Univerzitetna založba
Univerze v Mariboru

JANKO MAROVT

OPCIJE, TERMINSKE POGODBE IN MODEL BINOMSKEGA DREVESA

SKRIPTA PRI PREDMETU
TEMELJI FINANČNEGA
INŽENIRINGA

Univerza v Mariboru

Fakulteta za naravoslovje
in matematiko

Opcije, terminske pogodbe in model binomskega drevesa

Skripta pri predmetu Temelji finančnega inženiringa

Avtor
Janko Marovt

Junij 2021

Naslov **Opcije, terminske pogodbe in model binomskega drevesa**
Title *Options, Forwards, Futures, and the Binomal Tree Model*

Podnaslov **Skripta pri predmetu Temelji finančnega inženiringa**
Subtitle *Material for the course Fundamentals of Financial Engineering*

Avtor Janko Marovt
Author (Univerza v Mariboru, Ekonomsko-poslovna fakulteta)

Recenzija Marko Jakovac
Review (Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko)

Miklavž Mastinšek
(Univerza v Mariboru, Ekonomsko-poslovna fakulteta)

Lektroriranje Aleša Marovt
Language editing

Tehnična urednika Janko Marovt
Technical editors (Univerza v Mariboru, Ekonomsko-poslovna fakulteta)

Jan Perša
(Univerza v Mariboru, Unverzitetna založba)

Oblikovanje ovitka Jan Perša
Cover designer (Univerza v Mariboru, Unverzitetna založba)

Grafike na ovitku Background Statistics Chart (CC0)
Cover graphics Avtor: MAKY_OREL s Pixabay.com

Grafične priloge Avtor
Graphic material

Založnik **Univerza v Mariboru**
Published by **Univerzitetna založba**
Slomškov trg 15, 2000 Maribor
Slovenija
https://press.um.si, zalozba@um.si

Izdajatelj **Univerza v Mariboru**
Co-published by **Fakulteta za naravoslovje in matematiko**
Koroška cesta 160, 2000 Maribor
Slovenija
https://www.fnm.um.si, fnm@um.si

Izdaja Prva izdaja
Edition

Izdano Maribor, junij 2021
Published at

Tisk Tiskarna Saje d.o.o.
Printed by Maribor, Slovenija

Naklada 50 zvodov
Numver of copies

Dostopno na https://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/561
Available at

```
CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Univerzitetna knjižnica Maribor


336.764.2:519.8(075.8)

MAROVT, Janko
    Opcije, terminske pogodbe in model binomskega
drevesa : skripta pri predmetu Temelji finančnega
inženiringa / avtor Janko Marovt. - 1. izd. - Maribor
: Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba, 2021

ISBN 978-961-286-472-9
doi: 10.18690/978-961-286-472-9
COBISS.SI-ID 63449347
```


ISBN 978-961-286-472-9 (mehka vezava)

DOI https://doi.org/10.18690/978-961-286-472-9

Cena 15,00 €
Price

Odgovorna oseba založnika prof. dr. Zdravko Kačič,
For publisher rektor Univerze v Mariboru

Kazalo

“Vse težave človeštva izvirajo iz človekove nezmožnosti, da bi v tišini sam sedel v sobi.”

-Blaise Pascal (1623–1662), Misli

Poglavje 1

Uvodne predpostavke in definicije

Prihodnja vrednost vsakega premoženja je do določene mere nepredvidljiva. Pretekle finančne krize so pokazale, da tudi depoziti v banki ne predstavljajo povsem varne investicije. Kljub temu investirana sredstva pogosto delimo v dve skupini:

- *netvegana sredstva* (ang. *risk-free assets*),
- *tvegana sredstva* (ang. *risky assets*).

Med netvegana sredstva uvrščamo tista sredstva, za katera obstaja zanemarljivo majhno tveganje, da ne prinašajo pričakovanih donosov, hkrati pa poznamo njihovo prihodnjo vrednost. Osnovna primera sta bančni depozit in (državna) obveznica, tipični predstavnik tveganih sredstev pa je delnica.

Zaradi enostavnosti bomo v nadaljevanju enoto netveganih sredstev imenovali obveznica, enoto tveganih sredstev pa delnica. S $S(n)$ bomo označili ceno delnice[1] v času $t = n$, z $A(n)$ pa ceno obveznice v času $t = n$. Predpostavili bomo, da čas teče na diskretni način in je običajno merjen v letih, mesecih, dnevih, minutah ali v primeru mrzličnega trgovanja celo v sekundah, torej $n = 0, 1, 2 \ldots$ let, mesecev itn.

Privzemimo, da investitor trguje z m delnicami in da ima v času $t = n$, kjer je $n = 0, 1, 2 \ldots$, x_1 delnic s ceno $S_1(n)$, x_2 delnic s ceno $S_2(n)$, …, x_m delnic s ceno $S_m(n)$ ter y obveznic s ceno $A(n)$. Skupna vrednost investitorjevih sredstev v času $t = n$ je

$$V(n) = \sum_{j=1}^{m} x_j S_j(n) + yA(n).$$

[1]Oznaka $S = S(n)$ za ceno delnice izhaja iz angleške besedne zveze *stock price*.

Matematični modeli, ki simulirajo dogajanje na trgu, temeljijo – kot vsi matematični modeli – na določenih predpostavkah. Predpostavke, ki jih bomo navedli v uvodnem poglavju, bomo upoštevali tudi v poglavjih, ki sledijo.

Predpostavka 1.1. Prihodnje cene delnic $S_1(n)$, $S_2(n)$, ..., $S_m(n)$ so za vsak $n = 1, 2, 3 \ldots$ slučajne spremenljivke. Prihodnje cene obveznic $A(n)$, $n = 1, 2, 3$ ..., so znane vrednosti.

Predpostavka 1.2. Vse cene delnic in obveznic so strogo pozitivne: $S(n) > 0$ in $A(n) > 0$ za vsak $n = 0, 1, 2 \ldots$

Opomba 1.1. *Matematično lahko $S(n)$ predstavimo kot preslikavo $S(n) : \Omega \to (0, \infty)$, kjer je Ω prostor izidov, ki vsebuje vse možne "scenarije" $\omega \in \Omega$ sprememb cene delnice.*

Opomba 1.2. *Nekateri avtorji privzemajo, da so cene delnic in obveznic nenegativne: $S(n) \geq 0$ in $A(n) \geq 0$ za vsak $n = 0, 1, 2 \ldots$*

Predpostavka 1.3. Investitor lahko kadarkoli kupi, proda ali obdrži poljubno število x_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, delnic in poljubno število y obveznic. V splošnem so x_1, x_2, ..., x_m in y poljubna realna števila.

Predpostavka 1.4. Za vsak $n = 1, 2, 3 \ldots$ so prihodnje cene delnic $S_1(n)$, $S_2(n)$, ..., $S_m(n)$ slučajne spremenljivke, ki lahko zavzamejo le končno mnogo vrednosti.

Predpostavka 1.5. Premoženje investitorja mora biti na vsakem časovnem koraku nenegativno,

$$V(n) \geq 0 \quad \text{za vsak } n = 0, 1, 2 \ \ldots$$

Predpostavka 1.3 je pogosto (na primer na srednje velikih ali manjših borzah) zgolj aproksimacija realnih dogajanj. S predpostavko 1.3 smo namreč na eni strani privzeli, da je trg (povsem) likviden, na drugi strani pa, da število delnic ali obveznic, ki jih ima v lasti investitor, ni nujno celo nenegativno število. Če je $y = 3,4$ in $x_k = 20,5$, potem ima investitor v lasti $3,4$ obveznic in $20,5$ delnic (s ceno $S_k(n)$). Če je $y < 0$, potem pravimo, da je investitor *zavzel kratko pozicijo* (ang. *short position*) na netveganem (denarnem) trgu – investitor si je izposodil denar, tako da je napisal, izdal in prodal y obveznic (ali pa si je izposodil y enot denarja na primer v banki). Tudi vrednosti x_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, so lahko negativne. Če je $x_k < 0$, potem pravimo, da je investitor delnico (oziroma ustrezno število delnic) s ceno $S_k(n)$ *kratko prodal* oziroma da je v tej delnici zavzel kratko pozicijo. *Kratka prodaja delnice* ali *prodaja na prazno* (ang. *short selling*) pomeni, da si je investitor delnico izposodil (običajno od borznega posrednika ali banke), jo na trgu prodal in izkupiček od prodaje uporabil za novo investicijo. Le-ta je lahko tvegana (na primer nakup neke druge delnice) ali netvegana (na primer nakup obveznice). Pri tem lastnik delnice obdrži vse pravice, ki izhajajo iz lastništva delnice – če se za delnico v obdobju, ko investitor v delnici zavzema kratko pozicijo, izplačajo dividende, mora investitor poskrbeti, da jih prejme lastnik. Lastnik lahko delnico tudi kadarkoli proda, zato mora imeti investitor vedno zadostna sredstva, da *zapre kratko pozicijo* v delnici, kar pomeni, da na trgu kupi delnico in jo vrne lastniku.

Opomba 1.3. *Na veliko nastajajočih trgih (ang. emerging markets) kratka prodaja delnic ni dovoljena. Med svetovno finančno krizo 2007 in 2008 so v Avstraliji, Kanadi in v več evropskih državah prepovedali kratko prodajo delnic. Od takrat so v nekaterih državah to prepoved odpravili, na splošno pa imajo Združene države Amerike bolj liberalne zakone, vezane na prodajo na kratko, kot večina sveta. V Sloveniji je (trenutno oziroma leta 2020) kratka prodaja delnic dovoljena, a le pod določenimi pogoji.*

1.1 Načelo nearbitražnosti

K predpostavkam 1.1–1.5 bomo v tem podpoglavju dodali še šesto, temeljno predpostavko, ki jo bomo imenovali *načelo nearbitražnosti* in po kateri (grobo rečeno) trg ne dovoljuje dobičkov brez tveganja izgube.

Primer 1. *Predpostavimo, da je trgovec A iz New Yorka dal ponudbo, po kateri bo čez eno leto pripravljen kupiti britanske funte po tečaju* $1,58$ *dolarja za en funt. Denimo, da je trgovec B iz Londona takoj pripravljen kupiti ameriške dolarje po tečaju* $1,56$ *dolarja za funt. Predpostavimo še, da si lahko investitor dolarje izposodi po* $4,5$ % *letni efektivni obrestni meri in da lahko britanske funte investira v bančni depozit pri* 4 % *letni efektivni obrestni meri. Izdelajmo strategijo, po kateri bi investitor čez eno leto imel dobiček brez tveganja izgube.*
Strategija:
1. Investitor si (takoj) izposodi (na primer) 10000 *dolarjev pri* $4,5$ % *letni efektivni obrestni meri in jih s pomočjo trgovca B pretvori v*

$$\frac{10000}{1,56} \doteq 6410,26$$

funtov.
2. Znesek $6410,26$ £ *investira v bančni depozit pri* 4 % *letni efektivni obrestni meri. Ker znašajo letne obresti* $6410,26 \cdot 0,04 \doteq 256,41$ £*, naraste glavnica po enem letu obrestovanja na*

$$6410,26 + 256,41 = 6666,67 \text{ £}.$$

3. Investitor (takoj) sklene pogodbo s trgovcem A, po kateri bo čez eno leto pretvoril 6666, 67 £ *v*

$$6666,67 \cdot 1,58 \doteq 10533,34 \text{ \$}.$$

4. Investitor po enem letu odplača kredit v znesku

$$10000 \cdot 1,045 = 10450 \text{ \$}.$$

Po enem letu tako investitorju ostane

$$10533,34 - 10450 = 83,34 \text{ \$}.$$

Dobljeni znesek imenujemo netvegani dobiček, saj pri zgornji strategiji investitor ni tvegal izgube lastnih sredstev. Pri določanju menjalnih tečajev je očitno naredil napako eden od trgovcev A oziroma B ali pa sta napako storila oba. Napako lahko izkoristijo investitorji. Povečano povpraševanje po storitvah trgovcev A in B bo sčasoma povzročilo, da bosta trgovca ustrezno prilagodila ponudbi ter tako izničila priložnosti za netvegane dobičke.

V nadaljevanju bomo zapisali formalno definicijo načela nearbitražnosti, še pred tem pa bomo za potrebe le-te vpeljali nekaj novih pojmov.

Definicija 1.4. *Portfelj je vektor* $p_n = [x_1(n), x_2(n), \ldots, x_m(n), y(n)]$*, ki ponazarja število delnic in obveznic, ki jih ima investitor v lasti med časoma* $n-1$ *in* n*. Zaporedju portfeljev* $\{p_n\}$*,* $n \geq 1$*, pravimo trgovska strategija (ang. investment (trading) strategy). Vrednost trgovske strategije (ali vrednost premoženja) v času* $n \geq 1$ *je enaka*

$$V(n) = \sum_{j=1}^{m} x_j(n) S_j(n) + y(n) A(n).$$

V času $n = 0$ *je začetna vrednost premoženja (ang. initial wealth) enaka*

$$V(0) = \sum_{j=1}^{m} x_j(1) S_j(0) + y(1) A(0).$$

Definicija 1.5. *Trgovska strategija je samovzdrževalna oziroma samofinancirajoča (ang. self-financing), če je vsak portfelj* p_{n+1}*, ki je konstruiran v času* $n \geq 1$ *in ki ga bo investitor obdržal do časa* $n+1$*, v celoti financiran z vrednostjo premoženja v času* n*. To pomeni, da je* $V(n) = \sum_{j=1}^{m} x_j(n+1) S_j(n) + y(n+1) A(n)$*.*

Trgovska strategija je torej samovzdrževalna, če je vrednost investitorjevega premoženja, tik preden le-ta preoblikuje portfelj (ang. *rebalancing portfolio*), enaka vrednosti tega premoženja takoj po preoblikovanju portfelja.

OPCIJE, TERMINSKE POGODBE IN MODEL BINOMSKEGA DREVESA: SKRIPTA PRI PREDMETU TEMELJI FINANČNEGA INŽENIRINGA

JANKO MAROVT
Univerza v Mariboru, Ekonomsko-poslovna fakulteta, Maribor, Slovenija.
E-pošta: janko.marovt@um.si

Povzetek Skripta »Opcije, terminske pogodbe in model binomskega drevesa« je namenjena slušateljem predmeta Temelji finančnega inženiringa, ki se izvaja na Fakulteti za naravoslovje in matematiko. V njej so predstavljeni temeljni pojmi finančnega inženiringa. Najprej so podane predpostavke, na katerih temelji večina matematičnih modelov, ki simulirajo dogajanja na finančnih trgih. Dokazi trditev in izrekov so utemeljeni na načelu nearbitražnosti. Predstavljeni so nekateri izvedeni finančni instrumenti. Tako so v osrednjem delu skripte najprej analizirane standandizirane in nestandardizirane terminske pogodbe. Sledi predstavitev modela binomskega drevesa in njegova uporaba pri vrednotenju evropskih in ameriških nakupnih ter prodajnih opcij. Skripta je opremljena s številnimi rešenimi zgledi in primeri.

Ključne besede: načelo nearbitražnosti, nestandardizirana terminska pogodba, standardizirana terminska pogodba, nakupna opcija, prodajna opcija, evropska opcija, ameriška opcija, binomski model, Cox-Ross-Rubinsteinova formula

Univerzitetna založba Univerze v Mariboru

DOI https://doi.org/10.18690/978-961-286-472-9

ISBN 978-961-286-472-9

Univerza v Mariboru

Fakulteta za naravoslovje
in matematiko

ISBN-13: 978-961-286-472-9

9 789612 864729

CENA: 15,00 €