Simetrijske Grupe Končnih Vzorcev

Matej Mencinger

Univerzitetna založba
Univerze v Mariboru

Univerza v Mariboru

Fakulteta za gradbeništvo,
prometno inženirstvo in arhitekturo

Simetrijske grupe končnih vzorcev

Avtor
Matej Mencinger

December 2021

Naslov **Simetrijske grupe končnih vzorcev**
Title *Symmetry Groups of Finite Patterns*

Avtor Matej Mencinger
Author (Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo)

Recenzija Borut Zalar
Review (Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo)

Janez Žerovnik
(Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo)

Jezikovni pregled Jerneja Klemenčič
Language edeting

Tehnična urednika Andrej Tibaut
Technical editors (Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo)

Jan Perša
(Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba)

Oblikovanje ovitka Nejc Novak
Cover designer

Grafika na ovitku Leo, Anja Mencinger, 2021
Cover graphics

Grafične priloge Jurij Avsec, Tomislav Letnik, Anja Mencinger, Matej Mencinger, Nejc Novak
Graphic material in Matjaž Skrinar

Založnik **Univerza v Mariboru**
Published by **Univerzitetna založba**
Slomškov trg 15, 2000 Maribor, Slovenija
https://press.um.si, zalozba@um.si

Izdajatelj **Univerza v Mariboru**
Issued by **Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo**
Smetanova ulica 17, 2000 Maribor, Slovenija
https://www.fgpa.um.si, fgpa@um.si

Izdaja Prva izdaja
Edition

Vrsta publikacije E-knjiga
Publication type

Izdano Maribor, december 2021
Published at

Dostopno na https://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/614
Available at

```
CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Univerzitetna knjižnica Maribor

512.54(075.8)(0.034.2)

MENCINGER, Matej
    Simetrijske grupe končnih vzorcev [Elektronski vir] / [avtor] Matej
Mencinger. - 1. izd. - E-knjiga. - Maribor : Univerza v Mariboru,
Univerzitetna založba, 2021

Način dostopa (URL): https://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/614
ISBN 978-961-286-536-8
doi: 10.18690/978-961-286-536-8
COBISS.SI-ID 82281475
```


ISBN 978-961-286-536-8 (pdf)
978-961-286-542-9 (mehka vezava)

DOI https://doi.org/10.18690/978-961-286-536-8

Cena / *Price* Brezplačni izvod

Odgovorna oseba založnika / *For publisher* prof. dr. Zdravko Kačič,
rektor Univerze v Mariboru

Citiranje / *Attribution* Mencinger, M. (2021). *Simetrijske grupe končnih vzorcev.* Maribor: Univerzitetna založba. doi: 10.18690/978-961-286-536-8

Kazalo

Na začetku se je lažje upreti, kot na koncu.

Leonardo da Vinci

Predgovor

Naravni pojav zrcaljenja, kot ga prikazuje zgornja slika, so morda opazovali že v kameni dobi. Zagotovo so simetrije že v antiki in kasneje v srednjem veku in predvsem v obdobju renesanse predstavljale osnovo prvino arhitekture.

Simetrije je mogoče obravnavati v poljubnem (vektorskem) prostoru; najbolj znana primera vektorskega prostora sta dvo- in tro-razsežni realni vektorski prostor. Če v vektorskem prostoru lahko merimo kote in razdalje med točkami, ga imenujemo *evklidski prostor*. V tem učbeniku s pojmom ravnina mislimo evklidsko ravnino. Tudi pojem geometrija vedno pomeni evklidska geometrija.

Nekateri osnovni pojmi teorije grup (izomorfizem, končnost, neskončnost, generatorji grupe, podgrupe itd) so razloženi na kar se da preprost način. V podrobnosti teorije grup se ne spuščamo, saj namen učbenika ni sistematična obravnava grup, ampak zgolj klasifikacijski izrek simetrijskih grup končnih vzorcev v ravnini.

Linearnih ornamentov in tapetnih grup ne obravnavamo. Prav tako v tem učbeniku ni sistematične obravnave simetrij tro-razsežnih končnih vzorcev.

Učbenik je namenjem predvsem študentom prvega letnika arhitekture na Fakulteti za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo Univerze v Mariboru, zato je njegova vsebina prirejena predmetu »Izbrana poglavja iz matematike za arhitekte«, ki ga študenti poslušajo v prvem semestru prvega letnika. Učbenik ne vsebuje celotne vsebine omenjenega predmeta.

V uvodnem poglavju se dotaknemo geometrijskih vektorjev in kompleksnih števil, v drugem poglavju definiramo simetrije. V tretjem poglavju obravnavamo linearne preslikave iz ravnine v ravnino; obravnava matrik je v tem učbeniku skoraj izključno omejena na 2×2 matrike. V četrtem poglavju obravnavamo izometrije ravnine in njihovo klasifikacijo. Peto poglavje je namenjeno teoretični obravnavi grup (na osnovnem nivoju). V šestem poglavju definiramo končne vzorce in ciklične ter diedrske grupe. V sedmem poglavju predstavimo Leonarda, njegove talente in prikažemo nekatere matematične probleme, ki so bili aktualni v njegovem času, in dokažemo izrek, ki se danes imenuje Leonardov izrek.

Na koncu vsakega poglavja so naloge. V zadnjem poglavju so zbrane rešitve nalog in napotki za reševanje. Vsaka naloga ima povezavo (link) do rešitve in vsaka rešitev vsebuje povezavo nazaj do naloge.

Učbenik lahko »predelajo« vsi, ki razumejo osnovne matematične pojme, na primer kvadratno enačbo, razmerje in osnovne pojme geometrije ter trigonometrije. V pričujočem učbeniku dokazi pogosto temeljijo tudi na obravnavi konkretnih primerov in geometrijskih interpretacij, zato bi bilo morda marsikje bolje pisati »ideja dokaza« namesto »dokaz«. Toda, zaradi boljše preglednosti in oblikovne enotnosti pri vseh izrekih, trditvah, lemah in posledicah pišemo dokaz.

Skozi celoten učbenik sem se trudil, da je razlaga vedno podkrepljena s slikami. Nekatere slike so prispevali študenti arhitekture iz generacije 2020/2021. Za skice se zahvaljujem študentom: Niki Drev, Eli Valenko, Filipu Zelenjaku, Tjaši Krivec, Anđeli Ćirović, Ivani Kunjicki, Marti Trstenjak in Luciji Horvat. Ilustracijo na naslovnici ter številne druge slike je prispevala hčerka Anja, za kar se ji najlepše zahvaljujem.

Izr. prof. dr. Matjažu Skrinarju, prof. dr. Juriju Avsecu in doc. dr. Tomislavu Letniku se iskreno zahvaljujem za prispevane fotografije, ki so na začetku poglavij. Posebna zahvala velja Nejcu Novaku, dipl. inž. arh. (UN), ki ob izdaji knjige zaključuje 2. stopnjo študija na FGPA UM, za grafično oblikovanje naslovnice in pripravo slik, ki so na začetku vsakega poglavja.

Zahvaljujem se recenzentoma, prof. dr. Borutu Zalarju in prof. ddr. Janezu Žerovniku, za skrbno branje rokopisa. Oba sta odkrila številne napake, napakice in »škrate«. Njune pripombe so znatno izboljšale kakovost tega učbenika. Prof. dr. Borutu Zalarju se zahvaljujem tudi za svetovanje izbora Leonardovih citatov ter za pomoč pri prevajanju iz angleškega jezika. Za hitro in učinkovito lektoriranje se zahvaljujem lektorici Jerneji Klemenčič.

Zahvaljujem se tehničnima urednikoma, Janu Perši, mag. in izr. prof. dr. Andreju Tibautu. Zahvala velja tudi za tehnično pomoč pri mojih prejšnjih učbenikih.

Študentom in študentkam, ki želijo dodatno poglobiti in/ali razširiti svoje znanje na področju teorije grup in ponavljajočih se vzorcev, kot dodatno literaturo priporočam [**3**], [**4**], [**5**] in [**6**].

Učbenik je bil napisan v času koronskih ukrepov. Torej v času poučevanja na daljavo, ko smo lahko profesorji in študenti na lastni koži občutili, kako velik pomen imajo digitalna gradiva. Zato ne dvomim, da bo prihajajoči učbenik koristen študijski pripomoček naslednjim generacijam študentov arhitekture na UM FGPA.

Avtor

1. Uvod

V tem poglavju so obdelani pojmi, ki so Vam morda znani že iz srednje šole. Glavna snov tega učbenika so simetrijske grupe na končnih vzorcih. Najpomembnejši rezultat, ki ga danes imenujemo »Leonardov izrek«, je podan v poglavju 7. Izrek je prvi razumel in ga v smiselni obliki zapisal Leonardo da Vinci (1452–1519), o katerem lahko več preberete v poglavju 7.

Zgornja slika prikazuje eno izmed mnogih izjemnih Leonardovih idej, perpetuum mobile.

Zaenkrat o Leonardu povejmo, da njegovi matematični začetki segajo v leto 1490 v obdobje renesanse, ko so v Evropi že poznali arabske številke in je bil glavni matematični učbenik še vedno Fibonaccijev Liber Abaci. V tistih časih so bili nekateri veleumi (še) sposobni razumeti skoraj vse znanje, ki ga je takrat premoglo človeštvo. Mednje lahko štejemo tudi polihistorja, Leonarda Da Vincija.

Učbenik v prvi vrsti obravnava simetrije ravninskih končnih vzorcev v evklidski ravnini, ki je samo poseben primer $n-$razsežnega evklidskega prostora. V tem učbeniku z izrazom ravnina vedno mislimo evklidsko ravnino, izraz geometrija pa bo vedno pomenil evklidsko geometrijo [1]

Za obravnavo simetričnih vzorcev v evklidski ravnini moramo najprej spoznati toga gibanja (v ravnini). Za obravnavo togih gibanj (okoli fiksne točke) v ravnini potrebujemo naslednje pojme:

- razdalja med točkami,

[1]Evklidska geometrija je dobila ime po starogrškem matematiku Evklidu. Danes Evklida upravičeno imenujemo oče geometrije. Poleg evklidske geometrije obstajata še sferična in hiperbolična geometrija. Bistvena razlika med temi tremi geometrijami izhaja iz postulata o vzporednici. Vsota notranjih kotov trikotnika v evklidski geometriji je 180°. V hiperbolični geometriji je vsota notranjih kotov trikotnika vselej manjša od 180°. V sferični geometriji je vsota notranjih kotov trikotnika vselej večja od 180°. Več o tem si lahko v digitalni obliki ogledate v diplomskem delu [1]

- vektor (od točke A do točke B),
- kót med vektorji ter
- matrike (ali pa kompleksna števila).

Toga gibanja (okoli fiksne točke) v ravnini bomo obravnavali s pomočjo vektorjev in $2 \times 2-$matrik, čeprav bi enakovredno obravnavo v ravnini lahko izvedli tudi s kompleksnimi števili. V učbeniku se omejimo na ravnino in trirazsežni (evklidski) prostor, zato se tudi pri vektorjih in matrikah ustrezno omejimo na $2 \times 2-$ in $3 \times 3-$matrike in vektorje $\vec{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ in $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) \in \mathbb{R}^3$.

Pri geometrijski obravnavi se ne moremo izogniti Pitagorovemu izreku.

Izrek 1 — Pitagora. V poljubnem pravokotnem trikotniku v evklidski ravnini s katetama a in b ter hipotenuzo c velja

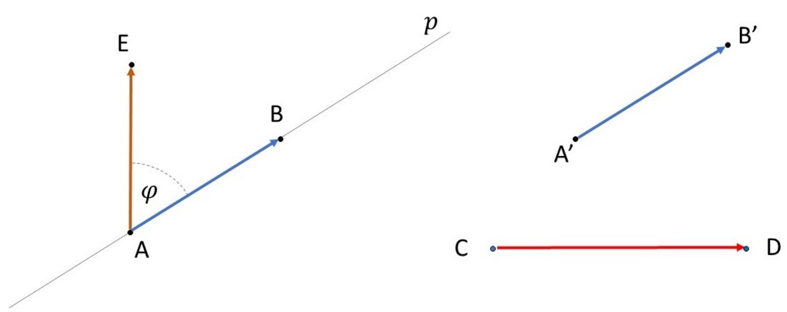
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Dokaz. Leonardov dokaz Pitagorovega izreka je v poglavju 7; glej sliko 7.5. ■

1.1 Geometrijski vektorji

Števila (realna števila) imenujemo tudi *skalarji*[2].

Usmerjeno daljico, ki poteka od točke A do točke B, označimo z $\overrightarrow{AB}$. Točko A imenujemo *začetna točka*, točko B pa *končna točka* usmerjene daljice $\overrightarrow{AB}$ (glej sliko 1.1). *Vektor* je množica vseh usmerjenih daljic, ki imajo enako smer in enako dolžino.[3]



Slika 1.1: Geometrijski vektorji v ravnini $\mathbb{R}^2$. Usmerjeni daljici, ki imata enako smer in enako dolžino, predstavljata isti vektor.

Vektorji so količine, ki vsebujejo več informacij: dolžino (oz. velikost), smer in usmerjenost. *Dolžina vektorja* $\overrightarrow{AB}$ je enaka dolžini daljice $\overline{AB}$ in jo označimo z $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$. *Smer* vektorja

[2] Vektorski prostor v tem učbeniku je omejen na dvo- in tro-razsežne geometrijske vektorje: na vektorje iz $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$. Natančna definicija vektorskega prostora je podana med dodatki: glej 8.7.

[3] Matematično torej vektor določa ekvivalenčni razred. Pri obravnavi lahko za predstavnika vektorja uporabimo katerokoli usmerjeno daljico iz ekvivalenčnega razreda.

$\overrightarrow{AB}$ določa premica p, ki poteka skozi točki A in B. *Usmerjenost* vektorja je določena z izborom začetne in končne točke. Velja

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}.$$

Če poznamo dolžino, smer in usmerjenost vektorja, je le-ta enolično določen. Na sliki 1.1 sta vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{A'B'}$ enaka

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}.$$

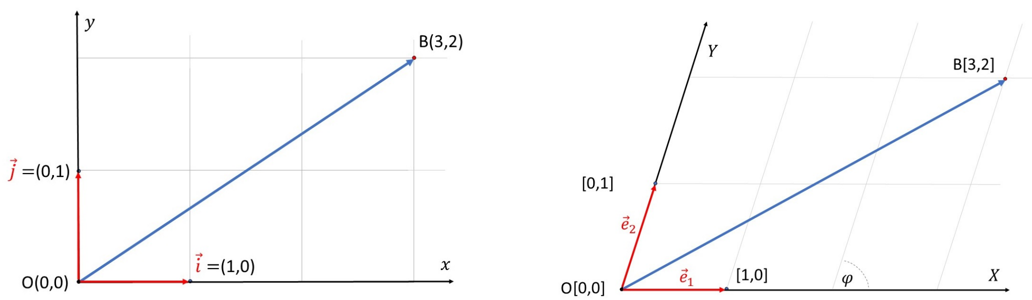
Vektor, katerega dolžina meri eno enoto, imenujemo *enotski vektor*. Če vektor $\vec{a}$ delimo z njegovo dolžino, $\|\vec{a}\|$, nastane enotski vektor

$$\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}, \quad \text{normirani vektor}$$

ki ga imenujemo *normirani vektor* (glej nalogo 1).

V nadaljevanju obravnavamo kartezični produkt

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) |\ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2 \quad \text{evklidska ravnina}$$



(a) Kartezična mreža

(b) Paralelogramska mreža: $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$.

Slika 1.2: (a) Ortogonalna mreža/kartezični koordinatni sistem. Za izračun razdalje med dvema točkama uporabimo Pitagorov izrek. (b) Paralelogramska mreža. Za izračun razdalje med dvema točkama uporabimo Kosinusni izrek.

Pravokotni koordinatni sistem $(x,y)-$ravnine $\mathbb{R}^2$ je določen s koordinatnim izhodiščem O, dvema med seboj pravokotnima premicama x in y ter s pripadajočima enotskima vektorjema $\vec{i}$ in $\vec{j}$; glej sliko 1.2 (a). Ker vektor $\vec{i}$ leži na premici x in je $\left\|\vec{i}\right\| = 1$, je

$$\vec{i} = (1,0).$$

Podobno je

$$\vec{j} = (0,1),$$

saj vektor $\vec{j}$ leži na premici y in je $\left\|\vec{j}\right\| = 1$.

Vsaki točki $B(x,y)$ priredimo krajevni vektor $\overrightarrow{OB} = \vec{r}_B = (x,y)$. Vektor od točke $A(x_1,y_1)$ do točke $B(x_2,y_2)$ izračunamo po formuli

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

V pravokotni mreži je vektor $\overrightarrow{OT} = \vec{r}_T = (x,y)$ hipotenuza pravokotnega trikotnika, zato je po Pitagorovem izreku dolžina vektorja $\overrightarrow{OT}$ enaka

$$\left\|\overrightarrow{OT}\right\|^2 = x^2 + y^2 \Longrightarrow \left\|\overrightarrow{OT}\right\| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Razdalja od točke A do točke B sovpada z dolžino vektorja $\overrightarrow{AB}$:

$$d(A,B) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}. \tag{1.1}$$

Podobne formule veljajo v trorazsežnem vektorskem prostoru. Razdalja med točkama $A = (x_1,y_1,z_1) \in \mathbb{R}^3$ in $B = (x_2,y_2,z_2) \in \mathbb{R}^3$ se izračuna po formuli:

$$d(A,B) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}. \tag{1.2}$$

Kót med vektorjema najlažje določimo za vektorje s skupno začetno točko. Kót med vektorjema $\overrightarrow{AE}$ in $\overrightarrow{AB}$ na sliki 1.1 je enak kótu med vektorjema $\overrightarrow{AE}$ in $\overrightarrow{A'B'}$

$$\varphi = \sphericalangle EAB.$$

Kót med vektorjema $\overrightarrow{AE}$ in $\overrightarrow{CD}$ je pravi (90° ali $\frac{\pi}{2}$ rd)

$$\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{CD} \quad \text{ortogonalna vektorja.}$$

V pravokotnem koordinatnem sistemu (x,y) kót med vektorjema $\vec{a} = (a_1,a_2)$ in $\vec{b} = (b_1,b_2)$ izračunamo po formuli

$$\varphi = \arccos \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}. \tag{1.3}$$

Števec ulomka v enačbi (1.3), torej $a_1b_1 + a_2b_2$, imenujemo *skalarni produkt* vektorjev $\vec{a} = (a_1,a_2)$ in $\vec{b} = (b_1,b_2)$. Označili ga bomo

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 \qquad \text{skalarni produkt.}$$

V pravokotnem koordinatnem sistemu (x,y,z) kót med vektorjema $\vec{a} = (a_1,a_2,a_3)$ in $\vec{b} = (b_1,b_2,b_3)$ izračunamo po formuli

$$\varphi = \arccos \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \tag{1.4}$$

V paralelogramski mreži, slika 1.2(b), se dolžina vektorja $\overrightarrow{AB}$ izračuna s pomočjo kosinusnega izreka[4].

[4] Dokaz glej na primer [**4**], stran 15.

Izrek 2 — Kosinusni izrek. V poljubnem trikotniku s stranicami a, b in c naj bo kot med stranicama a in b enak γ. Potem velja

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Opomba. Znane vektorske količine iz fizike/mehanike so

- hitrost $\vec{v}$,
- pospešek $\vec{a}$,
- sila $\vec{F}$,
- odmik $\vec{x}$,
- ročica $\vec{r}$,
- navor[5] $\vec{N}$,
- itd.

Pri sili je seveda pomembno tudi oprijemališče (sile). Glede na sliko 1.1 sta vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{A'B'}$ enaka, vendar, na primer, sila $\vec{F}_1 = \overrightarrow{AB}$ in sila $\vec{F}_2 = \overrightarrow{A'B'}$ povzročita različna navora pri vrtenju okoli točke E.

1.2 Kompleksna števila

Spomnimo se, da ima kvadratna enačba $ax^2 + bx + c = 0$ rešitve oblike

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{1.5}$$

Vemo, da je diskriminanta $D = b^2 - 4ac$ lahko pozitivna, enaka nič ali negativna.

Kot primer poglejmo enačbo $x^2 - 2x + 3 = 0$, za katero je

$$\begin{aligned} D &= (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 \\ &= -8. \end{aligned}$$

Ker je $D < 0$, kvadratna enačba $x^2 - 2x + 3 = 0$ nima realnih ničel, kar se vidi iz grafa kvadratne funkcije na sliki 1.3

Rešitvi $x_{1,2}$ lahko kljub temu formalno zapišemo po formuli (1.5)

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} = 1 \pm \sqrt{-2}.$$

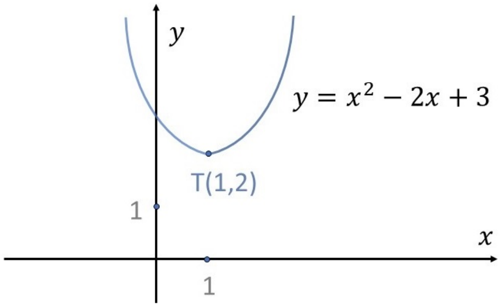
Najpreprostejša kvadratna enačba, ki nima realnih rešitev je

$$x^2 + 1 = 0.$$

Z namenom, da bi bila vsaka (tudi zgornja) kvadratna enačba rešljiva, vpeljemo posebno število i, za katero velja $i^2 = -1$, oziroma natančneje

$$i = \sqrt{-1}, \tag{1.6}$$

[5] Staro poimenovanje navora je moment $\vec{M}$. Navor je definiran kot vektorski produkt ročice in sile: $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$.



Slika 1.3: Kvadratna funkcija $y = x^2 - 2x + 3$ nima realnih ničel, saj ima teme v točki $(1,2)$, njen vodilni koeficient pa je pozitiven.

ki ga imenujemo (kompleksna) imaginarna enota. Število i (in tudi število $-i$) rešita kvadratno enačbo

$$x^2 + 1 = 0,$$

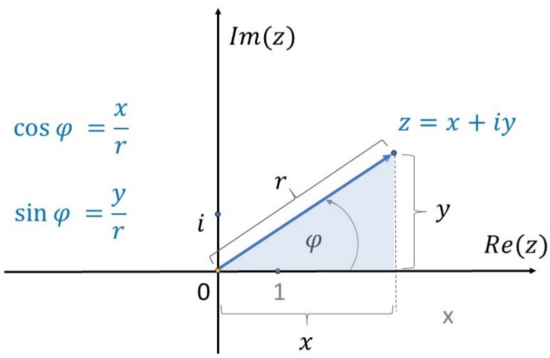
saj iz definicije (1.6) sledi

$$0 = i^2 + 1 = -1 + 1$$
$$0 = (-i)^2 + 1 = (-1)^2 \cdot i^2 + 1 = -1 + 1.$$

Podobno sta

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}i$$

rešitvi[6] kvadratne enačbe $x^2 - 2x + 3 = 0$.



Slika 1.4: Kompleksno število je lahko zapisano v kartezični $z = x + iy$ obliki ali v polarni obliki $z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Kompleksno število (glej sliko 1.4)

$$z = x + iy$$

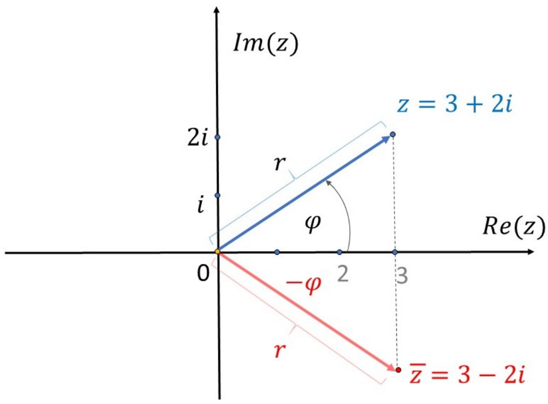
[6]Spomnimo se, da je $\sqrt{-8} = \sqrt{8} \cdot \sqrt{-1} = 2\sqrt{2}i$.

lahko predstavimo kot vektor v (kompleksni) ravnini: na absciso nanesemo realni del, $x = \mathrm{Re}(z)$, na ordinato pa imaginarni del, $y = \mathrm{Im}(z)$. Tako je

$$z = x + iy = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)\,.$$

Množico kompleksnih števil označimo s $\mathbb{C}$:

- $i \in \mathbb{C}$ imenujemo imaginarna enota,
- $x + iy \in \mathbb{C}$ kompleksno število,
- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ realna števila so podmnožica kompleksnih števil.



Slika 1.5: Konjugacija kompleksnega števila: $z = 2 + 3i \longrightarrow \bar{z} = 2 - 3i$. Splošno velja: $z = x + iy \longrightarrow \bar{z} = x - iy$.

Kompleksnemu številu $z = x + iy$ priredimo konjugirano število, $\bar{z} = x - iy$, kar je za $z = 3 + 2i$ prikazano na sliki 1.5.

Kompleksni števili seštejemo (odštejemo) tako, da seštejemo (odštejemo) pripadajoča realna in imaginarna dela:

$$\begin{array}{l} z_1 = x_1 + iy_1 \\ z_2 = x_2 + iy_2 \end{array} \Longrightarrow z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i\,(y_1 \pm y_2)\,. \tag{1.7}$$

Kompleksni števili množimo kot dvočlenika, pri čemer upoštevamo distributivnostni zakon. Naj bo $z_1 = x_1 + iy_1$ in $z_2 = x_2 + iy_2$. Njun produkt je enak:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 + i\,(x_1y_2 + y_1x_2)\,. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Zgornja formula množenja kompleksnih števil izgleda dokaj zapleteno. Enostavnejše množenje kompleksnih števil je mogoče, če kompleksni števili z_1 in z_2 zapišemo v polarni obliki (glej sliko 1.4).

Polarni zapis kompleksnega števila[7]. Argument ali polarni kót φ je kót med pozitivnim delom $x-$osi in (krajevnim) vektorjem

$$(x,y) = x + iy,$$

polarni polmer[8] r je definiran kot dolžina vektorja (x,y). Zveza med kartezičnimi in polarnimi koordinatami je

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Zveza med polarnimi in kartezičnimi koordinatami je

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\varphi = \begin{cases} \arcsin\frac{y}{r} & za \quad x > 0 \\ \\ \pi - \arcsin\frac{y}{r} & za \quad x \le 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

■ **Primer 1** Kompleksno število $z = -2+3i$ zapiši v polarni obliki $z = re^{i\varphi}$. ■

Rešitev. Iz obrazca (1.10) sledi: polarni polmer je enak

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(-2)^2+3^2} \\ &= \sqrt{13}, \end{aligned}$$

argument kompleksnega števila z pa je enak

$$\begin{aligned} \varphi &= \pi - \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}} \\ &\approx 2.159 \ rd \\ &\approx 123.7^\circ. \end{aligned}$$

Torej

$$z \approx \sqrt{13}\cdot e^{2.159i}.$$

■ **Primer 2** Kompleksno število $z = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$ zapiši v (kartezični) obliki $z = x+iy$. ■

Rešitev. Odčitamo $r = 2$ in $\varphi = \frac{\pi}{6}$ in uporabimo formulo (1.9):

$$\begin{aligned} x &= 2\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \\ y &= 2\sin\frac{\pi}{6} = 1 \\ &\Downarrow \\ z &= \sqrt{3}+i. \end{aligned}$$

[7] Polarni polmer je po definiciji nenegativno število $r \ge 0$. Argument kompleksnega števila φ pa zavzame vrednosti $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

[8] Hipotenuza pravokotnega trikotnika s katetama x in y.

Če upoštevamo Eulerjevo formulo

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

lahko kompleksno število $z = x + iy$ zapišemo tudi v eksponentni obliki

$$\begin{aligned} z &= r\cos\varphi + ir\sin\varphi \\ &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= re^{i\varphi}. \end{aligned}$$

Zaradi

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

je produkt kompleksnih števil $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ in $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ enak

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} \\ &= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \end{aligned} \tag{1.11}$$

kar je znatno enostavnejši predpis za množenje kompleksnih števil[9]. Če formulo (1.11) uporabimo večkrat zaporedoma, sledi *Moivrova formula* za potenciranje kompleksnega števila $z = re^{i\varphi}$

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{1.12}$$

1.3 Naloge

Naloga 1 Naloga se navezuje na sliko 1.2.

a) Izračunaj dolžino vekorja $\overrightarrow{OB} = \vec{r}_B$ v pravokotnem koordinatnem sistemu na sliki 1.2(a).

b) Normiraj vekor $\overrightarrow{OB} = \vec{r}_B$.
Rešitev je na strani 95

Naloga 2 Izračunaj razdaljo $d(O,B) =?$ v nepravokotnem koordinatnem sistemu na sliki 1.2(b), če je $\varphi = \frac{\pi}{6}$.
Glej rešitev 2

Naloga 3 Razmisli, da iz formule za množenje kompleksnih števil (1.8) sledi $\alpha \cdot z = \alpha x + \alpha y i$, kjer je α poljubno realno število in $z = x + iy$.
Glej rešitev 3

[9] Ta predpis pove, da polmera pomnožimo, argumenta pa seštejemo.

Naloga 4 Podana sta vektorja $\vec{a} = (3,2)$ in $\vec{b} = (1,-3)$. Izračunaj: $5\vec{a} = ?$ in $5\vec{a} - 2\vec{b} = ?$

Glej rešitev 4

Naloga 5 Razmisli, da iz Moivrovega obrazca (1.12) sledi formula za računanje $n-$tega korena kompleksnega števila z

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, \tag{1.13}$$

kjer je $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Glej rešitev 5

Naloga 6* Izračunaj vse rešitve enačbe $z^6 + 1 = 0$. Uporabi formulo (1.13).

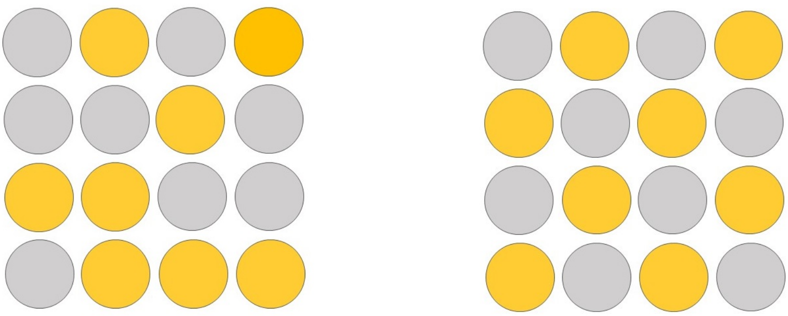
Glej rešitev 6

Časa je dovolj za vse, ki ga znajo izrabiti.

Leonardo da Vinci

2. Simetrije

Intuitivno si simetričnost predstavljamo kot neke vrste red oz. urejenost. Intuitivna ideja urejenosti oz. neurejenosti je prikazana na slikah 2.1 in 2.2.



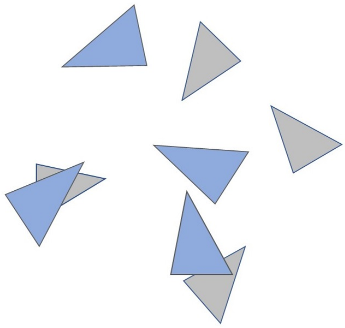
(a) Nered (b) Red

Slika 2.1: Intuitivna obravnava simetrije: (a) nered, (b) red.

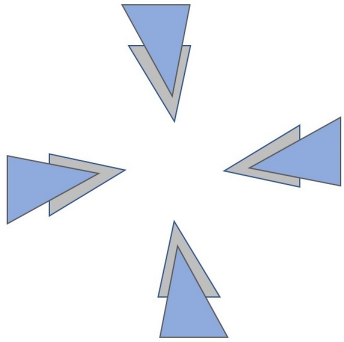
V osnovi je beseda simetričnost najprej predstavljala usklajenost in pravilna razmerja (med deli celote); s simetrijo se je vedno povezovala tudi lepota. Drugi pomen[1], ki predstavlja korak bližje k naši definiciji simetrije, pa je usklajenost levo : desno; torej zrcalna simetrija, kar je prikazano na sliki[2] 2.3.

[1] Beseda simetrija sestavljena iz grških besed *sym* (skupaj) in *metron* (mera, merjenje), torej, dvodelno.

[2] Avtorica slike Nika Drev. Slika je v študijskem letu 2020/21 po izboru študentov prvega letnika arhitekture na FGPA UM zmagala kot najlepši končni vzorec.

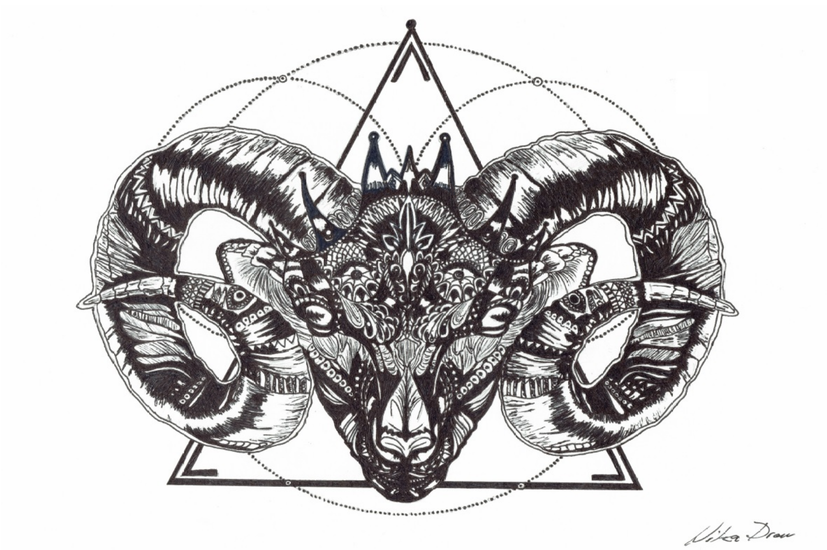


(a) Nered



(b) Red

Slika 2.2: Intuitivna obravnava simetrije: (a) nered, (b) red.



Slika 2.3: Tako imenovana dvodelna simetrija levo : desno. Zrcalna simetrija, kjer je zrcalna črta postavljena navpično. Avtorica: Nika Dreu.

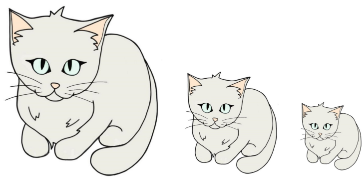
Končni vzorec bomo formalno (matematično) definirali kasneje. Zaenkrat si ravninski končni vzorec intuitivno predstavljajmo kot nekaj, kar lahko narišemo znotraj nekega kroga, kot kaže slika 2.4.

Intuitivno definicijo simetrije (v smislu ne/urejenosti oziroma ne/reda) lahko uporabimo na motivu[3] iz slike 2.4. Tudi na sliki 2.5 lahko prepoznamo dve različni vrsti urejenosti/podobnosti. Podobno lahko na sliki 2.6 opazimo neke vrste urejenost, ki bi jo lahko opisali s pomočjo spirale.

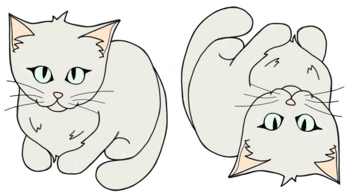
Vidimo, da nam intuitivna definicija simetričnosti ne zadostuje več, potrebujemo natančnejšo definicijo simetrije. Za natančnejšo definicijo simetričnosti moramo uporabiti

[3] Z matematičnega stališča je pojem motiv povezan z generatorji simetrijske grupe vzorca, kar bomo obravnavali kasneje.

Slika 2.4: Intuitivna definicija končnega vzorca v ravnini. Množica točk, ki jo lahko lahko obdamo z neko krožnico. Avtorica slike: Anja Mencinger.

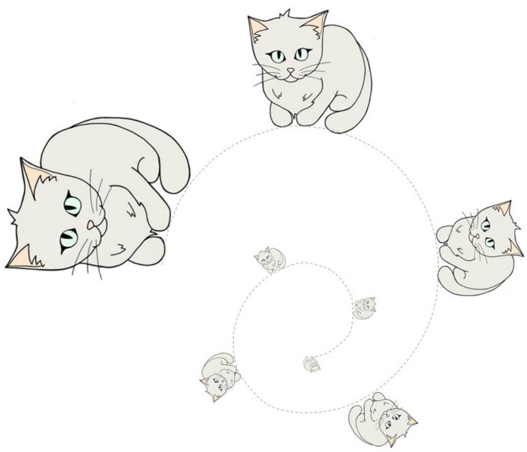


(a) Urejenost: pomanjšanje - skrčitev.



(b) Drugačne vrste urejenost.

Slika 2.5: Intuitivna obravnava simetrije. Na slikah (a) in (b) lahko zaznamo urejenost.



Slika 2.6: Na sliki prepoznamo neke vrste urejenost.

vsaj pojem razdalje med dvema točkama. Pripomnimo, da je razdalja glavna geometrijska značilnost prostora. Uporabljali bomo evklidsko razdaljo; glej formuli (1.1) in (1.2).

2.1 Definicija izometrije ravnine

S pomočjo formule (1.1) lahko računamo razdalje med točkami v evklidski ravnini $\mathbb{R}^2$. Točka (in vektor) v ravnini je podana z dvema komponentama:

$$(komponenta_1, komponenta_2) = (x, y).$$

Funkcijo

$$\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

ki preslika ravnino v ravnino, imenujemo *vektorska funkcija*. Primer takšne vektorske funkcije je[4]

$$\vec{F}(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy).$$

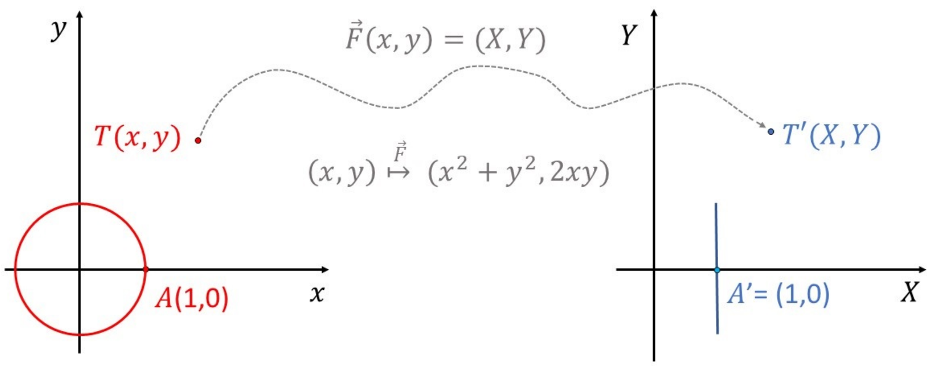
Pogosto zgornjo vektorsko funkcijo označimo tudi v obliki

$$(X, Y) = (x^2 + y^2, 2xy),$$

da poudarimo, da je original iz $(x, y)-$ravnine, slika pa iz $(X, Y)-$ravnine.[5]

■ **Primer 3** Funkcija $\vec{F}(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$ preslika $(x, y)-$ravnino v $(X, Y)-$ravnino. Na sliki 2.7 vidimo, da funkcija $\vec{F}$ preslika enotsko krožnico z enačbo $x^2 + y^2 = 1$ v daljico $X = 1, -1 \leq Y \leq 1$. ■

Definicija 1 — Izometrija ravnine. Preslikavo $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ki ohranja razdalje med točkami, imenujemo *izometrija ravnine*.



Slika 2.7: Vektorska funkcija $\vec{F}(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$, ki preslika krožnico v daljico, ne ohranja razdalj med točkami.

[4] Argument funkcije $\vec{F}$ je točka (x, y), ki ima očitno dve koordinati, kar pomeni, da leži v ravnini. Slika funkcije $\vec{F}$ ima tudi dve koordinati: $X = x^2 + y^2$ in $Y = x + y$. Zato je funkcija $\vec{F}$ res vektorska funkcija, ki ravnino preslika v ravnino.

[5] Seveda lahko obe ravnini tudi sovpadata.

Definicija 2 — Linearnost. Preslikava $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je linearna, če za vsak par vektorjev $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ in vsak skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ velja

$$\begin{aligned} F(\vec{x}+\vec{y}) &= F(\vec{x}) + F(\vec{y}) \qquad \text{aditivnost,} \\ F(\alpha\vec{x}) &= \alpha F(\vec{x}) \qquad \text{homogenost.} \end{aligned} \tag{2.1}$$

■ **Primer 4** Ostanimo pri funkciji $\vec{F}(x,y) = (x^2+y^2, 2xy)$ in si poglejmo točki $A(1,0)$ in $B(0,1)$. Razdalja med njima je po formuli (1.1) enaka

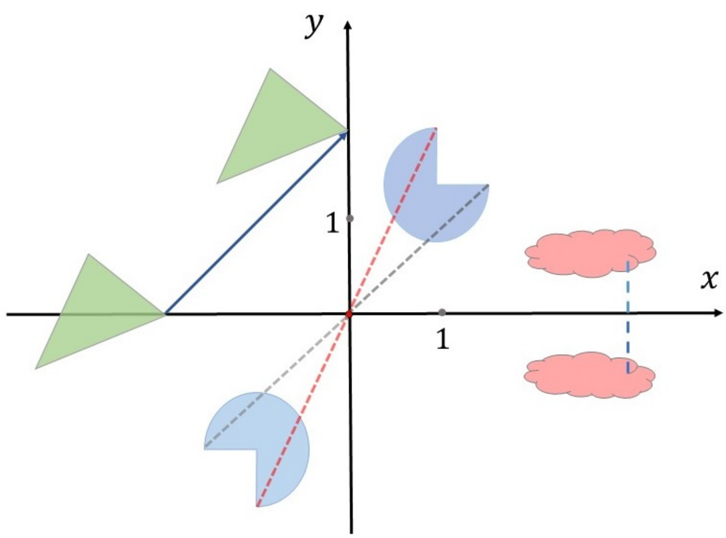
$$d(A,B) = \overline{AB} = \sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Funkcija $\vec{F}$ točki A in B preslika v isto točko $A' = B' = (1,0)$, zato je razdalja med A' in B' enaka nič

$$d(A',B') = \sqrt{(1-1)^2+(0-0)^2} = \sqrt{0} = 0.$$

Kombinacija obeh opažanj pomeni, da funkcija $\vec{F}$ ne more biti izometrija ravnine, saj $\sqrt{2} \neq 0$.
■

■ **Primer 5** Vektorska funkcija $\vec{G}(x,y) = (3x-y, 2x-2y)$ preslika premico $y = 2x+3$ v premico $Y = -2X-12$, saj je $X = 3x-y = 3x-(2x+3) = x-3$ in $Y = 2x-2y = 2x-2(2x+3) = -2x-6$ in posledično je $x = X+3$ in $Y = -2(X+3)-6 = -2X-12$. ■



Slika 2.8: Trije primeri izometrij: oblak se prezrcali preko $x-$osi, krožni izsek se zarotira za 180° okoli koordinatnega izhodišča, trikotnik se premakne za vektor $(2,2)$.

Funkcija $\vec{G}$ je linearna, funkcija $\vec{F}$ pa je nelinearna.

V nadaljevanju bomo dokazali, da je vsaka izometrija (nehomogena) linearna preslikava:

$$F(x,y) = (ax+by+p, cx+dy+q). \tag{2.2}$$

Preprosti primeri izometrij v ravnini so (glej sliko 2.8):

- zrcaljenje $(x,y)-$ravnine preko $x-$osi
$$(x,y) \mapsto (x,-y)$$
- rotacija $(x,y)-$ravnine za 180° okoli izhodišča $O(0,0)$
$$(x,y) \mapsto (-x,-y)$$
- premik (translacija) $(x,y)-$ravnine za vektor (p,q)
$$(x,y) \mapsto (x+p, y+q).$$

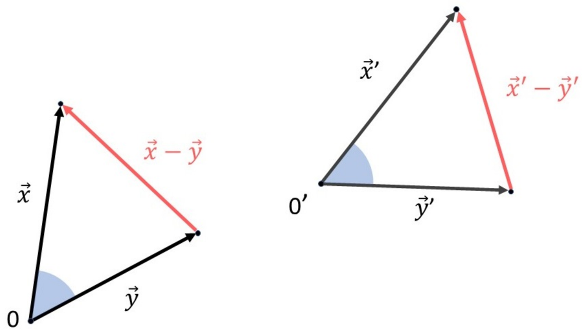
Lema 1 [6] Vsaka izometrija ravnine slika daljice v daljice.

Dokaz. Naj bo $\overline{AB}$ daljica in naj bo X poljubna točka na tej daljici
$$X \in \overline{AB}.$$
Naj bo F izometrija ravnine. Tedaj za poljubne točke A, X in B ter $A' = F(A)$, $X' = F(X)$ in $B' = F(B)$ velja
$$\overline{AX} = \overline{X'A'} \quad \text{in} \quad \overline{XB} = \overline{X'B'}.$$
Ker so točke A, X in B kolinearne, je (za vsako vmesno točko $X \in \overline{AB}$)
$$\overline{AX} + \overline{XB} = \overline{AB}. \tag{2.3}$$
Splošno velja:[7]
$$\overline{A'X'} + \overline{X'B'} \geq \overline{A'B'}.$$
Ker je F izometrija, je
$$\overline{A'X'} = \overline{AX} \quad \text{in} \quad \overline{X'B'} = \overline{XB}.$$
Iz zgornjih enačb zaradi (2.3) sledi
$$\overline{A'X'} + \overline{X'B'} = \overline{A'B'},$$
kar pomeni, da je $X' \in \overline{A'B'}$, kar pomeni, da izometrija F preslika daljico $\overline{AB}$ v daljico $\overline{A'B'}$. ■

Naj bo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ izometrija ravnine in naj velja $\vec{x}' = F(\vec{x})$ in $\vec{y}' = F(\vec{y})$, kot kaže slika 2.9. Kót med vektorjema $\vec{x}$ in $\vec{y}$ označimo s $\sphericalangle(\vec{x},\vec{y})$.

[6] Lema je v matematiki pomožna trditev.

[7] To je tako imenovana trikotniška neenakost: najkrajša pot od točke A' do točke B' je po ravni črti/daljici; vse ostale poti, ki vodijo preko neke tretje točke X', so daljše, razen, če tudi točka X' leži na daljici $\overline{A'B'}$: t. j. $X' \in \overline{A'B'}$ – v tem primeru velja enačaj $\overline{A'X'} + \overline{X'B'} = \overline{A'B'}$. Trikotnik, ki ga tvorijo točke A', X' in B', je izrojen.



Slika 2.9: Kót med vektorjema $\vec{x}$ in $\vec{y}$ označimo z $\sphericalangle(\vec{x},\vec{y})$.

Lema 2 Naj bo $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ izometrija ravnine. Tedaj velja

$$\sphericalangle(\vec{x},\vec{y}) = \sphericalangle\left(\vec{x}',\vec{y}'\right) \tag{2.4}$$

Dokaz. Ker je F izometrija, je

$$\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = \left\|\vec{x}'-\vec{y}'\right\|^2.$$

Zato je

$$\begin{aligned}
(\vec{x}-\vec{y})\cdot(\vec{x}-\vec{y}) &= \left(\vec{x}'-\vec{y}'\right)\cdot\left(\vec{x}'-\vec{y}'\right)\\
\vec{x}\cdot\vec{x}-2\vec{x}\cdot\vec{y}+\vec{y}\cdot\vec{y} &= \vec{x}'\cdot\vec{x}'-2\vec{x}'\cdot\vec{y}'+\vec{y}'\cdot\vec{y}'\\
\|\vec{x}\|^2-2\vec{x}\cdot\vec{y}+\|\vec{y}\|^2 &= \left\|\vec{x}'\right\|^2-2\vec{x}'\cdot\vec{y}'+\left\|\vec{y}'\right\|^2.
\end{aligned}$$

Ker je F izometrija, je $\|\vec{x}\| = \|\vec{x}'\|$ in $\|\vec{y}\| = \|\vec{y}'\|$, zato iz zgornje enačbe sledi

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{x}'\cdot\vec{y}'. \tag{2.5}$$

Če enačbo (2.5) delimo z $\|\vec{x}\| = \|\vec{x}'\|$ in $\|\vec{y}\| = \|\vec{y}'\|$, sledi

$$\begin{gathered}
\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}'\|\,\|\vec{y}\|} = \frac{\vec{x}'\cdot\vec{y}'}{\|\vec{x}'\|\,\|\vec{y}'\|}\\
\cos\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}'\|\,\|\vec{y}\|} = \cos\frac{\vec{x}'\cdot\vec{y}'}{\|\vec{x}'\|\,\|\vec{y}'\|}\\
\Updownarrow\\
\sphericalangle(\vec{x},\vec{y}) = \sphericalangle\left(\vec{x}',\vec{y}'\right),
\end{gathered}$$

kar smo želeli dokazati. ■

Posledica 1 Vsaka izometrija slika trikotnike v skladne trikotnike.

Dokaz. Po lemi 1 slika vsaka izometrija trikotnike v trikotnike. Po definiciji izometrija ohranja dolžine stranic v trikotniku. Po lemi 2 poljubna izometrija ohranja kóte trikotnika. ■

Lema 3 Vsaka izometrija, ki ohrani koordinatno izhodišče ravnine, je linearna preslikava.

Dokaz. Naj bo $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ izometrija. Potem za poljubne vektorje $\vec{x},\vec{y},\vec{x}+\vec{y}\in\mathbb{R}^2$ in njihove slike velja

$$\|F(\vec{x})\|=\|\vec{x}\|,\quad \|F(\vec{y})\|=\|\vec{y}\|,\quad \|F(\vec{x})+F(\vec{y})\|=\|\vec{x}+\vec{y}\|. \tag{2.6}$$

Izračunajmo

$$\begin{aligned}R&=\|F(\vec{x}+\vec{y})-F(\vec{x})-F(\vec{y})\|^2\\&=(F(\vec{x}+\vec{y})-F(\vec{x})-F(\vec{y}))\cdot(F(\vec{x}+\vec{y})-F(\vec{x})-F(\vec{y}))\\&=\|F(\vec{x}+\vec{y})\|^2+\|F(\vec{x})\|^2+\|F(\vec{y})\|^2-\\&-2F(\vec{x}+\vec{y})\cdot F(\vec{x})-2F(\vec{x}+\vec{y})\cdot F(\vec{y})-2F(\vec{x})\cdot F(\vec{y})\end{aligned}$$

Iz (2.6) in (2.5) sledi

$$\begin{aligned}R&=\|\vec{x}+\vec{y}\|^2+\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2-2(\vec{x}+\vec{y})\cdot\vec{x}-2(\vec{x}+\vec{y})\cdot\vec{y}-2\vec{x}\cdot\vec{y}\\&=\|(\vec{x}+\vec{y})-\vec{x}-\vec{y}\|^2\\&=0.\end{aligned}$$

Dokazali smo, da je $R=0$ za vsak par $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^2$. Vemo, da ima samo ničelni vektor ničelno dolžino

$$\|\vec{a}\|=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0},$$

zato sledi $F(\vec{x}+\vec{y})-F(\vec{x})-F(\vec{y})=\vec{0}$, oziroma

$$F(\vec{x}+\vec{y})=F(\vec{x})+F(\vec{y})\qquad\text{aditivnost}$$

S podobnim razmislekom dokažemo še

$$F(\alpha\vec{x})=\alpha F(\vec{x})\qquad\text{homogenost}$$

■

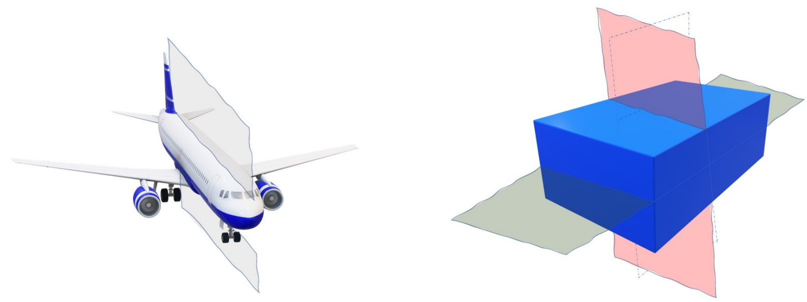
Definicija 3 — Fiksna točka. Če za vektorsko funkcijo $\vec{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ obstaja točka $\vec{x}_*=(x_*,y_*)$, za katero velja

$$\vec{F}(\vec{x}_*)=\vec{x}_*,$$

jo imenujemo *fiksna točka* preslikave $\vec{F}$.

Opomba. Iz slike 2.8 je razvidno, da ima zrcaljenje preko $x-$osi neskončno fiksnih točk (celotna $x-$os je premica fiksnih točk). Rotacija (okoli izhodišča) ima eno samo fiksno točko: središče rotacije (koordinatno izhodišče). Translacija očitno nima fiksih točk.

Najprej bomo obravnavali simetrije ravnine. V nadaljevanju bomo obravnavali še simetrije končnih (ravninskih) vzorcev.[8] Na sliki 2.10 (b) vidimo, da imajo večdimenzionalni končni vzorci v splošnem več simetrij kot ravninski (končni) vzorci. Kvader je 3D posplošitev pravokotnika. Pravokotnik ima dve (pravokotni) zrcalni premici in dve rotaciji: za kót $180°$ in za kót $360°$, kvader ima tri (paroma pravokotne) zrcalne ravnine in tri pare rotacij za $180°$ in $360°$.



(a) Ena zrcalna ravnina letala. (b) Tri zrcalne ravnine kvadra.

Slika 2.10: V 3D prostoru očitno obstaja več simetrij kot v 2D prostoru. Prostorskih vzorcev v tem učbeniku ne obravnavamo.

Za simetrijo bomo uporabljali naslednjo definicijo.

Definicija 4 — Simetrija množice. Naj bo $M \subset \mathbb{R}^2$ neka množica točk v ravnini. Simetrija množice M je vsaka izometrija $\vec{S} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ki množico M preslika vase:

$$\vec{S}(M) = M.$$

Pravimo tudi, da je množica M invariantna za preslikavo $\vec{S}$.

Opomba. Identična preslikava ravnine $\vec{I} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ki vsako točko ravnine preslika vase

$$\vec{I}(\vec{x}) = \vec{x} \qquad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2,$$

je simetrija vsake množice $M \subset \mathbb{R}^2$.[9]

■ **Primer 6** Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *soda*, če za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $f(x) = f(-x)$. Graf (poljubne) sode funkcije je simetrična množica. Na sliki 2.11 vidimo grafa racionalnih funkcij $f(x) = \frac{x^2-2}{2x^2+3}$ in $g(x) = \frac{x^2-6x+7}{2x^2-4x+5}$. Množica točk

$$\Gamma_f = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \quad y = f(x) \right\}$$

[8] Neskončnih vzorcev ne bomo podrobno obravnavali.

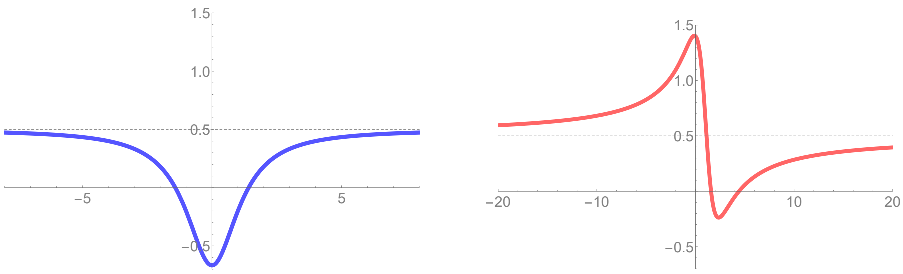
[9] Identično transformacijo imenujemo tudi *trivialna simetrija*.

je zrcalno-simetrična. Za množico točk

$$\Gamma_g = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \quad y = g(x) \right\}$$

ne obstaja nobena netrivialna simetrija.

■



(a) Graf sode funkcije.

(b) Graf funkcije, ki ni soda.

Slika 2.11: Množica Γ_f ima zrcalno simetrijo. Množica Γ_g nima niti zrcalne, niti rotacijske simetrije.

2.2 Simetrije ravnine

Če za množico M v definiciji 4 vzamemo celotno ravnino $\mathbb{R}^2$, govorimo o simetrijah ravnine. Vsaka izometrija ravnine $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je tudi simetrija ravnine. V nadaljevanju bomo uporabljali oznako

$$\vec{F}(X) = X'$$

za funkcijsko vrednost (sliko) točke X.

V poglavju 4 bomo dokazali, da je vsaka izometrija ravnine bodisi

- rotacija,
- zrcaljenje,
- translacija ali
- drsno zrcaljenje.

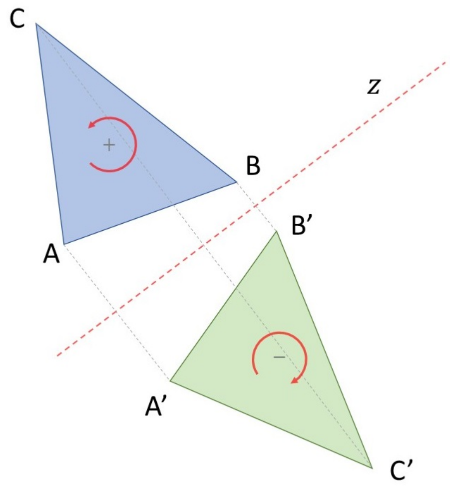
Orientacija v trikotniku ΔABC je pozitivna[10], če smer gibanja $A \to B \to C$ opisuje rotacijo nasproti urinega kazalca:

$\circlearrowleft$ pozitivna orientacija.

Na sliki 2.12 vidimo, da zrcaljenje obrača orientacijo trikotnika.

Primeri izometrij ravnine, ki smo jih že spoznali, so translacija (T), rotacija (R) in zrcaljenje (Z). Videli smo, da T in R ohranjata orientacijo v trikotniku, Z pa ne.

[10] Če je v trikotniku ΔABC smer gibanja $A \to B \to C$ v smeri urinega kazalca $\circlearrowright$, je orientacija trikotnika ΔABC negativna.



Slika 2.12: Zrcaljenje obrača orientacijo trikotnika. Zrcaljenje preko osi z preslika trikotnik ΔABC (s pozitivno orientacijo) v $\Delta A'B'C'$ (z negativno orientacijo).

V vseh spodnjih primerih se točka A preslika v A', točka B se preslika v B' (in točka C se preslika v točko C'):

$$A \mapsto A',$$
$$B \mapsto B'.$$

Za simetrale in nosilke bomo uporabili naslednje oznake. Simetralo daljice $\overline{AA'}$ označimo s

$$\text{sim}\left(\overline{AA'}\right),$$

nosilko daljice $\overline{AB}$ označimo z

$$\text{nos}\left(\overline{AB}\right),$$

simetralo kota $\sphericalangle ASA'$ označimo s

$$\text{sim}\left(\sphericalangle ASA'\right).$$

Na sliki 2.13 vidimo, kako prepoznamo zrcaljenje. Spomnimo se, da je zrcaljenje določeno z zrcalno osjo (premico z); zrcalna os z je simetrala[11] poljubne daljice $\overline{AA'}$

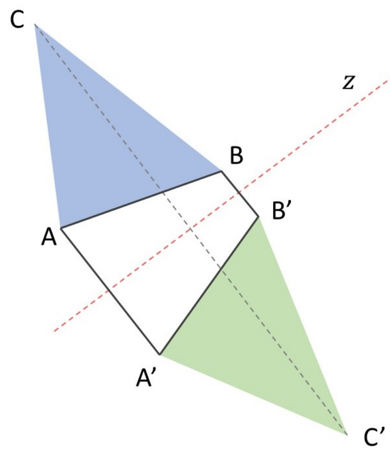
$$z = \text{sim}\left(\overline{AA'}\right) = \text{sim}\left(\overline{BB'}\right).$$

Štirikotnik $AA'B'B$, ki nastane z zrcaljenjem daljice $\overline{AB}$, je trapez.

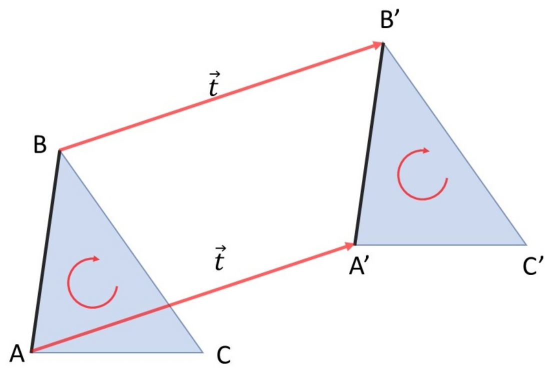
Na sliki 2.14 vidimo, kako prepoznamo translacijo, ki je določena s translacijskim vektorjem $\vec{t}$. Slika poljubne daljice $\overline{AB}$ porodi paralelogram, saj je

$$\vec{t} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}.$$

[11] Kar sovpada s simetralo daljice $\overline{BB'}$ in tudi s simetralo daljice $\overline{CC'}$.



Slika 2.13: Zrcaljenje prepoznamo po trapezu $AA'B'B$, ki ga porodi daljica $\overline{AB}$ in njena slika $\overline{A'B'}$. Stranici $\overline{AA'}$ in $\overline{BB'}$ sta vzporedni.



Slika 2.14: Translacijo prepoznamo po paralelogramu $AA'B'B$, ki ga porodi premik daljice $\overline{AB}$. Translacija ohranja orientacijo trikotnika.

Na sliki 2.15 vidimo, kako prepoznamo rotacijo, ki je določena s središčem S in kótom rotacije φ (to sta podatka, ki ju iščemo). Če se točka A preslika v A', je središče na simetrali daljice $\overline{AA'}$

$$S \in \operatorname{sim}\left(\overline{AA'}\right).$$

Enako velja[12] za simetralo daljice $\overline{BB'}$

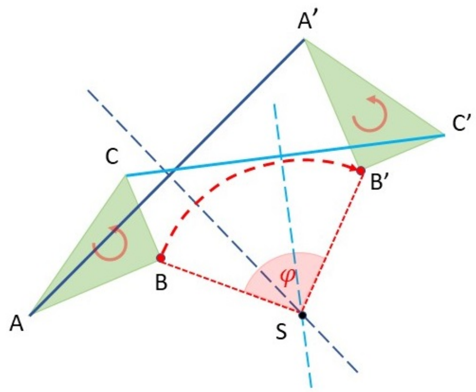
$$S \in \operatorname{sim}\left(\overline{BB'}\right).$$

Zato je:

$$S = \operatorname{sim}\left(\overline{AA'}\right) \cap \operatorname{sim}\left(\overline{BB'}\right)$$

$$\varphi = \sphericalangle ASA' = \sphericalangle BSB'.$$

[12] Če enako velja še za točko C, potem gre dejansko za rotacijo.



Slika 2.15: Rotacija ima središče S v presečišču simetral daljic $\overline{AA'}$ in $\overline{CC'}$. Kót rotacije je: $\varphi = \sphericalangle BSB'$. Rotacija ohranja orientacijo trikotnikov.

■ **Primer 7** Za izometrijo na sliki 2.16 (a) vidimo, da obrača orientacijo. Preverimo, ali gre za zrcaljenje. Simetrala daljice $\overline{AA'}$, sim $\left(\overline{AA'}\right)$, predstavljena z rdečo črto, ne sovpada s simetralo sim $\left(\overline{CC'}\right)$, ki je predstavljena s sivo črto. Zato ta izometrija ne predstavlja zrcaljenja. Ker obrača orientacijo, ne more predstavljati niti translacije, niti rotacije. Torej gre za neko novo vrsto izometrije, ki jo imenujemo **drsno zrcaljenje.**[13] ■

Na sliki 2.16 je prikazano drsno zrcaljenje.

Definicija 5 Naj bo podana premica d in njej vzporeden neničelni vektor $\vec{d}$. Kompozicija zrcaljenja preko osi d in translacije za vektor $\vec{d}$ imenujemo drsno zrcaljenje.

Kot smo videli v primeru 7, gre za novo vrsto izometrije, ki nima fiksne točke in obrača orientacijo trikotnikov.

Glede (ne)ohranjanja orientacije in (ne)obstoja fiksnih točk lahko izometrije ravnine razporedimo v spodnjo tabelo:

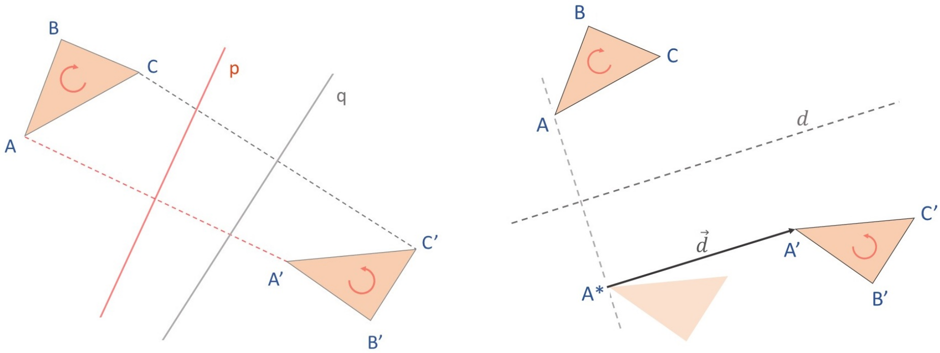
Orientacija / Fiksne točke	Se ohrani	Se obrne
Obstajajo	R	Z
Ne obstajajo	T	D

Tabela 2.1: Izometrije ravnine T: translacija, R: rotacija, Z: zrcaljenje, D: drsno zrcaljenje.

Na sliki 2.17, ki je narisana z Geogebro[14], vidimo, kako prepoznamo drsno zrcaljenje, ki je določeno s premico zrcaljenja d in (njej) vzporednim vektorjem $\vec{d}$.

[13] V angleščini se drsno zrcaljenje imenuje *glide reflection*. Pri drsnem zrcaljenju moramo poiskati/določiti zrcalno os $d = ?$ in vektor zrcaljenja $\vec{d} = ?$ Vektor zcaljenja $\vec{d}$ je vedno vzporeden z zrcalno osjo d.

[14] Geogebra je odprtokodni program, ki je dostopen na povezavi.



(a) Izometrija, ki obrača orientacijo. (b) **Drsno zrcaljenje.**

Slika 2.16: (a) Izometrija ni zrcaljenje, saj $\operatorname{sim}\left(\overline{AA'}\right) = p \neq q = \operatorname{sim}\left(\overline{CC'}\right)$. Ker obrača orientacijo, gre za novo-četrto izometrijo ravnine *drsno zrcaljenje*.
(b) Drsno zrcaljenje je definirano z zrcalno premico d in njej vzporednim vektorjem $\vec{d}$.

Postopek iskanja osi in vektorja drsnega zrcaljenja (glej sliko 2.17):

1. Poglejmo daljico $\overline{BC}$ in njeno sliko $\overline{B''C''}$. Narišimo obe nosilki $p = \operatorname{nos}\left(\overline{BC}\right)$ in $q = \operatorname{nos}\left(\overline{B''C''}\right)$ ..
   - Če sta premici p in q slučajno vzporedni, je os drsnega zrcala pravokotna na njuno (skupno) smer
     $$d \perp \operatorname{nos}\left(\overline{BC}\right).$$
   - Običajno se premici p in q sekata v neki točki D in simetrala[15] kóta $\varphi = \sphericalangle D$, pod katerim se obe nosilki p in q sekata, je vzporedna z osjo d:
     $$d \parallel \operatorname{sim}(\varphi) \quad \text{... premica } s \text{ na sliki 2.17.}$$
2. Če skozi točki A in A'' potegnemo vzporednici k $s = \operatorname{sim}(\varphi)$ in pravokotnico skozi točko A, dobimo točko A'. Os drsnega zrcala d (rdeča črta) je simetrala daljice $\overline{AA'}$. Vektor drsnega zrcaljenja $\vec{d}$ poteka od točke A' do točke A'' (glej sliko 2.17).

2.3 Sestavljanje izometrij

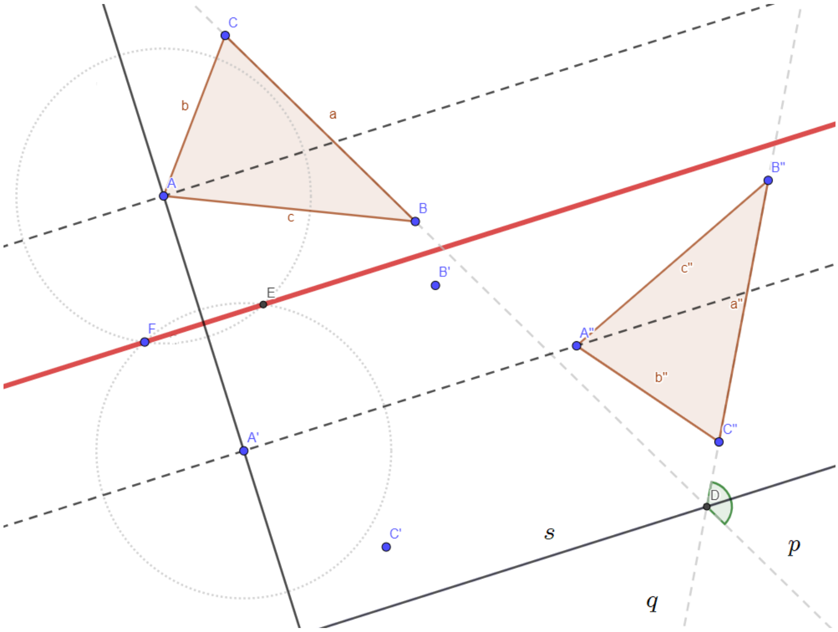
Spomnimo se, da lahko funkcije sestavljamo. Sestavljeno funkcijo imenujemo tudi kompozicija ali *kompozitum funkcij*. Vemo, da za realni funkciji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ obstajata dva kompozituma

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \text{in} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

ki običajno nista enaka:

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

[15] Lahko gre za kót $\sphericalangle BDB''$ ali pa njegov suplementarni kót. Na sliki 2.17 iščemo suplementarni kót, katerega simetrala je premica s.



Slika 2.17: *Drsno zrcaljenje.* Trikotnik ΔABC je drsno prezrcaljen preko (rdeče) premice v trikotnik $\Delta A''B''C''$. Vektor zrcaljenja $\vec{d}$ poteka od točke A' do točke A''. Črtkani črti sta vzporednici k simetrali kóta $\varphi = \sphericalangle D$.

■ **Primer 8** Za realni funkciji $f(x) = x^2$ in $g(x) = e^x$ zapišimo oba kompozituma $f \circ g$ ter $g \circ f$ in ju izvrednotimo pri $x = 1$:

$$(f \circ g)(x) = (e^x)^2 \quad = e^{2x} \quad \Longrightarrow \quad (f \circ g)(1) = e^2 \approx 7.389$$

$$(g \circ f)(x) = e^{x^2} \qquad\qquad \Longrightarrow \quad (g \circ f)(1) = e^{1^2} = e \approx 2.718.$$

Vidimo, da rezultata nista enaka:

$$7.389 \approx (f \circ g)(1) \neq (g \circ f)(1) \approx 2.718.$$

■

Tudi izometrije v ravnini lahko sestavljamo. V naslednjem poglavju, ko bomo spoznali matrike, bomo kompozitume lahko predstavili tudi računsko, v obliki (sestavljene) funkcije. V tem razdelku bomo grafično/konstrukcijsko prikazali, da zaporedno delovanje dveh od štirih izometrij ravnine vedno predstavlja eno od teh štirih izometrij ravnine.

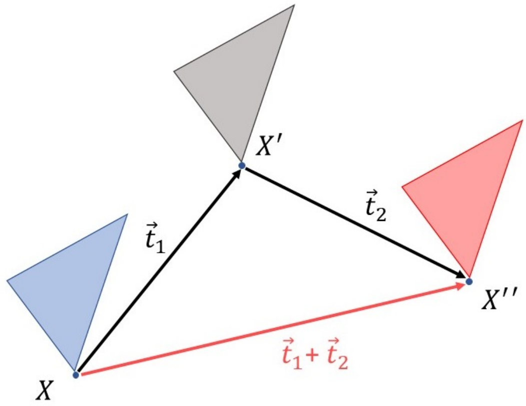
■ **Primer 9 — Translacija translacije** $T_1 \circ T_2$**.** Kot vidimo na sliki 2.18, je translacija T_2 translacije T_1 nova translacija T za vektor

$$T = T_2 \circ T_1 : \quad (x,y) \mapsto (x,y) + \vec{t}_2 + \vec{t}_1.$$

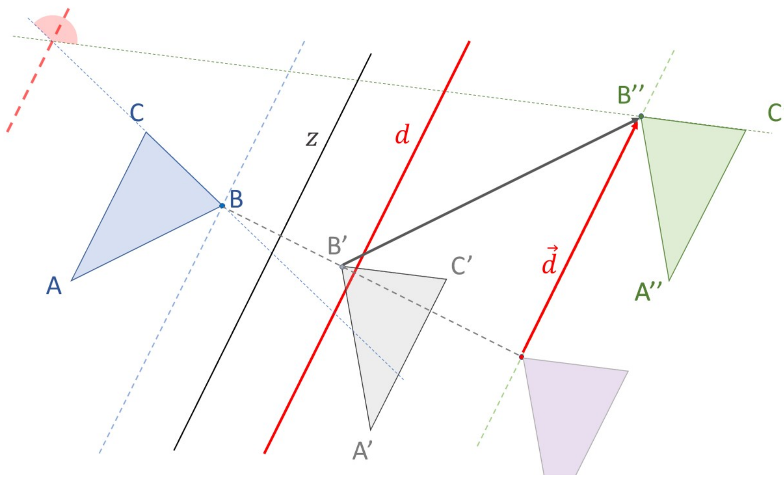
Sami razmislite, da je

$$T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1.$$

■



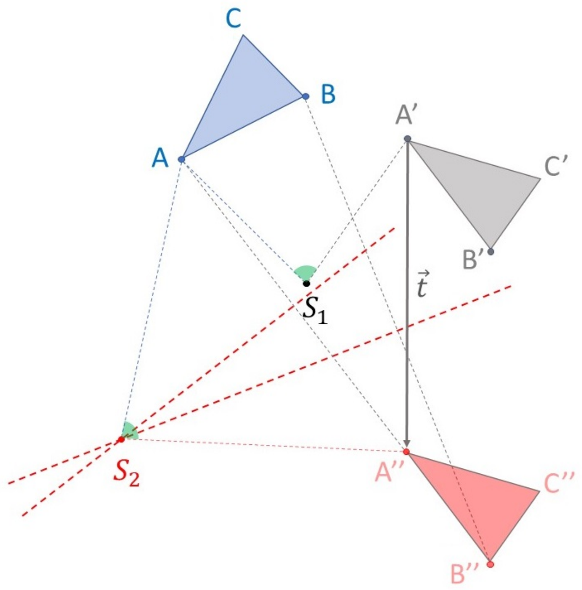
Slika 2.18: Translacija translacije je translacija. Modri trikotnik se s translacijo $\vec{t}_1$ preslika v sivega. Sivi trikotnik se potem s translacijo $\vec{t}_2$ preslika v rdečega. Kompozitum $\vec{t}_1 + \vec{t}_2$ preslika modri trikotnik neposredno v rdečega.



Slika 2.19: Translacija zrcaljenja je skoraj vedno drsno zrcaljenje. Modri trikotnik se preko premice z prezrcali v sivega. Sivi trikotnik se z vektorjem $\overrightarrow{B'B''}$ translira v zelenega. Enako dosežemo, če modri trikotnik drsno prezrcalimo preko rdeče črte d.

■ **Primer 10 — Translacija zrcaljenja** $T \circ Z$. Najprej razmislimo, katere izometrije sploh lahko nastanejo s takim sestavljanjem? Zrcaljenje obrača orientacijo, translacija jo ohranja. Torej sestavljena izometrija obrača orientacijo. Sami razmislite, da ima translacija zrcaljenja lahko fiksno točko samo, če je vektor translacije pravokoten[16] na os zrcala. V tem primeru je kompozitum zrcaljenje, ki je vzporedno začetnemu zrcaljenju. Glej nalogo 14. V vseh drugih primerih pa sestavljena izometrija nima fiksne točke, zato gre nujno za drsno zrcaljenje, kot prikazuje slika 2.19. ■

[16] To je tako imenovani izrojen primer kompozituma $T \circ Z$.



Slika 2.20: Translacija rotacije je nova rotacija. Modri trikotnik zarotiramo okoli središča S_1 v sivega, tega pa z vektorjem $\vec{t} = \overrightarrow{A'A''}$ vzporedno premaknemo v rdeči trikotnik. Enako dosežemo, če modri trikotnik zarotiramo za isti kót okoli središča S_2.

■ **Primer 11 — Translacija rotacije** $T \circ R$. Najprej razmislimo, katere izometrije sploh lahko nastanejo s takim sestavljanjem. Rotacija okrog središča S_1 za kót φ in translacija za vektor $\vec{t}$ ohranjata orientacijo. Torej tudi sestavljena izometrija ohranja orientacijo, kar pomeni, da gre lahko za neko novo translacijo[17], večinoma pa gre za neko novo rotacijo za enak kót φ. Razmisli, da novo središče, S_2, dobimo tako, da vektor $\vec{t}$ zarotiramo okoli točke S_1 za kót φ. Središče S_2 je fiksna točka sestavljene izometrije; glej sliko 2.20. ■

Opomba. Ostale kompozitume bomo računsko obravnavali v poglavju 4.

2.4 Naloge

Naloga 7 Poiščite simetrije končnega vzorca na sliki 2.1 (b)?

Glej rešitev 7

Naloga 8 Poiščite simetrije končnega vzorca na sliki 2.2 (b)?

Glej rešitev 8

Naloga 9 Ali je $(x,y) \mapsto (x+2y, -x+4y)$ izometrija ravnine? Namig: Preslikaj točko $T(0,1)$ in potem še daljico $\overline{OT}$.

Glej rešitev 9

Naloga 10 Ali je $f(x) = x^2 - 4x + 1$ soda funkcija?

[17] Razmisli, da nastane translacija samo, če je kót rotacije enak 360° ali pa 0°.

Glej rešitev 10

Naloga 11 Podana je funkcija $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Ali je graf Γ_f zrcalno simetričen?

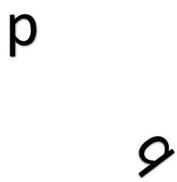
Glej rešitev 11

Naloga 12 Katera od štirih osnovnih simetrij ravnine je na sliki 2.21?

Slika 2.21: Katera od štirih osnovnih simetrij ravnine je na sliki?

Glej rešitev 12

Naloga 13 Katera od štirih osnovnih simetrij ravnine je na sliki 2.22?



Slika 2.22: Katera od štirih osnovnih simetrij ravnine je na sliki?

Glej rešitev 13 oz. sliko 8.3.

Naloga 14 Naj bo $A(0,1)$, $B(0,3)$ in $C(-1,3)$. Trikotnik ΔABC prezrcali preko premice $y = x$, da nastane trikotnik $\Delta A'B'C'$. Trikotnik $\Delta A'B'C'$ vzporedno premakni za vektor $(-1,1)$. Dokaži, da je kompozitum obeh izometrij zrcaljenje preko premice $y = 1 + x$. Preveri, da gre za poseben primer, ko je vektor translacije $(-1,1)$ pravokoten na os zrcala $y = x$.

Glej rešitev 14

Nič ni bolj dovršeno kot preprostost.

Leonardo da Vinci

3. Od vektorjev k matrikam

V razdelku 1.1 smo spoznali geometrijske vektorje v ravnini $\mathbb{R}^2$ in v trirazsežnem (evklidskem) prostoru $\mathbb{R}^3$. Spomnimo se, da je bistvo geometrijskih vektorjev v $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$ komponentni zapis

$$\begin{aligned} (komponenta_1, \quad komponenta_2) &= (x, y) \qquad \text{v } \mathbb{R}^2 \\ (komponenta_1, \quad komponenta_2, \quad komponenta_3) &= (x, y, z) \qquad \text{v } \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

O vektorjih lahko govorimo bolj splošno, tako, da definiramo vektorski prostor (glej dodatek 8.7). Obstajajo tudi $n-$razsežni realni in kompleksni vektorski prostori, ki jih označujemo z

$$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$$

oziroma s

$$(\mathbb{C}^n, +, \cdot).$$

Tudi 2×2 in $3 \times 3-$matrike, ki jih bomo obravnavali v tem poglavju tvorijo $2 \cdot 2 = 4$ in $3 \cdot 3 = 9-$razsežni vektorski prostor. Obstajajo celo neskončno razsežni vektorski prostori. [1]

V tem učbeniku se bomo omejili na geometrijske vektorje iz $\mathbb{R}^2$ (in delno iz $\mathbb{R}^3$) in matrike, ki predstavljajo linearne preslikave iz $\mathbb{R}^2$ v $\mathbb{R}^2$ (ali iz $\mathbb{R}^3$ v $\mathbb{R}^3$).

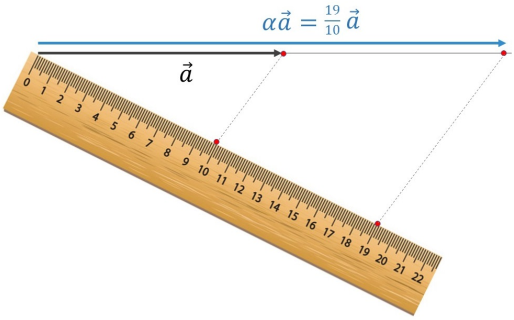
Natančna definicija vektorskega prostora (glej dodatek 8.7) nad skalarji (v našem primeru $\mathbb{R}$) opredeli, kako se

[1] Kot primer navedimo prostor funkcij, ki so zvezne na intervalu $[a, b]$. Naslednji pomemben primer neskončno razsežnega vektorskega prostora je prostor kvadratno-integrabilnih funkcij.

- vektorji množijo s skalarji. Naj bo $\vec{a} = (a_1, a_2)$ vektor iz $\mathbb{R}^2$ in $\alpha \in \mathbb{R}$ nek skalar (število). Potem je

  $$\alpha\vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2)$$

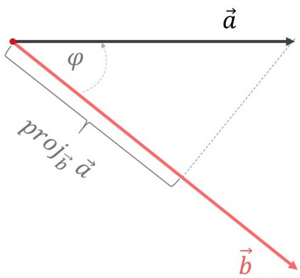
  razteg oz. skrčitev vektorja $\vec{a}$, kot kaže slika 3.1;
- vektorji seštevajo (in odštevajo).



Slika 3.1: Produkt vektorja s skalarjem $\alpha\vec{a}$ je lahko skrčitev, če je $\alpha < 1$, lahko pa gre za razteg, če je $\alpha > 1$.

Za uporabo so zanimivejši vektorski prostori, v katerih lahko vektorje tudi množimo.[2] Spomnimo se, da je vektor količina, ki je določena s smerjo, usmerjenostjo in dolžino. Kót med vektorjema iz $\mathbb{R}^2$ (ali iz $\mathbb{R}^3$) lahko izračunamo s pomočjo kosinusnega izreka 2.

Za poljubna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ z dolžinama $\|\vec{a}\|$ in $\left\|\vec{b}\right\|$, ki oklepata kót φ, lahko definiramo skalarni produkt.



Slika 3.2: Pravokotna projekcija vektorja $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$.

Definicija 6 *Skalarni produkt*, $\vec{a}\cdot\vec{b}$, vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je skalar (število), za katero velja

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\left\|\vec{b}\right\|\cos\varphi. \tag{3.1}$$

[2] V $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$ poznamo skalarni produkt (v $\mathbb{R}^3$ pa še vektorski produkt).

Iz definicije (3.1) sledi[3]

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}\quad \text{za vsak par vektorjev}\quad \vec{a},\vec{b}$$

Prav tako sledi

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\|\vec{a}\|^2,$$

saj je kót med $\vec{a}$ in $\vec{a}$ enak 0°. To pomeni, da lahko s skalarnim produktom računamo dolžine vektorjev in razdalje med točkami.

Prav tako lahko s pomočjo skalarnega produkta izračunamo (pravokotno) projekcijo vektorja $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$, kot kaže slika 3.3. Iz definicije (3.1) sledi

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\left\|\vec{b}\right\|}.$$

Na sliki 3.2 $\cos\varphi$ povežemo s projekcijo vektorja $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$, $\text{proj}_{\vec{b}}\vec{a}$:

$$\cos\varphi=\frac{\text{proj}_{\vec{b}}\vec{a}}{\|\vec{a}\|}\Longrightarrow \text{proj}_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left\|\vec{b}\right\|}\tag{3.2}$$

Če je $\vec{b}$ enotski vektor [4], iz (3.2) sledi

$$\text{proj}_{\vec{b}}\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}.\tag{3.3}$$

Iz enačbe (3.3) in iz slike 3.3 sledi geometrijski dokaz distributivnosti skalarnega produkta za seštevanje

$$(\vec{a}_1+\vec{a}_2)\cdot\vec{b}=\vec{a}_1\cdot\vec{b}+\vec{a}_2\cdot\vec{b}.\tag{3.4}$$

Za pravokotna enotska vektorja $\vec{i}=(1,0)$ in $\vec{j}=(0,1)$ velja

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=1\quad \vec{i}\cdot\vec{j}=0\quad \text{in}\quad \vec{j}\cdot\vec{j}=1.\tag{3.5}$$

Poljubna vektorja $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^2$ lahko[5] zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{i}$ in $\vec{j}$

$$\begin{aligned}\vec{x}&=x_1\vec{i}+x_2\vec{j}\\ \vec{y}&=y_1\vec{i}+y_2\vec{j}.\end{aligned}$$

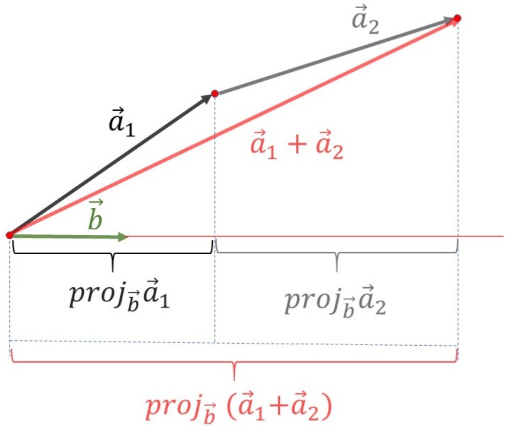
Z uporabo formul (3.5) in (3.4) za skalarni produk $\vec{x}\cdot\vec{y}$ sledi formula

$$\begin{aligned}\vec{x}\cdot\vec{y}&=\left(x_1\vec{i}+x_2\vec{j}\right)\cdot\left(y_1\vec{i}+y_2\vec{j}\right)\\ &=x_1y_1\vec{i}\cdot\vec{i}+(x_1y_2+x_2y_1)\vec{i}\cdot\vec{j}+x_2y_2\vec{j}\cdot\vec{j}\\ &=x_1y_1+x_2y_2.\end{aligned}$$

[3] Ker je kosinus soda funkcija: $\cos(-\varphi)=\cos\varphi$ za vsak φ.

[4] Če je vektor $\vec{b}$ enotski, velja $\left\|\vec{b}\right\|=1$.

[5] Podobno velja tudi za vektor $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$.



Slika 3.3: Grafični dokaz distributivnosti skalarnega produkta.

Opomba. Podobno za vektorja $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ iz $\mathbb{R}^3$ sledi

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i.$$

V $\mathbb{R}^3$ lahko za poljubna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, ki oklepata kót φ, definiramo še eno množenje vektorjev, katerega rezultat je novi vektor.

Definicija 7 — Vektorski produkt. Vektorski produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je vektor

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b},$$

za katerega velja:

1. Dolžina vektorja $\vec{c}$ je enaka ploščini paralelograma, ki ga tvorita vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$:

$$\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \sin\varphi.$$

2. Vektor $\vec{c}$ je pravokoten na oba vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$.
3. Usmerjenost vektorja $\vec{c}$ določa gibanje desnosučnega vijaka, če ga vrtimo od $\vec{a}$ proti $\vec{b}$; glej sliko 3.4.

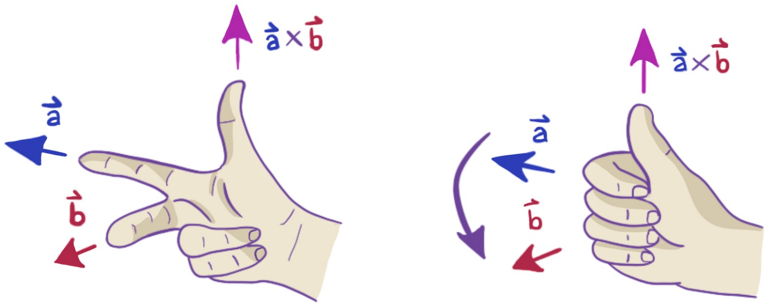
Naslednje leme sledijo direktno iz definicije 7.

Lema 4 Vektorski produkt je antikomutativen:

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b} \quad \text{antikomutativnost}$$

Lema 5 Za vektorski produkt veljata oba distributivnostna zakona:

$$\begin{aligned} (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b} &= \vec{a}_1 \times \vec{b} + \vec{a}_2 \times \vec{b} \\ \vec{a} \times \left(\vec{b}_1 + \vec{b}_2\right) &= \vec{a} \times \vec{b}_1 + \vec{a} \times \vec{b}_2 \end{aligned} \qquad \text{distributivnostna zakona}$$



Slika 3.4: Slika prikazuje dve alternativni razlagi pravila desne roke. **Levi del slike:** če je kazalec vektor $\vec{a}$ in sredinec $\vec{b}$, kaže njun vektorski produkt $\vec{a}\times\vec{b}$ v smeri palca. **Desni del slike** kaže smer gibanja desnosučnega vijaka, če ga vrtimo v smeri vijoličaste puščice.

Lema 6 Za vektorski produkt velja homogenost:

$$\alpha\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\alpha\vec{b}=\alpha\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\quad\text{homogenost}$$

Lema 7 Vektorji $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$ in $\vec{k}=(0,0,1)$ so enotski in paroma pravokotni. Za njihove vektorske produkte velja:

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}\quad\text{in}\quad \vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}.$$

Posledica 2 Naj bo $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ in $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$. Tedaj je

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}&=\left(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}\right)\times\left(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}\right)\\&=a_1b_2\vec{k}-a_1b_3\vec{j}-a_2b_1\vec{k}+a_2b_3\vec{i}+a_3b_1\vec{j}-a_3b_2\vec{i}\\&\Downarrow\\\vec{a}\times\vec{b}&=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)\end{aligned}\tag{3.6}$$

Dokaz. Formula 3.6 sledi direktno iz zgornjih lem. ■

Opomba. Naj bo $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ in $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$. Preveri, da lahko vektorski produkt računamo tudi s pomočjo determinante

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}.$$

■ **Primer 12** Naj bo $\vec{a}=(1,2,-1)$ in $\vec{b}=(3,2,1)$. Potem je

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&-1\\3&-2&0\end{vmatrix}=-2\vec{i}-3\vec{j}-8\vec{k}=-(2,3,8).$$

■

■ **Primer 13** Če sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ vzporedna, je njun vektorski produkt enak $\vec{0} = (0,0,0)$.[6] Vektorja $\vec{a} = (1,2,-1)$ in $\vec{b} = (3,2,1)$ nista vzporedna, saj je $\vec{a} \times \vec{b} = -(2,3,8) \neq (0,0,0)$.
■

■ **Primer 14** Naj bo $\vec{a} = (1,2,-1)$ in $\vec{b} = (3,2,1)$. Potem je ploščina paralelograma, ki ga tvorita vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, enaka

$$pl = \left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 8^2} = \sqrt{77} \approx 8.775.$$

■

■ **Primer 15** Naj bo $A(1,0,-1)$, $B(0,1,2)$ in $C(3,2,0)$. Potem je ploščina trikotnika ΔABC enaka

$$\begin{aligned} pl_\Delta &= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\| \\ &= \frac{1}{2}\|(-1,1,3) \times (2,2,1)\| \\ &= \frac{1}{2}\|(-5,7,-4)\| = \frac{1}{2}\sqrt{90} \\ &\approx 4.743 \text{ kvadratne enote.} \end{aligned}$$

■

3.1 Množenje matrike z vektorjem

V definiciji 2 smo vektorsko funkcijo $\vec{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ imenovali linearna, če je za poljubna vektorja $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ in poljubni skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ veljalo:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x} + \vec{y}) &= \vec{A}(\vec{x}) + \vec{A}(\vec{y}) \\ \vec{A}(\alpha\vec{x}) &= \alpha\vec{A}(\vec{x}). \end{aligned}$$

■ **Primer 16** Splošno linearno preslikavo ravnine $\mathbb{R}^2$ lahko zapišemo v obliki

$$\vec{A}(x,y) = (ax + by, cx + dy). \tag{3.7}$$

■

■ **Primer 17** Splošno linearno preslikavo prostora $\mathbb{R}^3$ lahko zapišemo v obliki

$$\vec{A}(x,y,z) = (a_1x + b_1y + c_1z, a_1x + b_1y + c_1z, a_1x + b_1y + c_1z).$$

■

[6] Če sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ vzporedna, je ploščina paralelograma, ki ga vektorja tvorita, enaka nič, saj je kót med vektorjema enak nič in $\sin(0) = 0$.

Opomba. Očitno je linearna preslikava ravnine $\mathbb{R}^2$ (prostora $\mathbb{R}^3$) enolično določena s štirimi (devetimi) števili

$$\begin{aligned} a,b,c,d \in \mathbb{R} &\quad \text{potrebna informacija v } \mathbb{R}^2 \\ (a_{1,2,3}, b_{1,2,3}, c_{1,2,3} \in \mathbb{R} &\quad \text{potrebna informacija v } \mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

Opomba. Linearne preslikave (ravnine) označujemo brez vektorja in tudi brez oklepajev, ki nakazujejo funkcijsko odvisnost:

$$\begin{aligned} &\vec{A} \rightsquigarrow A && \text{vektorskega znaka ne pišemo} \\ &\vec{A}(\vec{x}) \rightsquigarrow A\vec{x} && \text{oklepajev ne pišemo} \end{aligned}$$

Krajši zapis linearnih preslikav, kjer vso potrebno informacijo zapišemo v razpredelnico, imenujemo **matrika**. Matrika linearne preslikave ravnine [7] je $2 \times 2-$razpredelnica (realnih) števil:

$$A(x,y) = (ax+by, cx+dy) \longleftrightarrow A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Opomba. Pri delu z matrikami, pišemo vektorje kot stolpce (in ne več kot vrstice)

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) \longleftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &\text{ ravninski vektor} \\ (x_1, x_2, x_3) \longleftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &\text{ prostorski vektor} \end{aligned}$$

Matrika linearne preslikave prostora[8] je $3 \times 3-$razpredelnica (realnih) števil:

$$B \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z \\ b_{21}x + b_{22}y + b_{23}z \\ b_{31}x + b_{32}y + b_{33}z \end{bmatrix} \longleftrightarrow B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}.$$

Očitno smo matriko definirali tako, da množenje matrike A z vektorjem $\vec{x}$ po komponentah predstavlja skalarni produkt ustrezne vrstice matrike z vektorjem $\vec{x}$:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{prva vrstica } \cdot \vec{x} \\ \text{druga vrstica } \cdot \vec{x} \end{bmatrix}.$$

■ **Primer 18** Produkt matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ z vektorjem $\vec{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ je

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 13 \end{bmatrix},$$

[7] To pomeni, da ravnino preslika v ravnino: $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

[8] To pomeni, da prostor $\mathbb{R}^3$ (pre)slika v prostor $\mathbb{R}^3$, kar simbolično zapišemo $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

saj je

$$\begin{aligned} (1,2)\cdot(-3,1) &= -3+2=-1 && \text{prva komponenta rezultata} \\ (-3,4)\cdot(-3,1) &= 9+4=13 && \text{druga komponenta rezultata.} \end{aligned}$$

■

Opomba. Pravimo, da matrika A vektor $(-3,1)$ preslika v vektor $(-1,13)$

$$A:(-3,1)\mapsto(-1,13)$$

oziroma, da je $(-1,13)$ slika vektorja $(-3,1)$.

Definicija 8 Glavni lastnosti linearnih preslikav sta

$$\begin{aligned} A(\vec{x}+\vec{y}) &= A\vec{x}+A\vec{y} \\ A(\alpha\vec{x}) &= \alpha A\vec{x} \end{aligned} \qquad \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^2,\alpha\in\mathbb{R} \quad \text{linearna preslikava} \tag{3.8}$$

■ **Primer 19** Za preslikavo, ki je določena z matriko

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

preverimo obe lastnosti (2.1). Naj bo $\vec{x}=(x_1,x_2)$ in $\vec{y}=(y_1,y_2)$ ter $\alpha\in\mathbb{R}$. Potem je

$$\begin{aligned} A(\vec{x}+\vec{y}) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+y_1+2x_2+2y_2 \\ -x_1-y_1+3x_2+3y_2 \end{bmatrix} \\ A\vec{x}+A\vec{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+y_1+2x_2+2y_2 \\ -x_1-y_1+3x_2+3y_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} A(\alpha\vec{x}) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1+2\alpha x_2 \\ -\alpha x_1+3\alpha x_2 \end{bmatrix} \\ \alpha A\vec{x} &= \alpha\begin{bmatrix} x_1+2x_2 \\ -x_1+3x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1+2\alpha x_2 \\ -\alpha x_1+3\alpha x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

■

V primeru 8 smo se spomnili sestavljanja funkcij oz. kompozitumov. Tudi vektorske funkcije $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ lahko sestavljamo. V naslednjem razdelku povežemo množenje matrik s kompozitumi linearnih transformacij.

3.2 Množenje matrik

V splošnem lahko (pravokotni) matriki A in B zmnožimo, kadar je število stolpcev prve matrike enako številu vrstic druge matrike: torej, če je matrika A matrika dimenzije $n\times q$ in B matrika dimenzije $q\times m$. Rezultat AB je potem $n\times m-$matrika. Obravnavali bomo samo (kvadratne) 2×2 in 3×3 matrike.

Definicija 9 Matriki množimo tako, da skalarno množimo vrstice prve matrike s stolpci druge matrike

$$C = AB = \begin{bmatrix} \rightarrow \\ \Rightarrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \downarrow & \Downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}.$$

skalarni produkt vrstice in stolpca

■ **Primer 20** Produkt matrik $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ je

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 13 & 5 \end{bmatrix},$$

saj je

$$\begin{aligned} c_{11} &= (1,2) \cdot (-3,1) = -1 \\ c_{12} &= (1,2) \cdot (1,2) = 5 \\ c_{21} &= (-3,4) \cdot (-3,1) = 13 \\ c_{22} &= (-3,4) \cdot (1,2) = 5. \end{aligned}$$

■

Tako definirano množenje matrik ima dve zanimivi lastnosti:

1. Matriko linearne preslikave lahko zelo enostavno zapišemo, če poznamo sliki vektorjev $\vec{i} = (1,0)$ in $\vec{j} = (0,1)$, saj je

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}.$$

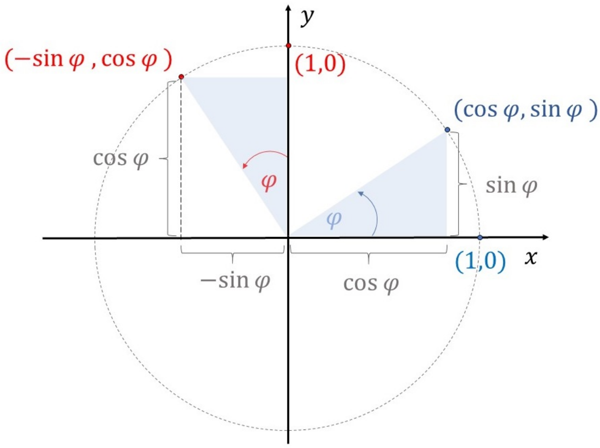
   To pomeni: slika vektorja $(1,0)$ predstavlja prvi stolpec matrike, slika vektorja $(0,1)$ pa predstavlja drugi stolpec matrike A.

2. Zaporedno delovanje oz. kompozitum linearnih preslikav sovpada z množenjem pripadajočih matrik

$$= (A \circ B)(\vec{x}) = A(B\vec{x}) = (AB)\vec{x} = AB\vec{x}.$$

■ **Primer 21** Matrika, ki rotira $(x,y)-$ravnino za kot φ okrog koordinatnega izhodišča v pozitivni smeri, preslika vektor $(1,0)$ v vektor $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ in vektor $(0,1)$ v vektor $(-\sin\varphi, \cos\varphi)$, kot kaže slika 3.5.

$$(1,0) \mapsto (\cos\varphi, \sin\varphi) \text{ prvi stolpec}$$
$$(0,1) \mapsto (-\sin\varphi, \cos\varphi) \text{ drugi stolpec}$$



Slika 3.5: Matrika rotacije $(x,y)-$ravnine za kot φ v pozitivni smeri.

$$R_\varphi = \begin{bmatrix} \downarrow & \Downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

■

Naslednji primer dokazuje, da je $(A \circ B)(\vec{x}) = A(B\vec{x}) = (AB)\vec{x}$, kar pomeni, da množenje matrik predstavlja kompozitum linearnih preslikav. Na strani 114 je dokazano, da je množenje matrik (če je njihov vrstni red tak, da so glede produkta kompatibilne) asociativno.

■ **Primer 22** Naj bo A matrika, ki predstavlja rotacijo za kot $\varphi = 30°$ v pozitivni smeri. Naj bo B matrika zrcaljenja ravnine preko premice $y = x$

$$A = \begin{bmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Računsko preverimo, da je $A(B\vec{x}) = (AB)\vec{x}$. Ideja: najprej izberemo $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, izračunamo levo in desno stran enačbe, ter primerjamo oba rezultata. Poskusite isto ponoviti za poljuben vektor $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. ■

Rešitev. Izračunamo levo stran enačbe L:

$$B\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A(B\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} - \frac{1}{2} \\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.2321 \\ 1.866 \end{bmatrix}.$$

Izračunamo desno stran enačbe D:

$$AB = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$(AB)\vec{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}-\frac{1}{2} \\ 1+\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.2321 \\ 1.866 \end{bmatrix}.$$

Dokazali smo, da sta leva in desna stran za $\vec{x} = (1,2)^T$ enaki. Sami razmislite, da enakost $L = D$ velja pri poljubnem vektorju $\vec{x} = (x,y)^T$, kar pomeni, da kompozitum matrik res predstavlja množenje matrik $A \circ B = AB$.

Opomba. Vektor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ si lahko predstavljamo kot matriko dimenzije $n \times 1$. Zadnji primer kaže, da je množenje matrik (in vektorjev) *asociativno*,

$$A(B\vec{x}) = (AB)\vec{x}.$$

Naslednji primer pokaže, da obstajajo matrike, za katere $AB \neq BA$, kar dokazuje, da množenje matrik ni *komutativno*:

$$AB \neq BA.$$

■ **Primer 23** Podani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo produkta AB in BA:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Očitno velja[9]

$$AB \neq BA.$$

■

Če poznamo sliko poljubnega vektorja $\vec{x} = (x,y)$

$$A : (x,y) \mapsto (ax+by, cx+dy),$$

ustrezna matrika predstavlja zapis koeficientov a,b,c,d v vrstice matrike

$$A = \begin{bmatrix} \rightarrow \\ \Rightarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

[9] Vidimo, da je produkt B krat A ničelna matrika, čeprav niti A, niti B ni ničelna matrika. Takim parom matrik pravimo delitelji niča.

■ **Primer 24** Zrcaljenje $(x,y)-$ravnine preko premice $y=x$ preslika poljubno točko/vektor (x,y) v točko/vektor (y,x)

$$Z_{y=x} : (x,y) \mapsto (y,x) = (0x+1y, 1x+0y).$$

To pomeni, da je matrika, ki ustreza temu zrcaljenju, enaka:

$$Z_{y=x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

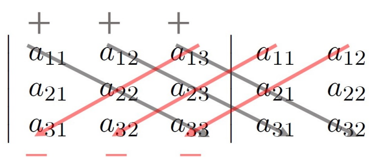
■

Definicija 10 Determinanta $2\times 2-$matrike $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ je število

$$\det(A) = ad - bc.$$

Definicija 11 Determinanta $3\times 3-$matrike $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ je število

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$



Slika 3.6: Sarrusovo pravilo za računanje $3\times 3-$determinante. Črte predstavljajo produkte trojic.

Opomba. Opazimo, da je $\det(A)$ mogoče interpretirati s pomočjo sheme na sliki 3.6, ki je znana kot Sarrusovo pravilo.:

Matrike seštevamo in množimo s skalarjem podobno kot seštevamo in množimo vektorje[10]:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}$$
$$\alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 \end{bmatrix}.$$

[10] Podobni formuli veljata za $3\times 3-$matrike.

3.3 Inverz matrike

Identiteta[11]

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

je matrika, ki vsak vektor $\vec{x}$ preslika vase

$$I\vec{x} = \vec{x} \quad \forall \vec{x}.$$

Inverzna matrika predstavlja inverzno (linearno) transformacijo A^{-1} , za katero velja:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I \qquad \text{inverzna matrika}$$

■ **Primer 25** Inverzna matrika A^{-1} matrike $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

■

■ **Primer 26** Formula za inverz $3 \times 3-$matrike

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

je znatno obsežnejša, zato na spletu obstajajo kalkulatorji inverznih matrik

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & -a_{12}a_{33} + a_{13}a_{32} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & a_{33}a_{11} - a_{31}a_{13} & -a_{11}a_{23} + a_{13}a_{21} \\ -a_{31}a_{22} + a_{21}a_{32} & -a_{32}a_{11} + a_{31}a_{12} & a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12} \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

■

Kot zadnji primer v tem razdelku si poglejmo matriko zrcaljenja preko premice $y = 2x$.

■ **Primer 27** Matrika

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

zrcali $(x,y)-$ravnino preko $x-$osi. Naj bo

$$\varphi = \arctan 2 \approx 63.44^\circ.$$

Razmisli, da je

$$Z_{y=2x} = R_\varphi Z R_{-\varphi} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

■

[11] Tudi identična ali enotska matrika.

Opomba. Razmisli, da za matriko zrcaljenja preko premice $y = \tan\varphi \cdot x$ velja[12]

$$Z_{y=\tan\varphi\cdot x} = \begin{bmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{bmatrix}.$$

3.4 Ortogonalne matrike

V nadaljevanju bo A oznaka za kvadratno matriko

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

dimenzije 2×2.

Definicija 12 Matriki A lahko priredimo matriko

$$A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix},$$

ki jo imenujemo (matriki A) *transponirana matrika*. Opazimo, da velja:

$$(A)_{ij} = \left(A^T\right)_{ji} \quad \forall i,j \in \{1,2\}.$$

Definicija 13 Matrika A je *ortogonalna*, če velja

$$AA^T = A^T A = I. \tag{3.12}$$

Opomba. Če na obe vrstici matrike A gledamo kot na vektorja (a,b) in (c,d), matrična enačba $AA^T = I$ pomeni

- vektor (a,b) je enotski vektor,
- vektorja (a,b) in (c,d) sta pravokotna/ortogonalna,
- vektor (c,d) je enotski vektor.

Opomba. Če na oba stolpca matrike A gledamo kot na vektorja (a,c) in (b,d), matrična enačba $A^T A = I$ pomeni

- vektor (a,c) je enotski vektor,
- vektorja (a,c) in (b,d) sta ortogonalna,
- vektor (b,d) je enotski vektor.

Opomba. Iz definicije 3.12 sledi, da za vsako ortogonalno matriko velja

$$A^{-1} = A^T.$$

3.5 Naloge

Naloga 15 Podana sta prostorska vektorja $\vec{a} = (0,-1,2)$ in $\vec{b} = (1,2,3)$. Točke $O(0,0,0)$, $A(0,-1,2)$ in $B(1,2,3)$ tvorijo trikotnik Δ.

[12] Pozor: matrika je na prvi pogled podobna matriki rotacije za kot 2φ, zato dobro poglejte predznake!

a) Izračunaj kót $\sphericalangle BOA$.
b) Izračunaj dolžino vektorja $\overrightarrow{AB}$ (oziroma dolžino stranice $\overline{AB}$).
c) Dolžino stranice $\overline{AB}$ izračunaj z uporabo kosinusnega izreka.

Rešitev. Glej rešitev 15.

Naloga 16 Matrika Z naj predstavlja zrcaljenje preko $y-$osi. Naj bo $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$. Izračunaj $(B+2Z)^{-1} = ?$

Rešitev. Glej rešitev 16.

Naloga 17 Zapiši matriko M, ki vektor $(1,1)$ preslika v vektor $(2,3)$, vektor $(1,-2)$ pa preslika v vektor $(0,2)$.

Rešitev. Glej rešitev 17.

Naloga 18 Razmisli, da je rotacija prostora v pozitivni smeri za kot φ okoli $z-$osi enaka

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.13}$$

Zapiši matriko, ki prostor $\mathbb{R}^3$ zarotira okoli $x-$osi (za pozitiven kot $30°$).

Rešitev. Glej rešitev 18.

Naloga 19 Naj bo $R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$. Preveri, da je $R_\varphi^{-1} = R_{-\varphi}$. Navodilo: uporabi formulo (3.10) in upoštevaj, da je kosinus soda funkcija, sinus pa liha.

Rešitev. Glej rešitev 19.

Naloga 20 Naj bo $R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$. Preveri, da je $R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}$. Navodilo: uporabi formulo (3.10) in upoštevaj identiteti:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Rešitev. Glej rešitev 20.

Naloga 21 Na primeru matrik iz primera 22 preveri, da množenje matrik ni komutativno:

$$AB \neq BA.$$

Rešitev. Glej rešitev 21.

Naloga 22 Zapiši matriko, ki $(x,y)-$ravnino zrcali preko premice $y = kx$.

Rešitev. Glej rešitev 22.

Naloga 23 Preveri, da je matrika zrcaljenja preko premice $y = \tan \frac{\varphi}{2} x$ ortogonalna.

Rešitev. Glej rešitev 23.

Naloga 24 Preveri, da je matrika rotacije za kot φ ortogonalna.

Rešitev. Glej rešitev 24.

Naloga 25 Naj bo Z matrika, ki ravnino prezrcali preko premice $y = x$ in R_α matrika, ki ravnino zarotira za kót 60° okoli koordinatnega izhodišča

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Izračunaj produkt ZR_α in interpretiraj rezultat.

Rešitev. Glej rešitev 25.

Naloga 26 Razmisli, da projekcijo $(x,y,z)-$prostora v ravnino $z = 0$

$$(x,y,z) \mapsto (x,y,0)$$

opišemo z matriko

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.15}$$

Rešitev. Glej rešitev 26.

Naloga 27 Razmisli, da je matrika, ki prostor $\mathbb{R}^3$ pravokotno prezrcali preko ravnine $z = 0$ enaka

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{3.16}$$

Rešitev. Glej rešitev 27.

Naloga 28 Zapiši matriko, ki prostor $\mathbb{R}^3$ projicira na ravnino

$$\Omega : x - y + 2z = 0.$$

Rešitev. Glej rešitev 28.

Naloga 29 Zapiši matriko, ki prostor $\mathbb{R}^3$ pravokotno prezrcali preko ravnine

$$\Omega : x - y + 2z = 0.$$

Rešitev. Glej rešitev 29.

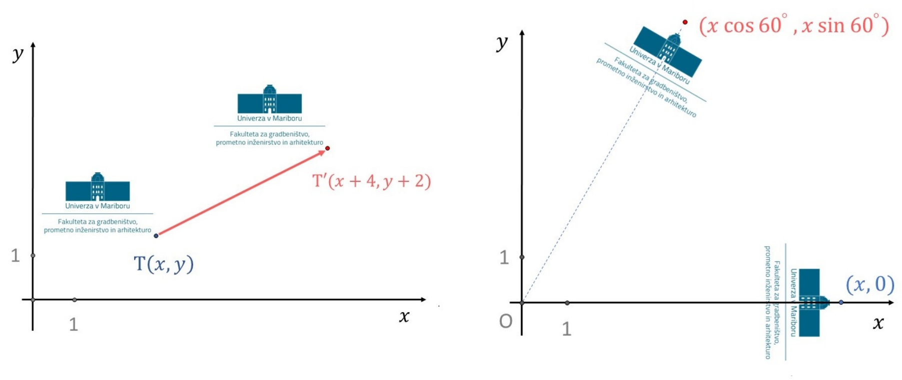
Najplemenitejši užitek je veselje ob razumevanju.

Leonardo da Vinci

4. Klasifikacija izometrij ravnine

V prejšnjih poglavjih smo se opremili z nekaterimi matematičnimi objekti in operacijami, s katerimi bomo lahko klasificirali vse izometrije ravnine. Spoznali smo vektorje, potem še matrike. V razdelku 2.2 smo definirali štiri izometrije ravnine.

V tem poglavju bomo dokazali, da obstajajo štiri vrste izometrij ravnine: translacija, rotacija, zrcaljenje in drsno zrcaljenje. Izometrije ravnine bomo povezali z nehomogenimi linearnimi preslikavami ravnine.



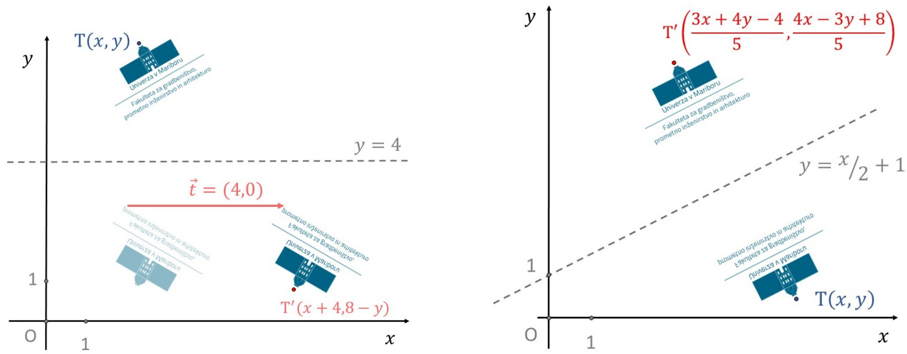
(a) Translacija.

(b) Rotacija

Slika 4.1: Translacija in rotacija ohranjata orientacijo trikotnika.

Na slikah 4.1 in 4.2 se še enkrat spomnimo translacije (T) in rotacije (R) ter zrcaljenja (Z) in drsnega zrcaljenja (D). Tokrat so izometrije prikazane v koordinatnem sistemu (x, y).

Spomnimo se tudi tabele 2.1, ki opredeli te izometrije glede (ne)ohranjanja orientacije trikotnikov ter (ne)obstoja fiksnih točk.



(a) Drsno zrcaljenje. (b) Zrcaljenje.

Slika 4.2: Drsno zrcaljenje in zrcaljenje obračata orientacijo trikotnika.

V lemi 1 smo dokazali, da je vsaka izometrija linearna preslikava. Vemo, da je tudi translacija izometrija, kar pomeni, da se vsaka izometrija ravnine $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lahko zapiše v obliki

$$F(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{t}, \tag{4.1}$$

kjer je A matrika razsežnosti 2×2 in $\vec{t} \in \mathbb{R}^2$ vektor translacije. Gre za matrično-vektorski zapis nehomogene linearne preslikave

$$F(x,y) = (ax + by + p, cx + dy + q) \tag{4.2}$$

V naslednjem razdelku si podrobneje pogledamo, kako se eksplicitno zapišejo funkcijski predpisi vseh štirih simetrij ravnine v matrično-vektorski obliki.

Na koncu bomo dokazali, da je vsaka izometrija ravnine bodisi translacija, rotacija, zrcaljenje ali drsno zrcaljenje.

4.1 Matrično-vektorski zapis simetrij ravnine

Najenostavnejši funkcijski zapis ima translacija za vektor $\vec{t} = (p,q)$

$$(x,y) \mapsto (x,y) + (p,q) = (x + p, y + q).$$

Če uporabimo identično matriko

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

za katero velja $I\vec{x} = \vec{x}$ (za vsak $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$), se za $\vec{x} = (x,y)$ translacija T za vektor $\vec{t} = (p,q)$ opiše kot

$$T(\vec{x}) = I\vec{x} + \vec{t}. \tag{4.3}$$

Formula (4.3) je zapisana v najbolj splošni obliki. Podobno želimo zapisati tudi poljubno rotacijo, zrcaljenje in drsno zrcaljenje. Rotacija (x,y) −ravnine okoli koordinatnega izhodišča $(0,0)$ za pozitiven kot φ se zapiše z matriko R_φ, matrika zrcaljenja preko premice $y = \tan\frac{\varphi}{2}\cdot x$ je podana z matriko $Z_{\frac{\varphi}{2}}$

$$R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad Z_{\frac{\varphi}{2}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}. \tag{4.4}$$

■ **Primer 28** Razmisli, da ima rotacija (x,y) −ravnine okoli poljubnega središča $S(x_s,y_s)$ matrično-vektorski zapis oblike

$$R_\varphi^S(\vec{x}) = R_\varphi(\vec{x}-\vec{r}_S)+\vec{r}_S. \tag{4.5}$$

■

■ **Primer 29** Razmisli, da ima zrcaljenje (x,y) −ravnine preko poljubne osi $y = kx+n$ matrično-vektorski zapis

$$Z_{\frac{\varphi}{2}}^n(\vec{x}) = Z_{\frac{\varphi}{2}}(\vec{x}-\vec{n})+\vec{n} \tag{4.6}$$

za $\vec{n} = (0,n)$. ■

■ **Primer 30** Razmisli, da ima drsno zrcaljenje (x,y) −ravnine preko poljubne osi $y = kx+n$ za vektor $\vec{t} = (\alpha,\alpha k)$ matrično-vektorski zapis

$$D_{\frac{\varphi}{2}}^{n,\vec{t}}(\vec{x}) = Z_{\frac{\varphi}{2}}(\vec{x}-\vec{n})+\vec{n}+\vec{t} \tag{4.7}$$

za $\vec{n} = (0,n)$. ■

Definicija 14 Vektorsko funkcijo $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, ki ohranja razdalje med točkami

$$\|F(\vec{x})-F(\vec{y})\|^2 = \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 \quad \forall\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^2$$

smo v poglavju 2 imenovali izometrija.

Sinonim za izometrijo je *togo gibanje*. Če ima izometrija fiksno točko, jo imenujemo *togo gibanje okoli fiksne točke*. Zaradi lažje obravnave privzamemo, da je fiksna točka koordinatno izhodišče

$$F(\vec{0}) = \vec{0}.$$

Vemo, da lahko vse izometrije s fiksno točko zapišemo v obliki

$$F(x,y) = (ax+by+p, cx+dy+q),$$

kjer je $(p,q) = (0,0)$. To pomeni, da lahko toga gibanja okoli fiksne točke zapišemo v matrični obliki

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

4.2 Klasifikacijski izrek

Trditev 1 Toga gibanja okoli fiksne točke (0,0) opišemo z ortogonalnimi matrikami. Vsaka ortogonalna $2\times 2-$matrika predstavlja togo gibanje okoli fiksne točke.

Dokaz. Vemo, da se dolžina (norma) vektorja $\vec{a}=(a_1,a_2)$ izračuna po formuli

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2+a_2^2}.$$

Iz $\|A\vec{x}-A\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}-\vec{y}\|^2$ zaradi linearnosti preslikave

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

sledi

$$\|A(\vec{x}-\vec{y})\|^2 = \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 \quad \text{(glej 3.8)}.$$

Če v zgornjo enačbo vstavimo $\vec{x}=(x_1,x_2)$ in $\vec{y}=(y_1,y_2)$, sledi

$$\begin{aligned}
L &= \|A(\vec{x}-\vec{y})\|^2 = (a(x_1-y_1)+b(x_2-y_2))^2+(c(x_1-y_1)+d(x_2-y_2))^2\\
D &= \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = (x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2
\end{aligned}$$

Če izvedemo vsa kvadriranja in poenostavimo izraza L in D, dobimo:

$$\begin{aligned}
L = {} & \left(a^2+c^2\right)x_1^2+\left(a^2+c^2\right)y_1^2+\left(d^2+b^2\right)x_2^2+\left(d^2+b^2\right)y_2^2-\\
& -2x_1y_1\left(a^2+c^2\right)-2x_2y_2\left(d^2+b^2\right)+\\
& +2x_1x_2(ab+cd)-2y_1x_2(ab+cd)+\\
& +2y_1y_2(ab+cd)-2x_1y_2(ab+cd)\\
D = {} & x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-\\
& -2x_1y_1-2x_2y_2+\\
& +0x_1x_2+0y_1x_2+0y_1y_2+0x_1y_2.
\end{aligned}$$

Sedaj enačimo $L=D$. Želimo, da je leva stran identično enaka desni (za vsak nabor x_1, x_2, y_1, y_2), kar pomeni, da morajo biti vsi istoležni koeficienti (na levi) enaki (koeficientom na desni). [1] Tako dobimo sistem (nelinearnih) enačb

$$\begin{aligned}
a^2+c^2 &= 1\\
d^2+b^2 &= 1\\
ab+cd &= 0.
\end{aligned}$$

[1] Koeficient v L pri x_1^2 je a^2+c^2, koeficient pri x_1^2 v izrazu D pa je 1 (sledi enačba $a^2+c^2=1$). Podobno je npr. koeficient na levi pri x_1y_2 enak $-2(ab+cd)$, koeficient na desni pri x_1y_2 pa je enak 0. Podobno enačimo vse druge koeficiente in dobimo samo tri različne enačbe $a^2+c^2=1$, $d^2+b^2=1$, $ab+cd=0$.

Te enačbe sovpadajo z enačbo [2] $AA^T = I$

$$AA^T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ki predstavlja $4 \times 4-$sistem

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= 1 \\ ac+bd &= 0 \\ \cancel{ac+bd} &= 0 \\ c^2+d^2 &= 1. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Opazimo, da v (4.8) druga in tretja enačba sovpadata [3], zato ima sistem neskončno mnogo rešitev. Iz osnovne trigonometrijske identitete

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \quad \forall\varphi$$

za

$$a = \cos\varphi \quad \text{in} \quad b = \sin\varphi$$

sledi $a^2+b^2 = 1$ za vsak φ. Rešitev enačbe $\cos\varphi \cdot c + \sin\varphi \cdot d = 0$ je

$$c = \pm\sin\varphi, d = \mp\cos\varphi.$$

Za obe zgornji možnosti je izpolnjena tudi zadnja enačba [4] $c^2+d^2 = 1$

$$(\pm\sin\varphi)^2 + (\mp\cos\varphi)^2 = 1 \quad \forall\varphi.$$

Rešitve sistema (4.8) so:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix},$$
$$A_3 = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}$$

in (po vrsti) predstavljajo:

1. $A_{1,2}$ je rotacija za kot $\pm\varphi$ okoli fiksne točke $(0,0)$,
2. $A_{3,4}$ je zrcaljenje preko premice $y = \tan\left(\mp\frac{\varphi}{2}\right) \cdot x$.

S tem je dokazano, da je vsako togo gibanje okoli fiksne točke bodisi rotacija bodisi zrcaljenje. ■

---

[2] Ter z enačbo $A^T A = I$.

[3] To pomeni, da tudi (3.12) predstavlja sistem treh enačb s štirimi neznankami in ima neskončno rešitev.

[4] Dejansko je to identiteta, saj enakost velja za vsak φ.

Vemo, da se vsaka izometrija ravnine $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ zapiše v obliki

$$F(\vec{x})=A\vec{x}+\vec{t},$$

kjer je A matrika dimenzije 2×2 in $\vec{t}\in\mathbb{R}^2$ vektor translacije.

Spoznali smo tudi (glej sliko 2.20), da je kompozitum rotacije R_φ (za $\varphi\neq 0$ okoli koordinatnega izhodišča) in netrivialne translacije $\vec{t}\neq(0,0)$ neka (nova/druga) rotacija za (isti) kot φ s središčem $S\neq(0,0)$.

Prav tako smo spoznali (glej sliko 2.19), da je kompozitum zrcaljenja $Z_{y=\tan\frac{\varphi}{2}\cdot x}$ in translacije $\vec{t}=(t_1,t_2)\neq(0,0)$ neko drsno zrcaljenje preko premice $d:y=\tan\frac{\varphi}{2}x+n$, za nek $n\neq 0$. Premica d in vektor tega drsnega zrcaljenja $\vec{d}$ sta obravnavana v naslednjem primeru.

■ **Primer 31** Naj bo $Z_{y=\tan\frac{\varphi}{2}\cdot x}$ matrika zrcaljenja $(x,y)-$ravnine preko premice $y=\tan\frac{\varphi}{2}\cdot x$. Naj bo $\vec{t}=(t_1,t_2)$ neničelen vektor translacije. Preslikajmo točki $A(1,0)$ in $B(2,0)$ v točki $A'(\cos\varphi+t_1,\sin\varphi+t_2)$ in $B'(2\cos\varphi+t_1,2\sin\varphi+t_2)$.

Naj bo p premica, ki poteka skozi točki A in B. S p' označimo premico, ki poteka skozi točki A' in B'.

Očitno je kót med premicama p in p' enak φ, kar pomeni, da os drsnega zrcaljenja d poteka pod kótom $\frac{\varphi}{2}$ glede na $x-$os. Vzporednica (glede na os zrcaljenja d) skozi točko A' ima enačbo $y-(\sin\varphi+t_2)=\tan\frac{\varphi}{2}\cdot(x-(\cos\varphi+t_1))$.

Vzporednica (glede na os zrcaljenja d) skozi točko A ima enačbo $y-0=\tan\frac{\varphi}{2}\cdot(x-1)$.

Sami preverite, da ima premica d drsnega zrcala, ki poteka natanko na sredini med tema dvema premicama, enačbo

$$y=\tan\frac{\varphi}{2}\cdot x+n,$$

kjer je[5]

$$n=\frac{n_1+n_2}{2}=\frac{t_2}{2}-\frac{t_1}{2}\tan\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{2}\sin\varphi-\frac{1}{2}(1+\cos\varphi)\tan\frac{\varphi}{2}.$$

Sami preverite[6], da je vektor translacije $\vec{d}$ drsnega zrcala enak[7]

$$\vec{d}=\left(t_1\cos\frac{\varphi}{2}+t_2\sin\frac{\varphi}{2}\right)\left(\sin\frac{\varphi}{2},\cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

■

Lema 8 Za $A=I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ preslikava $F(\vec{x})=A\vec{x}+\vec{t}$ predstavlja translacijo $F(\vec{x})=\vec{x}+\vec{t}$, ki je izometrija.

Lema 9 Če je A ortogonalna matrika in $\vec{t}\in\mathbb{R}^2$poljuben vektor, je (nehomogena linearna) preslikava $F(\vec{x})=A\vec{x}+\vec{t}$ izometrija ravnine.

---

[5] Z n_1 in n_2 smo označili začetni vrednosti premic p in p'.

[6] To najlažje preverimo, če točko A' pravokotno projiciramo na premico p in jo označimo z A''. Tedaj je vektor translacije $\vec{d}=\overrightarrow{AA''}$.

[7] Njegova smer je enaka $\left(\sin\frac{\varphi}{2},\cos\frac{\varphi}{2}\right)$, njegova dolžina je $t_1\cos\frac{\varphi}{2}+t_2\sin\frac{\varphi}{2}$.

Dokaz. Iz $\|A(\vec{x}-\vec{y})\|^2 = \|\vec{x}-\vec{y}\|^2$ zaradi linearnosti matrike A sledi $\|A(\vec{x}-\vec{y})\|^2 = \|A\vec{x}-A\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}-\vec{y}\|^2$. Zato za poljubna vektorja $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^2$ in za vsak vektor translacije $\vec{t} \in \mathbb{R}^2$ velja:

$$\begin{aligned}\left\|A\vec{x}+\vec{t}-\left(A\vec{y}+\vec{t}\right)\right\|^2 &= \|\vec{x}-\vec{y}\|^2\\ \|F(\vec{x})-F(\vec{y})\|^2 &= \|\vec{x}-\vec{y}\|^2.\end{aligned}$$

■

Končno lahko zapišemo

Izrek 3 — Klasifikacijski izrek. Vsaka izometrija ravnine je bodisi rotacija, zrcaljenje, translacija ali pa drsno zrcaljenje.

Dokaz. Glede na trditev 1 in prejšnjo lemo, je matrika A nujno rotacija ali zrcaljenje. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da gre za rotacijo okoli koordinatnega izhodišča oziroma za zrcaljenje preko premice $y = kx$. Potrebno je dokazati še učinek translacije $\vec{t}$ na rotacijo oziroma na zrcaljenje. Grafično smo (glej sliki 2.20 in 2.19) že dokazali, da je

1. kompozitum rotacije in translacije $\to$ rotacija ter, da je
2. kompozitum zrcaljenja in translacije $\to$ drsno zrcaljenje

Oba rezultata lahko tudi računsko potrdimo, kar zaključi dokaz:

1. $\left(R_\varphi \circ T\right)\vec{x} = R_\varphi\left(\vec{x}+\vec{t}\right) = R_\varphi\vec{x}+R_\varphi\vec{t} = R_\varphi(\vec{x}-\vec{r}_S)+\vec{r}_S,$

   kjer je [8] $\vec{r}_S = \left(I-R_\varphi\right)^{-1}R_\varphi\vec{t}.$
2. $\left(Z_{\frac{\varphi}{2}} \circ T\right)\vec{x} = Z_{\frac{\varphi}{2}}\left(\vec{x}+\vec{t}\right) = Z_{\frac{\varphi}{2}}\vec{x}+Z_{\frac{\varphi}{2}}\vec{t}$

   $$= Z_{y=\tan\frac{\varphi}{2}x}(\vec{x}-\vec{n})+\vec{n},$$

   kjer je [9] $\vec{n} = \left(I-Z_{\frac{\varphi}{2}}\right)^{-1}Z_{\frac{\varphi}{2}}\vec{t}.$

■

4.3 Inverzi in kompozitumi izometrij

Inverz translacije $T(\vec{x}) = \vec{x}+\vec{t}$ je

$$T^{-1}(\vec{x}) = \vec{x}-\vec{t},$$

saj za poljuben $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ velja

$$\left(T \circ T^{-1}\right)(\vec{x}) = \left(\vec{x}-\vec{t}\right)+\vec{t} = \vec{x}.$$

Inverz rotacije $R_\varphi^S(\vec{x}) = R_\varphi(\vec{x}-\vec{r}_S)+\vec{r}_S$ je

$$\left(R_\varphi^S\right)^{-1}(\vec{x}) = R_{-\varphi}(\vec{x}-\vec{r}_S)+\vec{r}_S,$$

[8] Oziroma $R_\varphi\vec{t} = -R_\varphi\vec{r}_S+\vec{r}_S$, kot sledi iz (4.5).
[9] Oziroma $-Z_{\frac{\varphi}{2}}\vec{n}+\vec{n} = Z_{\frac{\varphi}{2}}\vec{t}$, kot sledi iz (4.6).

saj za poljuben $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ velja

$$\begin{aligned}\left(R_\varphi^S \circ \left(R_\varphi^S\right)^{-1}\right)(\vec{x}) &= R_\varphi\left(\left[R_{-\varphi}(\vec{x}-\vec{r}_S)+\vec{r}_S\right]-\vec{r}_S\right)+\vec{r}_S\\ &= R_\varphi R_{-\varphi}(\vec{x}-\vec{r}_S)+\vec{r}_S\\ &= I(\vec{x}-\vec{r}_S)+\vec{r}_S\\ &= \vec{x}.\end{aligned}$$

Inverz vsakega zrcaljenja Z je zrcaljenje samo, torej je

$$Z^{-1} = Z.$$

Po formuli (4.6) ima zrcaljenje preko premice $y = \tan\frac{\varphi}{2}x + n$ enačbo $\left(Z_{\frac{\varphi}{2}}^n\right)(\vec{x}) = Z_{\frac{\varphi}{2}}(\vec{x}-\vec{n}) + \vec{n}$, zato je

$$\left(Z_{\frac{\varphi}{2}}^n\right)^{-1}(\vec{x}) = Z_{\frac{\varphi}{2}}(\vec{x}-\vec{n})+\vec{n}.$$

Inverz drsnega zrcaljenja $D_{\frac{\varphi}{2}}^{n,\vec{d}}(\vec{x}) = Z_{\frac{\varphi}{2}}(\vec{x}-\vec{n})+\vec{n}+\vec{d}$ je [10]

$$\left(D_{\frac{\varphi}{2}}^{n,\vec{d}}\right)^{-1}(\vec{x}) = Z_{\frac{\varphi}{2}}(\vec{x}-\vec{n})+\vec{n}-\vec{d}.$$

Spomnimo se, da je vektor $\vec{t}$ vzporeden z osjo drsnega zrcala, zato matrika $Z_{\frac{\varphi}{2}}$ preslika vektor $\vec{d}$ vase:

$$Z_{\frac{\varphi}{2}}\vec{d} = \vec{d}.$$

Zato je

$$\begin{aligned}\left(D_{\frac{\varphi}{2}}^{n,\vec{d}} \circ \left(D_{\frac{\varphi}{2}}^{n,\vec{d}}\right)^{-1}\right)(\vec{x}) &= Z_{\frac{\varphi}{2}}\left(\left[Z_{\frac{\varphi}{2}}(\vec{x}-\vec{n})+\vec{n}-\vec{d}\right]-\vec{n}\right)+\vec{n}+\vec{d}\\ &= Z_{\frac{\varphi}{2}}\left(Z_{\frac{\varphi}{2}}\vec{x}-Z_{\frac{\varphi}{2}}\vec{n}+\vec{n}-\vec{d}-\vec{n}\right)+\vec{n}+\vec{d}\\ &= Z_{\frac{\varphi}{2}}Z_{\frac{\varphi}{2}}\vec{x}-Z_{\frac{\varphi}{2}}Z_{\frac{\varphi}{2}}\vec{n}-Z_{\frac{\varphi}{2}}\vec{d}+\vec{n}+\vec{d}\\ &= \vec{x}-\vec{n}-\vec{d}+\vec{n}+\vec{d}\\ &= \vec{x}\end{aligned}$$

■ **Primer 32** Naj bo $D_{\frac{\varphi}{2}}^{n,\vec{d}}(\vec{x}) = Z_{\frac{\varphi}{2}}(\vec{x}-\vec{n})+\vec{n}+\vec{d}$ drsno zrcaljenje preko premice $y = -3x+2$ za vektor $\vec{d} = (-2,6)$. Izračunajmo, katera točka se preslika v točko $(-5,7)$.

Iz $\frac{\varphi}{2} = \arctan(-3)$ sledi $\varphi = -2\cdot 71.565^\circ = -143.13^\circ$ (kar je isto, kot 216.87°). Potem je

$$Z_{\frac{\varphi}{2}} = \begin{bmatrix}\cos(216.87^\circ) & \sin(216.87^\circ)\\ \sin(216.87^\circ) & -\cos(216.87^\circ)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.8 & -0.6\\ -0.6 & 0.8\end{bmatrix}$$

[10] glej formulo (4.7).

in

$$\left(D^{n,\vec{d}}_{\frac{\varphi}{2}}\right)^{-1}\left(\begin{bmatrix}-5\\7\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-0.8 & -0.6\\-0.6 & 0.8\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}-5\\7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2\\6\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-0.8 & -0.6\\-0.6 & 0.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5\\5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1\\7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}.$$

Odgovor: točka $(3,3)$ se preslika v točko $(-5,7)$. ∎

Na sliki 2.20 smo grafično prikazali, da je $T\circ R$ (enako velja za $R\circ T$) lahko samo neka nova rotacija ali pa (če je $R=R_{0^\circ}=R_{360^\circ}$) translacija.

Na sliki 2.19 smo grafično prikazali, da je $T\circ Z$ in enako velja za $Z\circ T$ lahko samo drsno zrcaljenje ali pa (če je vektor translacije T pravokoten na zrcalno os) novo zrcaljenje Z', katerega os je vzporedna z zrcalno osjo zrcala Z.

V naslednjem primeru bomo izračunali, kaj predstavlja kompozitum $D_1\circ D_2$. Ker $D_1\circ D_2$ dvakrat obrne orientacijo trikotnika, je rezultat lahko samo rotacija ali pa translacija. Translacija nastane v posebnem primeru, ko sta zrcalni osi drsnih zrcal vzporedni.

■ **Primer 33** Točke $A(-3,3)$, $B(-2,3)$ in $C(-1,5)$ določajo trikotnik ΔABC. Podani sta drsni zrcaljenji D_1

$$d_1: y=3+2x \quad \vec{d}=(2,4)$$

in D_2

$$d_2: y=\frac{x}{2} \quad \vec{d}=(-4,-2).$$

Dokažimo, da je

$$D_2\circ D_1=R^S_\alpha,$$

kjer je

$$S\approx(-3.67,-2.67) \qquad \alpha\approx-73.74^\circ.$$

Ker osi drsnih zrcaljenj nista vzporedni, je kompozitum rotacija. Kot med premicama $y=\frac{x}{2}$ in $y=3+2x$ je enak 36.87°, kar je enako $\frac{\alpha}{2}$. Razmisli, da je

$$D_1(\vec{x})=Z_{\frac{\varphi_1}{2}}(\vec{x}-(0,3))+(0,3)+(2,4)=Z_{\frac{\varphi_1}{2}}\vec{x}-Z_{\frac{\varphi_1}{2}}(0,3)+(2,7),$$
$$D_2(\vec{x})=Z_{\frac{\varphi_2}{2}}(\vec{x}-(0,0))+(0,0)+(-4,-2)=Z_{\frac{\varphi_2}{2}}(\vec{x})-(4,2),$$

kjer je $Z_{\frac{\varphi}{2}}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{bmatrix}$ za $\varphi_1=126.87^\circ$ in $\varphi_2=53.13^\circ$.

Preslikajmo poljubno točko $\vec{x} = (x, y)$:

$$\begin{aligned} D_2 \circ D_1 (\vec{x}) &= Z_{26.565^\circ} \left(Z_{63.435^\circ} \vec{x} - Z_{63.435^\circ} (0,3) + (2,7) \right) - (4,2) \\ &= Z_{26.565^\circ} Z_{63.435^\circ} \vec{x} - Z_{26.565^\circ} Z_{63.435^\circ} (0,3) + Z_{26.565^\circ} (2,7) - (4,2) \end{aligned}$$

Posebej izračunajmo[11]:

$$\begin{aligned} Z_{\frac{\varphi_2}{2}} \cdot Z_{\frac{\varphi_1}{2}} &= Z_{26.565^\circ} \cdot Z_{63.435^\circ} \\ &= \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.28 & 0.96 \\ -0.96 & 0.28 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(-73.74^\circ) & -\sin(-73.74^\circ) \\ \sin(-73.74^\circ) & \cos(-73.74^\circ) \end{bmatrix} \\ &= R_{-73.74^\circ}. \end{aligned}$$

Nadaljujmo z izračunom $D_2 \circ D_1(\vec{x})$:

$$\begin{aligned} D_2 \circ D_1 (\vec{x}) &= \begin{bmatrix} 0.28 & 0.96 \\ -0.96 & 0.28 \end{bmatrix} \vec{x} - \begin{bmatrix} 2.88 \\ 0.84 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6.8 \\ -2.6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.28 & 0.96 \\ -0.96 & 0.28 \end{bmatrix} \vec{x} - \begin{bmatrix} 0.08 \\ 5.44 \end{bmatrix} \\ &= R_\alpha \vec{x} - \begin{bmatrix} 0.08 \\ 5.44 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

kar lahko zapišemo tudi v obliki

$$R_\alpha^S \vec{x} = \begin{bmatrix} 0.28 & 0.96 \\ -0.96 & 0.28 \end{bmatrix} (\vec{x} - \vec{r}_S) + \vec{r}_S.$$

Enačba za izračun točke S iziroma njenega krajevnega vektorja $\vec{r}_S$ je

$$\begin{aligned} (R_\alpha - I)\, \vec{r}_S &= \begin{bmatrix} 0.08 \\ 5.44 \end{bmatrix} \\ \vec{r}_S &= (R_\alpha - I)^{-1} \begin{bmatrix} 0.08 \\ 5.44 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.08 \\ 5.44 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\frac{2}{3} \\ -2\frac{2}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

S tem smo potrdili kót in središče nove rotacije

$$S \approx (-3.67, -2.67) \qquad \alpha \approx -73.74^\circ.$$

■

[11] Sama(a) preveri, da je $\arccos(0.28) = \pm 73.74^\circ$in $\arcsin(-0.96) = -73.74^\circ$.

Rotacijo ravnine $\mathbb{R}^2$ za kot φ okrog središča S smo označili z R_φ^S:

$$R_\varphi^S(\vec{x}) = R_\varphi(\vec{x}-\vec{r}_S)+\vec{r}_S,$$

kjer je

$$R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

matrika, ki ravnino $\mathbb{R}^2$ zavrti za kot φ v pozitivni smeri $\circlearrowleft$ okrog koordinatnega izhodišča.

V nalogi 20 smo videli, da za poljubna kota α in β velja

$$R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}.$$

■ **Primer 34 — Rotacija rotacije.** Kompozitum poljubnih rotacij $R_\alpha^{S_1}$ in $R_\beta^{S_2}$ je rotacija za kot $\alpha+\beta$ okrog novega središča S. Izračunajmo kompozitum

$$\begin{aligned}
R_\alpha^{S_1}(\vec{x}) &= R_\alpha(\vec{x}-\vec{r}_{S_1})+\vec{r}_{S_1}\\
R_\beta^{S_2}(\vec{x}) &= R_\beta(\vec{x}-\vec{r}_{S_2})+\vec{r}_{S_2}\\
&\Downarrow\\
\left(R_\alpha^{S_1}\circ R_\beta^{S_2}\right)(\vec{x}) &= R_\alpha\left(\left(R_\beta(\vec{x}-\vec{r}_{S_2})+\vec{r}_{S_2}\right)-\vec{r}_{S_1}\right)+\vec{r}_{S_1}\\
&= R_\alpha R_\beta\vec{x}-R_\alpha R_\beta\vec{r}_{S_2}+R_\alpha\vec{r}_{S_2}-R_\alpha\vec{r}_{S_1}+\vec{r}_{S_1}\\
&= R_{\alpha+\beta}\vec{x}-R_{\alpha+\beta}\vec{r}_{S_2}+R_\alpha\vec{r}_{S_2}-R_\alpha\vec{r}_{S_1}+\vec{r}_{S_1}.
\end{aligned}$$

Po drugi strani je

$$\begin{aligned}
R_{\alpha+\beta}^S(\vec{x}) &= R_{\alpha+\beta}(\vec{x}-\vec{r}_S)+\vec{r}_S\\
&= R_{\alpha+\beta}\vec{x}-R_{\alpha+\beta}\vec{r}_S+\vec{r}_S.
\end{aligned}$$

Sklepamo[12]

$$-R_{\alpha+\beta}\vec{r}_S+\vec{r}_S = -R_{\alpha+\beta}\vec{r}_{S_2}+R_\alpha\vec{r}_{S_2}-R_\alpha\vec{r}_{S_1}+\vec{r}_{S_1}.$$

Označimo $-R_{\alpha+\beta}\vec{r}_{S_2}+R_\alpha\vec{r}_{S_2}-R_\alpha\vec{r}_{S_1}+\vec{r}_{S_1}=\vec{b}$ in izračunamo

$$\vec{r}_S = \left(I-R_{\alpha+\beta}\right)^{-1}\vec{b}. \tag{4.9}$$

Ker je

$$\det\left(I-R_{\alpha+\beta}\right) = 2-2\cos(\alpha+\beta),$$

je matrika $I-R_{\alpha+\beta}$ obrnljiva, če je le $\alpha+\beta\neq 2k\pi$ za $k\in\mathbb{Z}$ (oz. $\alpha\neq-\beta$), kar pomeni, da $\vec{r}_S$, ki je podan z enačbo (4.9), obstaja, če je le $\alpha\neq-\beta$.

[12] Če naj bo $R_{\alpha+\beta}^S(\vec{x}) = \left(R_\alpha^{S_1}\circ R_\beta^{S_2}\right)(\vec{x})$ identiteta.

Za $\beta = -\alpha$ kompozitum $R_{\alpha}^{S_1} \circ R_{-\alpha}^{S_2}$ predstavlja translacijo za vektor $\vec{t} = -\vec{r}_{S_2} + R_{\alpha}\vec{r}_{S_2} - R_{\alpha}\vec{r}_{S_1} + \vec{r}_{S_1}$, kar sledi iz spodnjega računa:

$$\begin{aligned}\left(R_{\alpha}^{S_1} \circ R_{-\alpha}^{S_2}\right)(\vec{x}) &= R_0\vec{x} - R_0\vec{r}_{S_2} + R_{\alpha}\vec{r}_{S_2} - R_{\alpha}\vec{r}_{S_1} + \vec{r}_{S_1}\\ &= \vec{x} - \vec{r}_{S_2} + R_{\alpha}\vec{r}_{S_2} - R_{\alpha}\vec{r}_{S_1} + \vec{r}_{S_1}\\ &= \vec{x} + \vec{t}.\end{aligned}$$

■

Iz vseh zgornjih primerov vidimo, da za sestavljanje/komponiranje štirih izometrij ravnine velja:

$\circ$	T	R	Z	D
T	T	R/T	D/Z	D/Z
R	R/T	R/T	D/Z	D/Z
Z	D/Z	D/Z	R/T	R/T
D	D/Z	D/Z	R/T	R/T

Tabela 4.1: Štiri simetrije ravnine so zaprte za komponiranje $\circ$.

4.4 Naloge

Naloga 30 Obravnavaj posebni primer $Z_1 \circ Z_2$, kjer sta zrcalni osi z_1 in z_2 vzporedni.

Glej rešitev 30

Naloga 31 Računsko dokaži, da je $R_{\varphi}^{S_1} \circ T$ nova rotacija $R_{\varphi}^{S_2}$. Poišči koordinate središča S_2.

Glej rešitev 31

Naloga 32 Računsko dokaži, da je $Z_{\frac{\varphi}{2}}^{n_1} \circ T$ drsno zrcaljenje $D_{\frac{\varphi}{2}}^{n_2,\vec{d}}$. Kót drsnega zrcala se ohrani. Določi vektor drsnega zrcaljenja $\vec{d} = \alpha\left(\cos\frac{\varphi}{2}, \sin\frac{\varphi}{2}\right)$ in vektor $\vec{n_2} = (0, n_2)$, ki natančno določa pozicijo premice novega drsnega zrcaljenja.

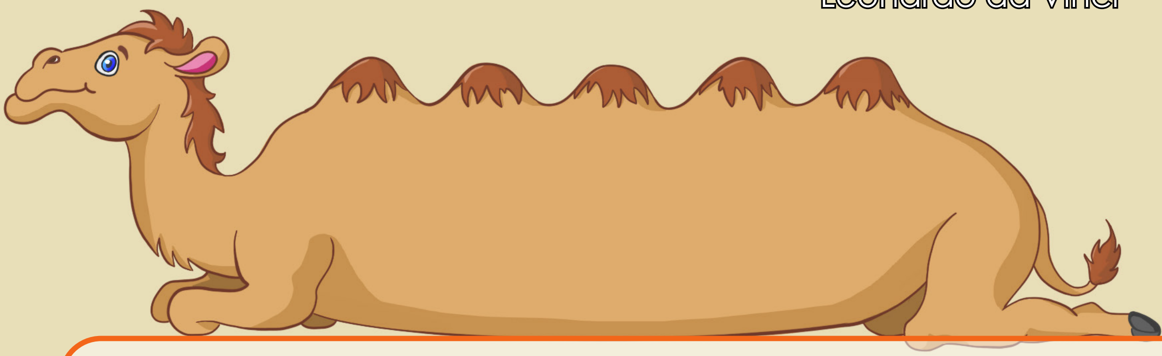
Glej rešitev 32

Naloga 33 Eksplicitno zapiši enačbo zrcalne premice in vektor translacije drsnega zrcala, ki je kompozitum translacije za vektor $(3, -4)$ in zrcaljenja preko premice $y = 2 + \frac{2}{5}x$.

Glej rešitev 33

Največje zmote utrpimo zaradi lastnih prepričanj.

Leonardo da Vinci



5. O grupah

V prejšnjih poglavjih smo spoznali vektorje, matrike in simetrije ter izometrije ravnine. Videli smo, da jih odlikujejo lastnosti, kot je zaprtost za komponiranje (glej tabelo 4.1)[1]. Pravimo, da je komponiranje v množici izometrij zaprta binarna operacija.

Definicija 15 — Binarna operacija. Binarna operacija na množici M je preslikava f, ki slika iz kartezičnega produkta $M \times M$ v množico M

$$f : M \times M \to M$$

in elementoma $m_1, m_2 \in M$ priredi nek (tretji) element $m_3 \in M$

$$f(m_1, m_2) = m_3.$$

Opomba. Običajno binarne opracije označimo z znakom $+$ ali $\cdot$ ali $\circ$ in namesto $f(m_1, m_2)$ pišemo $m_1 + m_2$ ali $m_1 \cdot m_2$ ali $m_1 \circ m_2$. Pogosto znak binarne operacije celo opustimo

$$m_1 \cdot m_2 \mapsto m_1 m_2.$$

■ **Primer 35** V množici naravnih števil $\mathbb{N}$ je seštevanje $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ binarna operacija. Za poljubni naravni števili $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ je

$$n_1 + n_2 \in \mathbb{N}.$$

■

[1] Pri komponiranju izometrij dobimo vedno eno od znanih štirih izometrij.

■ **Primer 36** V množici celih števil $\mathbb{Z}$ je odštevanje $-: \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ binarna operacija. Za poljubni celi števili $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ je

$$z_1 - z_2 \in \mathbb{Z}.$$

■

■ **Primer 37** V množici neničelnih racionalnih števil $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ je deljenje binarna operacija. Za poljubni neničelni racionalni števili $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ je

$$\frac{q_1}{q_2} \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}.$$

■

Definirali smo tudi simetrijo množice M. Vemo, da identična preslikava $(x,y)\mapsto(x,y)$, ki jo predstavimo z matriko

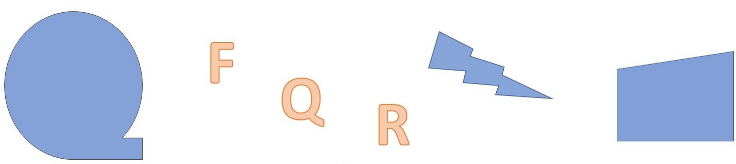
$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

zadošča definiciji 4, zato je simetrija (vsake množice M). To simetrijo imenujemo *trivialna simetrija*. Množico, ki premore samo trivialno simetrijo, v poljudnem jeziku imenujemo nesimetrična[2].

■ **Primer 38** Identično preslikavo I lahko razumemo na več načinov:
- kot rotacijo za kot $\varphi = 0^\circ$ ali $\varphi = 360^\circ$
- kot translacijo za vektor $\vec{t} = (0,0)$

■

Primeri množic, ki premorejo samo trivialno simetrijo, so prikazani na sliki 5.1.



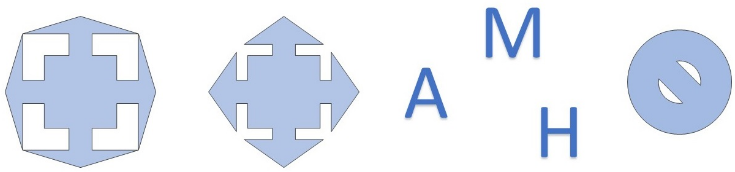
Slika 5.1: Nesimetrični objekti v ravnini. V teoriji grup jim pravimo objekti, ki premorejo samo trivialno (identično) simetrijo.

Poglejmo si nekaj množic, ki premorejo netrivialno simetrijo.

■ **Primer 39** Veliki tiskani črki A in M vsebujeta po eno zrcaljenje in eno trivialno simetrijo (rotacijo za kot 0°). ■

■ **Primer 40** Velika tiskana črka H vsebuje dve (med seboj pravokotni) zrcaljenji in rotacijo za 180° ter (trivialno simetrijo) rotacijo za 360°. ■

[2] V matematičnem jeziku bomo takšno množico kasneje imenovali končni vzorec s simetrijsko grupo C_1.



Slika 5.2: Ravninski objekti/liki, ki premorejo vsaj eno netrivialno simetrijo. Na primer: veliki tiskani črki A in M premoreta vertikalno zrcalno simetrijo.

■ **Primer 41** Na sliki 5.3 so prikazane vse simetrije pravilnega (enakostraničnega) trikotnika. Ker je težišče trikotnika (rdeča pika) v koordinatnem izhodišču, je ena zrcalna os navpičnica $x = 0$, drugi dve zrcalni premici sta $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ in $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$. Matrike zrcaljenja preko teh treh premic so

$$Z_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z_2 = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & -\cos 60^\circ \end{bmatrix}$$

$$Z_3 = \begin{bmatrix} \cos(-60^\circ) & \sin(-60^\circ) \\ \sin(-60^\circ) & -\cos(-60^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ -\sin 60^\circ & -\cos 60^\circ \end{bmatrix}$$

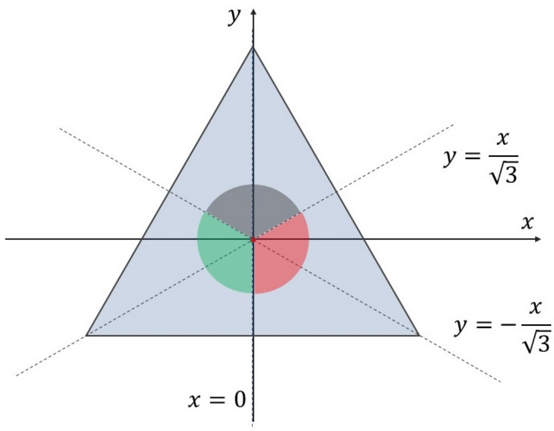
Obstajajo še tri simetrije pravilnega trikotnika: to so rotacije R_1, R_2 in R_3 (okrog koordinatnega izhodišča oz. težišča pravilnega trikotnika) za kot 120°, 240° in 360°

$$R_1 = R_{120^\circ}$$
$$R_2 = R_{120^\circ}R_{120^\circ} = R_{240^\circ}$$
$$R_3 = R_{120^\circ}R_{120^\circ}R_{120^\circ} = R_{360^\circ} = I.$$

Rotacijske simetrije so na sliki 5.3 označene s sivim, rdečim in zelenim krožnim sektorjem. Za vse simetrije poljubne množice velja zaprtost za komponiranje (množenje pripadajočih matrik), kar sledi direktno iz definicije 4.

$$\sigma_1 \quad \text{je simetrija množice M}$$
$$\sigma_1(M) = M$$
$$\sigma_2 \quad \text{je simetrija množice M}$$
$$\sigma_2(M) = M$$
$$\Downarrow$$
$$(\sigma_1 \circ \sigma_2)(M) = \sigma_1(\sigma_2(M)) = \sigma_1(M) = M$$
$$\sigma_1 \circ \sigma_2 \qquad \text{je tudi simetrija množice M}$$

■



Slika 5.3: Simetrije pravilnega trikotnika, ki ima težišče (rdeča pika) v koordinatnem izhodišču. Obstajajo tri zrcalne simetrije in tri rotacije: za kót 120°, 240° in (trivialna) za kót 360°.

■ **Primer 42** Komponiranje simetrij pravilnega trikotnika[3] je binarna operacija. Za rotacije smo že dokazali, da velja

$$\begin{aligned} R_\alpha R_\beta &= R_{\alpha+\beta}, \\ R_\alpha^{-1} &= R_{-\alpha}, \\ R_\alpha R_{-\alpha} &= R_{0^\circ} = I. \end{aligned}$$

Izračunajmo še

$$\begin{aligned} Z_1 R_1 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\cos 120^\circ & \sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & -\cos 60^\circ \end{bmatrix} = Z_2. \end{aligned}$$

Podobno je

$$\begin{aligned} Z_2 R_1 &= \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & -\cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ -\sin 60^\circ & -\cos 60^\circ \end{bmatrix} = Z_3. \end{aligned}$$

Sami preverite, da je

$$Z_3 R_1 = Z_1$$

[3] Enako velja za komponiranje poljubnih simetrij.

in

$$R_1 Z_1 = Z_3$$
$$R_1 Z_3 = Z_2.$$

Nadalje je $Z_1 R_2 = (Z_1 R_1) R_1 = Z_2 R_1 = Z_3$ in $Z_2 R_2 = (Z_2 R_1) R_1 = Z_3 R_1 = Z_1$ in $R_2 Z_1 = R_1 (R_1 Z_1) = R_1 Z_3 = Z_2$. Vemo, da je $Z_1 Z_1 = I$ in $Z_2 Z_2 = I$ ter $Z_3 Z_3 = I$. Vemo tudi, da je

$$R_1^{-1} = R_{-120^\circ} = R_{240^\circ} = R_2$$
$$R_2^{-1} = R_{-240^\circ} = R_{120^\circ} = R_1.$$

■

V dodatku (glej Lemo 15) smo dokazali, da za množenje matrik (torej za kompozitume pripadajočih simetrij) velja asociativnost. Množice, v katerih obstaja notranja (binarna) operacija, za katero velja toliko lepih lastnosti, v matematiki imenujemo *grupe*.

Definicija 16 — Grupa. Množica $G = \{g_1, g_2, g_3, \ldots\}$ z binarno operacijo $\circ : G \times G \to G$ je grupa, če

- za poljubne elemente $g_i, g_j, g_k \in G$ velja $g_i \circ (g_j \circ g_k) = (g_i \circ g_j) \circ g_k$ asociativnost,
- obstaja enota $e \in G$, za katero velja $g \circ e = e \circ g = g$ (za vsak element $g \in G$),
- za vsak element $g \in G$ obstaja (inverzni) element $g^{-1} \in G$, da je $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$.

■ **Primer 43** Množica $m \times n-$matrik z notranjo operacijo seštevanja $+$ je grupa. Enota je ničelna matrika

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Za seštevanje matrik velja asociativnost

$$(A+B)+C = A+(B+C) = A+B+C.$$

Inverzni element k matriki A je $-A$. ■

■ **Primer 44 — Grupa** $(Z_6, \cdot)$. Množica $Z_6 = \{z_1, \ldots, z_6\}$ vseh rešitev enačbe $z^6 = 1$ je grupa za množenje v množici kompleksnih števil $\mathbb{C}$. V nalogi 6 smo videli, da so rešitve enačbe $z^6 = 1$ naslednja kompleksna števila:

$$z_1 = 1, \quad z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, \quad z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i,$$
$$z_4 = -1, \quad z_5 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i, \quad z_6 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

■

Sami preverite, da je $z_1 = 1$ enota te grupe. Preveri, da je: $z_k z_{8-k} = 1$ za $k = 2,3,4,5,6$. Torej z_6 je inverzni element elementa z_2 (in obratno), z_3 je inverz od z_5 (in obratno). Tabelo vseh možnih produktov v neki končni grupi imenujemo *Caylejeva tabela* grupe. Za grupo $(Z_6, \cdot)$, kjer $\cdot$ označuje množenje kompleksnih števil, je Caylejeva tabela enaka:

$\cdot$	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
z_1	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
z_2	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_1
z_3	z_3	z_4	z_5	z_6	z_1	z_2
z_4	z_4	z_5	z_6	z_1	z_2	z_3
z_5	z_5	z_6	z_1	z_2	z_3	z_4
z_6	z_6	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5

■ **Primer 45 — Grupa** $(\mathbb{Z},+)$. Množica celih števil $\mathbb{Z}$ je grupa za seštevanje, saj je seštevanje v $\mathbb{Z}$ notranja operacija, ki je asociativna. Enota za seštevanje je $0 \in \mathbb{Z}$. Vsako celo število $z \in \mathbb{Z}$ premore inverz (nasprotni element) $-z \in \mathbb{Z}$

$$z+(-z)=(-z)+z=0.$$

■

Definicija 17 — Red grupe. Naj bo $(G,*)$ grupa in naj bo moč (kardinalnost) množice G enaka n. Potem pravimo, da je $(G,*)$ grupa reda n.

Grupa $(Z_6,\cdot)$ ima red 6. Preprost primer grupe reda 4 je množica $\mathbb{Z}_4=\{0,1,2,3\}$ za seštevanje po modulu 4.[4]

■ **Primer 46** Grupa $(\mathbb{Z}_4,\oplus)$ je končna grupa s štirimi elementi. Njena Cayleyeva tabela množenja je

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

■

Definicija 18 — Abelova grupa. Grupo $(G,*)$, za katero je binarna operacija $*$ komutativna

$$a*b=b*a \quad \text{za vsak par} \quad a,b \in G,$$

imenujemo komutativna ali Abelova.

■ **Primer 47** Grupa s Caylejevo tabelo množenja

[4] Operacijo seštevanja po modulu štiri standardno označimo z znakom $\oplus$. Rezultat je ostanek vsote po deljenju s 4. Na primer $3\oplus 3=2$, saj je $6=1\cdot 4+2$. Podobno je $3\oplus 2=2\oplus 3=1$.

$\circ$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	$-a$	b
c	c	a	a

ni Abelova, saj $b = b \circ c \neq c \circ b = a$. ■

■ **Primer 48** Grupa $(\mathbb{Z}_4, \oplus)$ je Abelova. ■

■ **Primer 49 — Končna grupa.** Grupa $(\mathbb{Z}_4, \oplus)$ je grupa reda štiri, grupa $(Z_6, \cdot)$ je grupa reda 6. ■

■ **Primer 50 — Neskončna grupa.** Grupa $(\mathbb{Z}, +)$ je neskončna grupa. Pravimo tudi, da ima red neskočno. ■

V prejšnjih poglavjih smo spoznali simetrije ter izometrije ravnine in videli, da so zaprte za komponiranje (glej tabelo 4.1).[5]
Vemo[6], da za množenje matrik velja asociativnost

$$A_1 (A_2 A_3) = (A_1 A_2) A_3 = A_1 A_2 A_3.$$

Videli smo, da lahko izometrije zapišemo z nehomogenimi linearnimi preslikavami

$$\begin{aligned} F_1(\vec{x}) &= A_1\vec{x} + \vec{t}_1 \\ F_2(\vec{x}) &= A_2\vec{x} + \vec{t}_2 \\ F_3(\vec{x}) &= A_3\vec{x} + \vec{t}_3. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Videli smo tudi, da imajo vse izometrije ravnine inverzne preslikave (glej razdelek 4.3).

Dokažimo[7], da za poljubne nehomogene linearne preslikave (5.1) za vsak vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ velja

$$L = ((F_1 \circ F_2) \circ F_3)(\vec{x}) = (F_1 \circ (F_2 \circ F_3))(\vec{x}) = D, \tag{5.2}$$

kar implicira asociativnost (izometrij ravnine):

$$(F_1 \circ F_2) \circ F_3 = (F_1 \circ F_2) \circ F_3 = F_1 \circ F_2 \circ F_3.$$

Najprej izračunajmo $F_1 \circ F_2$ in $F_2 \circ F_3$

$$\begin{aligned} (F_1 \circ F_2)(\vec{x}) &= A_1 \left(A_2\vec{x} + \vec{t}_2\right) + \vec{t}_1 \\ &= A_1 A_2 \vec{x} + A_1 \vec{t}_2 + \vec{t}_1 \\ (F_2 \circ F_3)(\vec{x}) &= A_2 \left(A_3\vec{x} + \vec{t}_3\right) + \vec{t}_2 \\ &= A_2 A_3 \vec{x} + A_2 \vec{t}_3 + \vec{t}_2. \end{aligned}$$

[5] S tem mislimo, da pri komponiranju ne dobimo nič novega; oz. dobimo vedno eno od štirih izometrij.
[6] Glej dodatek, stran 114.
[7] Upoštevamo asociativnost množenja matrik.

Izračunajmo L in D:

$$\begin{aligned} L &= ((F_1 \circ F_2) \circ F_3)(\vec{x}) = A_1 A_2 \left(A_3 \vec{x} + \vec{t}_3\right) + A_1 \vec{t}_2 + \vec{t}_1 \\ &= A_1 A_2 A_3 \vec{x} + A_1 A_2 \vec{t}_3 + A_1 \vec{t}_2 + \vec{t}_1 \\ D &= A_1 \left(A_2 A_3 \vec{x} + A_2 \vec{t}_3 + \vec{t}_2\right) + \vec{t}_1 \\ &= A_1 A_2 A_3 \vec{x} + A_1 A_2 \vec{t}_3 + A_1 \vec{t}_2 + \vec{t}_1 . \end{aligned}$$

Očitno je $L = D$.

■ **Primer 51 — Grupa izometrij ravnine.** Dokazali smo, da je množica štirih tipov izometrij ravnine $\{T, Z, R, D\}$ grupa za komponiranje $\circ$. Izometrije so simetrije ravnine, zato je operacija notranja/binarna. Dokazali smo, da je operacija komponiranja asociativna: glej enakost (5.2). Za vsako izometrijo obstaja inverzna preslikava. Enota je translacija za vektor $\vec{t} = \vec{0}$ oziroma rotacija za kot $0°$. ■

■ **Primer 52 — Grupa simetrij pravilnega trikotnika.** Množica simetrij pravilnega trikotnika

$$\Sigma_\Delta = \{R_1, R_2, R_3 = I, Z_1, Z_2, Z_3\}$$

je grupa za komponiranje $\circ$. Da simetrije zadošačjo vsem lastnostim grupe, smo preverili zgoraj. ■

■ **Primer 53 — Simetrijska grupa pravilnega n−kotnika.** Simetrijska grupa pravilnega $n-$kotnika vsebuje $n-$rotacij in $n-$zrcaljenj. Na sliki 5.4 so prikazane simetrije pravilnega $6-$kotnika:

$$\Sigma_{\hexagon} = \left\{R_{60°}, R_{60°}^2, R_{60°}^3, R_{60°}^4, R_{60°}^5, R_{60°}^6, Z_{0°}, Z_{30°}, Z_{60°}, Z_{90°}, Z_{120°}, Z_{150°}\right\}.$$

■

Definicija 19 — Diedrska grupa. Simetrijsko grupo, ki je izomorfna simetrijski grupi pravilnega $n-$kotnika in vsebuje $n-$rotacij in $n-$zrcaljenj, ki so enakomerno porazdeljene okoli skupnega središča, imenujemo diedrska grupa reda n. Označili jo bomo z D_n

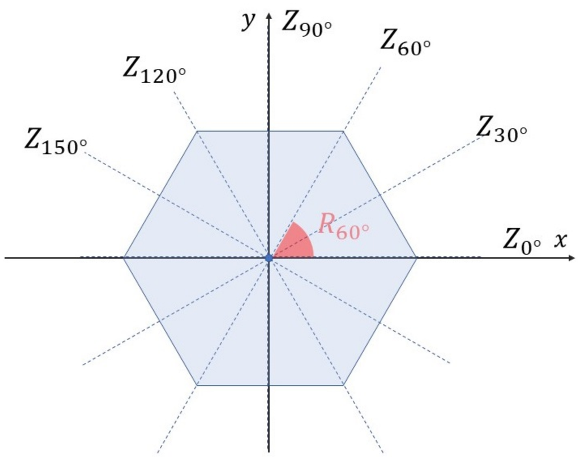
D_n ... diedrska grupa: $n-$rotacij in $n-$zrcaljenj

Definicija 20 — Ciklična grupa. Simetrijsko grupo, ki premore n rotacij, imenujemo ciklična grupa. Označimo jo s C_n.

C_n ... ciklična grupa: $n-$rotacij

Grupa kompleksnih rešitev enačbe $z^6 - 1 = 0$ iz primera 44 je primer grupe C_6.

Če neka podmnožica grupe tudi sama zadošča vsem lastnostim grupe, jo imenujemo *podgrupa*.



Slika 5.4: Simetrijska grupa pravilnega šestkotnika, $\Sigma_{\hexagon}$, vsebuje 6 rotacij in 6 zrcaljenj, ki so enakomerno porazdeljene glede na skupno središče.

Definicija 21 — Podgrupa. Množica $H \subseteq G$ je podgrupa grupe $(G, \circ)$, če je tudi $(H, \circ)$ grupa za isto binarno operacijo $\circ$.

■ **Primer 54 — Trivialni podgrupi.** Naj bo $(G, *)$ grupa in $e \in G$ enota grupe G. Obstajata vsaj dve (trivialni) podgrupi:

1. $\{e\} \subset G$ je podgrupa grupe G, za vsako grupo G,
2. $G \subset G$ je podgrupa grupe G, za vsako grupo G.

■

Vsak element $g \in G$ (končne) grupe $(G, *)$ porodi podgrupo, ki jo označimo z $\langle g \rangle$. Podgrupa $\langle g \rangle$ je sestavljena iz elementov:

$$e, g, g * g = g^2, g * g^2, g^2 * g, g^2 * g^2, \ldots$$

Zaradi asociativnosti je

$$\begin{aligned} g * g^2 &= g^2 * g = g^3 \\ g^2 * g^2 &= g * g^3 = g^3 * g = g^4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Elementom g, g^2, g^3, ... pravimo *potence* (elementa g).

Če je grupa $(G, *)$ končna, mora nek produkt $g * (g * (g * \cdots * g)) = g^n$ sovpadati z enoto grupe

$$g * (g * (g * \cdots * g)) = g^n = e.$$

Če je $n < |G|$, je grupa $\langle g \rangle \subseteq G$, *porojena z elementom* $g \in G$, netrivialna podgrupa grupe G.

■ **Primer 55** Grupa simetrij pravilnega trikotnika vsebuje 4 netrivialne podgrupe.

1. Eno podgrupo $H \subset \Sigma_\Delta$ reda 3

$$H_3 = \{R_1, R_2, R_3\}.$$

2. Tri podgrupe $H_2^1, H_2^2, H_2^3 \subset \Sigma_\Delta$ reda 2

$$H_2^1 = \{I, Z_1\}, \quad H_2^2 = \{I, Z_2\}, \quad H_2^3 = \{I, Z_3\}.$$

■

Za nekatere grupe vidimo, da so si *zelo podobne*. Podobne v smislu, če bi njihove elemente primerno preimenovali, bi iz ene grupe nastala druga. V teoriji grup (in splošno v abstraktni algebri) temu pravimo *izomorfizem* (grup). Natančno je izomorfizem grup opredeljen v naslednji definiciji.

Definicija 22 — Izomorfizem grup. Grupi $(G, *)$ in $(H, \circ)$ sta izomorfni, če obstaja obrnljiva preslikava $\Phi : G \to H$, za katero velja

$$\Phi(g_1 * g_2) = \Phi(g_1) \circ \Phi(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

Za končne grupe izomorfizem (kadar obstaja) predstavlja neko preimenovanje elementov grupe.

■ **Primer 56** Grupe H_2^1, H_2^2 in H_2^3 so izomorfne. Izomorfizem med H_2^1 in H_2^2 je

$$\Phi : Z_1 \mapsto Z_2$$
$$\Phi : I \mapsto I.$$

■

■ **Primer 57** Naj bo $Z_4 = \{1, -1, i, -i\}$ množica (kompleksnih) rešitev enačbe

$$z^4 - 1 = 0.$$

Grupa $(Z_4, \cdot)$ je izomorfna grupi $(\mathbb{Z}_4, \oplus)$. Sami preverite, da je ustrezni izomorfizem Φ naslednji:

$$\Phi(1) = 0, \quad \Phi(-1) = 2, \quad \Phi(i) = 3, \quad \Phi(-i) = 1.$$

■

Vprašanje: kako ugotovimo, da grupi $(M, *)$ in $(N, \circ)$ nista izomorfni?

Če gre za končni grupi, ki nimata enakega reda, ne moreta biti izomorfni, saj med množicama M in N ne obstaja bijektivna preslikava. **Nadaljnje pomembne lastnosti, ki se z izomorfizmi ohranjajo, so:**

1. **komutativnost:** če je $(M, *)$ Abelova, $(N, \circ)$ pa ne, med njima ne more biti izomorfizma, saj iz $m_1 * m_2 = m_2 * m_1$ sledi $n_2 \circ n_1 = n_1 \circ n_2$:

$$\Phi(m_2) \circ \Phi(m_1) = \Phi(m_2 * m_1) = \Phi(m_1 * m_2) = \Phi(m_1) \circ \Phi(m_2)$$

2. **enota:** če je e_M enota v grupi $(M,*)$ in e_N enota v grupi $(N,\circ)$, vsak (morebitni) izomorfizem $\Phi : (M,*) \to (N,\circ)$ preslika e_M v e_N

$$\Phi(e_M) = e_N.$$

3. **obstoj podgrupe:** Naj bo $|M| = |N| = k$. Če ima $(M,*)$ podgrupo reda $k' < k$, grupa $(N,\circ)$ pa nima podgrupe reda k', izomorfizem $\Phi : (M,*) \to (N,\circ)$ ne obstaja.

Definicija 23 — Generatorji grupe. Naj bo $(G,*)$ končna grupa reda n. Naj bodo $g_{i_1},\dots,g_{i_k}$, $k \leq n$ elementi, za katere velja

$$\langle g_{i_1}, g_{i_1}, \dots, g_{i_k} \rangle = (G,*)$$

in za vsak $s < k$ je

$$\left\langle g_{j_1}, \dots, g_{j_s} \right\rangle \subset (G,*).$$

Pravimo, da je grupa $(G,*)$ generirana s k elementi. Elementom $g_{i_1}, g_{i_1}, \dots, g_{i_k}$ pravimo *generatorji grupe*.

Generatorji grupe so torej najmanjša podmnožica grupe, ki porodi celotno grupo.

Definicija 24 — Ciklična grupa. Ciklična grupa je grupa generirana z enim samim elementom.

■ **Primer 58** Ciklična grupa s končnim številom elementov je grupa, generirana z enim samim elementom:

$$\mathscr{C}_n = \langle g \rangle, \quad g^n = e.$$

■

■ **Primer 59** Grupa $(\mathbb{Z},+)$ je neskončna ciklična grupa. V njej so vsa naravna števila

$$1, \quad 1+1=2, \quad 1+2=3, \quad \dots$$

Enota za seštevanje je $0 \in \mathbb{Z}$. V $(\mathbb{Z},+)$ so vsebovana tudi vsa negativna cela števila:

$$0+(-1)=-1, \quad -1+(-1)=-2, \quad -2+(-1)=-3, \quad \dots$$

■

■ **Primer 60** Grupa simetrij pravilnega trikotnika Σ_Δ je generirana z dvema elementoma

$$\langle R_1, Z_1 \rangle = \Sigma_\Delta.$$

Že prej smo izračunali, da je $R_1R_1 = R_2$ in $R_1R_2 = R_3 = I$ ter $Z_2R_1 = Z_3$, $R_1Z_3 = Z_2$. ■

Permutacije ali razporedbe poznamo iz gimnazije. Vemo, da lahko n elementov razporedimo na $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ načinov.

■ **Primer 61** Vse razporedbe štirih elementov 1, 2, 3 in 4 so

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

■

■ **Primer 62** Permutacijo $1 \mapsto 4$, $2 \mapsto 2$, $3 \mapsto 1$, $4 \mapsto 3$ zapišemo kot

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Permutacijo $1 \mapsto 3$, $3 \mapsto 1$, $2 \mapsto 4$, $4 \mapsto 2$ zapišemo kot

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

■

■ **Primer 63 — Sestavljanje permutacij.** Sestavljanje permutacij $\sigma_1 \circ \sigma_2$ je naravno definirano kot $1 \mapsto 3 \mapsto 4$, $2 \mapsto 2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 1 \mapsto 2$, $4 \mapsto 4 \mapsto 3$. Torej za permutaciji σ_1 in σ_2 iz prejšnjega primera je

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

■

Opomba. V nalogi 40 dokažemo, da množica permutacij Π_4 skupaj z binarno operacijo komponiranja $\circ$ predstavlja grupo, ki jo imenujemo *permutacijska grupa* $(\Pi_4, \circ)$. Permutacijske grupe imajo v matematiki pomemben teoretični pomen (glej [**5**]).

5.1 Naloge

Naloga 34 Zapiši grupo simetrij kvadrata $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \times \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$.

Glej rešitev 34.

Naloga 35 Zapiši vse podgrupe grupe simetrij kvadrata $\Sigma_{\boxdot}$. Zapiši tudi njihove generatorje.

Glej rešitev 35.

Naloga 36 Opiši grupo simetrij velike tiskane črke

T

Glej rešitev 36.

Naloga 37 Katere podgrupe vsebuje grupa $(Z_6, \cdot)$?

Glej rešitev 37.

Naloga 38 * Dokaži, da je enota v grupi enolično določen element.

Glej rešitev 38.

Naloga 39 * Dokaži, da je vsaka ciklična grupa Abelova.

Glej rešitev 39.

Naloga 40 * Dokaži, da je množica permutacij Π_4 grupa za kompozitum $\circ$.

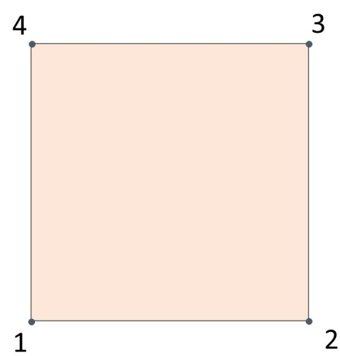
Glej rešitev 40.

Naloga 41 * Naj 4 elementi predstavljajo oglišča kvadrata, kot kaže slika 5.1. Preveri, da potem permutacija

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

predstavlja zrcaljenje kvadrata preko vertikale.

Glej rešitev 41.



Slika 5.5: Kvadrat z oglišči 1, 2, 3 in 4.

Naloga 42 * Naj 4 elementi predstavljajo oglišča kvadrata, kot kaže slika 5.1. Preveri, da potem permutacija

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

predstavlja zrcaljenje kvadrata preko diagonale.

Glej rešitev 42.

Naloga 43 * Naj 4 elementi predstavljajo oglišča kvadrata, kot kaže slika 5.1. Preveri, da potem permutacija

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

predstavlja rotacijo kvadrata v negativni smeri ↻ za kot 90°.

Glej rešitev 43.

Naloga 44 * Ali imajo vse permutacije iz množice Π_4 geometrijski pomen togega gibanja/izometrije?

Glej rešitev 44.

6. Končni vzorci

Končne vzorce smo že omenjali (glej sliko 2.4). Intuitivno smo jih definirali kot podmnožice ravnine, ki jih lahko vložimo v nek krog. Prav je, da to preprosto, intuitivno definicijo končnih vzorcev, opišemo natančneje.

Definicija 25 — Končni vzorec. Končni vzorec je podmnožica ravnine, ki ne vsebuje translacijskih simetrij.

Najprej poglejmo smiselnost te definicije. Vemo: če bi v (simetrijsko) grupo (končnega) vzorca M dodali neko translacijsko simetrijo $T(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{t}$, čeprav bi vektor translacije $\vec{t}$ bil še tako (nepredstavljivo) majhen, bi v simetrijski grupi Σ_M bile tudi translacije[1]

$$T \circ T = T^2, \quad T \circ T^2 = T^2 \circ T = T^3, \quad \dots$$

Ker je

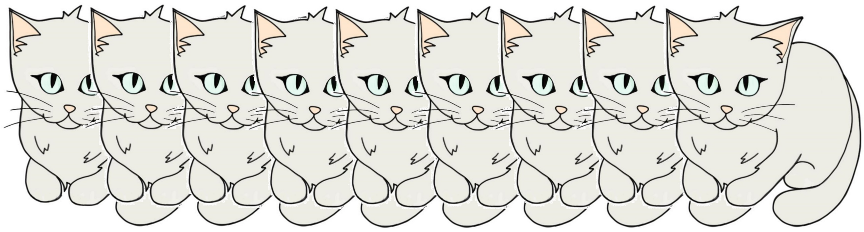
$$\begin{aligned} T^2(\vec{x}) &= \left(\vec{x} + \vec{t}\right) + \vec{t} \\ &= \vec{x} + 2\vec{t} \\ &\text{in} \\ T^3(\vec{x}) &= \left(\vec{x} + 2\vec{t}\right) + \vec{t} \\ &= \vec{x} + 3\vec{t} \end{aligned}$$

[1] Zaradi asociativnosti je $T \circ (T \circ T) = (T \circ T) \circ T = T^3$ in $(T \circ T) \circ (T \circ T) = T \circ (T \circ (T \circ T)) = T \circ (T \circ T) \circ T = T^4$ in podobno lahko poljubno zaporedje n kompozicij translacije T označimo s T^n.

induktivno[2] sklepamo, da je

$$\underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{n-\text{krat}} (\vec{x}) = T^n (\vec{x}) = \vec{x} + n\vec{t}.$$

Očitno translacija T^n predstavlja premik za vektor $n\vec{t}$, ki z naraščajočim n postaja zelo velik. Zato (končni) vzorec M postane neskončo velik, kot kaže slika 6.1 Obstoj translacije je torej v nasprotju z intuitivno definicijo končnega vzorca.



Slika 6.1: Obstoj translacije povzroči, da vzorca ne moremo vložiti v neko omejeno krožnico, kar je v nasprotju z intuitivno definicijo končnega vzorca.

Naslednje naravno vprašanje je, ali je lahko končni vzorec kljub temu, da ne vsebuje nobene translacije, neskončno velik? To sprašuje naloga 45.

Vprašamo se lahko tudi, ali lahko simetrijska grupa končnega vzorca vsebuje drsno zrcaljenje?

Lema 10 Noben končni vzorec v svoji simetrijski grupi ne vsebuje drsnega zrcaljenja.

Dokaz. Denimo, da končni vzorec vsebuje neko drsno zrcaljenje D preko premice s smernim vektorjem $\vec{d}$. Brez škode za splošnost[3] lahko privzamemo, da je vektor $\vec{d}$ (in s tem zrcalna premica drsnega zrcaljenja) vodoraven $\vec{d} = (d, 0)$. Potem je

$$\begin{aligned} D(\vec{x}) = D(x,y) &= (x,-y) + (d,0) \\ &= (x+d,-y) \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} D^2(\vec{x}) = (D \circ D)(x,y) &= ((x+d)+d, -(-y)) \\ &= (x+2d, y) \end{aligned}$$

predstavlja translacijo ravnine za vektor $2\vec{d}$

$$(x,y) \mapsto (x,y) + 2\vec{d}.$$

Torej obstoj drsnega zrcaljenja vedno implicira obstoj translacije, kar pomeni, da končni vzorec ne sme vsebovati drsnega zrcaljenja. ■

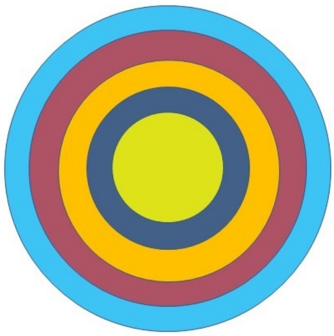
[2] Matematična indukcija je sklepanje, ki temelji na lastnosti obstoja naslednika za vsako naravno število $n \in \mathbb{N}$: če lastnost/trditev T_n velja za $n = 1$ in iz privzetka, da trditev T_n velja za vse $n \leq N$, dokažemo, da trditev T_n velja tudi za $n = N + 1$, lahko sklepamo, da velja trditev za vsako naravno število $N \in \mathbb{N}$.

[3] Vemo, da lahko celotni vzorec oziroma vektor $\vec{d}$ ustrezno zarotiramo.

Iz leme 10 in izreka 3 sledi, da lahko končni vzorec vsebuje samo zrcaljenja in rotacije.

Najprej si poglejmo posebnost![4] Simetrijska grupa kroga ima red neskončno, saj vsebuje neskončno rotacij (za poljubno majhen kót) in neskončno zrcaljenj (vsaka premica, ki poteka skozi središče kroga, predstavlja zrcalno simetrijo kroga).

■ **Primer 64** Tudi končni vzorci, ki temeljijo na krogu in krožnicah imajo neskončno simetrijsko grupo. Na sliki 6.2 je primer takega končnega vzorca. ■



Slika 6.2: Primer končnega vzorca z neskončno simetrijsko grupo.

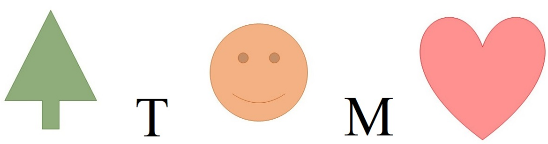
Opomba. V prejšnjem poglavju smo spoznali diedrske in ciklične grupe:

D_n	diedrska grupa
C_n	ciklična grupa.

Vemo, da so diedrske in ciklične grupe končne grupe. Prve vsebujejo $2n$ simetrij (n rotacij in n zrcaljenj), slednje pa n simetrij (n rotacij).

Diedrske grupe D_n smo v prejšnjem poglavju definirali na osnovi geometrijske predstavitve v pravilnem $n-$kotniku (ki obstaja za vsak $n \geq 3$). Ker $1-$kotnik in $2-$kotnik (vsaj v evklidski geometriji) ne obstajata, je smiselno vprašanje, če obstaja geometrijska predstavitev tudi za $n = 1$ in $n = 2$? Odgovora na obe vprašanji najdemo v naslednjih primerih[5].

■ **Primer 65** Končni vzorci na sliki 6.3 imajo diedrsko grupo D_1. ■



Slika 6.3: Vzorec D_1 vsebuje (trivialno) rotacijo (za 360° oz. 0°) in eno zrcaljenje. Za D_1-vzorce na sliki je zrcaljenje vertikalno.

[4] V smislu intuitivne definicije je krog končni vzorec, ki ima neskočno simetrijsko grupo.

[5] Seveda je glede likov treba omiliti zahteve.

■ **Primer 66** Pravokotnik je (verjetno najbolj) preprost primer končnega vzorca D_2. ■

Spomnimo se, da smo v razdelku rotacijo ravnine $\mathbb{R}^2$ za kot φ okrog središča S označili z R^S_φ. V primeru 34 smo videli, da je kompozicija poljubnih rotacij $R^{S_1}_\alpha$ in $R^{S_2}_\beta$ tudi rotacija za kót $\alpha+\beta$ okrog novega središča S. Vemo tudi, da je $\left(R^S_\varphi\right)^{-1} = R^S_{-\varphi}$.

Lema 11 V vsaki končni simetrijski grupi imajo vse rotacije isto središče.

Dokaz. V primeru 34 smo videli, da je kompozitum (dveh) rotacij $R^{S_1}_\alpha$ in $R^{S_2}_\beta$ nova rotacija za (skupni) kot $\alpha+\beta$. Le, če je $\alpha+\beta = 2k\pi$, kompozitum $R^{S_1}_\alpha \circ R^{S_2}_\beta$ predstavlja translacijo (lahko tudi trivialno). Zaradi asociativnosti izometrij formula

$$R^{S_1}_\alpha \circ R^{S_2}_\beta = R^S_{\alpha+\beta}$$

velja tudi za tri (ali več) zaporednih kompozitumov

$$R^{S_1}_\alpha \circ R^{S_2}_\beta \circ R^{S_3}_\gamma = R^S_{\alpha+\beta+\gamma}. \tag{6.1}$$

Poglejmo kompozitum [6].

$$\left(R^{S_2}_\beta\right)^{-1} \circ \left(R^{S_1}_\alpha\right)^{-1} \circ R^{S_2}_\beta \circ R^{S_1}_\alpha. \tag{6.2}$$

Ker je $\left(R^S_\varphi\right)^{-1} = R^S_{-\varphi}$, je po formuli (6.1) kompozitum (6.2) neka translacija, saj velja:

$$-\beta-\alpha+\beta+\alpha = 0.$$

V končnem vzorcu translacija (razen trivialna) ne more biti prisotna, zato mora (6.2) predstavljati identično (translacijo):

$$\left(R^{S_2}_\beta\right)^{-1} \circ \left(R^{S_1}_\alpha\right)^{-1} \circ R^{S_2}_\beta \circ R^{S_1}_\alpha = I.$$

To pomeni

$$\left(\left(R^{S_2}_\beta\right)^{-1} \circ \left(R^{S_1}_\alpha\right)^{-1} \circ R^{S_2}_\beta \circ R^{S_1}_\alpha\right)(\vec{r}_{S_1}) = I\vec{r}_{S_1}$$
$$\left(R^{S_2}_\beta\right)^{-1} \circ \left(R^{S_1}_\alpha\right)^{-1} \circ R^{S_2}_\beta\left(R^{S_1}_\alpha(\vec{r}_{S_1})\right) = \vec{r}_{S_1}$$

Ker je $R^{S_1}_\alpha(\vec{r}_{S_1}) = \vec{r}_{S_1}$, sledi

$$\left(R^{S_2}_\beta\right)^{-1} \circ \left(R^{S_1}_\alpha\right)^{-1} \circ R^{S_2}_\beta(\vec{r}_{S_1}) = \vec{r}_{S_1}.$$

Na zgornjo enačbo lahko (na levi in desni strani) delujemo z izometrijo $R^{S_2}_\beta$ in dobimo

$$\left(R^{S_1}_\alpha\right)^{-1} \circ R^{S_2}_\beta(\vec{r}_{S_1}) = R^{S_2}_\beta \vec{r}_{S_1}, \tag{6.3}$$

[6] Taki elementi so v abstraktni algebri zelo pomembni, imenujemo jih komutatorji, saj izhajajo iz enačbe $ab = ba$, ki implicira $a^{-1}b^{-1}ab = e$.

saj je $\left(R_\beta^{S_2}\right)\left(R_\beta^{S_2}\right)^{-1}=I$. Nazadnje lahko na enačbo (6.3) delujemo z izometrijo $R_\alpha^{S_1}$ in dobimo

$$R_\beta^{S_2}\left(\vec{r}_{S_1}\right)=R_\alpha^{S_1}\left(R_\beta^{S_2}\vec{r}_{S_1}\right),$$

kar pomeni [7], da je $R_\beta^{S_2}\left(\vec{r}_{S_1}\right)$ fiksna točka rotacije $R_\alpha^{S_1}$. Rotacija $R_\alpha^{S_1}$ ima samo eno fiksno točko: S_1

$$R_\beta^{S_2}\left(\vec{r}_{S_1}\right)=\vec{r}_{S_1},$$

kar nadalje pomeni, da je S_1 fiksna točka rotacije $R_\beta^{S_2}$. Ker ima $R_\beta^{S_2}$ samo eno fiksno točko S_2, sledi

$$S_2=S_1.$$

■

Iz zgornje leme takoj sledi naslednja pomožna trditev.

Lema 12 V vsaki končni simetrijski grupi imajo vsa zrcaljenja skupno fiksno točko (kar pomeni, da zrcalne premice tvorijo šop premic).

Dokaz. Ločimo tri primere:

1. Če je zrcaljenje eno samo, ni kaj dokazovati.
2. Če obstajata dve različni zrcalni premici, ločimo dva primera:
   a) če sta premici vzporedni, obstaja translacija za vektor, ki je pravokoten na obe zrcalni premici, njegova dolžina pa je enaka dvakratni razdalji med zrcalnima premicama. V tem primeru simetrijska grupa ni končna, saj ena translacija generira neskončno translacij;
   b) če zrcalni premici nista vzporedni, se sekata v neki točki, ki predstavlja skupno fiksno točko[8]. Tudi v tem primeru ni kaj dokazovati.
3. Če obstajajo vsaj tri različne zrcalne premice, vsak par porodi neko rotacijo. Po lemi 11 sledi, da je vsem rotacijam v končni grupi skupno eno samo središče, kar zaključi dokaz.

■

Naslednja pomembna lastnost končnih simetrijskih grup se nanaša na strukturo rotacij.

Lema 13 Vsaka končna simetrijska grupa Σ, ki vsebuje neko rotacijo R_φ, vsebuje (še) rotacije oblike

$$I, R_\varphi, R_\varphi^2, \ldots, R_\varphi^{n-1} \tag{6.4}$$

za nek $n\in\mathbb{N}$ in je ciklična.

[7] Beri od desne proti levi!

[8] Ta skupna fiksna točka je središče rotacije, ki jo porodita obe zrcalni simetriji.

Dokaz. Denimo, da obstaja rotacija R_φ^S okoli središča S in je φ najmanjši kot rotacije. Prej smo dokazali, da vse rotacije v končni grupi potekajo okoli istega središča, zato lahko brez škode za splošnost privzamemo, da je $S=(0,0)$, kar pomeni, da zgornji indeks v R_φ^S ni potreben. Po predpostavki je grupa končna. Vemo, da je $R_\varphi^2 = R_{2\varphi}$, $R_\varphi^3 = R_{3\varphi}$, ..., $R_\varphi^k = R_{k\varphi}$. Ker je (ciklična) grupa R_φ, R_φ^2, R_φ^3, ..., R_φ^k končna podgrupa grupe Σ, mora obstajati neko naravno število $n \in \mathbb{N}$, za katerega je $R_\varphi^n = R_{n\varphi} = I = R_{360^\circ}$, kar implicira lastnost (6.4) oziroma cikličnost. Dodatno opazimo, da med (najmanjšim kotom rotacije) φ in n obstaja zveza

$$\varphi = \frac{360^\circ}{n}.$$

■

Vemo, da obstaja končna grupa iz samih rotacij. Obstaja tudi grupa z enim samim zrcaljenjem (in trivialno rotacijo). Videli smo, da je v diedrskih grupah število rotacij (skupaj s trivialno rotacijo I) in število zrcaljenj enako. Smiselno se je torej vprašati, ali obstaja kaka končna grupa, ki ima m zrcalnih simetrij in n rotacijskih simetrij in

$$m \neq n \quad ?!$$

Odgovor je v naslednji lemi.

Lema 14 Če končna simetrijska grupa vsebuje n zrcalnih izometrij, vsebuje tudi natanko n rotacij (vključno s trivialno rotacijo R_{360°).

Dokaz. Recimo, da obstaja končna grupa, ki vsebuje m različnih rotacij in n različnih zrcaljenj. Naj bodo R_1, R_2, ..., $R_m = I$ različne rotacije in Z_1, Z_2, ..., Z_n različne zrcalne simetrije v končni grupi. Želimo dokazati, da je $m = n$. Izberimo poljubno zrcaljenje $Z \in \{Z_1, Z_2, ..., Z_n\}$. Potem so v grupi tudi izometrije

$$Z \circ R_1,\ Z \circ R_2,\ ..., Z \circ R_m, \tag{6.5}$$

ki vse po vrsti obračajo orientacijo, saj so kompozitumi zrcaljenja in rotacije. Poleg tega morajo biti vse izometrije (6.5) različne, saj ima Z inverz ($Z^{-1} = Z$), zato iz $Z \circ R_i = Z \circ R_j$ sledi $R_i = R_j$, kar je v protislovju s predpostavko (da so R_1, R_2, ..., R_m različne rotacije). Torej je množica $\{Z \circ R_1, Z \circ R_2, ..., Z \circ R_m\}$ podmnožica množice $\{Z_1, Z_2, ..., Z_n\}$

$$\{Z \circ R_1, Z \circ R_2, ..., Z \circ R_m\} \subseteq \{Z_1, Z_2, ..., Z_n\},$$

kar pomeni

$$m \leq n.$$

Po drugi strani pa so (spet za poljubno zrcaljenje Z) simetrije

$$Z \circ Z_1,\ Z \circ Z_2,\ ..., Z \circ Z_n \tag{6.6}$$

v grupi. Ker so izometrije (6.6) kompozitumi zrcaljenj, ohranjajo orientacijo. Tudi izometrije (6.6) morajo biti različne, saj iz $Z \circ Z_i = Z \circ Z_j$ sledi $Z_i = Z_j$, kar je v nasprotju s predpostavko. To pomeni, da je

$$\{Z \circ Z_1,\ Z \circ Z_2,\ ...,\ Z \circ Z_n\} \subseteq \{R_1, R_2, ..., R_m\}$$
$$\Downarrow$$
$$n \leq m.$$

To dokazuje, da je $n = m$. ■

6.1 Naloge

Naloga 45 Zapiši Cayleyevo tabelo za simetrijske grupe C_1, C_2 in D_1, D_2.
Glej rešitev 45

Naloga 46 Ali sta kaki dve grupi C_n in D_m izomorfni?
Glej rešitev 46

Naloga 47 Podaj nekaj primerov končnih vzorcev D_2.
Glej rešitev 47

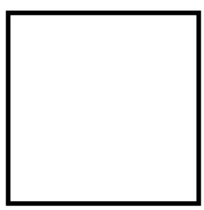
Naloga 48 Katere velike tiskane črke imajo kot končni vzorci simetrijsko grupo D_1?
Glej rešitev 48

Naloga 49 Katere velike tiskane črke imajo simetrijsko grupo D_2?
Glej rešitev 49

Naloga 50 Katere velike tiskane črke imajo simetrijsko grupo C_2?
Glej rešitev 50

Naloga 51 Katero simetrijsko grupo imajo velike tiskane črke X, Y in W?
Glej rešitev 51

Naloga 52 S čim manj truda (s čim manj potezami) spremeni kvadrat v končni vzorec C_4.



Glej rešitev 52

Naloga 53 S čim manj truda (s čim manj potezami) spremeni kvadrat v končni vzorec D_2.
Glej rešitev 53

Naloga 54 Ali se ženski in moški simbol kot končna vzorca razlikujeta? Določi simetrijsko grupo obeh simbolov.

♀ ♂

Glej rešitev 54

Naloga 55 S čim manj truda (s čim manj potezami) spremeni krožnico v C_4−vzorec.
Glej rešitev 55

Ni večjega zadovoljstva kot dobro vladati kraljestvu samega sebe.

Leonardo da Vinci

7. Leonardov izrek

Herman Weyl [6] je bil verjetno prvi, ki je Leonardov izrek pripisal Leonardu. Leonardo je razmišljal o vseh možnih radialnih (zrcalnih in rotacijskih) simetrijah stavbe, kar je sam imenoval središčna zgradba. Iz teh razmišljanj naj bi nastal Leonardov izrek.

Izrek 4 — Leonardo. Če ima neka podmnožica M evklidske ravnine $\mathbb{R}^2$ končno mnogo simetrij, je njena simetrijska grupa Σ_M bodisi ciklična, bodisi diedrska:

$$\begin{tikzcd} & \Sigma_M \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ C_n & & D_n \end{tikzcd}$$

ciklična diedrska

Za dokaz izreka 4 imamo že vse pripravljeno, vendar bomo pred tem podali še nekaj zgodovinskih podatkov o Leonardu in matematiki v njegovem času.

7.1 Polihistor Leonardo

Leonardo da Vinci (1452–1519), vsesplošni renesančni učenjak - polihistor - umetnik, ki je naslikal Mono Liso in Zadnjo večerjo, se je študija matematike lotil relativno pozno, saj je bil takrat star že skoraj 40 let. Vzporedno z matematiko se je Leonardo namreč ukvarjal še z umetnostjo/slikarstvom, mehaniko/tehniko, arhitekturo itd.

Ob petstoti obletnici njegove smrti leta 2019 je izšlo veliko knjig, ki obravnavajo njegovo življenje in predvsem široko delovanje.

Matematiki so od Evklida naprej raziskovali razmerje zlatega reza. Leonardo da Vinci je to razmerje poznal in uporabil v sliki Vitruvijev človek, saj so bili takrat prepričani, da je človek najboljša božja stvaritev v smislu simetrije in razmerij/proporcij. Leonardo je to idealizacijo razmerij prikazal s pomočjo matematike: kroga in kvadrata ter razmerja zlatega reza [1]

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033988749$$

Študiju razmerij je Leonardo pri slikah in arhitekturnih načrtih dodal razmišljanje o simetrijah.

Leonardo ni imel formalne univerzitetne izobrazbe (diplome), svoje znanje je pridobil z opazovanjem. Za matematiko ga je navdušil sodelavec Luca Pacioli. Za Paciolijevo slavno knjigo Divina Proportione je Leonardo prispeval okrog 60 ilustracij. Nekatere poliedre je Leonardo prvič narisal tako, da se v projekciji vidijo robovi (pravilnih) mnogokotnikov.

V matematičnem geneloškem projektu je kot njegov mentor naveden starogrški učenjak Ioannis Argyropoulos.

Poleg izreka 4, ki ga danes imenujemo Leonardov izrek, je Leonardo proučeval tudi linearno perspektivo (glej sliko 7.1), simetrije, zlati rez in geometrijske oblike, vključno s platonskimi in arhimedskimi telesi.

Njegovi zapiski in skice so objavljeni v različnih knjigah. Številne skice in knjige so dostopne v digitalni obliki.

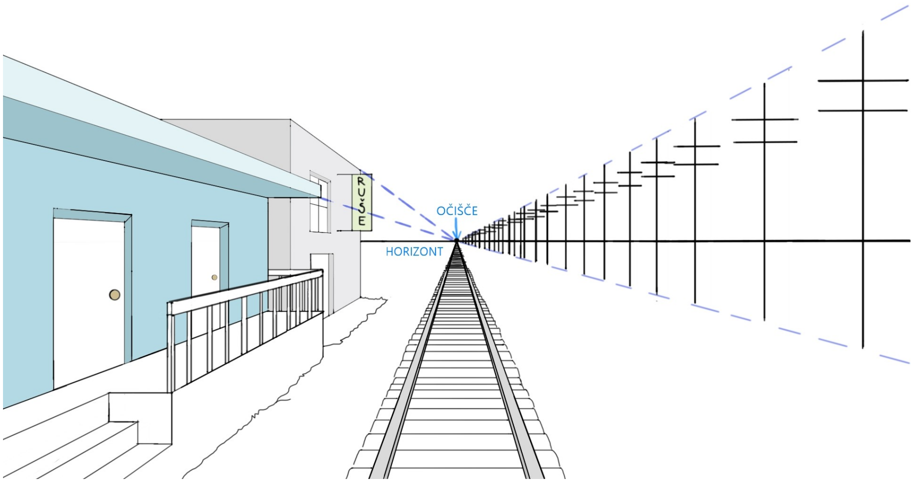
7.2 Leonardo – matematik

Pred formulacijo in dokazom Leonardovega izreka poglejmo nekaj njegovih zanimivih razmišljanj, da dobimo vsaj malo vtisa o renesančni matematiki. Več si lahko preberete v članku [**2**]. Najprej povejmo, da je znak 0 (in s tem število nič) ter arabske štev(il)ke 1, 2, ..., 9 v zahodno Evropo vpeljal Leonardo iz Pise bolj znan kot Leonardo Fibonacci, ki je leta 1202 objavil učbenik Liber Abaci.

Klasične geometrijske probleme so poznali že od Evklida dalje. Čez dobrega četrt tisočletja, v času otroštva Leonarda da Vincija, je bil učbenik Liber Abaci še vedno glavno čtivo za študij matematike. Uporabljal ga je tudi Luca Pacioli, ki je svoje znanje prenesel na Leonarda.

Pripomnimo, da v času renesanse niso znali izračunati kvadratnih in kubičnih korenov,

[1] Zlati rez predstavlja razmerje med dvema količinama (v slikarstvu in arhitekturi običajno med stranicama pravokotnika) a in b, za kateri velja $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$. Če izberemo $b = 1$, je $\Phi = \frac{a}{1}$ (pozitivna) rešitev kvadratne enacbe $a^2 = a + 1$.



Slika 7.1: Linearna perspektiva. Vse premice se končajo v posebni točki na vodoravni črti, ki jo imenujemo horizont. Posebna točka se imenuje očišče (t. j. točka, kamor gleda naše oko. V očišču se sekajo vse premice, ki potekajo do horizonta.

kot na primer

$$\sqrt{2} \approx 1.414\,213\,562\,373\,095\,049$$
$$\sqrt[3]{2} \approx 1.259\,921\,049\,894\,873\,165,$$

zato se z današnjega stališča zdijo ti problemi dokaj trivialni[2].

1. **Podvojitev kocke.** Problem sprašuje po stranici kocke, ki ima dvakratno prostornino od kocke z dano stranico[3].
   Torej, če je $V_1 = a^3$, kolikšna naj bo vrednost α, da bo kocka s stranico αa imela dvojno prostornino $V_2 = 2a^3$. Ker je $V_2 = (\alpha a)^3 = \alpha^3 a^3 = \alpha^3 V_1$, sledi

   $$2 = \frac{2a^3}{a^3} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\alpha^3 a^3}{a^3} = \alpha^3.$$

   Iz zgornje enačbe sledi[4]

   $$\alpha = \sqrt[3]{2}.$$

   Na osnovi preprostega sklepanja je Leonardo podal dokaj dober približek za $\sqrt[3]{2}$

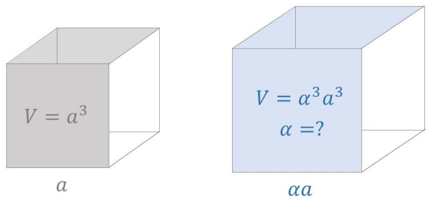
   $$\sqrt[3]{2} \approx \frac{5}{4}.$$

   Problem podvojitve kocke je prikazan na sliki 7.2.

[2]Pripomnimo, da je iz zgodovinskih razlogov kvadratura kroga še danes sinonim za nerešljiv problem.

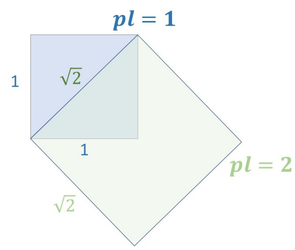
[3]Problem izhaja iz antične povezave med matematiko in arhitekturo. Prerok je prebivalcem iz Delosa naročil, naj zgradijo dvakrat večji žrtvenik za boga Apolona. Ker je imel oltar obliko kocke, je tako nastal problem podvojitve kocke.

[4]V času renesanse so poznali pojem kvadratnega in kubičnega korena, vendar, razen za popolne kvadrate/kube, inverza niso znali izračunati.



Slika 7.2: 3D prikaz problema podvojitve kocke. Problem sprašuje po stranici kocke z dvojno prostornino glede na prvotno kocko.

Kocka s stranico 5 enot ima 125-krat večjo prostornino kot kocka s stranico 1 enote. Po drugi strani ima kocka s stranico 4 enot 64-krat večjo prostornino kot kocka s stranico 1 enote. Ker je $2 \cdot 64 = 128$ skoraj toliko kot 125, je Leonardo sklepal, da mora biti ulomek $\frac{5}{4}$ dober približek za $\sqrt[3]{2}$ (glej tudi nalogo 58).



Slika 7.3: Konstrukcijska rešitev problema podvojitve kvadrata. Rešitev je diagonala kvadrata, zato je Leonardo domneval, da bi po analogiji lahko bila telesna diagonala kocke rešitev problema podvojitve kocke.

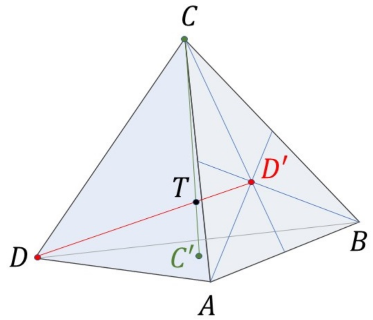
Znano je tudi, da je Leonardo poskušal problem podvojitve kocke rešiti konstrukcijsko (t. j. s konstrukcijo števila $\sqrt[3]{2}$ s šestilom in ravnilom) na osnovi analogije rešitve podvojitve kvadrata, kot kaže slika 7.3.
Po analogiji je predvidel, da bi telesna diagonala kocke morda lahko bila rešitev problema podvojitve kocke, vendar lahko hitro preverimo, da temu ni tako, saj $\left(\sqrt{3}\right)^3 \neq 2$.

2. **Težišče tetraedra** (piramide) je Leonardo rešil z analogijo težiščnic trikotnika. Njegova ideja je prikazana na sliki 7.4. Tako, kot se težiščnice trikotnika sekajo v težišču trikotnika, (bi) se (naj) hiper-težiščnice tetraedra sekajo(le) v težišču tetraedra[5].

3. **Kvadratura kroga**[6]. Pri tem problemu iščemo (stranico) kvadrat(a)[7], katerega ploščina je enaka ploščini danega kroga

$$pl_{\bigcirc} = \pi r^2,\ pl_{\square} = a^2 \iff a = \sqrt{\pi} \cdot r$$

[5]Danes vemo, da Leonardovo razmišljanje ni bilo pravilno.
[6]Izraz kvadratura kroga je še danes sinonim za nerešen oz. nerešljiv problem
[7]V osnovi je problem spet konstrukcijski, kar pomeni, da je treba stranico kvadrata konstruirati s šestilom in ravnilom.

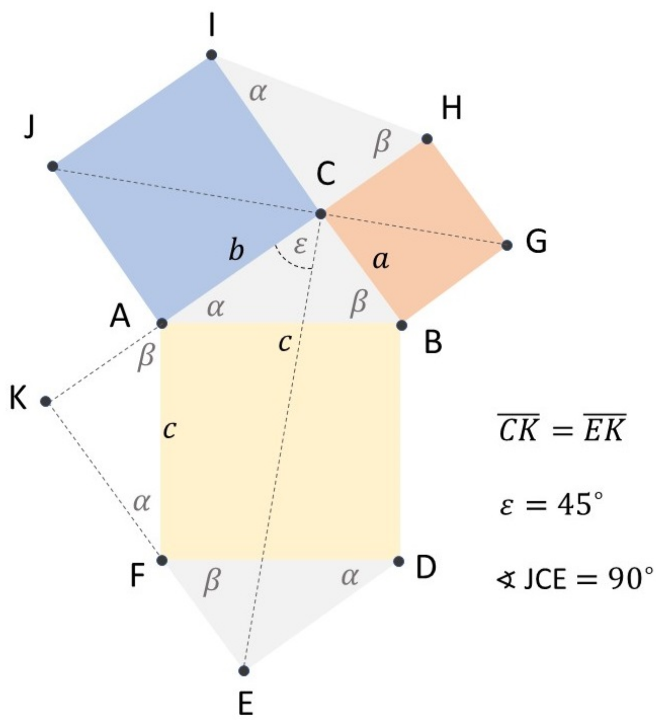


Slika 7.4: Leonardova ideja za težišče tetraedra. Leonardo je za številne probleme domneval, da se dajo rešiti z uporabo analogije: s prehodom iz 2D v 3D.

Seveda Leonardo problema ni rešil, uspel pa je izračunati boljši približek[8] števila π kot $\frac{22}{7}$, ki je bil takrat v splošni rabi.

4. **Leonardov dokaz Pitagorovega izreka** temelji na osnovi skladnosti štirikotnikov $CAFE$ in $JABG$. Če štirikotnik $CAFE$ zarotiramo za 90° v pozitivni smeri okoli točke A, dobimo štirikotnik $JABG$. Posledično sta ploščini štirikotnikov $CAFE$ in $JABG$ enaki. Kot vidimo iz spodnje slike, sta daljici $\overline{JCG}$ in $\overline{CE}$ pravokotni, saj je $\varepsilon = 45^\circ$. Ostalo je razvidno iz slike 7.5. Za podrobnosti klikni tukaj.

[8] Leonardo je krogu včrtal pravilni 96-kotnik in dobil približek $\pi \approx 3.142$.



Slika 7.5: Leonardov dokaz Pitagorovega izreka. Leonardov dokaz je na povezavi na 16. mestu med več kot 100 dokazi.

7.3 Dokaz Leonardovega izreka

V prejšnjem poglavju smo dokazali leme 10, 12, 13, in 14, ki nam o končnih vzorcih in končnih grupah dajo dovolj informacij, da lahko Leonardov izrek 4 dokažemo na dovolj eleganten način, kot se spodobi za konec učbenika.

Dokaz. Končna grupa ne more vsebovati translacije, saj vemo, da ena translacija generira neskončno translacij.

Po lemi 10 končna grupa ne vsebuje drsnih zrcaljenj, zato lahko vsebuje samo rotacije ali zrcaljenja. Če so v končni grupi Σ samo rotacije, je po lemi 13 končna grupa Σ enaka ciklični grupi C_n za nek $n \in \mathbb{N}$. Če končna grupa vsebuje samo eno zrcaljenje, po lemi 14 vsebuje še eno (trivialno) rotacijo (za 360°) in gre za diedrsko grupo D_1. Tudi, če končna grupa vsebuje n zrcaljenj ($n > 1$) gre po lemi 14 za diedrsko grupo D_n.

Lemi 11 in 12 zagotavljata, da imajo vse rotacije in vsa zrcaljenja skupno središče (brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je središče rotacij in morebitnih zrcaljenj v koordinatnem izhodišču).

Lema 13 zagotavlja, da C_n in D_n vsebujeta rotacije za kote, ki so enakomerno porazdeljeni

$$0^\circ,\ \frac{360^\circ}{n},\ \frac{2\cdot 360^\circ}{n},\ \frac{3\cdot 360^\circ}{n},\ \ldots,\ \frac{(n-1)\cdot 360^\circ}{n}.$$

Tudi zrcala so enakomerno porazdeljena, sicer bi morali obstajati dve zrcalni premici, ki se sekata pod kotom, ki je manjši od $\frac{180^\circ}{n}$, kar bi porodilo rotacijo za kót, ki je manjši od $\frac{360^\circ}{n}$. To pa bi bilo v protislovju s predpostavko (da je $\frac{360^\circ}{n}$ najmanjši kot rotacije). Torej imamo n enakomerno porazdeljenih rotacij in n enakomerno porazdeljenih zrcaljenj, kar pomeni, da gre za diedrsko grupo D_n. S tem je dokaz zaključen. ■

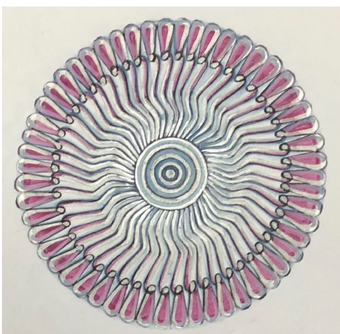
7.4 Uporabni končni vzorci

V nadaljevanju sledijo slike končnih vzorcev, ki so jih narisali študenti prvega letnika generacije 2020/21. Sledijo nekatere avtorske fotografije s potovanj oziroma konferenc.

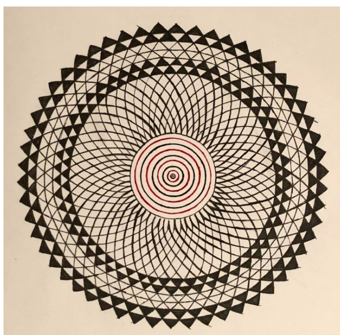
(a) Nika Drev.

(b) Ajda Detiček

Slika 7.6: Končna vzorca.

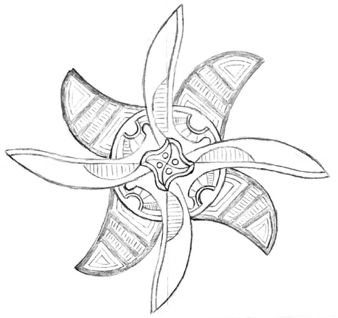


(a) Ivana Kurnjicki.

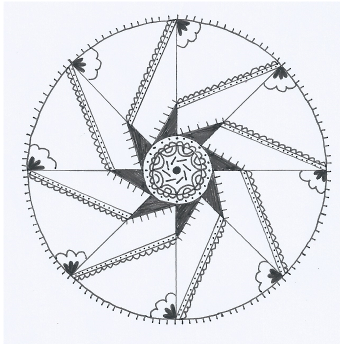


(b) Ivana Kurnjicki

Slika 7.7: Končna vzorca.

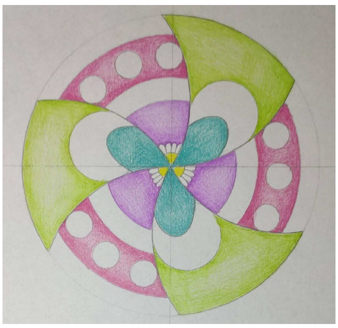


(a) Filip Zelenjak.

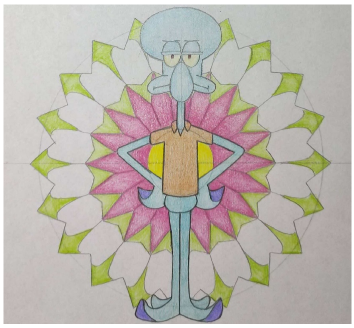


(b) Tjaša Krivec.

Slika 7.8: Končna vzorca.

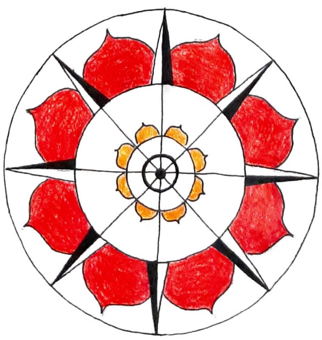


(a) Ela Valenko.



(b) Ela Valenko.

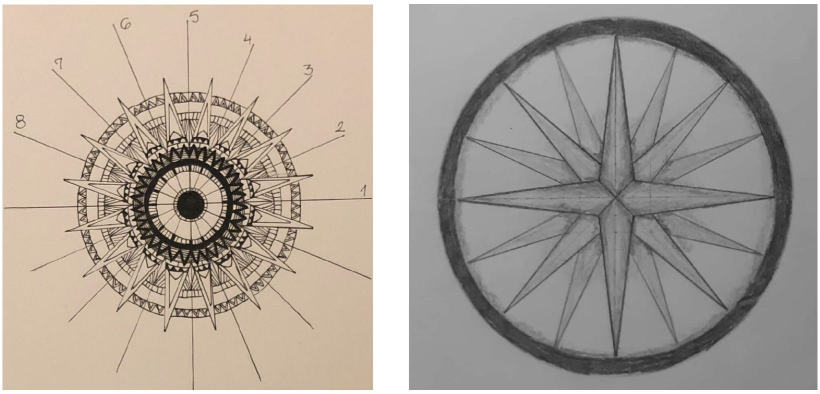
Slika 7.9: Končna vzorca.



(a) Neja Jurkovič.

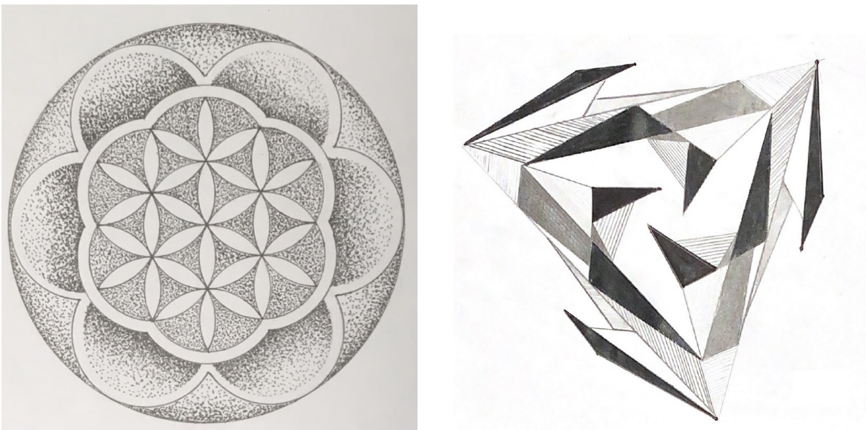
(b) Lucija Horvat.

Slika 7.10: Končna vzorca.



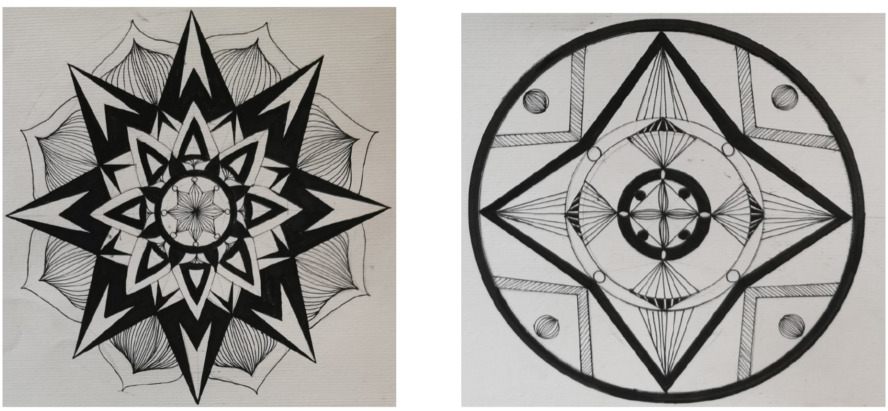
(a) Anđela Ćirović. (b) Marta Trstenjak.

Slika 7.11: Končna vzorca.



(a) Niko Sovič. (b) Sara Divjak.

Slika 7.12: Končna vzorca.



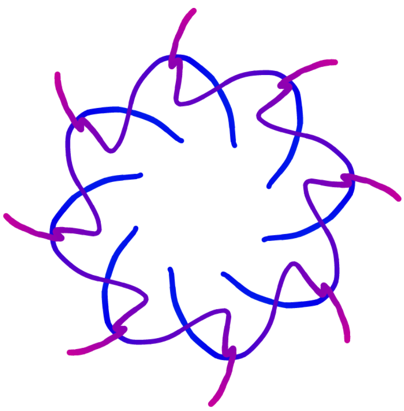
(a) Urša Rijavec. (b) Urša Rijavec.

Slika 7.13: Končna vzorca.

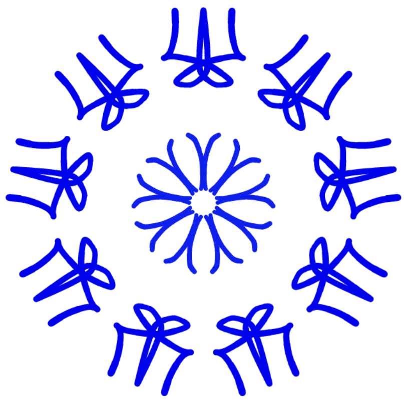
(a) Nika Horvat.

(b) Lara Ručigaj.

Slika 7.14: Končna vzorca.

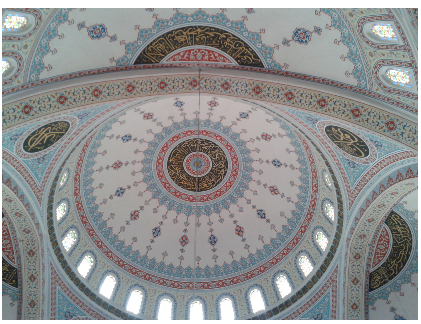


(a) Vzorec C_8.



(b) Vzorec D_9.

Slika 7.15: Končna vzorca narejena v aplikaciji Kaleido Magic.



(a) Mošeja Manavgat.

(b) Mestna Hiša Göteborg.

Slika 7.16: Končna vzorca.

(a) London Eye. (b) Muzej Victoria in Albert, London.

Slika 7.17: Končna vzorca.

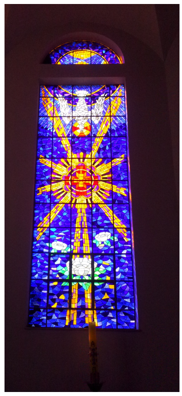
(a) Muzej Victoria in Albert, London. (b) Muzej Victoria in Albert, London.

Slika 7.18: Končna vzorca.

(a) Westminister Abbey, London. (b) Notre Dame, Pariz.

Slika 7.19: Končna vzorca.

(a) Katedrala São Carlos, Brazilija.



(b) Katedrala São Carlos, Brazilija.

Slika 7.20: Končna vzorca.

(a) Alhambra, Španija.

(b) Alhambra, Španija.

Slika 7.21: Končna vzorca.

(a) Heineken Muzej, Amsterdam.

(b) Hollywoodska aleja slavnih (Hollywood Walk of Fame), Los Angeles.

Slika 7.22: Končna vzorca.

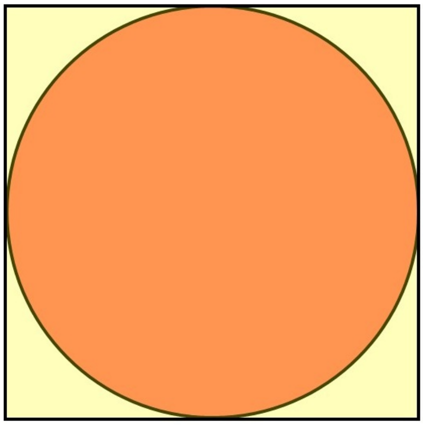
Slika 7.23: Rabat, Maroko (tržnica).

7.5 Naloge

Naloga 56 Stenska slika z višino okvirja 40 cm naj bo v razmerju zlatega reza. Izračunaj dolžino okvirja.

Glej rešitev 56

Naloga 57 Koliko odstotkov odpadnega materiala nastane, če kvadratu izrežemo (včrtani) krog (kot kaže slika 7.24)?



Slika 7.24: Kolikšen delež predstavlja z rumeno barvo označeni del kvadrata?

Glej rešitev 57

Naloga 58 Podobno kot je razmišljal Leonardo, poišči čim enostavnejši (a dober) približek za

$$\sqrt[3]{5}.$$

Oceni absolutno in relativno napako približka. Če z N označimo natančno vrednost in s P približek, je absolutna napaka enaka

$$a = |N - P|,$$

relativna napaka v odstotkih je enaka

$$r = 100 \cdot \left|\frac{N-P}{N}\right|.$$

Glej rešitev 58

Naloga 59 Uporaba Leonardovega izreka:
- Klasificiraj končna vzorca na sliki 7.6,
- Klasificiraj končna vzorca na sliki 7.7,
- Klasificiraj končna vzorca na sliki 7.8,
- Klasificiraj končna vzorca na sliki 7.9,
- Klasificiraj končna vzorca na sliki 7.10,
- Klasificiraj končna vzorca na sliki 7.11,
- Klasificiraj končna vzorca na sliki 7.12,
- Klasificiraj končna vzorca na sliki 7.13,
- Klasificiraj končna vzorca na sliki 7.14,
- Klasificiraj končna vzorca na sliki 7.15.

Glej rešitev 59

Naloga 60 Uporaba Leonardovega izreka:
- Analiziraj končne vzorce na sliki 7.16,
- Analiziraj končne vzorce na sliki 7.17,
- Analiziraj končne vzorce na sliki 7.18,
- Analiziraj končne vzorce na sliki 7.19,
- Analiziraj končne vzorce na sliki 7.20,
- Analiziraj končne vzorce na sliki 7.21.

Glej rešitev 60

Naloga 61 Klasificiraj oz. analiziraj končne vzorce na sliki 7.22.
Glej rešitev 61

8. Rešitve

8.1 Uvod

Rešitev 1

- Za vektor $\overrightarrow{OB} = \vec{r}_B$ na sliki 1.2 (a)

$$(3,2) = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$

se dolžina vektorja $(3,2)$ izračuna s Pitagorovim izrekom

$$\begin{aligned}\|(3,2)\| &= \sqrt{3^2+2^2}\\ &= \sqrt{13}\\ &\approx 3.61.\end{aligned}$$

- Normirani vekor je

$$(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}).$$

Nazaj na nalogo 1.

Rešitev 2 Za vektor $\overrightarrow{OB} = \vec{r}_B$ na sliki 1.2(b) je po kosinusovem izreku

$$d(O,B) = \overline{OB} = \sqrt{3^2+2^2-2\cdot 3\cdot \cos(\pi - \frac{\pi}{6})} \approx 4.837.$$

Nazaj na nalogo 2.

Rešitev 3 V formuli 1.8 upoštevaj $x_2 = \alpha$ in $y_2 = 0$.

Nazaj na nalogo 3.

Rešitev 4 .

- $5\vec{a} = (15, 10)$
- $5\vec{a} - 2\vec{b} = (15, 10) - (2, -6) = (13, 16)$

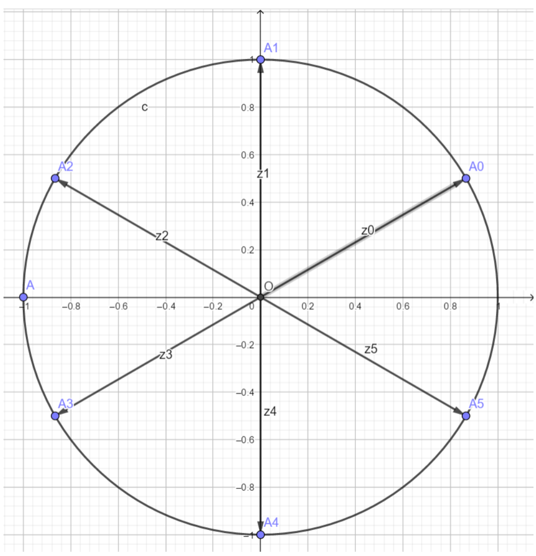
Nazaj na nalogo 4.

Rešitev 5 Formula 1.13 je zgolj obrat formule 1.12 $z^n = r^n e^{ni\varphi}$ (za korenjenje argument φ delimo z n ostalo sledi zaradi periodičnosti trigonometrijskih formul $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ in $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$).

Nazaj na nalogo 5.

Rešitev 6 Enačbo najprej preoblikujemo na $z^6 = -1 + 0i$, kar pomeni, da iščemo $\sqrt[6]{-1+0i}$. Po formuli (1.10) izračunamo $r = 1$ in $\varphi = \pi$, nakar uporabimo formulo (1.13):

$$\begin{aligned}
k &= 0 & \rightarrow \quad \sqrt[6]{-1} &= \sqrt[6]{1} e^{i\frac{\pi}{6}} & &= \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2} i \\
k &= 1 & \rightarrow \quad \sqrt[6]{-1} &= \sqrt[6]{1} e^{i\frac{\pi+2\pi}{6}} & &= 0 + i \\
k &= 2 & \rightarrow \quad \sqrt[6]{-1} &= \sqrt[6]{1} e^{i\frac{\pi+4\pi}{6}} & &= -\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2} i \\
k &= 3 & \rightarrow \quad \sqrt[6]{-1} &= \sqrt[6]{1} e^{i\frac{\pi+6\pi}{6}} & &= -\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2} i \\
k &= 4 & \rightarrow \quad \sqrt[6]{-1} &= \sqrt[6]{1} e^{i\frac{\pi+8\pi}{6}} & &= 0 - i \\
k &= 5 & \rightarrow \quad \sqrt[6]{-1} &= \sqrt[6]{1} e^{i\frac{\pi+10\pi}{6}} & &= \tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2} i.
\end{aligned}$$



Slika 8.1: Rešitve enačbe $z^6 + 1 = 0$ izračunamo po formuli 1.13.

Nazaj na nalogo 6.

8.2 Simetrije

Rešitev 7 Vzorec na sliki 2.1(b) ima dve zrcaljenji glede na obe diagonali kvadratne celice in rotacijo za 180° okoli središča kvadratne celice.

Nazaj na nalogo 7.

Rešitev 8 Vzorec na sliki 2.2(b) ima rotacijo za 90° okoli središča vzorca.

Nazaj na nalogo 8.

Rešitev 9 Linearna preslikava $(x,y) \mapsto (x+2y, -x+4y)$ ni izometrija ravnine. Očitno je $\|\overline{OT}\| = 1$, ker je $O' = (0,0)$ in $T' = (0+2, -0+4)$, je $\|\overline{O'T'}\| = \sqrt{(2-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{20}$. Ker $1 = \|\overline{OT}\| \neq \|\overline{O'T'}\| = \sqrt{20}$ preslikava ni izometrija ravnine

Nazaj na nalogo 9.

Rešitev 10 Funkcija $f(x) = x^2 - 4x + 1$ ni soda funkcija:

$$6 = 1+4+1 = \boxed{f(-1) \neq f(1)} = 1-4+1 = -2.$$

Nazaj na nalogo 10.

Rešitev 11 Premica $x = 2$ predstavlja zrcalno simetrijsko os množice Γ_f.

Nazaj na nalogo 11.

Rešitev 12 Gre za rotacijo. Konstrukcija rešitve je razvidna s slike 8.2. Čeprav je rešitev prikazana samo za eno daljico, lahko hitro preverimo, da bi za poljubno drugo daljico (namišljenega trikotnika) dobili isto središče S in isti kót φ.

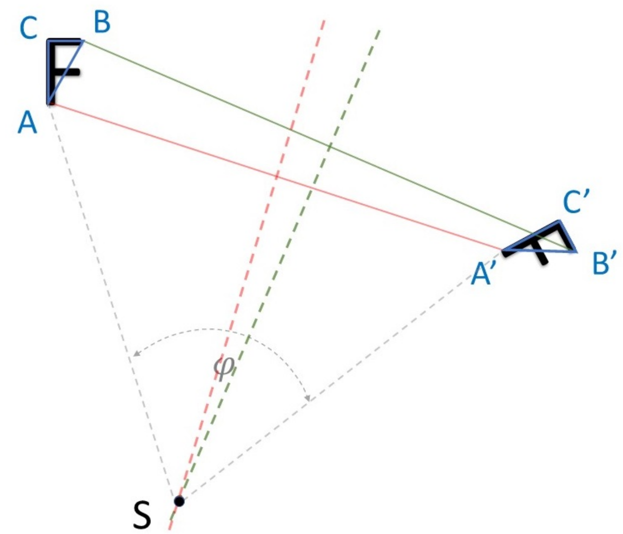
Nazaj na nalogo 12.

Rešitev 13 Gre za drsno zrcaljenje (trikotnik ΔABC ima pozitivno orientacijo, njegova slika ima negativno orientacijo). Konstrukcija rešitve je razvidna s slike 8.3.

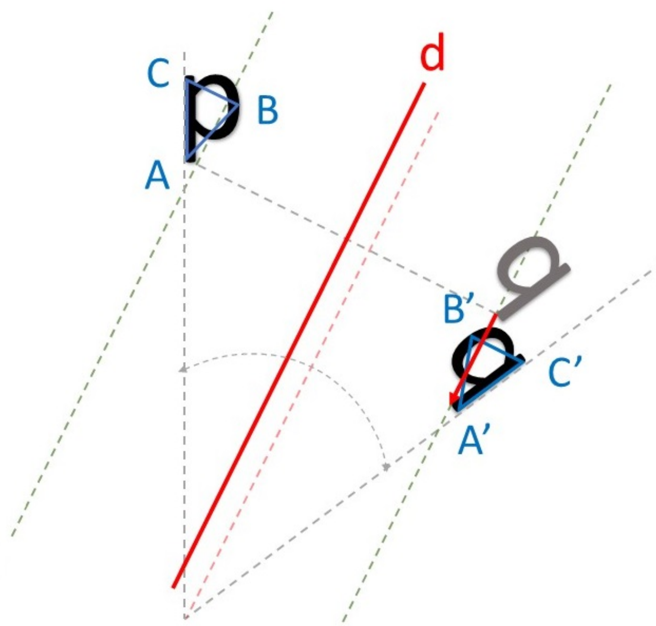
Nazaj na nalogo 13.

Rešitev 14 Zrcalna slika trikotnika $\Delta A'B'C'$ je $A'(1,0)$, $B'(3,0)$ in $C'(3,-1)$. Vzporedni premik nam da $\Delta A''B''C''$, kjer je $A''(0,1)$, $B''(2,1)$ in $C''(2,0)$. Po drugi strani pa zrcaljenje preko premice $y = 1+x$ direktno preslika točke $A(0,1)$, $B(0,3)$ in $C(-1,3)$ v točke $A''(0,1)$, $B''(2,1)$ in $C''(2,0)$. Točka A je očitno fiksna točka te izometrije.

Nazaj na nalogo 14.



Slika 8.2: Gre za rotacijo. Središče in kót rotacije sta označena s S in φ.



Slika 8.3: Gre za drsno zrcaljenje. Zrcalna os in vektor drsnega zrcaljenja sta označena z d oz. $\vec{d}$.

8.3 Od vektorjev k matrikam

Rešitev 15 Uporabimo formulo 1.4

a) To je kót med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$

$$\cos\varphi = \frac{0\cdot 1+(-1)\cdot 2+2\cdot 3}{\sqrt{5}\sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{14}};$$

b) $\overrightarrow{AB} = (1,2,3)-(0,-1,2) = (1,3,1) \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{1^2+3^2+1^2} = \sqrt{11}6;$

c) ker je $\|\vec{a}\| = \sqrt{0+1+4} = \sqrt{5}$ in $\left\|\vec{b}\right\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$ in $\cos\varphi = \frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{14}}$, po Kosinusovem izreku dobimo

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \sqrt{5}^2+\sqrt{14}^2-2\sqrt{5}\sqrt{14}\cos\varphi\\ &= \sqrt{5}^2+\sqrt{14}^2-2\sqrt{5}\sqrt{14}\cdot\frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{14}}\\ &= \sqrt{5}^2+\sqrt{14}^2-8\\ &= 11.\end{aligned}$$

Nazaj na nalogo 15.

Rešitev 16 Ker Z preslika $(1,0)$ v $(-1,0)$ in $(0,1)$ v $(0,1)$, je (po stolpcih) $Z = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

Zato je

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix}-1 & 2\\ -3 & 7\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}-7 & 2\\ -3 & 1\end{bmatrix}.$$

Nazaj na nalogo 16.

Rešitev 17 Naj bo $M = \begin{bmatrix}x & y\\ u & v\end{bmatrix}$. Tedaj iz (vektorskih) enačb

$$\begin{bmatrix}x & y\\ u & v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}x & y\\ u & v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}$$

sledi $4\times 4-$sistem, ki razpade na dva $2\times 2-$sistema:

$$\begin{matrix}x+y=2\\ x-2y=0\end{matrix} \qquad \begin{matrix}u+v=3\\ u-2v=2\end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix}x=\frac{4}{3}\\ y=\frac{2}{3}\end{matrix} \text{ ter } \begin{matrix}u=\frac{8}{3}\\ v=\frac{1}{3}\end{matrix}$$

Nazaj na nalogo 17.

Rešitev 18 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$

Nazaj na nalogo 18.

Rešitev 19

$$R_\varphi^{-1} = \frac{1}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{bmatrix} = R_{-\varphi}$$

Nazaj na nalogo 19.

Rešitev 20 Izračunamo

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{bmatrix}$$

in upoštevamo (3.14).

Nazaj na nalogo 20.

Rešitev 21 V formuli (3.11) upoštevamo $a_{13} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0$, $a_{33} = 1$ in $a_{11} = a_{22} = \cos\varphi$, $a_{21} = -a_{12} = \sin\varphi$ in sledi

$$R_z^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

.

Nazaj na nalogo 21.

Rešitev 22 Izračunamo $AB = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ in $BA = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Nazaj na nalogo 22.

Rešitev 23 Račun poteka podobno, kot v primeru 27:

$$\varphi = \arctan k = \arcsin\frac{k}{\sqrt{1+k^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$$
$$\Rightarrow \quad \sin\varphi = \tfrac{k}{\sqrt{1+k^2}} \quad \text{in} \quad \cos\varphi = \tfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$$

je

$$R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right) & -\sin\left(\arcsin\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right) \\ \sin\left(\arcsin\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right) & \cos\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} & -\frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \\ \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \end{bmatrix}$$

in

$$Z_{y=\tan\frac{\varphi}{2}x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} & -\frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \\ \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} & \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \\ -\frac{k}{\sqrt{1+k^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-k^2}{1+k^2} & \frac{2k}{1+k^2} \\ \frac{2k}{1+k^2} & -\frac{1-k^2}{1+k^2} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2 - \left(\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2 & 2\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \\ 2\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\frac{k}{\sqrt{1+k^2}} & \left(\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos^2\varphi - \sin^2\varphi & 2\cos\varphi\sin\varphi \\ 2\cos\varphi\sin\varphi & -\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{bmatrix}$$

Nazaj na nalogo 23.

Rešitev 24 Produkt matrik je enak

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & -\cos 60^\circ \end{bmatrix},$$

kar pomeni, da gre za zrcaljenje preko premice $y = \tan 30^\circ x$. Rezultat nas ne preseneča, saj zrcaljenje obrača orientacijo v trikotniku, zato kompozitum ne more biti rotacija [1]

Nazaj na nalogo 24.

Rešitev 25 Rešitev predstavlja zrcaljenje preko premice z naklonom 15°:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

.

Nazaj na nalogo 25.

Rešitev 26 Rezultat sledi iz formule (3.15):

$$(x,y,z) \mapsto (1x+0y+0z, 0x+1y+0z, 0x+0y+0z)\,.$$

Nazaj na nalogo 26.

Rešitev 27 Vektor $(1,0,0)$ se prezrcali v vektor $(1,0,0)$, vektor $(0,1,0)$ se prezrcali v vektor $(0,1,0)$. Vektor $(0,0,1)$ pa se preslika v $(0,0,-1)$. Zato so stoplci matrike Z po vrsti enaki; glej (3.16)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

[1] Očitno je $(0,0)$ fiksna točka komozituma, saj je fiksna fočka obeh izometrij.

.

Nazaj na nalogo 27.

Rešitev 28 Za določitev $3 \times 3-$matrike

$$P_1 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$$

potrebujemo slike treh (linearno neodvisnih) vektorjev. V ravnini Ω izberemo[2] dva nevzporedna vektorja $\vec{a} = (0,2,1)$ in $\vec{b} = (1,1,0)$. Ker njun vektorski produkt

$$\vec{a} \times \vec{b} = (-1,1,-2)$$

ni enak $(0,0,0)$, nista vzporedna. Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ se prezrcalita vase, vektor $\vec{n} = (1,-1,2)$ pa se pravokotno projicira v $(0,0,0)$

$$\begin{aligned}
\vec{a} \mapsto \vec{a}: \quad &\Longrightarrow P_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 + x_3 \\ 2y_2 + y_3 \\ 2z_2 + z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\vec{b} \mapsto \vec{b}: \quad &\Longrightarrow P_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\vec{n} \mapsto \vec{0}: \quad &\Longrightarrow P_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ y_1 - y_2 + 2y_3 \\ z_1 - z_2 + 2z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Iz tega sledi $9 \times 9-$sistem, ki razpade na tri ločene $3 \times 3-$sisteme:

$$\text{Sistem 1:} \quad \begin{aligned} 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \text{Rešitev 1: } x_1 = \frac{5}{6}, x_2 = \frac{1}{6}, x_3 = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Sistem 2:} \quad \begin{aligned} 2y_2 + y_3 &= 2 \\ y_1 + y_2 &= 1 \\ y_1 - y_2 + 2y_3 &= 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \text{Rešitev 2: } y_1 = \frac{1}{6}, y_2 = \frac{5}{6}, y_3 = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Sistem 3:} \quad \begin{aligned} 2z_2 + z_3 &= 1 \\ z_1 + z_2 &= 0 \\ z_1 - z_2 + 2z_3 &= 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \text{Rešitev 3: } z_1 = -\frac{1}{3}, z_2 = \frac{1}{3}, z_3 = \frac{1}{3}.$$

Končna rešitev je

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

[2] Oba vektorja morata zadoščati enačbi ravnine Ω.

Nazaj na nalogo 28.

Rešitev 29 Razmisli, da je razlika glede na prejšnjo rešitev samo v tem, da se vektor $\vec{n}$ preslika v vektor $-\vec{n}$:

$$\vec{n} \mapsto -\vec{n}: \quad \Longrightarrow P_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ y_1 - y_2 + 2y_3 \\ z_1 - z_2 + 2z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Podobno, kot v prejšnji nalogi sledijo sistemi:

$$\text{Sistem 1:} \quad \begin{array}{l} 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{array} \quad \to \text{Rešitev 1: } x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{Sistem 2:} \quad \begin{array}{l} 2y_2 + y_3 = 2 \\ y_1 + y_2 = 1 \\ y_1 - y_2 + 2y_3 = 1 \end{array} \quad \to \text{Rešitev 2: } y_1 = \frac{1}{3}, y_2 = \frac{2}{3}, y_3 = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Sistem 3:} \quad \begin{array}{l} 2z_2 + z_3 = 1 \\ z_1 + z_2 = 0 \\ z_1 - z_2 + 2z_3 = -2 \end{array} \quad \to \text{Rešitev 3: } z_1 = -\frac{2}{3}, z_2 = \frac{2}{3}, z_3 = -\frac{1}{3}.$$

Torej

$$Z_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nazaj na nalogo 29.

8.4 Klasifikacija izometrij ravnine

Rešitev 30 Gre za translacijo za vektor $\vec{t}$, ki je pravokoten na obe zrcalni osi z_1 in z_2, dolžina vektorja $\vec{t}$ pa je enaka dvakratniku razdalje med premicama z_1 in z_2.

Nazaj na nalogo 30.

Rešitev 31 Translacijo T lahko vedno izberemo tako, da je $S_1 = (0,0)$. V tem primeru je $R_\varphi^{S_1} = R_\varphi$. Izračunamo vrednost kompozituma $R_\varphi \circ T$ pri poljubnem $\vec{x}$:

$$\left(R_\varphi \circ T\right)(\vec{x}) = R_\varphi\left(\vec{x}+\vec{t}\right) = R_\varphi\vec{x} + R_\varphi\vec{t}.$$

Po drugi strani je

$$R_\varphi^{S_2}(\vec{x}) = R_\varphi\left(\vec{x}-\vec{r}_{S_2}\right) + \vec{r}_{S_2} = R_\varphi\vec{x} - R_\varphi\vec{r}_{S_2} + \vec{r}_{S_2}.$$

Iz $\left(R_\varphi \circ T\right)(\vec{x}) = R_\varphi^{S_2}(\vec{x})$ za vsak $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ sledi

$$R_\varphi\vec{t} = -R_\varphi\vec{r}_{S_2} + \vec{r}_{S_2}$$

iz zgornje enačbe pa sledi[3]

$$\begin{aligned}\left(I-R_\varphi\right)\vec{r}_{S_2} &= R_\varphi\vec{t}\\ \vec{r}_{S_2} &= \left(I-R_\varphi\right)^{-1}R_\varphi\vec{t}.\end{aligned}$$

Nazaj na nalogo 31.

Rešitev 32 Vektor translacije označimo s $\vec{t} = (t_1, t_2)$. Enotski smerni vektor na premici $y = \tan\frac{\varphi}{2}\cdot x + n_1$ označimo z $\vec{e}_{\frac{\varphi}{2}} = \left(\cos\frac{\varphi}{2}, \sin\frac{\varphi}{2}\right)$.

Izračunajmo vrednost kompozituma $Z_{\frac{\varphi}{2}}^{n_1} \circ T$ pri poljubnem vektorju $\vec{x}$:

$$\left(Z_{\frac{\varphi}{2}}^{n_1} \circ T\right)(\vec{x}) = Z_{\frac{\varphi}{2}}\left(\left(\vec{x}+\vec{t}\right) - \vec{n}_1\right) + \vec{n}_1 = Z_{\frac{\varphi}{2}}\vec{x} + Z_{\frac{\varphi}{2}}\vec{t} - Z_{\frac{\varphi}{2}}\vec{n}_1 + \vec{n}_1.$$

Po drugi strani je

$$D_{\frac{\varphi}{2}}^{n_2,\vec{d}}(\vec{x}) = Z_{\frac{\varphi}{2}}\left(\vec{x}-\vec{n}_2\right) + \vec{n}_2 + \vec{d},$$

kjer je $\vec{d} = \alpha\vec{e}_{\frac{\varphi}{2}}$ in $\alpha = \mathrm{proj}_{\vec{e}_{\frac{\varphi}{2}}}\vec{t} = t_1\cos\frac{\varphi}{2} + t_2\sin\frac{\varphi}{2}$. Če naj bo $\left(Z_{\frac{\varphi}{2}}^{n_1} \circ T\right)(\vec{x}) = D_{\frac{\varphi}{2}}^{n_2,\vec{d}}(\vec{x})$ identiteta, sledi

$$\begin{aligned}&Z_{\frac{\varphi}{2}}\vec{x} + Z_{\frac{\varphi}{2}}\vec{t} - Z_{\frac{\varphi}{2}}\vec{n}_1 + \vec{n}_1 = Z_{\frac{\varphi}{2}}\left(\vec{x}-\vec{n}_2\right) + \vec{n}_2 + \vec{d}\\ &\cancel{Z_{\frac{\varphi}{2}}\vec{x}} + Z_{\frac{\varphi}{2}}\vec{t} - Z_{\frac{\varphi}{2}}\vec{n}_1 + \vec{n}_1 = \cancel{Z_{\frac{\varphi}{2}}\vec{x}} - Z_{\frac{\varphi}{2}}\vec{n}_2 + \vec{n}_2 + \alpha\vec{e}_{\frac{\varphi}{2}}\\ &Z_{\frac{\varphi}{2}}\vec{t} - Z_{\frac{\varphi}{2}}\vec{n}_1 + \vec{n}_1 - \alpha\vec{e}_{\frac{\varphi}{2}} = -Z_{\frac{\varphi}{2}}\vec{n}_2 + \vec{n}_2.\end{aligned}$$

[3] Razmisli, da $\left(I-R_\varphi\right)^{-1}$ obstaja, če je le $\det\left(I-R_\varphi\right) = 2 - 2\cos\varphi \neq 0$; torej za vsak kot $\varphi \neq 2k\pi$.

Označimo[4] $\vec{m} = Z_{\frac{\varphi}{2}}\vec{t} - Z_{\frac{\varphi}{2}}\vec{n}_1 + \vec{n}_1 - \alpha\vec{e}_{\frac{\varphi}{2}}$. Ker je za vsak φ determinanta $\det\left(I - Z_{\frac{\varphi}{2}}\right)$ enaka nič, predstavlja vektorska enačba

$$(m_1, m_2) = \vec{m} = -Z_{\frac{\varphi}{2}}\vec{n}_2 + \vec{n}_2 = (I - Z_{\frac{\varphi}{2}})\vec{n}_2$$

sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} m_1 &= -n_2 \sin\varphi \\ m_2 &= -n_2 \cos\varphi + n_2, \end{aligned}$$

ki se reducira na eno samo enačbo z (eno) neznanko n_2. Za pridobitev rešitve izberemo prvo enačbo

$$m_1 = -n_2 \sin\varphi \quad \Rightarrow \quad n_2 = -\frac{m_1}{\sin\varphi}.$$

Sam(a) preveri, da je prva komponenta vektorja $\vec{m}$ enaka

$$m_1 = t_1\cos\varphi + t_2\sin\varphi - n_1\sin\varphi - \left(t_1\cos\frac{\varphi}{2} + t_2\sin\frac{\varphi}{2}\right)\cos\frac{\varphi}{2},$$

kar pomeni, da je

$$n_2 = -\frac{t_1\cos\varphi + t_2\sin\varphi - n_1\sin\varphi - \left(t_1\cos\frac{\varphi}{2} + t_2\sin\frac{\varphi}{2}\right)\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\varphi}. \tag{8.1}$$

Torej gre za drsno zrcaljenje preko premice $y = \tan\frac{\varphi}{2}x + n_2$, vektor translacije pa je enak

$$\left(t_1\cos\frac{\varphi}{2} + t_2\sin\frac{\varphi}{2}\right)\left(\cos\frac{\varphi}{2}, \sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Nazaj na nalogo 32.

Rešitev 33 Izračunamo kot $\frac{\varphi}{2} = \arctan\frac{2}{5} \approx 21.801°$. Sledi $\varphi \approx 43.602°$. Ker je $(t_1, t_2) = (3, -4)$, je

$$\vec{d} = \left(t_1\cos\frac{\varphi}{2} + t_2\sin\frac{\varphi}{2}\right)\begin{bmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2069 \\ 0.48276 \end{bmatrix}.$$

Po formuli (8.1) izračunamo še

$$n_2 = \frac{t_1\cos\varphi + t_2\sin\varphi - n_1\sin\varphi - \left(t_1\cos\frac{\varphi}{2} + t_2\sin\frac{\varphi}{2}\right)\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\varphi} = -4.6.$$

Torej gre za drsno zrcaljenje preko premice $y = 4.6 + \frac{2}{5}x$. Vektor drsnega zrcala je enak $\vec{d} \approx (1.2069, 0.48276)$.

Nazaj na nalogo 33.

[4] Vektor $\vec{m}$ je natančno določen s $\vec{t}$, $\vec{e}_{\frac{\varphi}{2}}$ in $\vec{n}_1$.

8.5 O grupah

Rešitev 34 Grupo sestavljajo štiri zrcaljenja: Z_{0°, Z_{45°, Z_{90°, Z_{135° in štiri rotacije R_{90°, R_{180°, R_{270° in $R_{360^\circ} = R_{0^\circ} = I$.

Nazaj na nalogo 34.

Rešitev 35 Rotacije R_{90°, R_{180°, R_{270° in $R_{360^\circ} = R_{0^\circ} = I$ predstavljajo (ciklično) podgrupo reda 4. Ta podgrupa je generirana z R_{90°:

$$\mathscr{C}_4 = \langle R_{90^\circ} \rangle .$$

Vsako zrcaljenje skupaj z identiteto predstavlja (ciklično) podgrupo reda 2: $\{Z_{0^\circ}, I\}$,$\{Z_{45^\circ}, I\}$, $\{Z_{90^\circ}, I\}$, $\{Z_{135^\circ}, I\}$. Podgrupe reda 2 so generirane z (ustreznim) zrcaljenjem

$$\begin{aligned}
\langle Z_{0^\circ} \rangle &= \{Z_{0^\circ}, I\} , \\
\langle Z_{45^\circ} \rangle &= \{Z_{45^\circ}, I\} , \\
\langle Z_{90^\circ} \rangle &= \{Z_{90^\circ}, I\} , \\
\langle Z_{135^\circ} \rangle &= \{Z_{135^\circ}, I\} .
\end{aligned}$$

Nazaj na nalogo 35.

Rešitev 36 Zrcaljenje preko navpičnice in rotacija za 360° (identična preslikava).

Nazaj na nalogo 36.

Rešitev 37 Gre za ciklično grupo, zato vsebuje samo trivialni podgrupi $\{z_1\}$ in Z_6.

Nazaj na nalogo 37.

Rešitev 38 Dokažimo s protislovjem. Recimo, da obstaja $e \in G$, ki je enota grupe

$$e * g = g * e = g, \quad \forall g \in G, \tag{8.2}$$

poleg tega pa obstaja še (od e različen element) $e' \in G$, ki je tudi enota grupe G

$$e' * g = g * e' = g, \quad \forall g \in G. \tag{8.3}$$

Če v (8.2) za g vstavimo e', sledi $e' * e = e'$. Če v (8.3) za g vstavimo e, sledi $e' * e = e$. Iz tega sledi

$$\begin{aligned}
e' * e &= e' \\
e' * e &= e \\
&\Downarrow \\
e' &= e.
\end{aligned}$$

Nazaj na nalogo 38.

Rešitev 39 Dokazati moramo, da za poljubna elementa g_1 in g_2 grupe G velja

$$g_1 * g_2 = g_2 * g_1.$$

Ker je G ciklična, velja $G = \langle g \rangle$, kar pomeni, da sta oba elementa g_1 in g_2 potenci elementa g

$$g_1 = \underbrace{g * g * \cdots * g}_{m-\text{krat}} = g^m \quad \text{in} \quad g_2 = \underbrace{g * g * \cdots * g}_{n-\text{krat}} = g^n.$$

Zaradi asociativnosti potem velja

$$g_1 * g_2 = g^m * g^n = g^{m+n} = g^{n+m} = g^n * g^m = g_2 * g_1.$$

Nazaj na nalogo 39.

Rešitev 40 Preveriti je potrebno, da množica Π_4 zadošča vsem lastnostim definicije grupe. Enota je npr $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Inverz od npr. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ je $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, itd.

Nazaj na nalogo 40.

Rešitev 41 Je razvidna iz slike 5.1.

Nazaj na nalogo 41.

Rešitev 42 Je razvidna iz slike 5.1.

Nazaj na nalogo 42.

Rešitev 43 Je razvidna iz slike 5.1.

Nazaj na nalogo 43.

Rešitev 44 Ne. Tak primer je permutacija

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nazaj na nalogo 44.

8.6 Končni vzorci

Rešitev 45 Grupa C_1 vsebuje samo trivialno simetrijo $I = R_{0^\circ} = R_{360^\circ}$. Cayleyeva tabela za C_1 je

·	I
I	I

Grupa C_2 vsebuje rotacijo $R_{180^\circ} = R$ ter $R^2 = R_{360^\circ} = I$. Cayleyeva tabela za C_2 je

·	I	R
I	I	R
R	R	I

Grupi D_1 in D_2 poleg rotacije $R_{180^\circ} = R$ vsebujeta še eno oz. dve (med seboj pravokotni) zrcaljenji Z in $Z^\perp$.

Cayleyeva tabela za D_1 je

$\circ$	I	Z
I	I	Z
Z	Z	I

Cayleyeva tabela za D_2 je

$\circ$	I	R	Z	$Z^\perp$
I	I	R	Z	$Z^\perp$
R	R	I	$Z^\perp$	Z
Z	Z	$Z^\perp$	I	R
$Z^\perp$	$Z^\perp$	Z	R	I

Nazaj na nalogo 45.

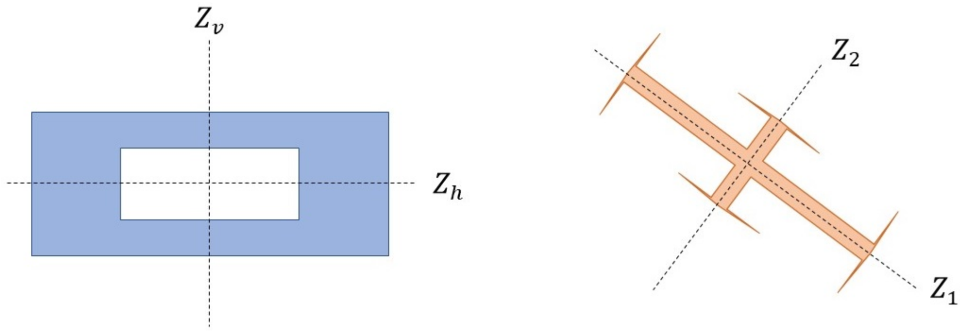
Rešitev 46 Izomorfni sta lahko samo C_{2n} in D_n za isto vrednost n, saj drugače moči pripadajočih množic simetrij nista enaki (in reda grup ne sovpadata). Za $n = 1$ vidimo, da je preslikava $\Phi : \{I,R\} \to \{I,Z\}$, ki je določena s predpisom $\Phi(R) = Z$, $\Phi(I) = I$, očitno izomorfizem grup C_2 in D_1.

Za $n > 1$ izomorfizem med C_{2n} in D_n ne more obstajati, ker grupa D_n za $n > 1$ vsebuje n elementov tipa $Z^2 = 1$, grupa C_{2n} pa ima le en tak element.

Nazaj na nalogo 46.

Rešitev 47 Glej sliko

Nazaj na nalogo 47.



Slika 8.4: Vzorci s simetrijsko grupo D_2 so podobni pravokotnikom.

Rešitev 48 Ena od rešitev je črka A. V slovenski abecedi jih je skupaj z A-jem 10. Poišči še ostalih 9 črk (upoštevaj tudi vodoravno zrcaljenje).

Nazaj na nalogo 48.

Rešitev 49 Primer je črka H. Poleg H-ja v slovenski abecedi obstajata še dve takšni črki - poišči ju sam(a).

Nazaj na nalogo 49.

Rešitev 50 Ena od rešitev je črka N. Poleg N-ja obstajata v slovenski abecedi še dve takšni črki.

Nazaj na nalogo 50.

Rešitev 51 X ima simetrijsko grupo D_2. Y in W imata simetrijsko grupo D_1.

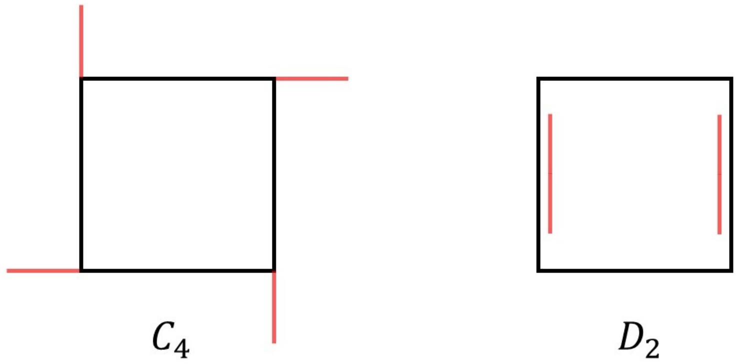
Nazaj na nalogo 51.

Rešitev 52 Dodamo daljico, katere nosilka ne sme potekati skozi težišče kvadrata. Podobno kot kaže slika 8.5.

Nazaj na nalogo 52.

Rešitev 53 Na levi in desni lahko dodamo dve simetrični daljici, katerih simetrali potekata skozi težišče kvadrata. Podobno kot kaže slika 8.5.

Nazaj na nalogo 53.

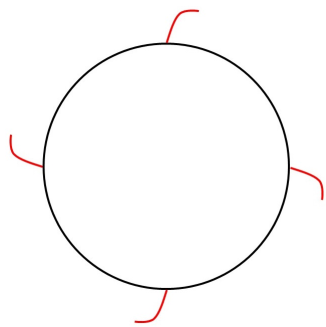


Slika 8.5: **Levo:** Primer spremembe kvadrata v končni vzorec C_4 **Desno:** Primer spremembe kvadrata v končni vzorec D_2.

Rešitev 54 Matematično se simbola ne razlikujeta: oba imata simetrijsko grupo D_1; torej eno zrcalno simetrijo in (trivialno) rotacijo (za 360°).

Nazaj na nalogo 54.

Rešitev 55 Eno od možnih rešitev, ko dodamo štiri krilca, kaže slika 8.6.



Slika 8.6: Ena od rešitev, kako krožnico spremenimo v vzorec s simetrijsko grupo C_4.

Nazaj na nalogo 55.

8.7 Leonardov izrek

Rešitev 56 Dolžina okvirja mora biti približno 65 cm, kot sledi iz spodnjega računa

$$1.618 \cdot 40 \approx 64.72.$$

Nazaj na nalogo 56.

Rešitev 57 Rumeno označena ploščina je enaka

$$a^2 - \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Iz razmerja

$$100 \cdot \frac{a^2 - \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2}{a^2} \approx 21.46\ \%$$

lahko razberemo, da odpadni del predstavlja cca. 21.5 % ploščine kvadrata.

Nazaj na nalogo 57.

Rešitev 58 Ulomek $\frac{17}{10}$ je dober približek za $\sqrt[3]{5}$, saj je

$$17^3 = 4913$$

in

$$5 \cdot 10^3 = 5000.$$

Opazimo, da se rezultata razlikujeta zgolj za 87[5].

Absolutna napaka približka $\frac{17}{10}$ je enaka

$$a = \sqrt[3]{5} - \frac{17}{10} \approx 0.0099.$$

Relativna napaka približka $\frac{17}{10}$ je enaka

$$r = \frac{\sqrt[3]{5} - \frac{17}{10}}{\sqrt[3]{5}} \approx 0.006 = 6\ ‰$$

Nazaj na nalogo 58.

[5] Razlika v odstotkih je približno 1.7%.

Rešitev 59 Za rešitev uporabimo Leonardov izrek.

Oba končna vzorca na sliki 7.6 imata simetrijsko grupo C_1. (Čeprav končnemu vzorcu na desni v okvirih umetniške svobode skorajda pripada simetrijska grupa D_1.)

Na sliki 7.7 sta prikazana vzorca s simetrijsko grupo C_{54} (levo) in D_{54} (desno).

Na sliki 7.8 sta prikazana vzorca s simetrijsko grupo C_4 (levo) in C_8 (desno).

Na sliki 7.9 sta prikazana vzorca s simetrijsko grupo C_3 (levo) in D_1 (desno).

Na sliki 7.10 sta prikazana vzorca s simetrijsko grupo C_8 (levo) in D_8 (desno).

Za ostale rešitve uporabimo Leonardov izrek.

Nazaj na nalogo 59.

Rešitev 60 Za rešitev uporabimo Leonardov izrek.

Nazaj na nalogo 60.

Rešitev 61 Za rešitev uporabimo Leonardov izrek.

Nazaj na nalogo 61.

Učitelj je dober, če ga učenec prekosi.

Leonardo da Vinci

Dodatki

Vektorski prostor

Množico V, katere elemente lahko med sabo seštevamo in množimo s skalarji iz nekega obsega, imenujemo *vektorski prostor*. Elemente vektorskega prostora imenujemo *vektorji*. Operacija seštevanja vektorjev je notranja dvočlena operacija nad množico V

$$+ : V \times V \to V.$$

Operacija množenja vektorjev z elementi α iz obsega $\mathbb{F}$ je tipa

$$\cdot : \mathbb{F} \times V \to V.$$

Natančneje je vektorski prostor definiran spodaj.

Definicija 26 Vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{F}$ je množica V skupaj z operacijama seštevanja vektorjev $+$ in množenja vektorjev s skalarji $\cdot$, za kateri velja:

(i) asociativnost seštevanja vektorjev: $\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3$, za vse $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in V$,

(ii) komutativnost seštevanja vektorjev: $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$, za vse $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$,

(iii) obstaja ničelni element za seštevanje: $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$, za vse $\vec{v} \in V$,

(iv) za vsak $\vec{v} \in V$ obstaja nasprotni element $(-\vec{v}) \in V$, tako da je $\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}$,

(v) za vsak $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ in $\vec{v} \in V$ velja $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$,

(vi) za vsak $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ in $\vec{v} \in V$ velja $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$,

(vii) za vsak $\alpha \in \mathbb{F}$ in vsak par $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ velja $\alpha(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \alpha\vec{v}_1 + \alpha\vec{v}_2$,

(viii) za vsak $\vec{v} \in V$ velja $1\vec{v} = \vec{v}$, kjer je 1 enota obsega $\mathbb{F}$: $1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha$ za vsak

$\alpha \in \mathbb{F}$.

Asociativnost množenja matrik

Na strani 38 smo na konkretnem primeru pokazali, da je množenje matrik asociativno. V spodnji lemi je dokazano, da za množenje poljubnih treh $2 \times 2-$matrik velja zakon asociativnosti (8.4). Omenimo, da asociativnost množenja velja za poljubne $n \times n-$matrike $(n > 2)$. Asociativnost množenja velja tudi za poljubne produkte matrik, katerih dimenzije so usklajene, kot je prikazano spodaj

$$\begin{array}{ccccc} A & & B & & C \\ & & & & \\ n \times m & \cdot & m \times p & \cdot & p \times q \end{array}$$

Lema 15 Množenje kvadratnih $2 \times 2-$matrik je asociativno:

$$(AB)C = A(BC) = ABC. \tag{8.4}$$

Dokaz. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}.$$

Najprej izračunajmo

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$
$$BC = \begin{bmatrix} b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22} \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo $L = (AB)C$

$$\begin{bmatrix} c_{11}a_{11}b_{11} + c_{11}a_{12}b_{21} + c_{21}a_{11}b_{12} + c_{21}a_{12}b_{22} & c_{12}a_{11}b_{11} + c_{12}a_{12}b_{21} + c_{22}a_{11}b_{12} + c_{22}a_{12}b_{22} \\ c_{11}a_{21}b_{11} + c_{11}a_{22}b_{21} + c_{21}a_{21}b_{12} + c_{21}a_{22}b_{22} & c_{12}a_{21}b_{11} + c_{12}a_{22}b_{21} + c_{22}a_{21}b_{12} + c_{22}a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

in $D = A(BC)$

$$\begin{bmatrix} c_{11}a_{11}b_{11} + c_{11}a_{12}b_{21} + c_{21}a_{11}b_{12} + c_{21}a_{12}b_{22} & c_{12}a_{11}b_{11} + c_{12}a_{12}b_{21} + c_{22}a_{11}b_{12} + c_{22}a_{12}b_{22} \\ c_{11}a_{21}b_{11} + c_{11}a_{22}b_{21} + c_{21}a_{21}b_{12} + c_{21}a_{22}b_{22} & c_{12}a_{21}b_{11} + c_{12}a_{22}b_{21} + c_{22}a_{21}b_{12} + c_{22}a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Takoj opazimo, da je $L = D$. ■

Tudi navadna mucka je (s stališča inženirstva) prava mojstrovina.

Leonardo da Vinci

Literatura

[1] B. Arcet: Hiperbolična geometrija in regularna tlakovanja diplomsko delo, Fakulteta za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru, Maribor 2017.

[2] S. Duvernoy: Leonardo and Theoretical Mathematics, Nexus Network Journal 10 (2008) 39-50.

[3] D. W. Farmer: Groups and Symmetry: A Guide to Discovering Mathematics, AMS 1996.

[4] M. Mencinger, S. Gaborovič, P. Šparl: Uvajalni tečaj iz matematike, Fakulteta za gradbeništvo Univerze v Mariboru, Maribor 2009.

[5] F. Oggier, A. M. Bruckstein: Groups and symmetries, Nanyang Technological University, Singapur 2014.

[6] H. Weyl: Symmetry, Princeton University Press, Princeton 1954.

SIMETRIJSKE GRUPE KONČNIH VZORCEV

MATEJ MENCINGER
Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo, Maribor, Slovenija
E-pošta: matej.mencinger@um.si

Povzetek Končni vzorci so najprej definirani intuitivno, kasneje pa še eksaktno (matematično). Simetrije končnih vzorcev so definirane s pomočjo izometrij ravnine. Obravnavani so štirje osnovni razredi izometrij ravnine: zrcaljenje, rotacija, translacija ter drsno zrcaljenje. V klasifikacijskem izreku je dokazano, da vsaka izometrija spada v enega od osnovnih štirih razredov. Pri obravnavi vektorjev in matrik se omejimo na ravnino in trirazsežni vektorski prostor. Dokazano je, da izometrijam ravnine s fiksno točko pripadajo natanko ortogonalne matrike. V poglavju o grupah so obravnavani pojmi: (pod)grupa, red grupe, izomorfizem grup ter generatorji grupe. Glavni rezultat je klasifikacija simetrijskih grup končnih vzorcev v ciklične ali diedrske, kar danes imenujemo Leonardov izrek. Podano je tudi nekaj informacij o zgodovinski dobi, v kateri je deloval Leonardo da Vinci, in nekaterih povezavah med njegovim delom in matematiko. Učbenik je namenjen študentom arhitekture in vsebuje številne primere, rešene naloge ter obsežno slikovno gradivo.

Ključne besede: izometrija ravnine, končni vzorec, simetrija, končna grupa, Leonardov izrek

Univerzitetna založba Univerze v Mariboru
DOI https://doi.org/10.18690/978-961-286-536-8
ISBN 978-961-286-536-8

Symmetry Groups of Finite Patterns

Matej Mencinger
University of Maribor, Faculty of Civil Engineering, Transportation Engineering and Architecture, Maribor, Slovenia
E-mail: matej.mencinger@um.si

Keywords: planar isometry, finite pattern, symmetry, finite group, Leonardo's theorem

Abstract Finite patterns are defined first intuitively and then also mathematically. Symmetries of finite patterns are defined based on planar isometries. Four basic types of planar isometries (mirror reflection, rotation, translation and glide reflection) are considered. In the classification theorem for planar isometries it is proven that every isometry coincides with one of the four basic planar isometries. Vectors and matrices are limited to two- and three-dimensional (vector) space. It is proven that every planar isometry with a fixed point is associated with an orthogonal matrix. The chapter on groups includes the information on (sub)groups, order of the group, isomorphism of groups and group generators. The main result is the classification of the symmetry groups of finite patterns into cyclic and dihedral, which is nowadays known as Leonardo's theorem. Finally, Leonardo's time and work is described. The textbook is written for students of the architecture and includes several examples, figures and solved exercises.

https://doi.org/10.18690/978-961-286-536-8 DOI
978-961-286-536-8 ISBN

University of Maribor Press

Univerza v Mariboru

Fakulteta za gradbeništvo,
prometno inženirstvo in arhitekturo