka

$$P = \pi s\,(R + r)\,.$$

Naj bo sedaj D običajna delitev intervala $[a,b]$. Poiščimo površino rotacijskega telesa, ki jo dobimo z vrtenjem poligonske črte. Z vrtenjem posamezne daljice dobimo prisekani stožec (*glej Sliko 14.5*), za katerega je

$$r = f(x_{i-1}),\, R = f(x_i) \quad \text{ali} \quad R = f(x_{i-1}),\, r = f(x_i)$$

in s je dolžina daljice $T_{i-1}T_i$

$$s = \overline{T_{i-1}T_i} = d_i\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}, \qquad \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)\,.$$

S podobnim sklepanjem kot pri prostornini pridemo do površine telesa, ki ga dobimo z vrtenjem poligonske črte

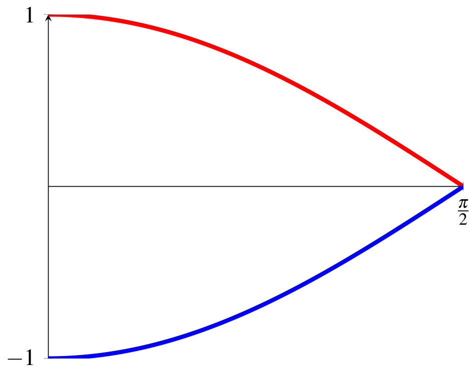
$$\begin{aligned} P &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \pi(f(x_{i-1}) + f(x_i))\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} d_i \\ &\approx \textstyle\sum_{i=1}^{n} \pi(f(\xi_i) + f(\xi_i))\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} d_i \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \pi 2 f(\xi_i)\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} d_i \\ &= R_D(2\pi f\sqrt{1 + f'^2})\,. \end{aligned}$$

Zato je naravno vpeljati površino rotacijskega telesa na naslednji način.

Definicija 14.3.2 *Površina rotacijskega telesa*, ki nastane z vrtenjem grafa zvezne funkcije na intervalu $[a,b]$ okoli osi x, je enaka

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

■ **Zgled 14.3** Izračunajmo prostornino in površino rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem grafa funkcije $\cos x$ na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ okoli osi x.



Slika 14.7: Prerez rotacijskega telesa, določenega z grafom funkcije kosinus.

Na Sliki 14.7 vidimo prerez rotacijskega telesa. Izračunajmo njegovo prostornino V:

$$\begin{aligned} V &= \pi \textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= \pi \textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi^2}{4}\,. \end{aligned}$$

Izračunajmo še površino P:

$$P = 2\pi \textstyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Vpeljemo novo spremenljivko $u = \sin x$ in dobimo

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \textstyle\int_0^1 \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= 2\pi \textstyle\int_0^1 \dfrac{1+u^2}{\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u\,. \end{aligned}$$

Podoben tip integrala smo obravnavali v Zgledu 11.23. Uporabimo nastavek:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1+u^2}{\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u &= (A\,u+B)\sqrt{1+u^2}+C\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} \;/' \\
\frac{1+u^2}{\sqrt{1+u^2}} &= A\sqrt{1+u^2}+\frac{2(A\,u+B)u}{2\sqrt{1+u^2}}+\frac{C}{\sqrt{1+u^2}} \;/\cdot\; \sqrt{1+u^2} \\
1+u^2 &= 2A\,u^2+B\,u+A+C \\
& A=C=\frac{1}{2},\, B=0\,.
\end{aligned}
$$

Površina je zato

$$
\begin{aligned}
P &= 2\pi\frac{1}{2}\left(u\sqrt{1+u^2}\Big|_0^1+\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}\right) \\
&= \pi\left(u\sqrt{1+u^2}+\ln(u+\sqrt{1+u^2})\right)\Big|_0^1 \\
&= \pi\,(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))\,.
\end{aligned}
$$

■

Na podoben način lahko izpeljemo prostornino in površino rotacijskega telesa, ki ga dobimo z vrtenjem grafa funkcije $x=x(y)$ okoli osi y na intervalu $[c,d]$.

Definicija 14.3.3 Prostornina in površina rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem grafa zvezne funkcije $x=x(y)$ okoli osi y na intervalu $[c,d]$, sta enaki

$$
V=\pi\int_c^d x^2(y)\,\mathrm{d}y \qquad \text{in} \qquad P=2\pi\int_c^d x(y)\sqrt{1+(x(y)')^2}\,\mathrm{d}y\,.
$$

15. Posplošeni integral

Pojem določenega integrala na zaprtem intervalu smo uvedli le za funkcije, ki so na tem intervalu omejene. Sedaj bomo ta pojem razširili na dva tipa funkcij in sicer na tiste, ki na zaprtem intervalu niso omejene in na tiste, kjer je integracijski interval neskončen. Takšne integrale imenujemo posplošeni integrali. Spoznali bomo tudi posebni primer posplošenega integrala in sicer Eulerjevo funkcijo gama.

15.1 Integral neomejene funkcije na $[a,b]$

Pojem določenega integrala na $[a,b]$ bomo razširili na primere funkcij, ki v neki točki $c \in [a,b]$ niso definirane. Zanimivi so tisti primeri, kjer ima funkcija v točki c vertikalno asimptoto oziroma pol.

Definicija 15.1.1

- Če funkcija f ni definirana v točki $c \in (a,b)$, ampak je za poljubno majhno število $\delta > 0$ integrabilna na intervalih $[a, c-\delta]$ in $[c+\delta, b]$, tedaj je
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\delta \to 0} \int_a^{c-\delta} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\delta \to 0} \int_{c+\delta}^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$
- Če funkcija f ni definirana v točki a, ampak je za poljubno majhno število $\delta > 0$ integrabilna na intervalu $[a+\delta, b]$, tedaj je
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\delta \to 0} \int_{a+\delta}^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

- Če funkcija f ni definirana v točki b, ampak je za poljubno majhno število $\delta > 0$ integrabilna na intervalu $[a, b-\delta]$, tedaj je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0}\int_a^{b-\delta} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

V vseh teh primerih imenujemo integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *posplošeni integral* funkcije f in le-ta obstaja, če obstajajo ustrezne limite.

■ **Zgled 15.1** Izračunajmo posplošeni integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$.

Funkcija ima v točki $x = 1$ pol, zato imamo opravka s posplošenim integralom

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} &= \lim_{\delta\to 0}\int_0^{1-\delta} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} \\
&= -2\lim_{\delta\to 0}\sqrt{1-x}\Big|_0^{1-\delta} \\
&= -2\lim_{\delta\to 0}(\sqrt{\delta}-1) \\
&= 2\,.
\end{aligned}$$

■

■ **Zgled 15.2** Izračunajmo posplošeni integral $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$.

Podobno kot prej, funkcija ni zvezna v točki $x = 1$, zato

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} &= \lim_{\delta\to 0}\int_0^{1-\delta} \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} + \lim_{\delta\to 0}\int_{1+\delta}^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} \\
&= \left(\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{1-x}\right)\Big|_0^{1-\delta} + \left(\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{1-x}\right)\Big|_{1+\delta}^3. \\
&= \lim_{\delta\to 0}\left(\frac{1}{\delta}-1\right) + \lim_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{\delta}\right).
\end{aligned}$$

Ker limiti ne obstajata, prav tako ne obstaja posplošeni integral.

■

15.2 Integral funkcije na neomejenem intervalu

Definicija 15.2.1

- Če je funkcija f integrabilna na $[a,b]$ za vsak $b \in \mathbb{R}$, $b > a$, je

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

- Če je funkcija f integrabilna na $[a,b]$ za vsak $a \in \mathbb{R}$, $a < b$, je

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

- Če je funkcija f integrabilna na $[a,b]$ za vsak $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, je

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Vsi trije integrali so *posplošeni integrali* funkcije f, če le obstajajo ustrezne limite.

■ **Zgled 15.3** Izračunajmo posplošeni integral $\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty} \textstyle\int_0^b e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\lim_{b\to\infty} \frac{1}{e^x}\Big|_0^b \\
&= -\lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{e^b} - 1\right) \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

■

■ **Zgled 15.4** Izračunajmo posplošeni integral $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
&= \lim_{b\to\infty} \ln x\Big|_1^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \ln b \\
&= \infty\,.
\end{aligned}$$

Posplošeni integral ne obstaja. ■

15.3 Eulerjeva funkcija Γ

Eulerjeva funkcijo gama, Γ, je primer posplošenega integrala, ki ga bomo srečali pri obravnavi diferencialnih enačb.

Definicija 15.3.1 *Eulerjeva funkcija* Γ je za $x > 0$ definirana kot

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t \, .$$

Eulerjeva funkcija Γ je definirana preko posplošenega integrala, v katerem se pojavi parameter x. Pogoj $x > 0$ kaže na to, da je integral konvergenten za vsak tak x, a konvergence ne bomo dokazovali.

Izračunajmo jo z integracijo po delih:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \textstyle\int_0^\infty e^{-t} t^x \, \mathrm{d}t \\
& \qquad u = t^x \Rightarrow \mathrm{d}u = xt^{x-1} \, \mathrm{d}t \\
& \qquad \mathrm{d}v = e^{-t} \, \mathrm{d}t \Rightarrow v = -e^{-t} \\
&= \lim_{b\to\infty} (-e^{-t} t^x) \Big|_0^b + x \textstyle\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t \\
&= 0 + x \textstyle\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t \\
&= x\Gamma(x) \, .
\end{aligned}$$

Izpeljali smo posebno lastnost funkcije gama

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \, .$$

V primeru, ko je $x = n$ naravno število, tako velja

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2\Gamma(1) = n! \, ,$$

saj je

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{1-1} \, \mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-t} \, \mathrm{d}t = 1 \, .$$

Za zaporednim upoštevanjem lastnosti $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ dobimo zanimivo zvezo:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= x\Gamma(x) \\
\Gamma(x+2) &= (x+1)\Gamma(x+1) = (x+1)x\Gamma(x) \\
\Gamma(x+3) &= (x+2)\Gamma(x+2) = (x+2)(x+1)x\Gamma(x) \\
&\vdots \\
\Gamma(x+n+1) &= (x+n)(x+n-1)\cdots(x+2)(x+1)x\Gamma(x) \, .
\end{aligned}$$

Iz te zveze lahko izrazimo funkcijo gama kot

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n+1)}{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+2)(x+1)x} \, .$$

Izraz na desni smemo računati, če je imenovalec različen od 0 in $x+n+1>0$. Ker je n poljubno veliko naravno število, sme biti x poljubno veliko negativno necelo število. To pomeni, da smo definicijsko območje funkcije Γ razširili na celo realno os z izjemo števil $0,-1,-2,-3,\ldots$. Uporabo lahko vidimo na Zgledu 15.5.

Pri uporabi funkcije Γ ima pomembno vlogo vrednost v $x=\frac{1}{2}$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t\,.$$

Z uvedbo nove spremenljivke $u=t^{\frac{1}{2}}$ prevedemo začetni integral na

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^\infty e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\,.$$

Dobljeni integral je povezan s *funkcijo napake*, ki je definirana kot

$$\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\,.$$

Funkcija napake je neelementarna funkcija in je povezana z verjetnostjo. Čeprav se z verjetnostjo na tem mestu ne ukvarjamo, opišimo funkcijo napake; $\mathrm{erf}(x)$ je verjetnost, da slučajna spremenljivka z normalno porazdelitvijo pade v interval $[-x,x]$. Iz definicije sledi, da če je interval zelo velik ($x=\infty$), bo slučajna spremenljivka zagotova padla (verjetnost bo enaka 1) v omenjeni interval, zato je

$$\mathrm{erf}(\infty)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-u^2}\,\mathrm{d}u=1\,.$$

Vrednost funkcije gama v $\frac{1}{2}$ je tako enaka

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(\infty)=\sqrt{\pi}\,.$$

■ **Zgled 15.5** Izračunajmo $\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)$.

V formuli $\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+n+1)}{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+2)(x+1)x}$ moramo izbrati dovolj velik n, da bo argument $x+n+1$ pozitiven. Ker je $x=-\frac{5}{2}$, mora biti $n\geq 2$. Izberimo najmanjši možni n, torej naj bo $n=2$:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(-\tfrac{5}{2}\right) &= \frac{\Gamma(-\frac{5}{2}+2+1)}{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}\\ &= -\tfrac{8}{15}\sqrt{\pi}\,.\end{aligned}$$

■

16. Rešene naloge

Nedoločeni integral in integracijske metode

1. Izračunaj naslednje nedoločene integrale:

   (a) $\int \mathrm{d}x$

   (b) $\int (x^3 + 3 + x^{-2})\,\mathrm{d}x,$

   (c) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{4x})\,\mathrm{d}x,$

   (d) $\int (13^x + e^x)\,\mathrm{d}x,$

   (e) $\int \frac{x^2 + 4x + 4}{x}\,\mathrm{d}x,$

   (f) $\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x,$

   (g) $\int \frac{5\sqrt{x} - 5\sqrt[3]{x^2} + 3}{\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x,$

   (h) $\int \frac{1}{16x^2 + 4}\,\mathrm{d}x,$

   (i) $\int \frac{1}{x^2 - 36}\,\mathrm{d}x,$

   (j) $\int \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 18}}\,\mathrm{d}x,$

   (k) $\int \frac{1}{\sqrt{(2x)^2 - 100}}\,\mathrm{d}x,$

   (l) $\int \frac{1}{\sqrt{25 - x^2}}\,\mathrm{d}x,$

   (m) $\int \frac{x^2}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x,$

(n) $\displaystyle\int (\sinh x - \cosh x)\,\mathrm{d}x$,

(o) $\displaystyle\int \frac{2^x}{3^{x-1}}\,\mathrm{d}x$,

(p) $\displaystyle\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x$.

Rešitev.

(a) $\int \mathrm{d}x = x + C$,

(b) $\int (x^3+3+x^{-2})\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + 3x - x^{-1} + C$,

(c) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{4x})\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{4x^4} + C$,

(d) $\int (13^x + e^x)\,\mathrm{d}x = \frac{13^x}{\ln 13} + e^x + C$,

(e) $\int \frac{x^2+4x+4}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + 4x + 4\ln|x| + C$,

(f) $\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = -2\frac{1}{\sqrt{x}} + C$,

(g) $\int \frac{5\sqrt{x}-5\sqrt[3]{x^2}+3}{\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x = 4\sqrt[4]{x^5} - \frac{60\sqrt[3]{x^5}}{17} + 4\sqrt[4]{x^3} + C$,

(h) $\int \frac{1}{16x^2+4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\arctan(2x) + C$,

(i) $\int \frac{1}{x^2-36}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}\ln\left|\frac{x-6}{x+6}\right| + C$,

(j) $\int \frac{1}{\sqrt{2x^2+18}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x+\sqrt{x^2+9}\right| + C$,

(k) $\int \frac{1}{\sqrt{(2x)^2-100}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-25}\right| + C$

(l) $\int \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\left(\frac{x}{5}\right) + C$,

(m) $\int \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = x - \arctan x + C$,

(n) $\int (\sinh x - \cosh x)\,\mathrm{d}x = \cosh x - \sinh x + C$,

(o) $\int \frac{2^x}{3^{x-1}}\,\mathrm{d}x = \frac{2^x}{3^{x-1}\ln(\frac{2}{3})} + C$,

(p) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos^2 x - \sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\tan x + x) + C$.

∎

2. Z uvedbo nove spremenljivke izračunaj naslednje nedoločene integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{3x+9}\,\mathrm{d}x$,

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x$, kjer je $a \neq 0$,

(c) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+5)^{505}}\,\mathrm{d}x$,

(d) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^8+4}\,\mathrm{d}x$,

(e) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-1)^{2020}}\,\mathrm{d}x$,

(f) $\displaystyle\int (\cos 2x + \sin 2x)\,\mathrm{d}x$,

(g) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x$,

(h) $\displaystyle\int \tan x\,\mathrm{d}x$,

(i) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int x^2 e^{x^3}\,\mathrm{d}x$,

(k) $\displaystyle\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+25}\,\mathrm{d}x$,

(l) $\int \frac{1}{x\ln x^2}\,dx$,

(m) $\int 2^x(2^x+1)^{2014}\,dx$,

(n) $\int \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}\,dx$,

(o) $\int x\sqrt[4]{x-2}\,dx$,

(p) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\,dx$,

(q) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{\ln^2 x+\ln x+\frac{17}{4}}}\,dx$.

Rešitev.

(a) $\int \frac{1}{3x+9}\,dx \overset{t=x+3}{=} \frac{1}{3}\ln|x+3|+C$,

(b) $\int \frac{1}{ax+b}\,dx \overset{t=x+\frac{b}{a}}{=} \frac{1}{a}\ln|x+\frac{b}{a}|+C$,

(c) $\int \frac{x}{(x^2+5)^{505}}\,dx \overset{t=x^2+5}{=} \frac{1}{2}\frac{1}{(-504)(x^2+5)^{504}}+C$,

(d) $\int \frac{x^3}{x^8+4}\,dx \overset{t=x^4}{=} \frac{1}{8}\arctan\left(\frac{x^4}{2}\right)+C$,

(e) $\int \frac{x^2}{(x-1)^{2020}}\,dx \overset{t=x-1}{=} -\frac{1}{2017(x-1)^{2017}}-\frac{1}{1009(x-1)^{2018}}-\frac{1}{2019(x-1)^{2019}}+C$,

(f) $\int(\cos 2x+\sin 2x)\,dx \overset{t=2x}{=} \frac{\sin 2x-\cos 2x}{2}+C$,

(g) $\int \frac{\sin x}{1-\cos x}\,dx \overset{t=1-\cos x}{=} \ln|1-\cos x|+C$,

(h) $\int \tan x\,dx \overset{t=\cos x}{=} -\ln|\cos x|+C$,

(i) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\,dx = \int \frac{\cos x(1-\sin^2 x)}{\sin x}\,dx \overset{t=\sin x}{=} \ln|\sin x|-\frac{\sin^2 x}{2}+C$,

(j) $\int x^2 e^{x^3}\,dx \overset{t=x^3}{=} \frac{1}{3}e^{x^3}+C$,

(k) $\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+25}\,dx \overset{t=e^{2x}+25}{=} \ln|e^{2x}+25|+C$,

(l) $\int \frac{1}{x\ln x^2}\,dx \overset{t=\ln x^2}{=} \frac{1}{2}\ln|\ln(x^2)|+C$,

(m) $\int 2^x(2^x+1)^{2014}\,dx \overset{t=2^x+1}{=} \frac{(2^x+1)^{2015}}{2015\ln 2}+C$,

(n) $\int \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}\,dx \overset{t=\arctan x}{=} \ln|\arctan x|+C$,

(o) $\int x\sqrt[4]{x-2}\,dx \overset{t=x-2}{=} \frac{4\sqrt[4]{(x-2)^9}}{9}+\frac{8\sqrt[4]{(x-2)^5}}{5}+C$,

(p) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\,dx \overset{t=\sqrt[6]{x}}{=} \int \frac{6t^5}{t^3(1+t^2)}\,dt = 6(\sqrt[6]{x}-\arctan(\sqrt[6]{x}))+C$.

(q) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{\ln^2 x+\ln x+\frac{17}{4}}}\,dx \overset{t=\ln x}{=} \int \frac{t}{\sqrt{t^2+t+\frac{17}{4}}}\,dt = \int \frac{t+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{\sqrt{(t+\frac{1}{2})^2+4}}\,dt =$

$$= \sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+4}-\frac{1}{2}\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+4}\right|+C =$$

$$= \sqrt{\ln^2 x+\ln x+\frac{17}{4}}-\frac{1}{2}\ln\left|\ln x+\frac{1}{2}+\sqrt{\ln^2 x+\ln x+\frac{17}{4}}\right|+C.$$

∎

3. Z uporabo integriranja po delih izračunaj naslednje nedoločene integrale:

   (a) $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$,

   (b) $\int (x^2+1)\sin x\,\mathrm{d}x$,

   (c) $\int x^2e^{2x}\,\mathrm{d}x$,

   (d) $\int \frac{x-1}{e^{2x}}\,\mathrm{d}x$,

   (e) $\int x^2\mathrm{ch}x\,\mathrm{d}x$,

   (f) $\int 3x^2\arctan x\,\mathrm{d}x$,

   (g) $\int \frac{\arctan(e^x)}{e^x}\,\mathrm{d}x$,

   (h) $\int \ln x\,\mathrm{d}x$,

   (i) $\int x\ln^2 x\,\mathrm{d}x$,

   (j) $\int x^9\ln x^3\,\mathrm{d}x$,

   (k) $\int \arctan\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

Rešitev.

(a) $\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u=x & \mathrm{d}v=\cos x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x & v=\sin x\end{pmatrix} \left(x\sin x-\int \sin x\,\mathrm{d}x\right) = x\sin x+\cos x+C$,

(b) $\int (x^2+1)\sin x\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u=x^2+1 & \mathrm{d}v=\sin x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x & v=-\cos x\end{pmatrix} \left(-(x^2+1)\cos x+2\int x\cos x\,\mathrm{d}x\right) =$
$\overset{\text{glej (3a)}}{=} -(x^2+1)\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$,

(c) $\int x^2e^{2x}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u=x^2 & \mathrm{d}v=e^{2x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u=x\,\mathrm{d}x & v=\frac{e^{2x}}{2}\end{pmatrix} \left(\frac{x^2e^{2x}}{2}-\int xe^{2x}\,\mathrm{d}x\right) =$
$= \begin{pmatrix} u=x & \mathrm{d}v=e^{2x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u=2\,\mathrm{d}x & v=\frac{e^{2x}}{2}\end{pmatrix} \left(\frac{x^2e^{2x}}{2}-\frac{xe^{2x}}{2}+\int \frac{e^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{x^2e^{2x}}{2}-\frac{xe^{2x}}{2}+\frac{e^{2x}}{4}+C$

(d) $\int \frac{x-1}{e^{2x}}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u=x-1 & \mathrm{d}v=e^{-2x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x & v=-\frac{e^{-2x}}{2}\end{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}(x-1)e^{-2x}+\frac{1}{4}e^{-2x}+C\right)$,

(e) $\int x^2\mathrm{ch}x\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u=x^2 & \mathrm{d}v=\mathrm{ch}x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x & v=\mathrm{sh}x\end{pmatrix} \left(x^2\mathrm{sh}x-2\int x\,\mathrm{sh}x\,\mathrm{d}x\right) =$
$= \begin{pmatrix} u=x & \mathrm{d}v=\mathrm{sh}x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x & v=\mathrm{ch}x\end{pmatrix} \left(x^2\,\mathrm{sh}x-2x\,\mathrm{ch}x+2\int \mathrm{ch}x\,\mathrm{d}x\right) = x^2\,\mathrm{sh}x-2x\,\mathrm{ch}x+2\mathrm{sh}x+C$,

(f) $\int 3x^2\arctan x\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u=\arctan x & \mathrm{d}v=3x^2\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} & v=x^3\end{pmatrix} \left(x^3\arctan x-\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^2+1}\right) =$
$= x^3\arctan x-\int\left(x-\frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = x^3\arctan x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$,

(g) $\int \frac{\arctan(e^x)}{e^x}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u=\arctan(e^x) & \mathrm{d}v=e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u=\frac{e^x\,\mathrm{d}x}{e^{2x}+1} & v=-e^{-x}\end{pmatrix} \left(-e^{-x}\arctan(e^x)+\int \frac{\mathrm{d}x}{e^{2x}+1}\right) =$
$= -e^{-x}\arctan(e^x)+\int \frac{e^{2x}+1-e^{2x}}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x = -e^{-x}\arctan(e^x)+x-\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x =$
$\overset{t=e^{2x}+1}{=} -e^{-x}\arctan(e^x)+x-\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)+C$,

(h) $\int \ln x\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u=\ln x & \mathrm{d}v=\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x} & v=x\end{pmatrix} \left(x\ln x-\int \mathrm{d}x\right) = x\ln x-x+C$,

(i) $\int x\ln^2 x\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u=\ln^2 x & \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \frac{2\ln x\,\mathrm{d}x}{x} & v=\frac{x^2}{2}\end{pmatrix} \left(\frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int x\ln x\,\mathrm{d}x\right) =$
$= \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + C,$

(j) $\int x^9 \ln x^3\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u=\ln x^3 & \mathrm{d}v = x^9\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \frac{3\,\mathrm{d}x}{x} & v=\frac{x^{10}}{10}\end{pmatrix} \left(\frac{x^{10}}{10}\ln x^3 - \int \frac{3x^9}{10}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{x^{10}}{10}\ln x^3 - \frac{3x^{10}}{100} + C,$

(k) $\int \arctan\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x =$
$= \begin{pmatrix} u=\arctan\left(1+\frac{1}{x}\right) & \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{2x^2+2x+1} & v=x\end{pmatrix} \left(x\arctan\left(1+\frac{1}{x}\right) + \int \frac{x}{2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x\right) =$
$= x\arctan\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\int \frac{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x = x\arctan\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\ln\left|x^2+x+\frac{1}{2}\right| -$
$- \frac{1}{2}\arctan(2x+1) + C.$

∎

4. Izračunaj naslednje nedoločene integrale racionalnih funkcij:
   (a) $\int \frac{x}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x,$
   (b) $\int \frac{x-2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x,$
   (c) $\int \frac{x}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x,$
   (d) $\int \frac{x^5}{x^2+1},\,\mathrm{d}x,$
   (e) $\int \frac{3}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x,$
   (f) $\int \frac{3x+8}{x^2+6x+8}\,\mathrm{d}x,$
   (g) $\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x,$
   (h) $\int \frac{x}{(x+1)^2(x+2)^2}\,\mathrm{d}x,$
   (i) $\int \frac{x^2+2x+15}{(x+3)(x^2+9)}\,\mathrm{d}x,$
   (j) $\int \frac{-x^3+2x+4}{x^2(x^2+2x+4)}\,\mathrm{d}x,$
   (k) $\int \frac{-x^3+x^2+3}{(x^2+x+3)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x,$
   (l) $\int \frac{x-2x^2}{(x+2)^2(x^2+2x+5)}\,\mathrm{d}x.$

Rešitev.

(a) $\int \frac{x}{x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{(x-1)^2-1+5}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x-1+1}{(x-1)^2+4}\,\mathrm{d}x =$
$= \int \frac{x-1}{(x-1)^2+4}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x-1)^2+4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left((x-1)^2+4\right) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C,$

(b) $\int \frac{x-2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-2}{(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x+\frac{1}{2}}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x - \frac{5}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x =$
$= \frac{1}{2}\ln\left((x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right) - \frac{5}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C,$

(c) $\int \frac{x}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x \overset{t=x^2+4}{=} -\frac{1}{2(x^2+4)}+C,$

(d) Najprej delimo polinom x^5 s polinomom x^2+1 in posledično dobimo

$$\int \left(x^3-x+\frac{x}{x^2+1}\right)\,\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

(e) Imamo dva načina.

- Direktno z uporabo formul.

$$\int \frac{3\,\mathrm{d}x}{x^2+3x+2}=\int \frac{3\,\mathrm{d}x}{(x+\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}}=3\ln\left|\frac{(x+\frac{3}{2})-\frac{1}{2}}{(x+\frac{3}{2})+\frac{1}{2}}\right|+C=3\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|+C$$

- Uporaba parcialnih ulomkov.

$$\frac{3}{x^2+3x+2}=\frac{3}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}.$$

Dobimo sistem enačb $A+B=0$, $2A+B=3$. Rešitvi sistema sta $A=3$ in $B=-3$. Sledi

$$\int \frac{3\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)}=\int \left(\frac{3}{x+1}-\frac{3}{x+2}\right)\mathrm{d}x=3\ln|x+1|-3\ln|x+2|+C=3\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|+C.$$

(f) Uporabili bomo parcialne ulomke (lahko tudi direktno; glej (4a)).

$$\frac{3x+8}{(x+2)(x+4)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+4}$$

Dobimo $A=1$ in $B=2$. Sledi

$$\int \frac{3x+8}{(x+2)(x+4)}\,\mathrm{d}x=\int \left(\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x+4}\right)\mathrm{d}x=\ln|x+2|+2\ln|x+4|+C.$$

(g) V vseh nadaljnih primerih bomo za računanje integralov uporabili parcialne ulomke.

$$\frac{x^2+2x}{(x+1)^3}=\frac{A}{(x+1)^3}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)}$$

Dobimo $A=-1$, $B=0$ in $C=1$. Sledi

$$\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x=\int \left(\frac{-1}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x+1)}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2(x+1)^2}+\ln|x+1|+C.$$

(h)

$$\frac{x}{(x+1)^2(x+2)^2}=\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{D}{x+2}$$

Dobimo $A=-1$, $B=3$, $C=-2$ in $D=-3$. Sledi

$$\int \frac{x}{(x+1)^2(x+2)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{x+1}+3\ln|x+1|+\frac{2}{x+2}-3\ln|x+2|+C.$$

(i)

$$\frac{x^2+2x+15}{(x+3)(x^2+9)}=\frac{A}{x+3}+\frac{Bx+C}{x^2+9}$$

Dobimo $A=1$, $B=0$ in $C=2$. Sledi

$$\int \frac{x^2+2x+15}{(x+3)(x^2+9)}\,\mathrm{d}x==\ln|x+3|+\frac{2}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right)+C.$$

(j)
$$\frac{-x^3+2x+4}{x^2(x^2+2x+4)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+4}$$
Dobimo $A=1$, $B=0$, $C=-1$ in $D=-1$. Sledi
$$\int\frac{-x^3+2x+4}{x^2(x^2+2x+4)}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\ln((x+1)^2+3)+C.$$

(k)
$$\frac{-x^3+x^2+3}{(x^2+x+3)(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+x+3}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$
Dobimo $A=-1$, $B=0$, $C=0$, $D=1$. Sledi
$$\int\frac{-x^3+x^2+3}{(x^2+x+3)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln\left((x+\frac{1}{2})^2+\frac{11}{4}\right)+\frac{1}{\sqrt{11}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{11}}\right)+\arctan x+C.$$

(l)
$$\frac{x-2x^2}{(x+2)^2(x^2+2x+5)}=\frac{A}{(x+2)^2}+\frac{B}{x+2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+5}$$
Dobimo $A=-2$, $B=1$, $C=-1$ in $D=0$. Sledi
$$\int\frac{x-2x^2}{(x+2)^2(x^2+2x+5)}\,\mathrm{d}x==\frac{2}{x+2}+\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln((x+1)^2+4)+\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+C.$$

∎

5. S pomočjo metode Ostrogradskega izračunaj naslednje nedoločene integrale racionalnih funkcij:
   (a) $\int\frac{2x^2}{(x^2-1)^2}\,\mathrm{d}x$,
   (b) $\int\frac{2x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$,
   (c) $\int\frac{1}{(x^2+2x+5)^2}\,\mathrm{d}x$,
   (d) $\int\frac{1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x$,
   (e) $\int\frac{6x}{(x-1)^2(x+1)^3}\,\mathrm{d}x$.

Rešitev.

(a) Nastavimo
$$\int\frac{2x^2}{(x^2-1)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{Ax+B}{(x-1)(x+1)}+\int\frac{Cx+D}{(x-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x$$
Sedaj odvajamo zgornjo enačbo in dobimo
$$\frac{2x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{A(x^2-1)-2x(Ax+B)}{(x-1)^2(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{(x-1)(x+1)}.$$
Posledično $A=-1$, $B=0$, $C=0$ in $D=1$. Sledi
$$\int\frac{2x^2}{(x^2-1)^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{x}{(x-1)(x+1)}+\int\frac{1}{(x-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x=-\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

(b)
$$\int\frac{2x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\int\frac{Cx+D}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$
Dobimo $A=-1$, $B=0$, $C=0$ in $D=1$. Sledi
$$\int\frac{2x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{x}{x^2+1}+\arctan x+C.$$

(c)

$$\int \frac{1}{(x^2+2x+5)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{Ax+B}{x^2+2x+5} + \int \frac{Cx+D}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$$

Dobimo $A=\frac{1}{8}$, $B=\frac{1}{8}$, $C=0$ in $D=\frac{1}{8}$. Sledi

$$\int \frac{1}{(x^2+2x+5)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\left(\frac{x+1}{x^2+2x+5} + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) + C.$$

(d)

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{(x^2+1)^2} + \int \frac{Ex+F}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

Dobimo $A=\frac{3}{8}$, $B=0$, $C=\frac{5}{8}$, $D=0$, $E=0$, $D=\frac{1}{8}$. Sledi

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\left(\frac{3x^3+5x}{(x^2+1)^2} + 3\arctan x\right) + C.$$

(e)

$$\int \frac{6x}{(x-1)^2(x+1)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1)(x+1)^2} + \int \frac{Dx+E}{(x-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x$$

Dobimo $A=-1$, $B=0$, $C=-1$, $D=0$ in $E=-1$. Sledi

$$\int \frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{-x^2-1}{(x-1)(x+1)^2} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

∎

6. Izračunaj naslednje nedoločene integrale funkcij z iracionalnimi členi:

(a) $\int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^7}}\,\mathrm{d}x$,

(b) $\int \sqrt[3]{(3x+6)^4}\,\mathrm{d}x$,

(c) $\int x\sqrt{x-2}\,\mathrm{d}x$,

(d) $\int x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$,

(e) $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$,

(f) $\int \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$,

(g) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$,

(h) $\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$,

(i) $\int \frac{x^2+x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x$,

(j) $\int \sqrt{2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$,

(k) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{2-x-2x^2}}\,\mathrm{d}x$,

(l) $\int \frac{x}{x^2+2\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$,

(m) $\int \frac{1}{(x-2)\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x$,

(n) $\int \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\,\mathrm{d}x$,
(o) $\int \sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x$,
(p) $\int \sqrt{\frac{1-x}{x}}\,\mathrm{d}x$,
(q) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$,
(r) $\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$,
(s) $\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$,
(t) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-(x+1)}\,\mathrm{d}x$.

Rešitev.
(a) $\int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^7}}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{5\sqrt{(x+1)^5}}+C$,
(b) $\int \sqrt[3]{(3x+6)^4} = \frac{3\sqrt[3]{3^4}}{7}\sqrt[3]{(x+2)^7}+C$,
(c) $\int x\sqrt{x-2}\,\mathrm{d}x \overset{t=x-2}{=} \frac{2}{5}\sqrt{(x-2)^5}+\frac{4}{3}\sqrt{(x-2)^3}+C$,
(d) $\int x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x \overset{t=x^2+1}{=} \frac{\sqrt{(x^2+1)^3}}{3}+C$,
(e) $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$,
(f) $\int \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x \overset{t=\sqrt{x}}{=} \int \frac{2t^2}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t$ in ta integral smo izračunali v (5b).
(g) Pomagali si bomo z naslednjim nastavkom

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = (Ax+B)\sqrt{1-x^2}+C\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Zgornjo vrstico odvajamo in dobimo

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{1-x^2}} = A\sqrt{1-x^2}-(Ax+B)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{C}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Slednjo vrstico pomnožimo s $\sqrt{1-x^2}$ in dobimo

$$x^2+1 = -2Ax^2+Bx+A+C.$$

Iz tega sledi $A=-\frac{1}{2}$, $B=0$ in $C=\frac{3}{2}$. Torej

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{3}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{3}{2}\arcsin x+C.$$

(h) Najprej preoblikujemo integral

$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Postopek je podoben kot v (6g).

$$\int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = (Ax+B)\sqrt{1+x^2}+C\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Sledi $A=\frac{1}{2}$, $B=0$ in $C=\frac{1}{2}$. Posledično

$$\int\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}|+C.$$

Opomba: integral lahko izračunamo tudi z uvedbo nove spremenljivke $x=\operatorname{sh}t$.

(i) Postopek je podoben kot v (6g).

$$\int\frac{x^2+x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x=(Ax+B)\sqrt{3-2x-x^2}+C\int\frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Dobimo $A=-\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{2}$ in $C=2$. Posledično

$$\int\frac{x^2+x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3-2x-x^2}+2\int\frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x=$$
$$=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3-2x-x^2}+2\int\frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}}\,\mathrm{d}x=$$
$$=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3-2x-x^2}+2\arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right)+C.$$

(j) Najprej integral preoblikujemo

$$\int\sqrt{2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\int\frac{x^2+x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x+\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x.$$

Najprej upoštevamo nastavek in dobimo

$$\int\frac{x^2+x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x+\frac{1}{2}}}=(Ax+B)\sqrt{x^2+x+\frac{1}{2}}+C\int\frac{1}{\sqrt{x^2+x+\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x.$$

Sledi $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{4}$ in $C=\frac{1}{8}$. Torej

$$\int\sqrt{2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{4}(2x+1)\sqrt{x^2+x+\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+\frac{1}{2}}\right|+C.$$

(k) Najprej integral preoblikujemo

$$\int\frac{2x-1}{\sqrt{2-x-2x^2}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{2x-1}{\sqrt{1-\frac{x}{2}-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Upoštevamo nastavek

$$\int\frac{2x-1}{\sqrt{1-\frac{x}{2}-x^2}}\,\mathrm{d}x=A\sqrt{1-\frac{x}{2}-x^2}+B\int\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{2}-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

in dobimo $A=-2$ in $B=-\frac{3}{2}$. Posledično je

$$\int\frac{2x-1}{\sqrt{2-x-2x^2}}\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{x}{2}-x^2}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{4x-1}{\sqrt{17}}\right)+C.$$

(l) Integral bomo izračunali z uvedbo nove spremenljivke

$$\int\frac{x}{x^2+2\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x\overset{t=\sqrt{x^2-1}}{=}\int\frac{1}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+1}+C.$$

(m) $$\int\frac{1}{(x-2)\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x\overset{t=\frac{1}{x-2}}{=}-\int\frac{t}{t^2\sqrt{(\frac{1}{t}+2)^2+2(\frac{1}{t}+2)+2}}\,\mathrm{d}t=$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{10}}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+\frac{6}{10}t+\frac{1}{10}}}=-\frac{1}{\sqrt{10}}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t+\frac{3}{10})^2+\frac{1}{100}}}=$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{1}{x-2}+\frac{3}{10}+\sqrt{\left(\frac{1}{x-2}+\frac{3}{10}\right)^2+\frac{1}{100}}\right|+C$$

(n) Najprej integral preoblikujemo

$$\int \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}.$$

V nadaljevanju se bomo posvetili drugemu.

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \int \frac{-\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+1}} = -\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right| + C.$$

Posledično je

$$\int \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+1} - \ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right| + C.$$

(o) Vpeljemo novo spremenljivko $t^2 = \frac{x}{x+1}$. Posledično je $\mathrm{d}x = \frac{2t}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t$. Dobili smo torej

$$\int \sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x \overset{t^2=\frac{x}{x+1}}{=} \int \frac{2t^2}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Za rešitev tega integrala glej (5a).

(p) Vpeljemo novo spremenljivko $t^2 = \frac{1-x}{x}$. Posledično je $\mathrm{d}x = \frac{-2t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t$. Dobili smo integral

$$-\int \frac{2t^2}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Za rešitev tega integrala glej (5b).

(q) Najprej integral preoblikujemo.

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{(1+\sqrt{x})^2-x-1}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\right)\mathrm{d}x.$$

V nadaljevanju se bomo posvetili integriranju zadnjega člena. Pomagali si bomo z novo spremenljivko $t^2 = \frac{x+1}{x}$.

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x}}\,\mathrm{d}x \overset{t=\frac{x+1}{x}}{=} -\int \frac{2t^2}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t$$

in slednji integral smo izračunali v (5a). Torej

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{\frac{x+1}{x}}-1\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{\frac{x+1}{x}}+1\right| + C.$$

(r) Integral bomo rešiti s pomočjo uvedbe nove spremenljivke.

$$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x \overset{t=\sqrt{1-x}}{=} \int \frac{2}{2-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + C = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{2}}\right| + C.$$

(s) Tudi ta integral bomo rešiti s pomočjo uvedbe nove spremenljivke.

$$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x \overset{t=\frac{1}{x+1}}{=} \int \frac{1}{t\sqrt{\left(\frac{1-t}{t}\right)^2+1}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\sqrt{2t^2-2t+1}}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+\frac{1}{2}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2}(x+1)}\right| + C.$$

(t) Najprej integral preoblikujemo in delno izračunamo

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-(x+1)}\,dx = \int \frac{\sqrt{x^2+x+1}+(x+1)}{-x}\,dx =$$
$$= -\int\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}-1-\frac{1}{x}\right)dx + \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,dx =$$
$$= \sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right| - x - \ln x + \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,dx.$$

Posebej izračunajmo zadnji del.

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,dx \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \int \frac{t}{t^2\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+1}}\,dt = \int \frac{1}{\sqrt{t^2+t+1}}\,dt =$$
$$= \ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right| + C = \ln\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}\right| + C$$

∎

7. Izračunaj naslednje nedoločene integrale funkcij sinus in kosinus:

(a) $\int \cos^2 x\,dx$,

(b) $\int \sin^4 x\,dx$,

(c) $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$,

(d) $\int \sin^3 x\cos x\,dx$,

(e) $\int \cos^{2019} x\sin x\,dx$,

(f) $\int \sin^5 x\cos^2 x\,dx$,

(g) $\int \frac{1}{\cos x}\,dx$,

(h) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x}\,dx$,

(i) $\int \frac{\sin x+\cos x}{1+\sin x}\,dx$,

(j) $\int \frac{1+\sin x}{\sin x\cos x}\,dx$,

(k) $\int \frac{1}{\sin^3 x\cos x}\,dx$,

(l) $\int \frac{1}{2\sin x-3\cos x+3}\,dx$,

(m) $\int \frac{1}{\sin x(2+\cos x)}\,dx$,

(n) $\int \frac{1}{4-3\cos^2 x}\,dx$,

(o) $\int \frac{1}{\sin x\cos x+\cos^2 x}\,dx$,

(p) $\int \frac{1+\tan x}{\sin(2x)-1}\,dx$,

(q) $\int \frac{1+\tan x}{\sin(2x)}\,dx$,

(r) $\int \frac{\sin(2x)}{1+\sqrt{1+\sin x}}\,dx$,

(s) $\displaystyle\int \sin 2x \cos 3x \,\mathrm{d}x,$

(t) $\displaystyle\int \sin 2x \sin 5x \,\mathrm{d}x,$

(u) $\displaystyle\int \cos x \cos 4x \,\mathrm{d}x.$

Rešitev.

(a) $\displaystyle\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin(2x)}{2}\right) + C,$

(b) $\displaystyle\int \sin^4 x \,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2} - 2\cos(2x) + \frac{\cos(4x)}{2}\right)\mathrm{d}x =$
$\displaystyle= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x - \sin(2x) + \frac{\sin(4x)}{8}\right) + C,$

(c) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \int \frac{(1-\cos(2x))(1+\cos(2x))}{4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(4x)}{2}\right)\mathrm{d}x =$
$\displaystyle= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\sin(4x)}{8}\right) + C,$

(d) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos x \,\mathrm{d}x \overset{t=\sin x}{=} \frac{\sin^4 x}{4} + C,$

(e) $\displaystyle\int \cos^{2019} x \sin x \,\mathrm{d}x \overset{t=\cos x}{=} -\frac{\cos^{2020} x}{2020} + C,$

(f) $\displaystyle\int \sin^5 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \int (1-\cos^2 x)^2 \cos^2 x \sin x \,\mathrm{d}x \overset{t=\cos x}{=} -\int (1-t^2)^2 t^2 \,\mathrm{d}t =$
$\displaystyle= -\left(\frac{\cos^3 x}{3} - \frac{2\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7}\right) + C,$

(g) Za ta integral imamo več možnih načinov računanja. Pokažimo dve možnosti.

i. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \overset{t=\sin x}{=} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right| + C$

ii. Uporabimo univerzalno substitucijo $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Spomnimo na naslednje formule $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$. V tem primeru dobimo

$$\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x \overset{t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{=} \int \frac{1}{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)} = \ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + C = \ln\left|\frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right| + C.$$

(h) Integral bomo najprej preoblikovali, nato si bomo pomagali z novo spremenljivko.
$\displaystyle\int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x(1-\cos^2 x)^2}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \overset{t=\cos x}{=} -\int \frac{1-2t^2+t^4}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{t} + 2t - \frac{t^3}{3} + C =$
$\displaystyle= \frac{1}{\cos x} + 2\cos x - \frac{\cos^3 x}{3} + C$

(i) $\displaystyle\int \frac{\sin x + \cos x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(\sin x + \cos x)(1-\sin x)}{1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos^2 x} + 1\right)\mathrm{d}x$

Ta integral lahko razdelimo na pet integralov, idejo kako se integrirajo le-ti pa smo razložili že v predhodnih primerih. Končni rezultat je torej

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right| + \ln|\cos x| - \tan x + x + C.$$

(j) Razdelimo na dva integrala

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x \cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin x \cos x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

Glede na (7g) je dovolj izračunati prvi del.

$$\int \frac{1}{\sin x \cos x}\,\mathrm{d}x \overset{t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{=} \int \frac{t^2+1}{t(1-t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

Za ta integral si pomagamo s parcialnimi ulomki

$$\frac{t^2+1}{t(1-t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{1+t}.$$

Dobimo $A = 1$, $B = 1$ in $C = -1$. Torej

$$\int \frac{t^2+1}{t(1-t^2)}\,\mathrm{d}t = \ln|t| - \ln|t-1| - \ln|t+1| + C.$$

Sledi

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x \cos x}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)-1}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right| + C.$$

(k) Najprej preoblikujemo

$$\int \frac{1}{\sin^3 x \cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\sin^4 x \cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{(1-\cos^2 x)^2 \cos x}\,\mathrm{d}x \overset{t=\cos x}{=} -\int \frac{1}{t(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Sedaj si pomagamo s parcialnimi ulomki. Izkaže se

$$\frac{1}{t(1-t^2)^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{2(t+1)} - \frac{1}{4(t+1)^2} - \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{4(t-1)^2}.$$

Posledično je

$$\int \frac{1}{\sin^3 x \cos x}\,\mathrm{d}x = \ln|\cos x| - \frac{1}{2}\ln|\cos^2 x - 1| + \frac{1}{2(\cos^2 x - 1)} + C = \ln|\cot x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C.$$

(l) Uporabili bomo univerzalno substitucijo.

$$\int \frac{1}{2\sin x - 3\cos x + 3}\,\mathrm{d}x \overset{t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{=} \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\frac{2}{3}t} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t+\frac{1}{3})^2-\frac{1}{9}} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{2}{3}}\right| + C$$

(m) Uporabili bomo univerzalno substitucijo.

$$\int \frac{1}{\sin x(2+\cos x)}\,\mathrm{d}x \overset{t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{=} \int \frac{t^2+1}{t(t^2+3)}\,\mathrm{d}t$$

Ponovno si pomagamo s parcialnimi ulomki in dobimo

$$\int \frac{t^2+1}{t(t^2+3)}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{3t} + \frac{2t}{3(t^2+3)}\right) + C.$$

Torej

$$\int \frac{1}{\sin x(2+\cos x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \frac{1}{3}\ln\left|\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+3\right| + C.$$

(n) Najprej navedimo idejo za integriranje. Naj bodo $A,B,C \in \mathbb{R}$. Tedaj

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{A\sin^2 x + B\sin x\cos x + C\cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x(A\tan^2 x + B\tan x + C)}.$$

V ta integral vpeljemo novo spremeljivko $t = \tan x$ in dobimo racionalno funkcijo. Uporabimo sedaj to idejo v našem primeru.

$$\int \frac{1}{4-3\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x + 4\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{4\cos^2 x(\tan^2 x + \frac{1}{4})}\,\mathrm{d}x \overset{t=\tan x}{=} \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{t}{2}\right) + C = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\tan x}{2}\right) + C$$

(o) $$\int \frac{1}{\sin x\cos x + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x \int \frac{1}{\cos^2 x(\tan x + 1)}\,\mathrm{d}x \overset{t=\tan x}{=} \ln|\tan x + 1| + C.$$

(p) Postopali bomo podobno kot v (7n).
$$\int \frac{1+\tan x}{\sin(2x)-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\tan x}{2\sin x\cos x-\cos^2 x-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \overset{t=\tan x}{=} \int \frac{1+t}{-(t-1)^2}\,\mathrm{d}t =$$
$$= -\int\left(\frac{1}{t-1}+\frac{2}{(t-1)^2}\right)\mathrm{d}t = -\ln|\tan x-1| - \frac{2}{\tan x-1}+C.$$

(q) Najprej bomo preoblikovali integral.
$$\int \frac{1+\tan x}{\sin(2x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x+\sin x}{2\sin x\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{2\sin x(1-\sin^2 x)}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Osredotočimo se na prvega po preoblikovanju.
$$\int \frac{\cos x}{2\sin x(1-\sin^2 x)}\,\mathrm{d}x \overset{t=\sin x}{=} \int \frac{1}{2t(1-t^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{2}{t}+\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\ln|\sin x-1| - 2\ln|\sin x| + \ln|\sin x+1|\right)+C = \frac{1}{2}\ln|\mathrm{ctg} x|+C.$$
Torej
$$\int \frac{1+\tan x}{\sin(2x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|\mathrm{ctg} x| + \frac{1}{2}\tan x + C.$$

(r) Pomagali si bomo z novo spremenljivko.
$$\int \frac{\sin(2x)}{1+\sqrt{1+\sin x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2\sin x\cos x}{1+\sqrt{1+\sin x}}\,\mathrm{d}x \overset{t=1+\sin x}{=} \int \frac{2(t-1)}{1+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int \frac{2(t-1)(1-\sqrt{t})}{1-t}\,\mathrm{d}t = \int 2(\sqrt{t}-1)\;\mathrm{d}t = \frac{4}{3}(\sin x+1)^{\frac{3}{2}} - 2(\sin x+1)+C.$$

(s) $\displaystyle\int \sin 2x\cos 3x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\left(\sin(2x+3x)+\sin(2x-3x)\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(5x)}{5}+\cos(x)\right)+C$

(t) $\displaystyle\int \sin 2x\sin 5x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\left(\cos(2x-5x)-\cos(2x+5x)\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(3x)}{3}-\frac{\sin(7x)}{7}\right)+C$

(u) $\displaystyle\int \cos x\cos 4x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\left(\cos(x+4x)+\cos(x-4x)\right)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(5x)}{5}+\frac{\sin(3x)}{3}\right)+C$

■

Določeni integral in njegova uporaba v geometriji

1. Izračunaj naslednje določene integrale:

   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,\mathrm{d}x,$

   (b) $\displaystyle\int_{2}^{3}\frac{x+1}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x,$

   (c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^3 x\,\mathrm{d}x,$

   (d) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{x2^{x^2}}{1+2^{x^2}}\,\mathrm{d}x.$

Rešitev.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2) = (x-\frac{x^3}{3})\Big|_{-1}^{1} = (1-\frac{1}{3})-(-1+\frac{1}{3}) = \frac{4}{3},$

(b) $\displaystyle\int_{2}^{3}\frac{x+1}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x \overset{t=x^2+2x-3}{=} \int_{5}^{12}\frac{1}{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln|t|\Big|_{5}^{12} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{12}{5}\right),$

(c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^3 x\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin x(1-\cos^2 x)\,\mathrm{d}x \overset{t=\cos x}{=} -\int_{1}^{0}(1-t^2)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{1}(1-t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3},$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{x2^{x^2}}{1+2^{x^2}}\,\mathrm{d}x \overset{t=1+2^{x^2}}{=} \frac{1}{2\ln 2}\int_{2}^{3}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\ln 2}\ln\left(\frac{3}{2}\right).$

■

2. Izračunaj ploščino območja pod grafom funkcije f, ki je podana s predpisom $f(x) = 4 - x^2$, na intervalu $[-2,2]$.
Rešitev. $\int_{-2}^{2}(4-x^2)\ \mathrm{d}x = 2\int_{0}^{2}(4-x^2)\ \mathrm{d}x = \frac{32}{3}$ ∎
3. Izračunaj ploščino lika, ki je določeno takole $y \geq 0$, $y \leq 4 - x^2$ in $y \leq x+2$.
Rešitev. Opazimo, da je vsota dveh integralov
$$\int_{-2}^{1}(x+2)\ \mathrm{d}x + \int_{1}^{2}(4-x^2)\ \mathrm{d}x = \frac{47}{6}.$$
∎
4. V katerem razmerju daljica s krajiščema $(-1,0)$ in $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ razdeli enotski krog?
Rešitev. Opazimo, da zadostuje izračunati ploščino enega dela kroga. Izračunajmo tisti del, ki leži nad daljico.
$$\begin{aligned}P_1 &= \int_{-1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\sqrt{1-x^2} - (\sqrt{2}-1)(x+1)\right)\mathrm{d}x = \\ &= \left(\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x - (\sqrt{2}-1)(\frac{x^2}{2}+x)\right)\Big|_{-1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \\ &= \frac{1}{8}(2+3\pi) + \frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)(3+2\sqrt{2}).\end{aligned}$$
Posledično je razmerje $P_1 : \pi - P_1$. ∎
5. Krivulja $\mathscr{L}$, ki je podana z enačbo $2x+1 = y^2$, razdeli krog $\mathscr{K}$, ki je določen z neenačbo $x^2+y^2 \leq 4$, na dva dela. Izračunaj razmerje ploščin nastalih delov kroga $\mathscr{K}$ pri delitvi s krivuljo $\mathscr{L}$.
Rešitev. Dovolj je izračunati eno ploščno, saj je vemo, da je ploščina kroga v našem primeru 4π.
$$\begin{aligned}p_1 &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{4-y^2} - \frac{y^2-1}{2}\right)dy = 2\left(\frac{1}{2}y\sqrt{4-y^2} + 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{y^3}{6} + \frac{y}{2}\right)\Big|_{0}^{\sqrt{3}} = \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3}\right).\end{aligned}$$
Za integral glej rešitev naloge 26. V našem primeru je razmerje med ploščinama $(\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3}) : (\frac{8\pi}{3} - \sqrt{3})$. ∎
6. S pomočjo integrala izračunaj ploščino območja, ki ga določa elipsa z enačbo
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$
Rešitev.
$$4\int_{0}^{2}\sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2}\ \mathrm{d}x = 6\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}\ \mathrm{d}x.$$
Nedoločeni integral $\int\sqrt{4-x^2}\ \mathrm{d}x$ izračunamo na naslednji način
$$\int\sqrt{4-x^2}\ \mathrm{d}x = \int\frac{4-x^2}{\sqrt{4-x^2}}\ \mathrm{d}x = (Ax+B)\sqrt{4-x^2} + C\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\ \mathrm{d}x.$$
Izkaže se, da je v tem primeru ploščina elipse 6π. ∎
7. S pomočjo integrala izpelji formulo za računanje ploščine elipse, ki je določena z neenačbo
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1,$$

kjer sta $a, b > 0$.
Rešitev. Naloga se reši podobno kot v 6. Natančneje

$$4\int_0^a \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}\,\mathrm{d}x = 4\frac{b}{a}\int_0^2 \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

V tem primeru ploščina elipse πab. ∎

8. Izračunaj ploščino območja pod grafom funkcije $f : [\frac{2}{3}, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{1-x}}{2\sqrt{x}}$.

Rešitev.

$$\int_{\frac{2}{3}}^1 \frac{1+\sqrt{1-x}}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{2}{3}}^1 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) + \frac{1}{4}\left(-\frac{t}{t^2+1} + \arctan t\right)\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^0 = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{4}\left(\frac{-\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$$

Nedoločeni integral $\int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ smo izračunali v (6p) prejšnjega razdelka. ∎

9. Izračunaj ploščino tistega dela območja v ravnini, ki zadošča pogojema $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \le 1$ in $y \ge \frac{9x^2}{32}$.

Rešitev. Za meje v določenem integralu poiščemo presečišča krivulj z enačbama $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ in $y = \frac{9x^2}{32}$. Dobimo, da sta prvi koordinati presečišč $x_1 = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ in $x_2 = -\frac{4\sqrt{2}}{3}$. Nadalje, opazimo, da je območje simetrično glede na os y in s tem si poenostavimo računanje.

$$pl = 2\int_0^{\frac{4\sqrt{2}}{3}} \left(\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2} - \frac{9x^2}{32}\right)\mathrm{d}x = 3\int_0^{\frac{4\sqrt{2}}{3}} \left(\sqrt{4-x^2} - \frac{3x^2}{16}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= 3\left(\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin(\frac{x}{3}) - \frac{x^3}{16}\right)\Big|_0^{\frac{4\sqrt{2}}{3}} = 3\left(\frac{4\sqrt{2}}{9} + 2\arcsin\frac{4\sqrt{2}}{9} - \frac{8\sqrt{2}}{3}\right).$$

∎

10. Izračunaj ploščino lika, ki ga določajo krivulje z enačbami $y = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$, $x = 1$ in $y = 0$.

Rešitev. Opazimo, da bomo integrirali na intervalu $[0, 1]$. Omenimo, da bomo ustrezen določeni integral izračunali s pomočjo integriranja po delih: $u = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$ in $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$.

$$pl = \int_0^1 \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)\mathrm{d}x = x\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) + 2\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1 = \ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) + 2\sqrt{2} - 2.$$

∎

11. Izračunaj dolžino loka grafa funkcije $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sqrt{1+x}$.

Rešitev.

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{2}{2\sqrt{1+x}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Uvedimo novo spremenljivko $t^2 = \frac{x+2}{x+1}$. Tako dobimo integral

$$\int_2^{\frac{3}{2}} \frac{-2t^2}{(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Sedaj si pomagamo s (5a) prejšnjega razdelka in dobimo, da je dolžina loka enaka

$$\ell = \frac{6}{5} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{5}\right| - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{3}\right| = \frac{8}{15} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{5}{3}\right|.$$

∎

12. Izračunaj dolžino loka krivulje z enačbo $y = \ln(x)$ na intervalu $[1, e]$.
Rešitev. Pomagaj si s (6n) prejšnjega razdelka.

$$\begin{aligned}\ell &= \int_1^e \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x = \left(\sqrt{x^2+1} - \ln\left|\frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right|\right)\Big|_1^e = \\ &= \sqrt{e^2+1} - \ln\left|\frac{1}{e} + \sqrt{1+\frac{1}{e^2}}\right| - \sqrt{2} + \ln\left|1+\sqrt{2}\right|.\end{aligned}$$

∎

13. Izračunaj dolžino krivulje, ki je določena z enačbo $y = \sqrt{x-x^2} + \arcsin(\sqrt{x})$.
Rešitev. Opazimo, da je krivulja definirana na integralu $[0,1]$. Izračunajmo odvod

$$y' = \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

Torej

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{1-x}{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2.$$

∎

14. Naj bo $a > 1$ in naj bo funkcija $f : [1,a] \to \mathbb{R}$ podana s predpisom $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$. $P(a)$ naj označuje ploščino lika pod grafom funkcije f, $s(a)$ pa dolžino loka, ki ga določa graf funkcije f. Dokaži, da je

$$P(a) + s(a) = af(a).$$

Rešitev. Izračunajmo najprej $P(a)$. Pomagali si bomo z integriranjem po delih.

$$\begin{aligned}P(a) &= \int_0^a \ln(x+\sqrt{x^2-1})\,\mathrm{d}x = \\ &= \begin{pmatrix} u = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) & \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x & v = x \end{pmatrix} \left(x\ln(x+\sqrt{x^2-1})\Big|_1^a - \int_0^a \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x \right) = \\ &= a\ln(a+\sqrt{a^2-1}) - \sqrt{a^2-1}\end{aligned}$$

Sedaj izračunajmo še $s(a)$.

$$s(a) = \int_0^a \sqrt{1+\frac{1}{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{a^2-1}$$

Posledično je

$$P(a) + s(a) = a\ln(a+\sqrt{a^2-1}) - \sqrt{a^2-1} + \sqrt{a^2-1} = af(a).$$

∎

15. Dokaži, da ima graf funkcije $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, enako dolg lok kot je dolžina loka elipse z enačbo $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.
Rešitev. Opazimo, da sta tako graf funkcije f in kot elipsa sestavljena iz štirih enakih delov. Torej je dovolj dokazati

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+\frac{x^2}{4-2x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Osredotočimo se na desno stran.

$$\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+\frac{x^2}{4-2x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{4-x^2}{2-x^2}}\,\mathrm{d}x \overset{t=\sqrt{2}\sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{4-2\sin^2 t}{2-2\sin^2 t}}\cos t\,\mathrm{d}t = \\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

S tem je trditev dokazana. ∎

16. Lik $\mathscr{L}$ je v ravnini določen s krivuljama z enačbama $y^2 = 4x$ in $y = 2$ ter osjo y. Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki ga dobimo z vrtenjem lika $\mathscr{L}$ okoli
    (a) osi x,
    (b) osi y.

Rešitev.

(a) $V = \pi\int_0^1 4x\,\mathrm{d}x = 2\pi$.

(b) V tem primeru zamenjamo vlogi x in y.

$$V = \pi\int_0^2 \left(1-\frac{y^4}{16}\right)\,\mathrm{d}x = \left(2-\frac{32}{80}\right)\pi = \frac{8}{5}\pi.$$

∎

17. Lik $\mathscr{L}$ je v ravnini določen z množico

$$M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1-x \le y \le 1-x^2\}.$$

(a) Izračunaj ploščino lika $\mathscr{L}$.
(b) Izračunaj obseg lika $\mathscr{L}$.
(c) Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki ga dobimo z vrtenjem lika $\mathscr{L}$ okoli osi x.
(d) Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki ga dobimo z vrtenjem lika $\mathscr{L}$ okoli osi y.
(e) Izračunaj površino rotacijskega telesa, ki ga dobimo z vrtenjem lika $\mathscr{L}$ okoli osi x.

Rešitev.

(a) $\int_0^1 ((1-x^2)-(1-x))\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$.

(b) Opazimo, da je en del obsega daljica dolžine $\sqrt{2}$. Torej je dovolj izračunati naslednji integral:

$$\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1+4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Prej bomo izračunali nedoločeni integral.

$$\int \frac{1+4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\,\mathrm{d}x = (Ax+B)\sqrt{1+4x^2} + C\int \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Ponovno odvajamo in dobimo $A = \frac{1}{2}$, $B = 0$ in $C = \frac{1}{2}$. Torej

$$\ell = \int_0^1 \frac{1+4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{1+4x^2}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}\,\mathrm{d}x = \\ = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right|\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})$$

Obseg lika je tako $\sqrt{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})$.

(c) $V=\pi\int_0^1((1-x^2)^2-(1-x)^2)\,\mathrm{d}x=\pi\left(x^2-x^3+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{5}.$

(d) $V=\pi\int_0^1((\sqrt{1-y})^2-(1-y)^2)\,\mathrm{d}y=\pi\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}.$

(e) $P=2\pi\int_0^1\left((1-x^2)\sqrt{1+4x^2}+(1-x)\sqrt{2}\right)\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^1\left(\frac{1+3x^2+4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}+(1-x)\sqrt{2}\right)\,\mathrm{d}x$

Najprej izračunjamo naslednji nedoločeni integral.

$$\int\frac{1+3x^2+4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\,\mathrm{d}x=(Ax^3+Bx^2+Cx+D)\sqrt{1+4x^2}+E\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+4x^2}}$$

Upoštevajmo dejstvo, da je integral sode funkcije liha funkcija (podobno velja, da je integral lihe funkcije soda funkcija), zato je $B=0$ in $D=0$. Sedaj enačbo odvajamo in rešimo ustrezni sistem. Dobimo $A=\frac{1}{16}$, $C=\frac{39}{112}$ in $E=\frac{73}{112}$. Sledi

$$\int\frac{1+3x^2+4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\,\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{16}x^3+\frac{39}{112}x\right)\sqrt{1+4x^2}++\frac{73}{112}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right|.$$

Sedaj ni več težko izračunati površine telesa.

$$P=2\pi\left(\frac{23}{56}\sqrt{5}+\frac{73}{112}\ln(2+\sqrt{5})+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

∎

18. Naj bosta $a,b>0$. Elipso z enačbo $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ zavrtimo okoli osi x. Določi volumen nastalega rotacijskega telesa.
Rešitev.
$$V=2\pi b^2\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$
∎

19. Izračunaj prostornino rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem krivulje z enačbo $y^2=\dfrac{x^2-3x}{x-4}$ okoli osi x na območju $0\le x\le 3$.
Rešitev. $V=\pi\int_0^3\frac{x^2-3x}{x-4}\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^3\left(x+1+\frac{4}{x-4}\right)\,\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^2}{2}+x+4\ln|x-4|\right)\Big|_0^3=\frac{15}{2}-8\ln 2.$ ∎

20. Izračunaj prostornino rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem grafa funkcije f, ki je podana s predpisom $f(x)=\sin x$, med njenima dvema zaporednima ničlama okoli osi x.
Rešitev.
$$\pi\int_0^\pi\sin^2x\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos(2x))\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{2}.$$
∎

21. Izračunaj volumen torusa s polmeroma R in r, $R>r$.
Rešitev. Torus s polmeroma R in r je telo, ki ga dobimo tako, da krožnico z enačbo
$$x^2+(y-R)^2=r^2$$
zavrtimo okoli osi x. Njegov volumen se izraža kot
$$V=\pi\int_{-r}^r\left((R+\sqrt{r^2-x^2})^2-(R-\sqrt{r^2-x^2})^2\right)\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x.$$
Slednji integral predstavlja četrtino ploščine kroga z radijem r. Volumen rotacijskega telesa je tako
$$V=2\pi^2r^2R.$$
∎

22. Izračunaj prostornino rotacijskih teles, ki jo dobiš z vrtenjem lika, ki ga ograjujejo parabola z enačbo $y^2 = 4x$, premica z enačbo $y = 2$ in os y, okoli
   (a) osi x,
   (b) osi y.

Rešitev.
(a) $V = \pi \int_0^1 (2 - 2\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \pi \left(2x - \frac{4}{3}\sqrt{x^3}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\pi.$
(b) $V = \pi \int_0^2 \frac{1}{4}y^2\,\mathrm{d}y = \pi \frac{1}{12}y^3\Big|_0^2 = \frac{2}{3}\pi.$

∎

23. Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem krivulje z enačbo $y = \sqrt{\ln(4 - x^2)}$ okoli abscisne osi.

Rešitev. $V = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \ln(4 - x^2)\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \ln(4 - x^2)\,\mathrm{d}x = 2\pi(-2\sqrt{3} + 4\ln(2 + \sqrt{3})).$ ∎

24. Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem grafa funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x} - 3 + 2e^{-2x}$, med ničlama funkcije f.

Rešitev. Najprej poiščemo ničle funkcije f:

$$\begin{aligned} e^{2x} - 3 + 2e^{-2x} &= 0 \\ e^{-2x}(e^{4x} - 3e^{2x} + 2) &= 0 \\ e^{-2x}(e^{2x} - 1)(e^{2x} - 2) &= 0. \end{aligned}$$

Iz tega sledi, da so ničle 0 in $\frac{\ln 2}{2}$. Sedaj izračunajmo še volumen

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\ln 2}{2}} (e^{2x} - 3 + 2e^{-2x})^2\,\mathrm{d}x == \pi \int_0^{\frac{\ln 2}{2}} (e^{4x} + 9 + 4e^{-4x} - 6e^{2x} + 4 - 12e^{-2x})\,\mathrm{d}x = \\ &= \pi \left(\frac{e^{4x}}{4} - e^{-4x} - 3e^{2x} + 6e^{-2x} + 13x\right)\Big|_0^{\frac{\ln 2}{2}} = \pi\left(\frac{-9}{2} + \frac{13}{2}\ln 2\right). \end{aligned}$$

∎

25. Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenem grafa funkcije f, $f(x) = \frac{\sqrt{1-2x}}{x^2-4}$, okoli osi x v prvem kvadrantu.

Rešitev. Izračunati je potrebno naslednji integral

$$V = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - 2x}{(x^2 - 4)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Pomagali si bomo s parcialnimi ulomki.

$$\frac{1 - 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{(x - 2)^2} + \frac{C}{x + 2} + \frac{D}{(x + 2)^2}.$$

Izkaže se, da je $A = -\frac{1}{32}$, $B = -\frac{3}{16}$, $C = \frac{1}{32}$ in $D = \frac{5}{16}$. Nadaljujmo z integriranjem

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - 2x}{(x^2 - 4)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{32} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{x - 2} - \frac{6}{(x - 2)^2} + \frac{1}{x + 2} + \frac{10}{(x + 2)^2}\right)\mathrm{d}x = \\ &= \frac{\pi}{32}\left(-\ln|x - 2| + \frac{6}{x - 2} + \ln|x + 2| - \frac{10}{x + 2}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{32}\ln\left(\frac{5}{3}\right). \end{aligned}$$

∎

26. Lik $\mathscr{L}$ je v prvem kvadrantu določen s krivuljama z enačbama $y = \sqrt{x}$ in $x^2 + y^2 = 4x$ ter osjo x. Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem $\mathscr{L}$ okoli osi y.

Rešitev.

$$V=\pi\int_0^{\sqrt{3}}\left((2+\sqrt{4-y^2})^2-y^4\right)\mathrm{d}y=\pi\int_0^{\sqrt{3}}\left(8-y^2-y^4+4\sqrt{4-y^2}\right)\mathrm{d}y=$$
$$=\pi\left(8\sqrt{3}-\sqrt{3}-\frac{9\sqrt{3}}{5}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2\pi}{3}\right).$$

Pri tem smo upoštevali $\int\sqrt{4-y^2}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}y\sqrt{4-y^2}+2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+C$. ∎

27. Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki ga dobimo tako, da lik, ki je določen s $4x^2+y^2\leq 25$, $y\geq x$ in $y\geq 0$, zavrtimo okoli
   (a) osi x,
   (b) premice $x=\frac{5}{2}$.

Rešitev.

(a) $V=\pi\int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}}(25-4x^2)\,\mathrm{d}x-\pi\int_0^{\sqrt{5}}x\,\mathrm{d}x=2\pi(25x-\frac{4}{3}x^3)\Big|_0^{\frac{5}{2}}-\pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{5}}=\frac{485}{6}\pi.$

(b) $$V=\pi\int_0^{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{25-y^2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}-y\right)^2\right)\mathrm{d}y+$$
$$+\pi\int_{\sqrt{5}}^{5}\left(\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{25-y^2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{25-y^2}\right)^2\right)\mathrm{d}y=$$
$$=\pi\int_0^{\sqrt{5}}\left(\frac{25}{4}+5y-\frac{5}{4}y^2+\frac{5}{2}\sqrt{25-y^2}\right)\mathrm{d}y+\pi\int_{\sqrt{5}}^{5}5\sqrt{25-y^2}\,\mathrm{d}y=$$
$$=\pi\left(\frac{25\sqrt{5}}{4}-\frac{125\sqrt{5}}{12}+\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{20}+\frac{25}{2}\arcsin(\sqrt{5})+\frac{125\pi}{4}-\frac{5\sqrt{5}}{2}\sqrt{20}-\frac{125}{2}\arcsin(\sqrt{5})\right)=$$
$$=\pi\left(\frac{125\pi}{4}-20-50\arcsin(\sqrt{5})-\frac{25\sqrt{5}}{6}\right).$$

Pri tem smo upoštevali, da je $\int\sqrt{25-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\sqrt{25-x^2}+\frac{25}{2}\arcsin\left(\frac{x}{5}\right)+C$.

∎

28. Izračunaj površino rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem krivulje z enačbo $y=(3-x)\dfrac{\sqrt{x}}{3}$ okoli osi x na intervalu $[0,3]$.

Rešitev. $P=2\pi\int_0^3\frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x)\sqrt{1+\left(\frac{1-x}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}\int_0^3(3-x)(x+1)\,\mathrm{d}x=3\pi.$ ∎

29. Izračunaj površino rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem krivulje z enačbo $y=x-x^2$, pri pogoju $y\geq 0$, okoli osi
   (a) osi x,
   (b) osi y.

Rešitev.

(a) $P=2\pi\int_0^1(x-x^2)\sqrt{1+(1-2x)^2}\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^1\frac{2x-6x^2+8x^3-4x^4}{\sqrt{1+(1-2x)^2}}\,\mathrm{d}x$

Uporabimo naslednji nastavek

$$\int\frac{2x-6x^2+8x^3-4x^4}{\sqrt{1+(1-2x)^2}}\,\mathrm{d}x=(Ax^3+Bx^2+Cx+D)\sqrt{1+(1-2x)^2}+E\int\frac{1}{\sqrt{1+(1-2x)^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Zgornji nastavek odvajamo in nastavimo sistem linearnih enačb. Po reševanju sistema dobimo $A=-\frac{1}{4}$, $B=\frac{3}{8}$, $C=-\frac{3}{32}$, $D=-\frac{1}{64}$ in $F=\frac{5}{32}$. Dodajmo še

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+(1-2x)^2}}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln\left|1-2x+\sqrt{1+(1-2x)^2}\right|+C.$$

Za končni izračun vstavimo samo še meje.

(b) $P=2\pi\int_0^{\frac14}\left(\frac12+\sqrt{\frac14-y}\right)\sqrt{1+\left(\frac{-1}{2\sqrt{\frac14-y}}\right)^2}\,\mathrm{d}y=\pi\int_0^{\frac14}\left(1+\sqrt{1-4y}\right)\sqrt{\frac{2-4y}{1-4y}}\,\mathrm{d}y=$

$=\pi\int_0^{\frac14}\left(\sqrt{\frac{2-4y}{1-4y}}+\sqrt{2-4y}\right)\mathrm{d}y=\pi\int_0^{\frac14}\sqrt{\frac{2-4y}{1-4y}}\,\mathrm{d}y-\frac{\pi}{6}\sqrt{(2-4y)^3}\Big|_0^{\frac14}=$

$=\pi\int_0^{\frac14}\sqrt{\frac{2-4y}{1-4y}}\,\mathrm{d}y-\frac{\pi}{6}(1-\sqrt{8})$

Izračunajmo najprej nedoločeni integral.

$$\int\sqrt{\frac{2-4y}{1-4y}}\,\mathrm{d}y\overset{t^2=\frac{2-4y}{1-4y}}{=}\int\frac{t^2}{2(t^2-1)^2}\,\mathrm{d}t=-\frac14\frac{t}{(t-1)(t+1)}+\frac18\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

Za več pri slednjem integralu glej (5a) prejšnjega razdelka. Do konca zamenjamo spremenljivke in izračunamo določeni integral.

∎

Posplošeni integral

1. Izračunaj posplošene integrale, če obstajajo:
   (a) $\int_1^\infty\frac{x^2+1}{x^4}\,\mathrm{d}x$,
   (b) $\int_0^\infty\frac{x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$,
   (c) $\int_0^1 x\ln x\,\mathrm{d}x$,
   (d) $\int_0^2\frac{1}{\sqrt{|x-1|}}\,\mathrm{d}x$.

Rešitev.

(a) Integral konvergira, saj

$\int_1^\infty\frac{x^2+1}{x^4}\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)\mathrm{d}x=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac1x-\frac{1}{3x^3}\right)\Big|_1^b=$

$=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac1b-\frac{1}{3b^3}+1+\frac13\right)=\frac43.$

(b) Opazimo, da je

$$\int_0^\infty\frac{x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to\infty}\frac12\ln(x^2+4)\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(\frac12\ln(b^2+4)-\frac12\ln4\right).$$

Ker slednja limita ne obstaja, zato integral divergira (oziroma ne konvergira).

(c) Integral konvergira, saj je

$$\int_0^1 x\ln x\,\mathrm{d}x=\lim_{a\downarrow0}\int_a^1 x\ln x\,\mathrm{d}x=\lim_{a\downarrow0}\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right)\Big|_a^1=\lim_{a\downarrow0}\left(-\frac14-\frac{a^2}{2}\ln a+\frac{a^2}{4}\right)=-\frac14.$$

Opomba: $\lim_{a\downarrow0}\frac{a^2}{2}\ln a=0$ lahko izračunamo s pomočjo L'Hospitalovega pravila.

(d) Opazimo,da ima funkcija pol v točki 1, zato bomo integral razdelili na naslednji način

$$\int_0^2\frac{1}{\sqrt{|x-1|}}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{|x-1|}}\,\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{1}{\sqrt{|x-1|}}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$$

Izračunajmo vsakega posebej.

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x=\lim_{a\to1}\int_0^a\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x=\lim_{a\to1}\left(-2\sqrt{1-x}\Big|_0^a\right)=2.$$

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 1}\int_0^a \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 1}\left(2\sqrt{x-1}\Big|_a^2\right) = 2.$$

Torej $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}\,\mathrm{d}x = 4.$

■

2. Izračunaj naslednje posplošene integrale
   (a) $\displaystyle\int_0^\infty x^3 e^{-x}\,\mathrm{d}x,$
   (b) $\displaystyle\int_0^\infty x^{\frac{5}{2}} e^{-x}\,\mathrm{d}x.$

   Rešitev. Pomagali si bomo s funkcijo Gama, tj. $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ za vsak $x>0$. Za vsak $x>0$ velja $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ in $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
   (a) $\displaystyle\int_0^\infty x^3 e^{-x}\,\mathrm{d}x = \Gamma(4) = 3!,$
   (b) $\displaystyle\int_0^\infty x^{\frac{5}{2}} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \Gamma(\frac{7}{2}) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}.$

■

3. Ali obstajata integrala
   (a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$
   (b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x.$

   Če kateri od njiju konvergira, ga izračunaj.
   Rešitev.
   (a) Integral divergira, saj je

$$\int_1^\infty \frac{x\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \geq \int_e^\infty \frac{x\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \geq \int_2^\infty \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty}\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_e^a = \infty.$$

   (b) Integral konvergira, saj je

$$\int_1^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \leq \int_1^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^a = 1.$$

   Integral še izračunajmo. Najprej bomo izračunali nedoločeni integral.

$$\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} u=\ln x & \mathrm{d}v = \frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x} & v = -\frac{1}{2(1+x^2)} \end{pmatrix} \left(-\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \int \frac{1}{2x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\right) =$$
$$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\left(\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right) + C$$

   Sedaj izračunajmo nedoločeni integral.

$$\int_1^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1)\right)\Big|_1^a =$$
$$= \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{\ln a}{2(1+a^2)} + \frac{1}{2}\ln|a| - \frac{1}{4}\ln(a^2+1) + \frac{\ln 2}{4}\right) =$$
$$= \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{\ln a}{2(1+a^2)} + \frac{1}{2}\ln\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{\ln 2}{4}\right) = \frac{\ln 2}{4}.$$

■

4. Preveri, da sta integrala $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$ in $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$ enaka.

   Rešitev. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x \overset{x=\frac{\pi}{2}-t}{=} -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln(\sin(\frac{\pi}{2}-t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$ ■

5. Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki nastane, če graf funkcije $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-\frac{5}{2}}$, zavrtimo okoli x osi.
Rešitev. $V = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^5}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty} \frac{-1}{4x^4}\Big|_1^a = \frac{1}{4}$ ∎

6. Funkcija $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ je podana s predpisom $f(x) = \frac{1}{x}$. Dokaži, da ima telo, ki nastane z vrtenjem grafa funkcije f okoli osi x, končen volumen in neskončno površino.
Rešitev. Nalogo bomo dokazali z direktnim računanjem. Najprej izračunajmo volumen.

$$V = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \pi \lim_{a\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^a = \pi$$

Sedaj pa še preverimo, da je površina neskončna.

$$\begin{aligned}
P &= 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_1^\infty \frac{x^2+1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \\
&= 2\pi \left(\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x \right) = \\
&= 2\pi \left(\lim_{a\to\infty} \ln|x+\sqrt{x^2+1}|\Big|_1^a + \int_1^\infty \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x \right) = \\
&\overset{t=\frac{1}{x}}{=} 2\pi \left(\lim_{a\to\infty} \ln|x+\sqrt{x^2+1}|\Big|_1^a - \int_1^0 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t \right) \\
&= 2\pi \left(\lim_{a\to\infty} \ln|x+\sqrt{x^2+1}|\Big|_1^a + \sqrt{t^2+1}\Big|_0^1 \right) = \infty.
\end{aligned}$$

Kot zanimivost dodajmo, da se zgoraj omenjeno telo imenuje *Torricellijeva trobenta* oziroma *Gabrielov rog*. Torej ta trobenta oziroma rog ima naslednjo lastnost: vanjo lahko natočimo končno mnogo barve, toda nemogoče jo je pobarvarti s končno mnogo barve. Ali ni to paradoksalno? ∎

7. Ali konvergira integral
$$\int_3^\infty \frac{1}{x^2-1+\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x?$$
Če konvergira, ga izračunaj.
Rešitev. Ni težko preveriti, da integral konvergira, zato ga bomo izračunali.

$$\begin{aligned}
&\int_3^\infty \frac{1}{x^2-1+\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x \overset{t=\sqrt{x+1}}{=} \int_2^\infty \frac{2}{t^3-2t+1}\,\mathrm{d}t = \int_2^\infty \frac{2}{(t-1)(t^2+t-1)}\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_2^\infty \left(\frac{1}{t-1} - \frac{t+2}{t^2+t-1} \right)\mathrm{d}t = \int_2^\infty \left(\frac{1}{t-1} - \frac{t+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}} \right)\mathrm{d}t = \\
&= \lim_{a\to\infty} \left(\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln\left|t^2+t-1\right| - \frac{3}{2\sqrt{5}} \ln\left| \frac{t+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{t+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}} \right| \right)\Big|_2^a = \\
&= \lim_{a\to\infty} \left(\ln\left| \frac{t-1}{\sqrt{t^2+t-1}} \right| - \frac{3}{2\sqrt{5}} \ln\left| \frac{t+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{t+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}} \right| \right)\Big|_2^a = -\ln\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{3}{2\sqrt{5}} \ln\left(\frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}\right).
\end{aligned}$$

∎

8. Izračunaj
$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{e^x}\,\mathrm{d}x.$$
Rešitev. $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{e^x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1-\cos(2x)}{2} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\lim_{a\to\infty}\left(-e^{-x} - \frac{1}{5}(2\sin(2x)-\cos(2x))e^{-x}\right)\Big|_0^a =$
$= \frac{2}{5}$ ∎

9. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Izračunaj volumen (posplošenega) rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem grafa funkcije $f:(0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}(-\ln x)^{\frac{n}{4}}$, okoli osi x.

Rešitev. $V = \pi \int_0^1 x(-\ln x)^{\frac{n}{2}}\, \mathrm{d}x \overset{t=-\ln x}{=} \pi \int_\infty^0 t^{\frac{n}{2}}(-e^{-2t})\, \mathrm{d}t \overset{s=2t}{=} \frac{\pi}{2^{\frac{n}{2}+1}} \int_0^\infty s^{\frac{n}{2}} e^{-s} \mathrm{d}s = \frac{\pi}{2^{\frac{n}{2}}} \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$. ∎

10. Ali konvergira integral

$$\int_0^e \frac{x}{\sqrt{|\ln x - 1|}}\, \mathrm{d}x?$$

Če konvergira, ga izračunaj.

Rešitev. $\int_0^e \frac{x}{\sqrt{|\ln x - 1|}}\, \mathrm{d}x = \int_0^e \frac{x}{\sqrt{1-\ln x}}\, \mathrm{d}x \overset{t=1-\ln x}{=} -e^2 \int_\infty^0 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-2t}\, \mathrm{d}t = e^2 \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-2t}\, \mathrm{d}t =$
$\overset{s=2t}{=} \frac{e^2}{\sqrt{2}} \int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}} e^{-s}\, \mathrm{d}s = \frac{e^2}{\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = e^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. ∎

11. Izračunaj

$$\int_{\ln 4}^\infty \frac{1}{e^{2x} - e^{-x}}\, \mathrm{d}x.$$

Rešitev. Najprej izračunajmo nedoločeni integral.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{e^{2x}-e^{-x}}\, \mathrm{d}x &\overset{t=e^x}{=} \int \frac{1}{e^{-x}(e^{3x}-1)}\, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{t^3-1} \mathrm{d}t = \\
&= \int \frac{1}{(t-1)(t^2+t+1)} \mathrm{d}t = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{t+2}{t^2+t+1}\right) \mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{3}\left(\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t^2+t+1| - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\right) + C = \\
&= \frac{1}{3}\left(\ln\left|\frac{e^x-1}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}\right| - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2e^x+1}{\sqrt{3}}\right)\right) + C.
\end{aligned}$$

Sedaj izračunajmo še posplošeni integral

$$\begin{aligned}
\int_{\ln 4}^\infty \frac{1}{e^{2x}-e^{-x}}\, \mathrm{d}x &= \lim_{a\to\infty} \frac{1}{3}\left(\ln\left|\frac{e^x-1}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}\right| - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2e^x+1}{\sqrt{3}}\right)\right)\Bigg|_{\ln 4}^a = \\
&= \frac{1}{3}\left(\sqrt{3}\arctan(3\sqrt{3}) - \frac{\pi\sqrt{3}}{2} + \ln\left(\frac{3}{13}\right)\right).
\end{aligned}$$

∎

Stvarno kazalo

Literatura

[1] I. Banič, I. Hrastnik, S. Špacapan, J. Žerovnik, *Zbirka rešenih nalog iz tehniške matematike*, FS, Maribor, 2003.

[2] I. N. Bronštejn, (et al.), *Matematični priročnik*, TZS, Ljubljana, 1997.

[3] B. Butinar, *Matematika I, naloge z rešitvami*, FKKT, Maribor, 2004.

[4] P. Dawkins, *Online notes*, Lamar University, e-gradivo, dosegljivo na *http://tutorial.math.lamar.edu*

[5] M. Dobovišek, M. Hladnik, M. Omladič, *Rešene naloge iz analize*, DMFA, Ljubljana, 1979.

[6] B. Drinovec Drnovšek, S. Strle, *Naloge iz Analize 1 z odgovori, nasveti in rešitvami*, DMFA, Ljubljana, 2012.

[7] B. Hvala, *Zbirka izpitnih nalog iz analize*, DMFA, Ljubljana, 2000.

[8] R. Jamnik, *Matematika*, DMFA, Ljubljana, 1994.

[9] M. Mencinger, *Zbirka rešenih nalog iz matematične analize in algebre*, FG, Maribor, 2006.

[10] I. Vidav, *Matematika 1*, DMFA, Ljubljana, 1990.

[11] I. Vidav, *Višja matematika I*, DMFA, Ljubljana 1994.

[12] P. Žigert Pleteršek, M. Črepnjak, *Matematika I-visokošolski učbenik z rešenimi nalogami*, FKKT, Maribor, 2013. e-gradivo dostopno na *https://www.dlib.si*

MATEMATIKA A:

ZA ŠTUDENTE FKKT UM

PETRA ŽIGERT PLETERŠEK IN MATEVŽ ČREPNJAK
Univerza v Mariboru, Fakulteta za kemijo in kemijsko tehnologijo, Maribor, Slovenija.
E-pošta: petra.zigert@um.si, matevz.crepnjak@um.si

Povzetek Učbenik je prvi korak v visokošolsko matematiko na tehniško usmerjeni fakulteti. Obravnava vsebine, s katerimi so se študenti delno seznanili že v srednji šoli, a je pristop na višjem nivoju. Obravnavani so osnovni pojmi iz logike in množic, realne funkcije ene spremenljivke, vrste, diferencialni in integralni račun. Vsebina je po težavnosti diferencirana, kar je razvidno s tekstom v drugi barvi, ki zajema predvsem težje dokaze. Teorija je podprta z velikim številom računskih nalog, pri čemer je pri vsaki podan natančen postopek reševanja skupaj z rešitvijo.

Ključne besede: logika, množice, realne funkcije, limita in zveznost funkcije, zaporedja, vrste, odvod funkcije, integral

Univerzitetna založba Univerze v Mariboru
DOI https://doi.org/10.18690/um.fkkt.1.2022
ISBN 978-961-286-554-2

Mathematics A: for Students of FKKT UM

Petra Žigert Pleteršek & Matevž Črepnjak
University of Maribor, Faculty of Chemistry and Chemical Engineering, Maribor, Slovenia
E-mail: petra.zigert@um.si, matevz.crepnjak@um.si

Abstract The textbook is the first step in higher education mathematics at a technically oriented faculty. It deals with content that students have already become partially acquainted with in high school, but the approach is at a higher level. Basic concepts from logic and sets, real functions of one variable, series, differential and integral calculus are discussed. The content is differentiated according to difficulty, which is evident from the text in another color, which covers mainly more difficult proofs. The theory is supported by many computational problems, each with a detailed solution procedure along with the solution.

Keywords: logic, sets, real functions, limit and continuity of a function, sequences, series, derivative of a function, integral

https://doi.org/10.18690/um.fkkt.1.2022 DOI
978-961-286-554-2 ISBN

University of Maribor Press