

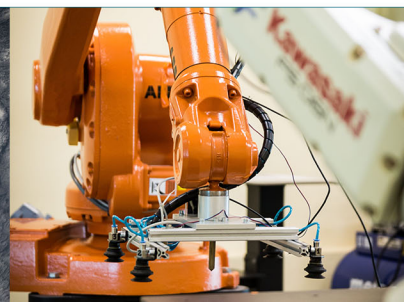
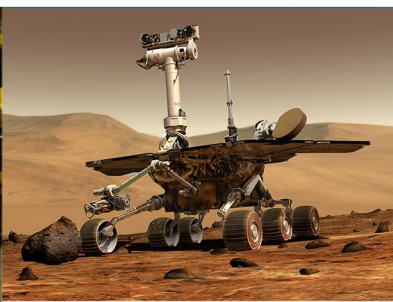


JOŽEF RITONJA

# Modeliranje, analiza, sinteza in realizacija regulacijskih sistemov



Univerzitetna založba  
Univerze v Mariboru







Univerza v Mariboru

---

Fakulteta za elektrotehniko,  
računalništvo in informatiko

# Modeliranje, analiza, sinteza in realizacija regulacijskih sistemov

Avtor

**Jožef Ritonja**

Avgust 2020

**Naslov** **Modeliranje, analiza, sinteza in realizacija regulacijskih sistemov**  
*Title* *Modeling, Analysis, Synthesis and Realization of Control Systems*

**Avtor** Jožef Ritonja  
*Author* (Univerza v Mariboru, Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko)

**Recenzija** Boštjan Polajžer  
*Review* (Univerza v Mariboru, Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko)

Maja Atanasijević-Kunc  
(Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko)

**Lektoriranje**  
*Language editing* Vlasta Praprotnik

**Tehnična urednika** Jožef Ritonja  
*Technical editors* (Univerza v Mariboru, Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko)

Jan Perša  
(Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba)

**Oblikovanje ovitka** Jan Perša  
*Cover designer* (Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba)

**Grafike na ovitku** Pixabay.com in Pikrepro.com (CC0)  
*Cover graphics*

**Grafične priloge** Avtor  
*Graphic material*

**Založnik** / *Published by*  
Univerza v Mariboru  
Univerzitetna založba  
Sloški trg 15, 2000 Maribor, Slovenija  
<https://press.um.si>, [zalozba@um.si](mailto:zalozba@um.si)

**Izdajatelj** / *Co-published by*  
Univerza v Mariboru  
Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko  
Koroška cesta 46, 2000 Maribor, Slovenija  
<https://www.feri.um.si>, [feri@um.si](mailto:feri@um.si)

**Izdaja** Prva izdaja  
*Edition*

**Izdano** Maribor, avgust 2020  
*Published at*

**Vrsta publikacije** E-knjiga  
*Publication type*

**Dostopno na** <https://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/496>  
*Available at*

CIP - Kataložni zapis o publikaciji  
Univerzitetna knjižnica Maribor

681.5.015

RITONJA, Jožef  
Modeliranje, analiza, sinteza in realizacija  
regulacijskih sistemov [Elektronski vir] / avtor  
Jožef Ritonja. - 1. izd. - E-knjiga. - Maribor :  
Univerzitetna založba Univerze, 2020

Način dostopa (URL):  
<https://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/496>

ISBN 978-961-286-372-2

doi: [doi.org/10.18690/978-961-286-372-2](https://doi.org/10.18690/978-961-286-372-2)

1. Drugi var. nasl.

COBISS.SI-ID 26677507



© **Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba**  
/ *University of Maribor, University Press*  
/

**Besedilo** / *Text*  
© Ritonja 2020

To delo je objavljeno pod licenco Creative Commons Priznanje avtorstva-Nekomercialno-Brez predelav 4.0 Mednarodna. / *This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International License.*

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

**ISBN** 978-961-286-372-2 (pdf)

**DOI** <https://doi.org/10.18690/978-961-286-372-2>

**Cena** Brezplačni izvod  
*Price*

**Odgovorna oseba založnika** prof. dr. Zdravko Kačič,  
*For publisher* rektor Univerze v Mariboru

# MODELIRANJE, ANALIZA, SINTEZA IN REALIZACIJA REGULACIJSKIH SISTEMOV

JOŽEF RITONJA

Univerza v Mariboru, Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko, Maribor, Slovenija. E-pošta: jozef.ritonja@um.si

**Povzetek** Učbenik obravnava vse faze v izdelavi regulacijskih sistemov. Najprej temeljito predstavi metode določitve matematičnih modelov. Pokazane so metode za analizo izpeljanih matematičnih modelov. Na osnovi pridobljenih znanj je narejena sinteza regulacijskih sistemov. Pokazana je realizacija diskretnih regulacijskih sistemov.

## **Ključne besede:**

regulacijski sistemi, matematično modeliranje dinamičnih sistemov, analiza dinamičnih sistemov, načrtovanje in sinteza regulacijskih sistemov, realizacija regulacijskih sistemov.



# Predgovor

Avtomatsko vodenje (angl. automatic control) predstavlja enega izmed temeljev sodobne družbe. Uporablja se praktično na vseh tehničnih področjih, v zadnjem času pa zasledimo veliko primerov uporabe avtomatskega vodenja tudi na netehničnih področjih - v medicini, biologiji, ekonomiji, ... Avtomatsko vodenje je definirano kot vodenje, pri katerem regulirno ali krmilno veličino določa sistem vodenja brez poseganja človeka. Avtomatsko vodenje teoretično in praktično sodi na področje avtomatike. Avtomatika je interdisciplinarna veda, ki proučuje metode analize in sinteze sistemov avtomatskega vodenja. Avtomatsko vodenje je eno izmed ključnih orodij, ki omogočajo bolj humano industrijsko delo, večjo kakovost izdelkov, večjo fleksibilnost proizvodnje, višjo produktivnost, manjšo porabo surovin in energije. Obstaja pa tudi mnogo dinamičnih sistemov, katerih delovanje bi bilo brez avtomatskega vodenja nevarno in nestabilno in predstavlja uporaba avtomatskega vodenja osnovni pogoj za delovanje teh sistemov. Najpomembnejše odkritje na področju avtomatskega vodenja je odkritje povratne zanke. Centrifugalni regulator hitrosti parnega stroja je bila ena izmed prvih inovacij, ki je temeljila na ideji povratne zanke. Vpliv te iznajdbe je bil tako velik, da je njena uporaba povzročila prvo industrijsko revolucijo in s tem velik svetovni gospodarski in družbeni napredek. Kljub temu, da je bila večina teoretičnih osnov avtomatskega vodenja odkritih v zadnjih stoletjih prejšnjega tisočletja, pa je teoretični razvoj na tem področju še vedno intenziven. Še bolj pa je pomemben napredek na področju realizacij avtomatskega vodenja, ki je neposredno povezan z odkritji na področju novih tehnologij.

Zaradi tolikšne pomembnosti avtomatskega vodenja je razumljivo, da sodobni inženirji potrebujejo temeljna in aktualna znanja s tega področja. Ker je avtomatsko vodenje interdisciplinarna disciplina, ki sodi na različna inženirska področja, se s predajanjem znanj s področja avtomatizacije ukvarjajo na mnogih fakultetah. Na večini tehniških fakultet imajo enega ali celo več predmetov s tega področja. Predvsem zaradi načina izvedbe avtomatskega vodenja (regulirane fizikalne veličine s senzorji večinoma pretvorimo v električne signale, regulatorji so realizirani z elektronskimi ali računalniškimi napravami, aktuatorji in izvršni členi velikokrat temeljijo na uporabi elektropogonov) se z avtomatskim vodenjem še posebej intenzivno ukvarjamo na elektrotehničnih fakultetah. Za pridobivanje znanj s tega področja je študentom namenjenih veliko predmetov, prav tako je študentom na izbiro veliko strokovne literature v tujih jezikih in v slovenščini. Razlog, da sem kljub množici razpoložljive literature napisal še en učbenik je v tem, da sem želel na enem mestu zbrati osnovna teoretična znanja skupaj s primeri uporabe, ki so potrebna v celotnem procesu razvoja regulacijskega sistema. Prav tako je ta učbenik namenjen tistim, ki so ta znanja v celoti ali delno že nekoč obvladali, pa jih sedaj želijo ponoviti ali dopolniti. Učbenik je primarno namenjen študentom univerzitetnega in visokošolskega študijskega programa Elektrotehnika, smer Močnostna elektrotehnika. Namenjen je uporabi pri visokošolskih predmetih Regulacijska tehnika, Industrijska krmilja in Računalniško vodenje procesov ter uporabi pri univerzitetnih predmetih Modeliranje in vodenje, Elektrodinamika in Krmilno regulacijski sistemi.

Temu ustrezno je prilagojena tudi zgradba učbenika. Velik del v učbeniku predstavljenih znanj temelji na uporabi Laplaceove transformacije. Za študente, ki teh znanj ne obvladajo ali pa jih obvladajo pomanjkljivo je namenjen dodatek A, kjer je temeljito, z definicijami, lastnostmi in primeri predstavljena Laplaceova transformacija in njena uporaba. Poglobljeno poznavanje Laplaceove transformacije in njena večja uporaba sta nujni za razumevanje glavnih štirih poglavij učbenika. Gradnje regulacijskega sistema se je smiselno lotiti sistematično. Seveda lahko pri enostavnejših regulacijskih sistemih izberemo krajše poti, ki se pa, pri kompleksnejših sistemih ne izkažejo za uporabne. Sistematični razvoj vsakega regulacijskega sistema zato razdelimo v štiri osnovne korake, ki so, v enakem vrstnem redu kot se izvedejo v praksi, predstavljeni v učbeniku.

V prvem poglavju učbenika so opisane osnove modeliranja dinamičnih sistemov. Matematični model predstavlja osnovo za nadaljne delo pri gradnji regulacijskega sistema, zato je to poglavje izredno pomembno. V učbeniku sem se omejil na modele električnih vezij in naprav, mehanskih sistemov in elektromehanskih sistemov. Predstavljeni so: klasični pristop k modeliranju linearnih sistemov, klasični pristop k modeliranju nelinearnih sistemov in linearizacija ter pristop k modeliranju, ki temelji na uporabi Lagrangeove enačbe.

Naslednji korak pri izgradnji regulacijskega sistema predstavlja podrobnejša analiza statičnih in dinamičnih lastnosti obravnavanega objekta. Bolj ali manj popolno analizo lahko do določene mere izvedemo z meritvami in preizkusi. Velikokrat pa je izvedba meritev in preizkusov predraga, pretežavna, nevarna ali celo neizvedljiva. V tem primeru pridobimo podrobno poznavanje objekta s pomočjo analize matematičnega modela. Kako izvedemo analizo modela je predstavljeno v drugem poglavju učbenika. Predstavljeni sta kvantitativna in kvalitativna analiza objekta na osnovi njegovega matematičnega modela.

Na osnovi podrobnega poznavanja lastnosti procesa, ki ga želimo regulirati, izvedemo sintezo regulacijskega sistema. Sinteza regulacijskih sistemov je predstavljena v tretjem poglavju.

Rezultat sinteze regulacijskega sistema predstavlja na ustrezen način opisana zgradba regulacijskega sistema in regulacijski predpis, ki ga izvajajo posamezni elementi regulacijskega sistema. Le-to je potrebno realizirati. Skoraj vsi sodobni regulacijski sistemi so realizirani s pomočjo časovno in amplitudno diskretnih komponent. Njihov opis in realizacija sta predstavljeni v četrtem poglavju.

Učbenik je bogato opremljen s primeri. Večina primerov ima predstavljen potek, kako pridemo do rešitve, nekatere naloge pa imajo podano samo končno rešitev. Na ta način lahko študenti bolje razumejo uporabo predstavljene teorije, prav tako pa lahko preverijo svoje znanje. Večina primerov in nalog izhaja iz mojega večletnega dela na tem področju [1].

V dodatku je obdelana že omenjena Laplaceova transformacija. Podane so tudi tabele Laplaceovih in z-transformirank pogosto uporabljenih funkcij.

Učbenika ne bi bilo, če ne bi imel izvrstnih znanstvenikov in pedagogov, ki so me vpeljali na to področje. Iskreno se zahvaljujem mojemu dolgoletnemu mentorju prof. Dragu Dolinarju. Prav tako gre iskrena zahvala tudi dobremu sodelavcu na tem področju prof. Bojanu Grčarju. Oba sta mi, z vprašanji, pripombami in korekcijami, tudi zelo veliko pomagala pri nastanku tega učbenika. Učbenik pa zagotovo ne bi bil takšen kot je, če ne bi imel dveh izredno prizadevnih in temeljitih recenzentov. Naloge recenzentov sta opravila prof. Maja Atanasijević Kunc in izr. prof. Boštjan Polajžer. Obema se iskreno zahvaljujem. Za pomoč pri urejanju učbenika se zahvaljujem asis. dr. Robertu Brezovniku in sodelavcu Mitji Hriberniku.



# Kazalo

<b>1 Modeliranje dinamičnih sistemov</b>	<b>1</b>
1.1 Splošno o modelih . . . . .	1
1.2 Predstavitve parametričnih matematičnih modelov . . . . .	2
1.2.1 Matematični modeli v prostoru stanja . . . . .	3
1.2.2 Vhodno - izhodni matematični modeli . . . . .	4
1.3 Modeliranje linearnih sistemov . . . . .	5
1.3.1 Električna vezja . . . . .	5
1.3.2 Mehanski sistemi . . . . .	10
1.3.3 Elektromehanski sistemi . . . . .	14
1.4 Modeliranje nelinearnih sistemov in linearizacija . . . . .	17
1.5 Pristop k modeliranju ob uporabi Lagrangeove enačbe . . . . .	34
<b>2 Analiza matematičnih modelov</b>	<b>47</b>
2.1 Analiza modela v prostoru stanja . . . . .	47
2.1.1 Zapis modela v prostoru stanja . . . . .	47
2.1.2 Simulacijska shema . . . . .	47
2.1.3 Karakteristična enačba, lastne vrednosti, naravni načini in lastni vektorji modela	48
2.1.4 Ekvivalentni sistemi in spektralna transformacija . . . . .	53
2.1.5 Določitev odziva modela v prostoru stanj . . . . .	54
2.2 Analiza vhodno-izhodnega modela . . . . .	72
2.2.1 Zapis vhodno-izhodnega modela . . . . .	72
2.2.2 Blokovni diagram . . . . .	74
2.2.3 Določitev odziva vhodno-izhodnega modela . . . . .	78
2.3 Povezava vhodno-izhodnega modela in modela v prostoru stanja . . . . .	79
2.3.1 Pretvorba modela v prostoru stanja v prenosno funkcijo . . . . .	79
2.3.2 Pretvorba prenosne funkcije v model v prostoru stanja . . . . .	80
2.3.3 Pretvorba modela v prostoru stanja v kanonične oblike . . . . .	83

2.4	Frekvenčne karakteristike . . . . .	86
2.5	Stabilnost . . . . .	99
2.5.1	Splošne metode ugotavljanja stabilnosti dinamičnih sistemov . . . . .	99
2.5.2	Metode za ugotavljanje stabilnosti zaprt ozančnih dinamičnih sistemov . . . . .	111
2.6	Diagram lege korenov . . . . .	115
2.7	Vodljivost . . . . .	126
2.8	Spoznavnost . . . . .	129
<b>3</b>	<b>Sinteza regulacijskih sistemov</b>	<b>131</b>
3.1	Razčlenitev nalog pri sintezi regulacijskih sistemov . . . . .	131
3.2	Načrtovanje na osnovi prenosne funkcije . . . . .	132
3.2.1	Regulacijska struktura . . . . .	132
3.2.2	Značilne strukture regulatorjev . . . . .	133
3.2.3	Določanje parametrov PID regulatorjev s pomočjo nastavitvenih pravil . . . . .	137
3.2.4	Določanje parametrov regulatorjev s pomočjo frekvenčnih karakteristik . . . . .	141
<b>4</b>	<b>Diskretna realizacija regulacijskih sistemov</b>	<b>155</b>
4.1	Diskretni regulacijski sistemi in signali . . . . .	155
4.2	$\mathcal{Z}$ -transformacija . . . . .	158
4.3	Diferenčna enačba in diskretna prenosna funkcija . . . . .	159
4.4	Diskretni ekvivalenti zveznih prenosnih funkcij . . . . .	161
4.4.1	Uporaba numerične integracije . . . . .	161
4.4.2	Metoda stopnične invariance . . . . .	163
	<b>Literatura</b>	<b>165</b>
<b>A</b>	<b>Laplaceova transformacija</b>	<b>167</b>
A.1	Direktna Laplaceova transformacija . . . . .	167
A.2	Lastnosti Laplaceove transformacije . . . . .	172
A.3	Inverzna Laplaceova transformacija . . . . .	173
A.4	Reševanje diferencialnih enačb z Laplaceovo transformacijo . . . . .	178
<b>B</b>	<b>Laplaceove in z-transformirane pogosto uporabljanih funkcij</b>	<b>185</b>

# Poglavje 1

## Modeliranje dinamičnih sistemov

### 1.1 Splošno o modelih

Za znanstveno ali strokovno obravnavo sistemov iz realnega sveta velikokrat uporabljamo modele. Postopek izdelave modela imenujemo modeliranje. V uvodnem poglavju bomo odgovorili na osnovna vprašanja, povezana z modeli in modeliranjem [1]-[5].

#### **Kaj je osnovni cilj modeliranja?**

Osnovni cilj modeliranja je izdelava modela, ki ustrezno opisuje lastnosti obravnavanega realnega sistema.

#### **Kakšne modele poznamo?**

V osnovi ločimo dve skupini modelov:

- fizični modeli
- abstraktni modeli, med katere sodijo tudi matematični modeli

#### **Kaj so fizični modeli?**

Fizični modeli stvarno predstavijo obravnavani sistem. Tovrstna na predstavitev temelji na enakih lastnostih dimenzijsko različnih sistemov in na analogijah med fizikalno različnimi sistemi (električni - mehanski - termični - pnevmatski - hidravlični - ...).

#### **Kaj so abstraktni modeli?**

Abstraktni modeli na abstraktni način, t. j. simbolično, verbalno ali miselno predstavijo obravnavan realni sistem. Pri simbolični predstavitvi realnih sistemov priredimo sistemskim količinam (napetosti, toku, položaju, hitrosti, ...) modelne spremenljivke. V primeru, ko opišemo povezavo med modelnimi spremenljivkami z matematičnimi funkcijami, dobljen model imenujemo matematični model.

*V okviru obravnavane snovi se bomo omejili na podrobnejšo obravnavo matematičnih modelov.*

#### **Kaj je matematični model?**

Matematični model je abstraktni model, ki uporablja matematične koncepte (enačbe, grafe, tabele) za opis sistema [6],[7].

#### **Kakšne sisteme lahko opišemo z matematičnimi modeli?**

Z matematičnimi modeli lahko opišemo sisteme iz različnih področij. Najbolj značilna področja uporabe matematičnih modelov predstavljajo naravoslovje in tehnika (astronomija, fizika, kemija, elektrotehnika, računalništvo, strojništvo, gradbeništvo) ter medicina, farmacija, biologija in ekonomija. Manj pogosta, vendar tudi pomembna, je uporaba matematičnih modelov v drugih družboslovnih vedah (politika, sociologija, filozofija) [8],[9].

**Zakaj uporabljamo matematične modele?**

Matematični modeli nam omogočajo poenoteno analizo lastnosti sistemov in poenoteno načrtovanje vodenja, ki zagotavlja zahtevano delovanje sistemov.

**Kako dobimo matematične modele?**

Matematične modele dobimo s pomočjo teoretičnega in eksperimentalnega modeliranja. Za uspešno modeliranje je smiselno obe metodi med sabo iterativno dopolnjevati.

**Kako delimo matematične modele?**

Matematične modele klasificiramo na različne načine. Najpomembnejše delitve matematičnih modelov so [10]-[12]:

- glede na lastnost linearnost operatorjev v matematičnem modelu v linearne (vse preslikave so aditivne in homogene) ali nelinearne (pogoja aditivnosti in homogenosti nista izpolnjena),
- glede na verjetnost napovedi obnašanja v deterministične (pri enakih vhidih imamo enake izhode) ali stohastične (pri enakih vhidih se pojavijo naključne spremembe izhodov),
- glede na to, ali obravnavamo sistem v ustaljenem stanju ali pa nas zanima časovno obnašanje sistema v statične (povezujejo vhode in izhode samo za sistem v ravnotežju) ali dinamične (uporabni so za raziskovanje dinamičnih lastnosti sistema),
- dinamične modele delimo glede na način obravnave spreminjanja časa v zvezne (čas se spreminja zvezno in zavzame vse vrednosti v obravnavanem časovnem intervalu) ali diskretne (čas zavzame samo izbrane vrednosti v obravnavanem časovnem intervalu),
- glede na obliko predstavitve modela v parametrične (enačbe) ali neparimetrične (tabele, grafi) [13],[14].

*V nadaljevanju se bomo omejili predvsem na deterministične, zvezne, dinamične, parametrične matematične modele. Z namenom bolj zgoščenega zapisa bomo zanje velikokrat uporabljali skrajšan izraz matematični modeli.*

**Zakaj največkrat uporabljamo matematične modele?**

V matematičnih modelih nastopajo vhodne spremenljivke, ki ustrezajo vhodom sistema in izhodne spremenljivke, ki ustrezajo izhodom sistema. Osnovno metodo analize sistemov predstavlja izračun časovnega poteka izhodnih spremenljivk modela pri predpisanih vhodnih spremenljivkah modela. Ker matematične modele večinoma predstavljajo diferencialne enačbe potrebujemo za njihovo reševanje tudi začetne vrednosti. Diferencialne enačbe, ki tvorijo matematične modele, rešujemo s pomočjo analitičnih in numeričnih metod za reševanje diferencialnih enačb [15].

## 1.2 Predstavitve parametričnih matematičnih modelov

Parametrični matematični modeli prikazujejo povezavo med vhodnimi in izhodnimi spremenljivkami v obliki enačb in vsebujejo v splošnem končno število parametrov v eksplicitni obliki.

Z ozirom na obravnavo spremenljivk v posameznih prostorskih elementih sistema ločimo dve vrsti parametričnih dinamičnih modelov teh sistemov. V primeru, ko obravnavamo posamezne volumenske elemente sistema kot celoto, ki ima enako vrednost obravnavanih spremenljivk v vseh točkah, dobljen parametrični matematični model imenujemo model s koncentriranimi parametri in ga zapišemo z navadnimi diferencialnimi enačbami. Ti modeli so enostavnejši in hitrejši za analizo, lažja je njihova izpeljava ter njihova uporaba za dinamične izračune. V primeru, ko pa predvidimo možnost različnih vrednosti obravnavanih spremenljivk v različnih točkah posameznih prostorskih elementov sistema, pa dobljen parametrični model imenujemo model s porazdeljenimi parametri in ga zapišemo s parcialnimi diferencialnimi enačbami. V nadaljevanju se bomo omejili na obravnavo parametričnih modelov dinamičnih sistemov s koncentriranimi parametri.

Ločimo dve obliki zapisa parametričnih zveznih dinamičnih modelov s koncentriranimi parametri:

- matematični modeli, ki za opis dinamike sistema uporabljajo spremenljivke stanja modela in jih imenujemo modeli v prostoru stanja in
- matematični modeli, ki opisujejo dinamiko sistema samo na osnovi povezave vhodnih in izhodnih spremenljivk modela in jih imenujemo vhodno-izhodni modeli.

### 1.2.1 Matematični modeli v prostoru stanja

Matematični modeli v prostoru stanja so enostavni za določitev in primerni za analitično in numerično reševanje. V modelih v prostoru stanja poleg vhodnih in izhodnih spremenljivk nastopajo tudi spremenljivke stanja. Pri izpeljavi matematičnega modela v prostoru stanja običajno izberemo za spremenljivke stanja fizikalne veličine, ki označujejo napolnjenost energijskih posod. Pri analizi matematičnega modela in načrtovanju regulacijskega sistema je velikokrat smiselna zamenjava tako izbranih spremenljivk stanja s spremenljivkami stanja, ki nimajo ekvivalenta v fizikalnih veličinah sistema [3]-[5].

Splošna oblika modela v prostoru stanja je prikazana z dvema sistemoma enačb:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= g_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \\ y_2(t) &= g_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \\ &\vdots \\ y_r(t) &= g_r(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

kjer posamezne oznake pomenijo:

$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  – spremenljivke stanja,

$u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$  – vhodne spremenljivke,

$y_1(t), y_2(t), \dots, y_r(t)$  – izhodne spremenljivke,

$f_1, f_2, \dots, f_n, g_1, g_2, \dots, g_r$  – skalarne funkcije vektorskih spremenljivk,

$n, m, r$  – število spremenljivk stanja, vhodnih in izhodnih spremenljivk modela.

Prvi sistem enačb imenujemo enačbe spremenljivk stanja, drugi sistem enačb pa izhodne enačbe.

Enačbe (1.1) in (1.2) lahko zapišemo v vektorsko-matrični obliki:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (1.3)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (1.4)$$

kjer posamezne oznake pomenijo:

$\mathbf{x}(t)$  – vektor spremenljivk stanja ( $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ ),

$\mathbf{u}(t)$  – vhodni vektor ( $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)]^T$ ),

$\mathbf{y}(t)$  – izhodni vektor ( $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_r(t)]^T$ ),

$\mathbf{f}, \mathbf{g}$  – vektorski funkciji vektorskih spremenljivk.

Linearne modele lahko zapišemo v naslednji obliki:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_{11}(t)u_1(t) + b_{12}(t)u_2(t) + \dots + b_{1m}(t)u_m(t) \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \dots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_{21}(t)u_1(t) + b_{22}(t)u_2(t) + \dots + b_{2m}(t)u_m(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_{n1}(t)u_1(t) + b_{n2}(t)u_2(t) + \dots + b_{nm}(t)u_m(t)\end{aligned}\tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}y_1(t) &= c_{11}(t)x_1(t) + c_{12}(t)x_2(t) + \dots + c_{1n}(t)x_n(t) + d_{11}(t)u_1(t) + d_{12}(t)u_2(t) + \dots + d_{1m}(t)u_m(t) \\ y_2(t) &= c_{21}(t)x_1(t) + c_{22}(t)x_2(t) + \dots + c_{2n}(t)x_n(t) + d_{21}(t)u_1(t) + d_{22}(t)u_2(t) + \dots + d_{2m}(t)u_m(t) \\ &\vdots \\ y_r(t) &= c_{r1}(t)x_1(t) + c_{r2}(t)x_2(t) + \dots + c_{rn}(t)x_n(t) + d_{r1}(t)u_1(t) + d_{r2}(t)u_2(t) + \dots + d_{rm}(t)u_m(t)\end{aligned}\tag{1.6}$$

V primeru, ko so parametri  $a_{11}(t), a_{12}(t), \dots, b_{11}(t), b_{12}(t), \dots, c_{11}(t), c_{12}(t), \dots$  in  $d_{11}(t), d_{12}(t), \dots$  časovno odvisni (spremenljivi), označujejo enačbe (1.5) in (1.6) linearni, časovno spremenljivi sistem, če pa so ti parametri nespremenljivi (konstantni), pa označujejo te enačbe linearni, časovno nespremenljivi sistem.

Linearne, časovno nespremenljive sisteme lahko zapišemo v vektorsko-matrični obliki z enačbama (1.7) in (1.8):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)\tag{1.7}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\tag{1.8}$$

Matriko  $\mathbf{A}$  imenujemo sistemska matrika (tudi matrika stanj) in je dimenzij  $n \times n$ , matriko  $\mathbf{B}$  imenujemo vhodna matrika in je dimenzij  $n \times m$ , matriko  $\mathbf{C}$  imenujemo izhodna matrika in je dimenzij  $r \times n$  ter matriko  $\mathbf{D}$  imenujemo direktna matrika in je dimenzij  $r \times m$ .

Določene sisteme je mogoče opisati z modelom z enim vhomom in enim izhodom. Takšen model zapišemo v obliki:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)\tag{1.9}$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + du(t)\tag{1.10}$$

### 1.2.2 Vhodno - izhodni matematični modeli

Dinamiko procesa lahko opišemo tudi z matematičnim modelom, ki ga tvori sistem linearnih diferencialnih enačb, v katerih spremenljivke stanja ne nastopajo. Sistem diferencialnih enačb opisuje povezavo med vhodnimi in izhodnimi spremenljivkami matematičnega modela – zato takšen model imenujemo vhodno - izhodni model. Linearni vhodno - izhodni model  $n$ -tega reda z  $m$  vhodi in  $r$

izhodi lahko zapišemo z  $r$  diferencialnimi enačbami [3]-[7]:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^n y_1(t)}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y_1(t)}{dt^{n-1}} + a_{n-2}(t) \frac{d^{n-2} y_1(t)}{dt^{n-2}} + \dots + a_1(t) \frac{dy_1(t)}{dt} + a_0(t) y_1(t) = \\
& b_{n,11}(t) \frac{d^n u_1(t)}{dt^n} + b_{n-1,11}(t) \frac{d^{n-1} u_1(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_{1,11}(t) \frac{du_1(t)}{dt} + b_{0,11}(t) u_1(t) + \\
& b_{n,12}(t) \frac{d^n u_2(t)}{dt^n} + b_{n-1,12}(t) \frac{d^{n-1} u_2(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_{1,12}(t) \frac{du_2(t)}{dt} + b_{0,12}(t) u_2(t) + \\
& \quad \vdots \\
& b_{n,1m}(t) \frac{d^n u_m(t)}{dt^n} + b_{n-1,1m}(t) \frac{d^{n-1} u_m(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_{1,1m}(t) \frac{du_m(t)}{dt} + b_{0,1m}(t) u_m(t) \\
& \\
& \frac{d^n y_2(t)}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y_2(t)}{dt^{n-1}} + a_{n-2}(t) \frac{d^{n-2} y_2(t)}{dt^{n-2}} + \dots + a_1(t) \frac{dy_2(t)}{dt} + a_0(t) y_2(t) = \\
& b_{n,21}(t) \frac{d^n u_1(t)}{dt^n} + b_{n-1,21}(t) \frac{d^{n-1} u_1(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_{1,21}(t) \frac{du_1(t)}{dt} + b_{0,21}(t) u_1(t) + \\
& b_{n,22}(t) \frac{d^n u_2(t)}{dt^n} + b_{n-1,22}(t) \frac{d^{n-1} u_2(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_{1,22}(t) \frac{du_2(t)}{dt} + b_{0,22}(t) u_2(t) + \\
& \quad \vdots \\
& b_{n,2m}(t) \frac{d^n u_m(t)}{dt^n} + b_{n-1,2m}(t) \frac{d^{n-1} u_m(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_{1,2m}(t) \frac{du_m(t)}{dt} + b_{0,2m}(t) u_m(t) \\
& \\
& \quad \vdots \\
& \\
& \frac{d^n y_r(t)}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y_r(t)}{dt^{n-1}} + a_{n-2}(t) \frac{d^{n-2} y_r(t)}{dt^{n-2}} + \dots + a_1(t) \frac{dy_r(t)}{dt} + a_0(t) y_r(t) = \\
& b_{n,r1}(t) \frac{d^n u_1(t)}{dt^n} + b_{n-1,r1}(t) \frac{d^{n-1} u_1(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_{1,r1}(t) \frac{du_1(t)}{dt} + b_{0,r1}(t) u_1(t) + \\
& b_{n,r2}(t) \frac{d^n u_2(t)}{dt^n} + b_{n-1,r2}(t) \frac{d^{n-1} u_2(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_{1,r2}(t) \frac{du_2(t)}{dt} + b_{0,r2}(t) u_2(t) + \\
& \quad \vdots \\
& b_{n,rm}(t) \frac{d^n u_m(t)}{dt^n} + b_{n-1,rm}(t) \frac{d^{n-1} u_m(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_{1,rm}(t) \frac{du_m(t)}{dt} + b_{0,rm}(t) u_m(t)
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Matematični model z eno vhodno in eno izhodno spremenljivko zapišemo v obliki diferencialne enačbe:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + a_{n-2}(t) \frac{d^{n-2} y(t)}{dt^{n-2}} + \dots + a_1(t) \frac{dy(t)}{dt} + a_0(t) y(t) = \\
& b_n(t) \frac{d^n u(t)}{dt^n} + b_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}} + b_{n-2}(t) \frac{d^{n-2} u(t)}{dt^{n-2}} + \dots + b_1(t) \frac{du(t)}{dt} + b_0(t) u(t)
\end{aligned} \tag{1.12}$$

V primeru, ko so parametri  $a_0(t), a_1(t), \dots, b_{0,11}(t), b_{1,11}(t), \dots, b_{0,21}(t), b_{1,21}(t), \dots$  časovno odvisni (spremenljivi), označujejo enačbe (1.11) in (1.12) linearni, časovno spremenljivi sistem, če pa so ti parametri nespremenljivi (konstantni), pa označujejo te enačbe linearni, časovno nespremenljivi sistem.

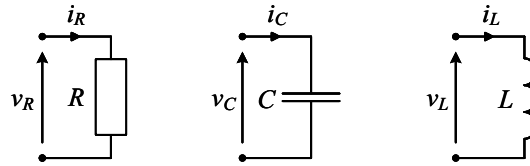
## 1.3 Modeliranje linearnih sistemov

### 1.3.1 Električna vezja

Za zapis enačb, ki opisujejo dinamiko električnih vezij, uporabimo Kirchoffova zakona:

- 1. Kirchoffov zakon: V poljubnem vozlišču električnega vezja mora biti vsota pritekajočih tokov enaka vsoti odtekajočih tokov.
- 2. Kirchoffov zakon: V vsakem zaključenem tokokrogu električnega vezja mora biti vsota gonilnih napetosti enaka vsoti padcev napetosti.

Omejili se bomo na električna vezja, ki jih sestavljajo pasivni linearni elementi: idealni upor, idealna tuljava in idealni kondenzator:



Slika 1.1: Osnovni pasivni elementi električnih vezij

Enačbe, ki opisujejo dinamiko pasivnih elementov električnih vezij so:

- upor

$$v_R(t) = R i_R(t) \quad (1.13)$$

- kondenzator

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt + v_C(0) \quad (1.14)$$

- tuljava

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (1.15)$$

V enačbah označujejo  $R$ ,  $C$  in  $L$  upornost idealnega upora, kapacitivnost idealnega kondenzatorja in induktivnost idealne tuljave,  $v_R(t)$ ,  $v_C(t)$  in  $v_L(t)$  označujejo padce napetosti na uporu, kondenzatorju in tuljavi in  $i_R(t)$ ,  $i_C(t)$  in  $i_L(t)$  označujejo toke skozi upor, kondenzator in tuljavo.

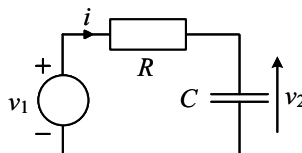
Za določitev matematičnega modela v prostoru stanj je potrebno izbrati ustrezne spremenljivke stanja. Smiselna je izbira spremenljivk, ki označujejo količino energije v sistemu. V primeru električnih vezij so to napetosti na kondenzatorjih ( $v_C(t)$ ) in tokovi skozi tuljave ( $i_L(t)$ ) [16].

### Dogovor 1.1

V nalogah zaradi kompaktnosti zapisa ne bomo pisali neodvisne spremenljivke  $t$ .

### Naloga 1.1

Za vezje na sliki 1.2 določite matematični model v prostoru stanja in vhodno - izhodni model. Vhodna spremenljivka modela ( $u$ ) naj ustreza napetosti izvora ( $v_1$ ), izhodna spremenljivka modela pa napetosti na kondenzatorju ( $v_2$ ).



Slika 1.2: Električno vezje, naloga 1.1



**Rešitev**

S pomočjo 2. Kirchoffovega zakona in enačb (1.13) in (1.14) zapišemo enačbi, ki opisujeta dinamiko sistema, prikazanega na sliki 1.2.

$$v_1 = iR + v_2, \quad v_2 = \frac{1}{C} \int idt$$

Vhod in izhod modela sta:

$$u = v_1, \quad y = v_2$$

- **Model v prostoru stanja**

Za spremenljivko stanja izberemo napetost na kondenzatorju:  $x_1 = v_2$

Model vezja na sliki 1.2 zapišemo v obliki enačb (1.7) in (1.8):

$$\dot{v}_2 = -\frac{1}{RC}v_2 + \frac{1}{RC}v_1, \quad (\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu})$$

$$v_2 = v_2, \quad (\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du})$$

Elementi modela v prostoru stanja so torej:

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{RC}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{RC}, \quad \mathbf{C} = 1, \quad \mathbf{D} = 0$$

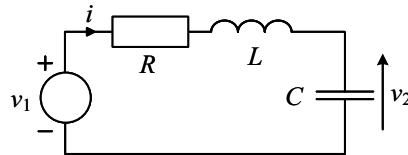
- **Vhodno - izhodni model**

Model vezja zapišemo v obliki diferencialne enačbe (1.12):

$$\dot{v}_2 RC + v_2 = v_1$$

**Naloga 1.2**

Za vezje na sliki 1.3 določite matematični model v prostoru stanja in vhodno - izhodni model. Vhodna spremenljivka modela ( $u$ ) naj ustreza napetosti izvora ( $v_1$ ), izhodna spremenljivka modela pa napetosti na kondenzatorju ( $v_2$ ).



Slika 1.3: Električno vezje, naloga 1.2

**Rešitev**

S pomočjo 2. Kirchoffovega zakona in enačb (1.13), (1.14) in (1.15) zapišemo enačbi, ki opisujeta vezje na sliki 1.3.

$$v_1 = iR + L\dot{i} + v_2, \quad v_2 = \frac{1}{C} \int idt$$

Vhod in izhod modela sta:

$$u = v_1, \quad y = v_2$$

- **Model v prostoru stanja**

Za spremenljivki stanja izberemo tok skozi tuljavo in napetost na kondenzatorju:  $\mathbf{x} = [i \quad v_2]^T$

Model vezja na sliki 1.3 zapišemo v obliki:

$$\dot{i} = -\frac{R}{L}i - \frac{1}{L}v_2 + \frac{1}{L}v_1$$

$$\dot{v}_2 = \frac{1}{C}i$$

oziroma v vektorsko-matrični obliki enačb (1.7) in (1.8):

$$\begin{bmatrix} \dot{i} \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} v_1$$

$$v_2 = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} i \\ v_2 \end{bmatrix} + 0v_1$$

Matrike modela v prostoru stanja so torej:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = [0 \quad 1], \quad d = 0$$

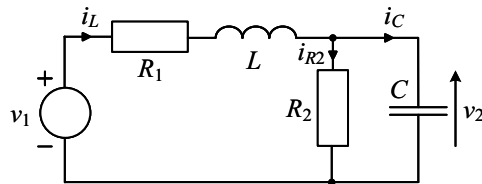
- **Vhodno - izhodni model**

Model vezja zapišemo v obliki diferencialne enačbe (1.12):

$$\ddot{v}_2 LC + \dot{v}_2 RC + v_2 = v_1$$

### Naloga 1.3

Za vezje na sliki 1.4 določite matematični model v prostoru stanja in vhodno - izhodni model. Vhodna spremenljivka modela ( $u$ ) naj ustreza napetosti izvora ( $v_1$ ), izhodna spremenljivka modela pa napetosti na kondenzatorju ( $v_2$ ).



Slika 1.4: Električno vezje, naloga 1.3

### Rešitev

- **Model v prostoru stanja**

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} v_1$$

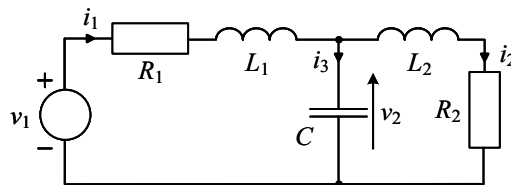
$$v_2 = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} i_L \\ v_2 \end{bmatrix} + 0v_1$$

- **Vhodno - izhodni model**

$$\ddot{v}_2 R_2 LC + \dot{v}_2 (L + R_1 R_2 C) + v_2 (R_1 + R_2) = v_1 R_2$$

### Naloga 1.4

Za vezje na sliki 1.5 določite matematični model v prostoru stanja in vhodno - izhodni model. Vhodna spremenljivka modela ( $u$ ) naj ustreza napetosti izvora ( $v_1$ ), izhodna spremenljivka modela pa napetosti na kondenzatorju ( $v_2$ ).



Slika 1.5: Električno vezje, naloga 1.4

**Rešitev**• **Model v prostoru stanja**

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_1$$

$$v_2 = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_2 \end{bmatrix} + 0v_1$$

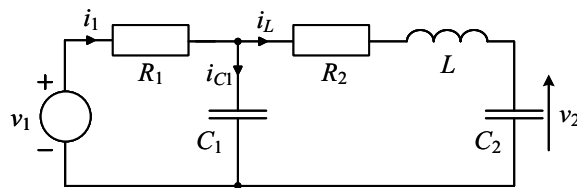
• **Vhodno - izhodni model**

$$v_2^{(3)}L_1L_2C + \ddot{v}_2(R_2L_1C + R_1CL_2) + \dot{v}_2(R_1R_2C + L_1 + L_2) + v_2(R_1 + R_2) = \dot{v}_1L_2 + v_1R_2$$


---

**Naloga 1.5**

Za vezje na sliki 1.6 določite matematični model v prostoru stanja in vhodno - izhodni model. Vhodna spremenljivka modela ( $u$ ) naj ustreza napetosti izvora ( $v_1$ ), izhodna spremenljivka modela pa napetosti na kondenzatorju ( $v_2$ ) [16].



Slika 1.6: Električno vezje, naloga 1.5

**Rešitev**• **Model v prostoru stanja**

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{v}_{C1} \\ \dot{v}_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{L} & \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C_1} & -\frac{1}{R_1C_1} & 0 \\ \frac{1}{C_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{R_1C_1} \\ 0 \end{bmatrix} v_1$$

$$v_2 = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} i_L \\ v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix} + 0v_1$$

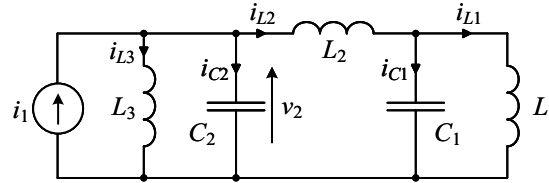
• **Vhodno - izhodni model**

$$v_2^{(3)}C_1C_2LR_1 + \ddot{v}_2(C_2L + C_1C_2R_1R_2) + \dot{v}_2(C_2R_1 + C_1R_1 + C_2R_2) + v_2 = v_1$$


---

**Naloga 1.6**

Za vezje na sliki 1.7 določite matematični model v prostoru stanja. Vhodna spremenljivka modela ( $\dot{u}$ ) naj ustreza toku izvora ( $i_1$ ), izhodna spremenljivka modela pa napetosti na kondenzatorju ( $v_2$ ).



Slika 1.7: Električno vezje, naloga 1.6

**Rešitev**

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{C1} \\ \dot{v}_{C2} \\ \dot{i}_{L1} \\ \dot{i}_{L2} \\ \dot{i}_{L3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{C_2} & \frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_2} & -\frac{1}{L_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \\ i_{L3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} i_1$$

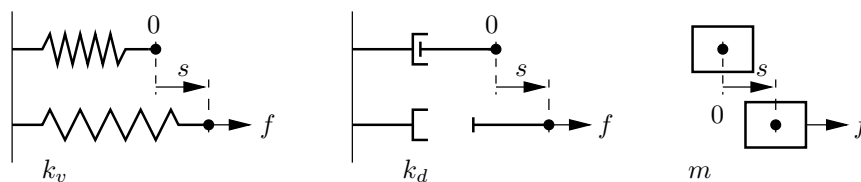
$$v_2 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \\ i_{L3} \end{bmatrix} + 0i_1$$

**1.3.2 Mehanski sistemi**

Pri modeliranju mehanskih sistemov bomo uporabili Newtonove zakone:

- 1. Newtonov zakon: Če je rezultanta sil in navorov na neko telo enaka nič, potem telo miruje ali pa se giblje premoenakomerno.
- 2. Newtonov zakon: Rezultanta sil, ki delujejo na telo, je enaka produktu njegove mase in pospeška ( $f(t) = ma(t)$ ).
- 3. Newtonov zakon: Če prvo telo deluje na drugo telo s silo  $f(t)$ , potem deluje drugo telo na prvo z enako veliko in nasprotno usmerjeno silo  $f(t)$ .

Osnovni elementi mehanskih sistemov so idealna vzmet, idealni dušilni element in telo z maso v težišču.



Slika 1.8: Osnovni elementi mehanskih sistemov

Enačbe, ki opisujejo dinamiko osnovnih elementov:

- idealna vzmet (Hookov zakon)

$$f(t) = k_v s(t) \quad (1.16)$$

- idealni dušilni element

$$f(t) = k_d \frac{ds(t)}{dt} \quad (1.17)$$

- telo z maso v težišču (2. Newtonov zakon)

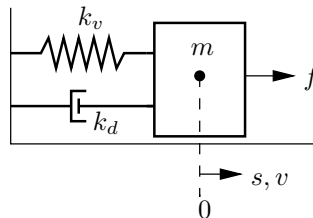
$$f(t) = m \frac{d^2 s(t)}{dt^2} \quad (1.18)$$

V enačbah  $f(t)$  označuje silo na obravnavan mehanski element,  $s(t)$  označuje relativni premik (odmik od izbranega koordinatnega izhodišča),  $k_v$  označuje koeficient vzmeti,  $k_d$  označuje dušilni koeficient in  $m$  označuje maso telesa [17]-[24].

Za ustrezne spremenljivke stanja matematičnega modela v prostoru stanja izberemo spremenljivke, ki opisujejo količino shranjene energije v mehanskem sistemu. To so spremenljivke, ki označujejo položaj in hitrost težišč teles in stanja vzmeti.

### Naloga 1.7

Za mehanski sistem na sliki 1.9 določite matematični model v prostoru stanja in vhodno - izhodni model. Vhod modela predstavlja sila na telo ( $f$ ), izhod modela pa položaj težišča telesa ( $s$ ). Trenje med telesom  $m$  in podlago zanemarimo.



Slika 1.9: Mehanski sistem, naloga 1.7

### Rešitev

Enačba, ki opisuje mehanski sistem na sliki 1.9:

$$f - k_v s - k_d \dot{s} = m \ddot{s}$$

Vhod in izhod modela sta:  $u = f$ ,  $y = s$

- **Model v prostoru stanja**

Za spremenljivki stanja izberemo položaj in hitrost težišča mase:  $x_1 = s$ ,  $x_2 = \dot{s} = v$

Model v prostoru stanja zapišemo z enačbama:

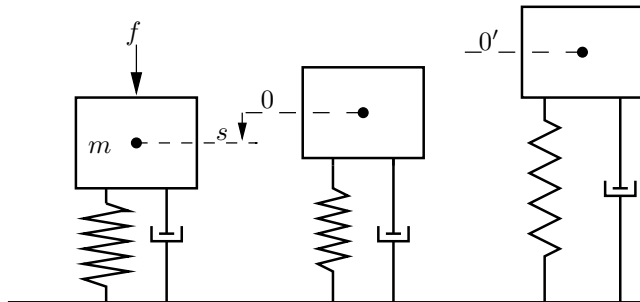
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{v} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_v}{m} & -\frac{k_d}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} f \\ s &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} s \\ v \end{bmatrix} + 0f \end{aligned}$$

- **Vhodno - izhodni model**

$$m\ddot{s} + k_d\dot{s} + k_v s = f$$

### Naloga 1.8

Za mehanski sistem telesa, ki ga podpirata vzmet in dušilni element, določite matematični model v prostoru stanja in vhodno - izhodni model. Na sliki 1.10 so prikazana tri stanja obravnavanega mehanskega sistema: stanje sistema v breztežnostnem prostoru (desno), stanje sistema, na katerega deluje samo gravitacijska sila (sredina) in stanje sistema, na katerega poleg gravitacijske sile deluje tudi zunanja sila  $f$  (levo). Vhod modela predstavlja sila na telo ( $f$ ), izhod modela pa vertikalni položaj telesa.



Slika 1.10: Mehanski sistem, naloga 1.8

### Rešitev

Pri modeliranju takšnega sistema je pomembna izbira koordinatnega izhodišča 0, glede na katerega izberemo spremenljivke stanja. Kot koordinatno izhodišče izberemo vertikalni položaj težišča telesa, pri katerem je že upoštevano delovanje sile teže (slika 1.10, sredina). Dinamiko sistema, kjer spremenljivka  $s$  označuje vertikalni odmik telesa od tako izbranega koordinatnega izhodišča, opisuje enačba:

$$f - k_v s - k_d \dot{s} = m\ddot{s}$$

Vpliv sile teže je pri tako izbranem koordinatnem izhodišču kompenziran s stisnjenostjo vzmeti in ga v enačbi ni potrebno upoštevati. (Silo teže  $mg$  bi morali upoštevati v primeru, ko bi za spremenljivko stanja, ki označuje vertikalni pomik telesa, izbrali razdaljo med težiščem obravnavanega telesa in položajem težišča telesa, ko na telo ne deluje nobena sila ( $0'$ , slika 1.10, desno).

Izbrana vhod in izhod modela sta:  $u = f$ ,  $y = s$  (slika 1.10, levo)

- **Model v prostoru stanja**

izbrani spremenljivki stanja sta:  $x_1 = s$ ,  $x_2 = v$

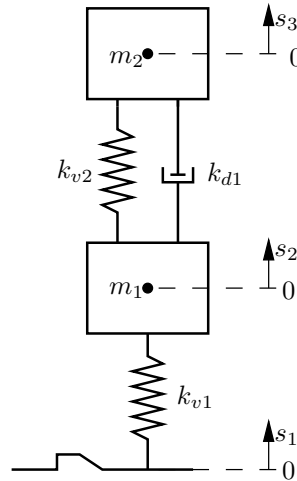
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{v} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_v}{m} & -\frac{k_d}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} f \\ s &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} s \\ v \end{bmatrix} + 0f \end{aligned}$$

- **Vhodno - izhodni model**

$$m\ddot{s} + k_d\dot{s} + k_v s = f$$

**Naloga 1.9**

Za mehanski sistem na sliki 1.11 določite matematični model v prostoru stanja. Mehanski sistem na sliki odgovarja avtomobilskemu kolesu, ki je preko vzmeti in dušilnega elementa pričvrščeno na podvozje. Dušenje pnevmatike (gume) zanemarimo, vhod predstavlja vertikalni odmik  $s_1$ , ki odgovarja profilu cestišča, izhod pa predstavlja položaj  $s_3$  [25].



Slika 1.11: Mehanski sistem, naloga 1.9

$k_{v1}$  – koeficient vzmeti avtomobilske gume

$k_{v2}$  – koeficient vzmeti vzmetenja

$k_{d1}$  – koeficient dušenja blažilnika

$m_1$  – masa kolesa

$m_2$  – masa odgovarjajočega dela podvozja

$s_1$  – vhod - profil cestišča (odmik od izbrane referenčne pozicije - 0)

$s_2, s_3$  – položaja težišč kolesa in odgovarjajočega dela podvozja (odmik od izbranih referenčnih pozicij - 0)

**Rešitev**

Enačbi, ki opisujeta dinamiko sistema:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{s}_2 &= k_{v1}(s_1 - s_2) + k_{v2}(s_3 - s_2) + k_{d1}(\dot{s}_3 - \dot{s}_2) \\ m_2 \ddot{s}_3 &= k_{v2}(s_2 - s_3) + k_{d1}(\dot{s}_2 - \dot{s}_3) \end{aligned}$$

Izbrana vhod in izhod modela sta:  $u = s_1$ ,  $y = s_3$

- **Model v prostoru stanja**

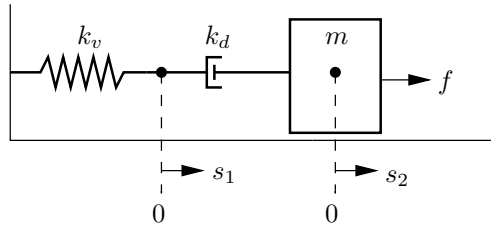
izbrani spremenljivki stanja sta:  $x_1 = s_2$ ,  $x_2 = \dot{s}_2 = v_2$ ,  $x_3 = s_3$ ,  $x_4 = \dot{s}_3 = v_3$ ,

$$\begin{bmatrix} \dot{s}_2 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{s}_3 \\ \dot{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-k_{v1}-k_{v2}}{m_1} & -\frac{k_{d1}}{m_1} & \frac{k_{v2}}{m_1} & \frac{k_{d1}}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_{v2}}{m_2} & \frac{k_{d1}}{m_2} & \frac{-k_{v2}}{m_2} & \frac{-k_{d1}}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_2 \\ v_2 \\ s_3 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_{v1}}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s_1$$

$$s_3 = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} s_2 \\ v_2 \\ s_3 \\ v_3 \end{bmatrix} + 0f$$

### Naloga 1.10

Določite matematični model mehanskega sistema na sliki 1.12. Model zapišite v prostoru stanja in v vhodno-izhodni obliki. Vhod predstavlja sila  $f$ , izhod pa položaj telesa  $s_2$ .



Slika 1.12: Mehanski sistem, naloga 1.10

### Rešitev

Enačbe, ki opisujejo dinamiko sistema:

$$\begin{aligned} m\ddot{s}_2 &= f - k_d(\dot{s}_2 - \dot{s}_1) \\ k_v s_1 &= k_d(\dot{s}_2 - \dot{s}_1) \end{aligned}$$

Izbrana vhod in izhod modela sta:  $u = f$ ,  $y = s_2$

- **Model v prostoru stanja**

izbrani spremenljivki stanja sta:  $x_1 = s_1$ ,  $x_2 = s_2$ ,  $x_3 = \dot{s}_2 = v_2$ ,

$$\begin{bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_v}{k_d} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_v}{m} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} f$$

$$s_2 = [0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ v_2 \end{bmatrix} + 0f$$

- **Vhodno - izhodni model**

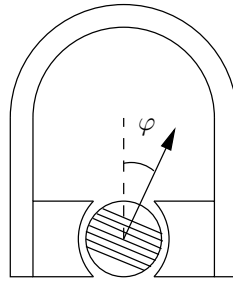
$$mk_d s_2^{(3)} + mk_v \ddot{s}_2 + k_v k_d \dot{s}_2 = k_d f + k_v f$$

## 1.3.3 Elektromehanski sistemi

### Naloga 1.11

Določite matematični model instrumenta z vrtljivo tuljavo. Model zapišite v prostoru stanja in v vhodno-izhodni obliki. Vhod predstavlja tok skozi vrtljivo tuljavo, izhod pa kotni odklon kazalca.





Slika 1.13: Instrument z vrtljivo tuljavo, naloga 1.11

**Rešitev**

Enačbe, ki opisujejo dinamiko sistema:

$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi} &= m_e - m_v - m_d \\ m_e &= k_e\psi i \\ m_v &= k_v\dot{\varphi} \\ m_d &= k_d\dot{\varphi} \end{aligned}$$

$i$  – tok skozi tuljavo

$\varphi$  – odklon kazalca

$J$  – vztrajnostni moment vrtljive tuljave in kazalca

$m_e, m_v, m_d$  – električni (pogonski), vzmetni (torzijski) in dušilni navor

$k_e, k_v, k_d$  – električna konstanta, koeficient vzmeti in dušilni koeficient

$\psi$  – magnetni sklep

Izbrana vhod in izhod modela sta:  $u = i$  (tok skozi tuljavo),  $y = \varphi$  (kotni odklon kazalca)

- **Model v prostoru stanja**

izbrani spremenljivki stanja sta:  $x_1 = \varphi$ ,  $x_2 = \dot{\varphi} = \omega$ ,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_v}{J} & -\frac{k_d}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_e\psi}{J} \end{bmatrix} i \\ \varphi &= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \varphi \\ \omega \end{bmatrix} + 0i \end{aligned}$$

- **Vhodno - izhodni model**

$$J\ddot{\varphi} + k_d\dot{\varphi} + k_v\dot{\varphi} = k_e\psi i$$

**Naloga 1.12**

Določite matematični model enosmernega motorja s trajnimi magneti. Model zapišite v prostoru stanja in v vhodno-izhodni obliki. Vhoda modela naj predstavljata rotorska napetost in navor bremena, izhoda modela pa rotorski tok in vrtljaji [16].

**Rešitev**

Enačbe, ki opisujejo dinamiko sistema:

$$\begin{aligned} v_r &= i_r R_r + L_r \dot{i}_r + k_{em} \omega \\ J \dot{\omega} &= k_{em} i_r - k_{vt} \omega - m_b \end{aligned}$$

$v_r, i_r$  – rotorska napetost in tok

$R_r, L_r$  – rotorska ohmska upornost in induktivnost

$k_{em}$  – elektromehanska konstanta

$k_{vt}$  – koeficient viskoznega trenja

$J$  – vztrajnostni moment rotorja

$\omega$  – kotna hitrost rotorja

$m_b$  – navor bremena

Izbrana vhod in izhod modela sta:  $\mathbf{u} = [v_r \quad m_b]^T$ ,  $\mathbf{y} = [i_r \quad \omega]^T$

- **Model v prostoru stanja**

izbrani spremenljivki stanja sta:  $x_1 = i_r$ ,  $x_2 = \omega$ ,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{i}_r \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{R_r}{L_r} & -\frac{k_{em}}{L_r} \\ \frac{k_{em}}{J} & -\frac{k_{vt}}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_r \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_r} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ m_b \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} i_r \\ \omega \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_r \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ m_b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

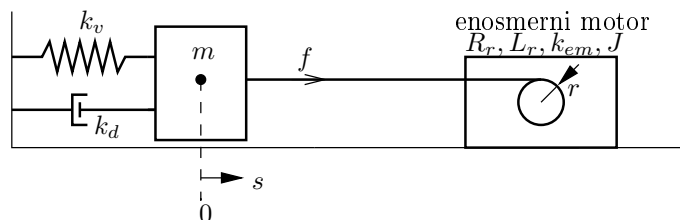
- **Vhodno - izhodni model**

$$\ddot{i}_r J L_r + \dot{i}_r (J R_r + k_{vt} L_r) + i_r (R_r k_{vt} + k_{em}^2) = \dot{v}_r J + k_{vt} v_r + k_{em} m_b$$

$$\ddot{\omega} J L_r + \dot{\omega} (J R_r + k_{vt} L_r) + \omega (R_r k_{vt} + k_{em}^2) = k_{em} v_r + \dot{m}_b L_r + R_r m_b$$

**Naloga 1.13**

Določite matematični model elektromehanskega sistema na sliki 1.14. Za premik mase služi enosmerni motor s trajnimi magneti, pri katerem zanemarimo vpliv viskoznega trenja. Model zapišite v prostoru stanja. Vhod naj predstavlja rotorska napetost motorja, izhod pa položaj težišča telesa z maso  $m$ . Trenje med telesom z maso  $m$  in podlago zanemarimo.



Slika 1.14: Elektromehanski sistem, naloga 1.13

**Rešitev**

Enačbe, ki opisujejo dinamiko sistema:

$$\begin{aligned} m\ddot{s} &= f - k_v s - k_d \dot{s} \\ J\dot{\omega} &= k_{em} i_r - f r \\ v_r &= \dot{i}_r R_r + L_r \dot{i}_r + k_{em} \omega \\ \omega &= \frac{\dot{s}}{r} \end{aligned}$$

Izbrana vhod in izhod modela sta:  $u = v_r$ ,  $y = s$ .

- **Model v prostoru stanja**

izbrane spremenljivke stanja so:  $x_1 = i_r$ ,  $x_2 = s$ ,  $x_3 = \dot{s} = v$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{i}_r \\ \dot{s} \\ \dot{v} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{R_r}{L_r} & 0 & -\frac{k_{em}}{L_r r} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_{em}}{m r} & -\frac{k_v}{m} & -\frac{k_d}{m} - \frac{J}{r^2 m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_r \\ s \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_r} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_r \\ s &= [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} i_r \\ s \\ v \end{bmatrix} + 0v_r \end{aligned}$$


---

## 1.4 Modeliranje nelinearnih sistemov in linearizacija

Pri podrobnejšem opazovanju sistemov v širšem območju delovanja dobimo za opis večine realnih sistemov nelinearne matematične modele, zapisane v obliki ((1.1) do (1.4)). Izhajali bomo iz matematičnega modela, zapisanega z enačbo (1.19) [16].

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (1.19)$$

Velikokrat nas zanima obnašanje nelinearnega modela v relativno majhni okolici ravnotežnega stanja. S pomočjo linearizacije nelinearnega modela za ustrezno ravnotežno stanje, dobimo lineariziran model, ki zadovoljivo opisuje dinamiko nelinearnega modela v relativno majhni okolici ravnotežnega stanja.

Ravnotežno stanje označimo z indeksom  $rs$ , odstopanje od ravnotežnega stanja pa z indeksom  $\Delta$ :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{rs} + \mathbf{x}_{\Delta}(t) \quad (1.20)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_{rs} + \mathbf{u}_{\Delta}(t) \quad (1.21)$$

Vektorja  $\mathbf{x}_{rs}$  in  $\mathbf{u}_{rs}$  izračunamo s pomočjo enačbe:

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{rs}, \mathbf{u}_{rs}) \Rightarrow \mathbf{x}_{rs}, \mathbf{u}_{rs} \quad (1.22)$$

Lineariziran model odstopanj v okolici ravnotežnega stanja zapišemo v obliki:

$$\dot{\mathbf{x}}_{\Delta}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_{\Delta}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_{\Delta}(t) \quad (1.23)$$

Sistemska in vhodna matriko lineariziranega sistema izračunamo z enačbama:

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_{rs}, \mathbf{u}_{rs})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(\mathbf{x}_{rs}, \mathbf{u}_{rs})} \quad (1.24)$$

$$\mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_{rs}, \mathbf{u}_{rs})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{(\mathbf{x}_{rs}, \mathbf{u}_{rs})} \quad (1.25)$$

kjer so  $f_1, f_2, \dots, f_n$  skalarne funkcije vektorskih spremenljivk, parametra  $n, m$  pa označujeta število spremenljivk stanja in vhodnih spremenljivk modela (1.1).

### Naloga 1.14

Segrevanje predmeta na osnovi toplotnega sevanja opisuje model:

$$\dot{y} = k(u^4 - y^4)$$

$u$  – temperatura peči (vhodna spremenljivka)

$y$  – temperatura predmeta, ki ga segrevamo (izhodna spremenljivka)

$k$  – koeficient segrevanja

Določite ravnotežno stanje, linearizirani model odstopanj in prenosno funkcijo lineariziranega modela.

### Rešitev

Iz enačbe

$$0 = k(u^4 - y^4)$$

je razvidno, da ima model neskončno ravnotežnih stanj, določenih s pogojem:

$$u_{rs} = y_{rs}$$

Model odstopanj dobimo z uporabo enačb (1.23) do (1.25):

$$A = \left. \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \right|_{(u_{rs}, y_{rs})} = -4ky_{rs}^3$$

$$B = \left. \frac{\partial \dot{y}}{\partial u} \right|_{(u_{rs}, y_{rs})} = 4ku_{rs}^3$$

Enačba lineariziranega modela je:

$$\dot{y}_\Delta = -4ky_{rs}^3 y_\Delta + 4ku_{rs}^3 u_\Delta$$

### Naloga 1.15

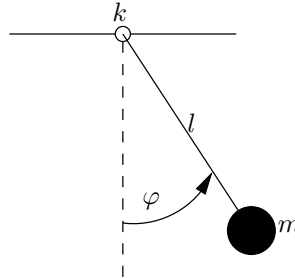
Dinamika nihala na sliki 1.15 je opisana z nelinearno diferencialno enačbo:

$$ml^2 \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi - k\dot{\varphi}$$

$m$  – masa nihala

$l$  – dolžina nihala

$k$  – koeficient viskoznega dušenja



Slika 1.15: Nihalo, naloga 1.15

Določite ravnotežno stanje in linearizirani model.

### Rešitev

Z uvedbo spremenljivk stanja  $x_1 = \varphi$  in  $x_2 = \dot{\varphi} = \omega$  zapišemo model nihala v prostoru stanja:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -\frac{g}{l} \sin \varphi - \frac{k}{ml^2} \omega\end{aligned}$$

Ravnotežno stanje dobimo z rešitvijo sistema enačb:

$$\begin{aligned}0 &= \omega \\ 0 &= -\frac{g}{l} \sin \varphi - \frac{k}{ml^2} \omega \\ \Rightarrow \varphi_{rs} &= 0, \quad \omega_{rs} = 0\end{aligned}$$

Linearizirani model dobimo z uporabo enačb (1.23) do (1.24):

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(x_{rs})} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos \varphi_{rs} & -\frac{k}{ml^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{ml^2} \end{bmatrix}$$

Enačba lineariziranega modela je:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_{\Delta} \\ \dot{\omega}_{\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{\Delta} \\ \omega_{\Delta} \end{bmatrix} \quad \text{ozirama} \quad \dot{\mathbf{x}}_{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{ml^2} \end{bmatrix} \mathbf{x}_{\Delta}$$

### Naloga 1.16

V biologiji sta dobro poznani Lotka-Volterrini diferencialni enačbi, ki opisujeta dinamiko razmnoževanja dveh živalskih vrst, ki prihajata v medsebojni konflikt kot ropar in plen. Diferencialni enačbi sta nelinearni [16]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (a_1 + b_1 x_1 + c_1 x_2) x_1 \\ \dot{x}_2 &= (a_2 + b_2 x_2 + c_2 x_1) x_2\end{aligned}$$

$x_1, x_2$  – število osebkov posamezne vrste

$a_1, a_2$  – koeficient prirastka posamezne vrste brez vpliva druge vrste

$b_1, b_2$  – koeficient, ki opisuje medsebojni vpliv znotraj ene same vrste

$c_1, c_2$  – koeficient, ki opisuje vpliv med obema vrstama

Za izbran numerični primer določite ravnotežno stanje in linearizirani model odstopanj.

$$\begin{aligned} a_1 = 10 & \quad b_1 = -1 & \quad c_1 = -5 \\ a_2 = -5 & \quad b_2 = -5 & \quad c_2 = 2 \end{aligned}$$

### Rešitev

Sistema enačb

$$\begin{aligned} 0 &= (a_1 + b_1 x_1 + c_1 x_2) x_1 \\ 0 &= (a_2 + b_2 x_2 + c_2 x_1) x_2 \end{aligned}$$

ima štiri rešitve:

$$\begin{aligned} x_{1rs} = 0 & \quad x_{1rs} = 0 \\ x_{1rs} = 0 & \quad x_{2rs} = -1 \\ x_{1rs} = 10 & \quad x_{2rs} = 0 \\ x_{1rs} = 5 & \quad x_{2rs} = 1 \end{aligned}$$

Za obravnavani primer je smiselna zadnja rešitev, ki predstavlja biološko ravnotežje obeh vrst:

$$x_{1rs} = 5, \quad x_{2rs} = 1$$

Matriko  $\mathbf{A}$  lineariziranega modela dobimo z uporabo enačb (1.23) do (1.25):

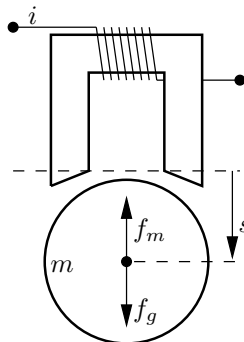
$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(x_{rs})} = \begin{bmatrix} a_1 + 2b_1 x_{1rs} + c_1 x_{2rs} & c_1 x_{1rs} \\ c_2 x_{2rs} & a_2 + 2b_2 x_{2rs} + c_2 x_{1rs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -25 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Enačba lineariziranega modela je:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1\Delta} \\ \dot{x}_{2\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -25 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1\Delta} \\ x_{2\Delta} \end{bmatrix}$$

### Naloga 1.17

Na sliki 1.16 je prikazan elektromehanski sistem krogle v magnetnem polju.



Slika 1.16: Krogla v magnetnem polju, naloga 1.17

Pomen oznak na sliki 1.16 je naslednji:

$i$  – tok skozi elektromagnet

$f_m$  – magnetna sila, ki deluje na kroglo

$f_g$  – sila teže krogle

$s$  – odmik krogle

$m$  – masa krogle

Sila, s katero elektromagnet deluje na kroglo, je opisana z enačbo:

$$f_m = k_m \frac{i^2}{s^2}$$

kjer parameter  $k_m$  opisuje vpliv odmika krogle in toka skozi elektromagnet na magnetno silo, ki deluje na kroglo.

Vhodno spremenljivko predstavlja tok skozi elektromagnet ( $u = i$ ), izhodno spremenljivko pa odmik težišča krogle ( $y = s$ ). Določite ravnotežno stanje in linearizirani model odstopanj.

### Rešitev

Nelinearni model sistema predstavlja enačba:

$$m\ddot{s} = mg - k_m \frac{i^2}{s^2}$$

Z uvedbo spremenljivk stanja  $x_1 = s$  in  $x_2 = \dot{s} = v$  zapišemo model sistema v prostoru stanja:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= v \\ \dot{v} &= g - \frac{k_m i^2}{m s^2} \end{aligned}$$

Ravnotežno stanje dobimo z rešitvijo sistema enačb:

$$\begin{aligned} 0 &= v_{rs} \\ 0 &= g - \frac{k_m i_{rs}^2}{m s_{rs}^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_{rs} = 0, \quad s_{rs} = i_{rs} \sqrt{\frac{k_m}{gm}}$$

Matriki zapisa modela v prostoru stanja določimo kot:

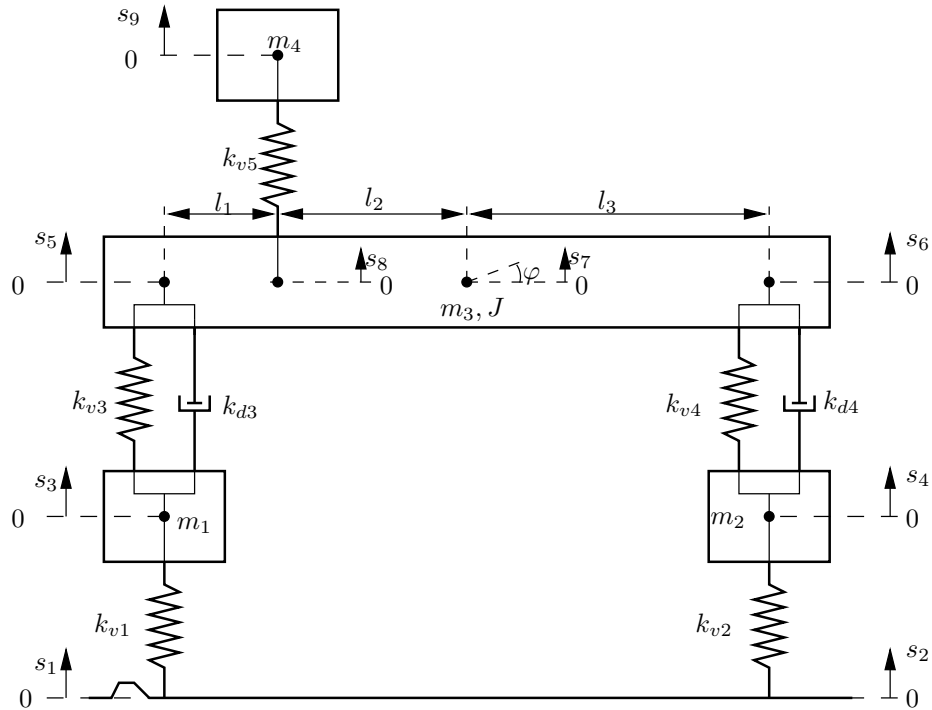
$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \left. \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(x_{rs}, u_{rs})} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 \frac{k_m i_{rs}^2}{m s_{rs}^3} & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{b} &= \left. \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial u} \right|_{(x_{rs}, u_{rs})} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \frac{k_m i_{rs}}{m s_{rs}^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Enačba lineariziranega modela je:

$$\begin{bmatrix} \dot{s}_\Delta \\ \dot{v}_\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 \frac{k_m i_{rs}^2}{m s_{rs}^3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_\Delta \\ v_\Delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \frac{k_m i_{rs}}{m s_{rs}^2} \end{bmatrix} i_\Delta$$

**Naloga 1.18**

Na sliki 1.17 je prikazan model vzmetenega dvokolesnega sistema (npr. motorno kolo). Telesi z masama  $m_1$  in  $m_2$  predstavljata kolesi sistema, vzmeti s koeficientoma  $k_{v1}$  in  $k_{v2}$  opisujeta pnevmatiki koles, vzmeti in dušilna elementa s parametri  $k_{v3}$ ,  $k_{d3}$ ,  $k_{v4}$  in  $k_{d4}$  predstavljata amortizerja (t. j. vzmet in dušilni element), telo z maso  $m_3$  in vztrajnostnim momentom  $J$  pa predstavlja okvir motocikla, na katerega je pričvrščen sedež. Sedež je vzmeten, vzmetenje sedeža je predstavljeno z vzmetjo s koeficientom  $k_{v5}$ . Na sedežu sedi voznik z maso  $m_4$ .



Slika 1.17: Dvokolesni sistem, naloga 1.18

Vhodni spremenljivki predstavljata položaja  $s_1$  in  $s_2$ , ki sta odvisna od konfiguracije terena, izhodno spremenljivko pa položaj težišča voznika  $s_9$ . Določite nelinearni in linearizirani model.

**Rešitev**

Nelinearni model sistema predstavljajo enačbe:

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{s}_3 &= k_{v1}(s_1 - s_3) + k_{v3}(s_5 - s_3) + k_{d3}(\dot{s}_5 - \dot{s}_3) \\
 m_2 \ddot{s}_4 &= k_{v2}(s_2 - s_4) + k_{v4}(s_6 - s_4) + k_{d4}(\dot{s}_6 - \dot{s}_4) \\
 m_3 \ddot{s}_7 &= k_{v3}(s_3 - s_5) + k_{d3}(\dot{s}_3 - \dot{s}_5) + k_{v4}(s_4 - s_6) + k_{d4}(\dot{s}_4 - \dot{s}_6) + k_{v5}(s_9 - s_8) \\
 m_4 \ddot{s}_9 &= k_{v5}(s_8 - s_9) \\
 J \ddot{\varphi} &= [k_{v4}(s_4 - s_6) + k_{d4}(\dot{s}_4 - \dot{s}_6)] l_3 \cos \varphi + [k_{v5}(s_8 - s_9)] l_2 \cos \varphi + \\
 &\quad + [k_{v3}(s_5 - s_3) + k_{d3}(\dot{s}_5 - \dot{s}_3)] (l_1 + l_2) \cos \varphi
 \end{aligned}$$

Ob upoštevanju enačb:

$$\begin{aligned}
 s_5 &= s_7 - (l_1 + l_2) \sin \varphi \\
 s_6 &= s_7 + l_3 \sin \varphi \\
 s_8 &= s_7 - l_2 \sin \varphi
 \end{aligned}$$



in izbiri spremenljivk stanja, vhodne in izhodne spremenljivke:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} s_3 \\ v_3 \\ s_4 \\ v_4 \\ s_7 \\ v_7 \\ s_9 \\ v_9 \\ \varphi \\ \omega \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}, \quad y = s_9$$

zapišemo nelinearni model sistema v prostoru stanja:

$$\begin{aligned} \dot{s}_3 &= v_3 \\ \dot{v}_3 &= \frac{1}{m_1} \{k_{v1}(s_1 - s_3) + k_{v3}[s_7 - (l_1 + l_2) \sin \varphi - s_3] + k_{d3}[v_7 - (l_1 + l_2)\omega \cos \varphi - v_3]\} \\ \dot{s}_4 &= v_4 \\ \dot{v}_4 &= \frac{1}{m_2} \{k_{v2}(s_2 - s_4) + k_{v4}(s_7 + l_3 \sin \varphi - s_4) + k_{d4}(v_7 + l_3\omega \cos \varphi - v_4)\} \\ \dot{s}_7 &= v_7 \\ \dot{v}_7 &= \frac{1}{m_3} \{k_{v3}[s_3 - s_7 + (l_1 + l_2) \sin \varphi] + k_{d3}[v_3 - v_7 + (l_1 + l_2) \cos \varphi \omega] \\ &\quad + k_{v4}[s_4 - (s_7 + l_3 \sin \varphi)] + k_{d4}[v_4 - (v_7 + l_3\omega \cos \varphi)] + k_{v5}[s_9 - (s_7 - l_2 \sin \varphi)]\} \\ \dot{s}_9 &= v_9 \\ \dot{v}_9 &= \frac{1}{m_4} k_{v5}(s_7 - l_2 \sin \varphi - s_9) \\ \dot{\varphi} &= \omega \\ \dot{\omega} &= \frac{1}{J} \{[k_{v4}(s_4 - (s_7 + l_3 \sin \varphi)) + k_{d4}(v_4 - (v_7 + l_3\omega \cos \varphi))] l_3 \cos \varphi \\ &\quad + [k_{v5}(s_7 - l_2 \sin \varphi - s_9)] l_2 \cos \varphi \\ &\quad + [k_{v3}(s_7 - (l_1 + l_2) \sin \varphi - s_3) + k_{d3}(v_7 - (l_1 + l_2) \cos \varphi \omega - v_3)] (l_1 + l_2) \cos \varphi\} \end{aligned}$$

Izberemo ravnotežno stanje:

$$\mathbf{x}_{rs} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{rs} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in izračunamo sistemsko in vhodno matriko lineariziranega modela:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(x_{rs}, u_{rs})} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-k_{v1}-k_{v3}}{m_1} & -\frac{k_{d3}}{m_1} & 0 & 0 & \frac{k_{v3}}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-k_{v2}-k_{v4}}{m_2} & \frac{-k_{d4}}{m_2} & \frac{k_{v4}}{m_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_{v3}}{m_3} & \frac{k_{d3}}{m_3} & \frac{k_{v4}}{m_3} & \frac{k_{d4}}{m_3} & \frac{-k_{v3}-k_{v4}-k_{v5}}{m_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k_{v5}}{m_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_{v3}(l_1+l_2)}{J} & \frac{k_{d3}(l_1+l_2)}{J} & \frac{k_{v4}l_3}{J} & \frac{k_{d4}l_3}{J} & \frac{-k_{v4}l_3+k_{v5}l_2+k_{v3}(l_1+l_2)}{J} \\ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_{d3}}{m_1} & 0 & 0 & \frac{(-l_1-l_2)k_{v3}}{m_1} & \frac{(-l_1-l_2)k_{d3}}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_{d4}}{m_2} & 0 & 0 & \frac{l_2k_{v4}}{m_2} & \frac{l_3k_{d4}}{m_2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-k_{d3}-k_{d4}}{m_3} & \frac{k_{v5}}{m_3} & 0 & \frac{k_{v3}(l_1+l_2)+k_{v4}l_3+k_{v5}l_2}{m_3} & \frac{k_{d3}(l_1+l_2)-k_{d4}l_3}{m_3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-k_{v5}}{m_4} & 0 & \frac{-k_{v5}l_2}{m_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_{d4}l_3+k_{d3}(l_1+l_2)}{J} & \frac{-l_2k_{v5}}{J} & 0 & \frac{-k_{v4}l_3^2-k_{v5}l_2^2-k_{v3}(l_1+l_2)^2}{J} & \frac{-k_{v4}l_3^2-k_{v3}(l_1+l_2)^2}{J} \end{bmatrix}$$

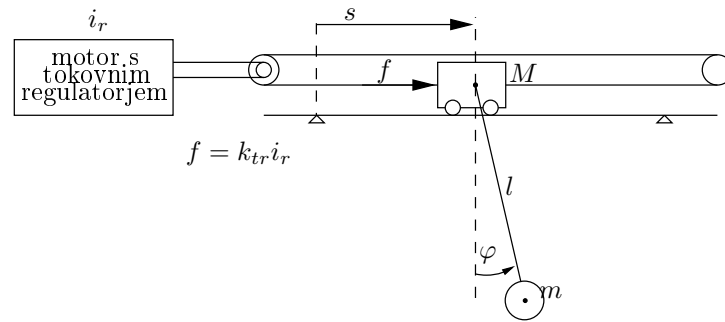
$$\mathbf{B} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{(x_{rs}, u_{rs})} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k_{v1}}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_{v2}}{m_2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

---

### Naloga 1.19

Na sliki 1.18 je prikazan model nakladalnega mostiča. Za premikanje bremena služi voziček z maso  $M$ , na katerega je z neraztegljivo vrvico dolžine  $l$  pritrjeno breme z maso  $m$ . Za premikanje vozička je uporabljen elektromotorni pogon, kjer je motor opremljen s tokovnim regulatorjem [16].



Slika 1.18: Nakladalni mostič s pogonom s tokovnim regulatorjem, naloga 1.19

Pomen oznak na sliki 1.18 je naslednji:

$M$  – masa vozička

$m$  – masa bremena

$l$  – dolžina vrvice

$s$  – odmik vozička

$\varphi$  – kot med vrstico in navpičnico

$f$  – sila, s katero pogon deluje na voziček

$i_r$  – referenčna vrednost toka regulacijskega sistema motorja s tokovnim regulatorjem

Povezavo med referenčno vrednostjo tokovnega regulatorja elektromotorja in silo, ki deluje na voziček, opisuje enačba

$$f = k_{tr} i_r$$

kjer je parameter  $k_{tr}$  odvisen od koeficienta za izračun navora elektromotorja in od geometrijskih podatkov mehanskega sistema, ki rotacijsko gibanje elektromotorja pretvori v linearno gibanje vozička. Dinamiko motorja s tokovno regulacijo zanemarimo.

Vhodno spremenljivko predstavlja referenčna vrednost tokovnega regulatorja  $u = i_r$ . Izhodno spremenljivko predstavlja položaj težišča vozička  $y = s$ . Določite nelinearni model in linearizirani model. Pri izpeljavi modela zanemarite trenje med nakladalnim vozičkom in podlago ter maso vrvi.

### Rešitev

Gibanje vozička v horizontalni smeri opišemo z enačbo:

$$M \frac{d^2}{dt^2} s = f + F_{vr} \sin \varphi,$$

kjer je  $F_{vr}$  sila, s katero je napeta vrstica.

Horizontalno gibanje bremena opišemo z enačbo:

$$m \frac{d^2}{dt^2} (s + l \sin \varphi) = -F_{vr} \sin \varphi,$$

vertikalno gibanje bremena opišemo z enačbo:

$$m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \varphi) = mg - F_{vr} \cos \varphi.$$

Iz enačbe za horizontalno gibanje bremena izrazimo silo vrvi  $F_{vr}$ :

$$F_{vr} = -\frac{m}{\sin \varphi}(\ddot{s} + l\ddot{\varphi} \cos \varphi - l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi)$$

in dobljeni izraz vstavimo v ostali dve enačbi. Dobimo:

$$\begin{aligned}(M + m)\ddot{s} + ml(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) &= f \\ \ddot{s} \cos \varphi + l\ddot{\varphi} &= -g \sin \varphi\end{aligned}$$

Iz dobljenega sistema enačb izrazimo  $\ddot{s}$  in  $\ddot{\varphi}$ :

$$\begin{aligned}\ddot{s} &= \frac{f + (g \cos \varphi + l\dot{\varphi}^2)m \sin \varphi}{M + m \sin^2 \varphi} \\ \ddot{\varphi} &= -\frac{f \cos \varphi + (g + l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi)m \sin \varphi + gM \sin \varphi}{l(M + m \sin^2 \varphi)}\end{aligned}$$

Izberemo spremenljivke stanja:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} s \\ v \\ \varphi \\ \omega \end{bmatrix}$$

in ob upoštevanju enačbe  $f = k_{tr}i_r$  zapišemo nelinearni model sistema v prostoru stanja:

$$\begin{aligned}\dot{s} &= v \\ \dot{v} &= \frac{k_{tr}i_r + (g \cos \varphi + l\omega^2)m \sin \varphi}{M + m \sin^2 \varphi} \\ \dot{\varphi} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -\frac{k_{tr}i_r \cos \varphi + (g + l\omega^2 \cos \varphi)m \sin \varphi + gM \sin \varphi}{l(M + m \sin^2 \varphi)}\end{aligned}$$

Izberemo ravnotežno stanje:

$$\mathbf{x}_{r,s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{r,s} = u$$

in izračunamo sistemsko in vhodno matriko lineariziranega modela odstopanj:

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(x_{r,s}, u_{r,s})} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{g(m+M)}{lM} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \left. \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial u} \right|_{(x_{rs}, u_{rs})} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_{tr}}{M} \\ 0 \\ -\frac{k_{tr}}{Ml} \end{bmatrix}$$

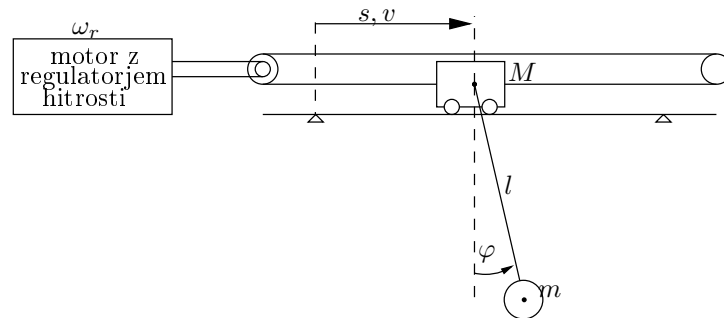
Linearizirani model je:

$$\begin{bmatrix} \dot{s}_\Delta \\ \dot{v}_\Delta \\ \dot{\varphi}_\Delta \\ \dot{\omega}_\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{g(m+M)}{lM} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_\Delta \\ v_\Delta \\ \varphi_\Delta \\ \omega_\Delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_{tr}}{M} \\ 0 \\ \frac{k_{tr}}{Ml} \end{bmatrix} i_{r\Delta}$$

$$s_\Delta = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} s_\Delta \\ v_\Delta \\ \varphi_\Delta \\ \omega_\Delta \end{bmatrix} + 0i_{r\Delta}$$

### Naloga 1.20

Na sliki 1.19 je prikazan model nakladalnega mostiča s pogonom z regulatorjem hitrosti.



Slika 1.19: Nakladalni mostič s pogonom z regulatorjem hitrosti, naloga 1.20

Pomen oznak na sliki 1.19 je naslednji:

$M$  – masa vozička

$m$  – masa bremena

$l$  – dolžina vrvice

$s$  – odmik vozička

$\varphi$  – kot med vrstico in navpičnico

$v$  – hitrost vozička

$\omega_r$  – referenčna vrednost hitrosti regulacijskega sistema motorja z regulatorjem hitrosti

Povezavo med referenčno vrednostjo regulatorja hitrosti in hitrostjo vozička opisuje diferencialna enačba prvega reda:

$$T_\omega \dot{v} + v = \omega_r$$

kjer je s  $T_\omega$  označena časovna konstanta člena prvega reda.

Vhodno spremenljivko predstavlja referenčna vrednost regulatorja hitrosti  $u = \omega_r$ , izhodno spremenljivko predstavlja položaj težišča vozička  $y = s$ . Določite linearizirani model. Pri izpeljavi modela zanemarite trenje med nakladalnim vozičkom in podlago, izgube v prijemališču vrvi ter maso vrvi.

### Rešitev

Izberemo spremenljivke stanja:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} s \\ v \\ \varphi \\ \omega \end{bmatrix}$$

Za ravnotežno stanje

$$\mathbf{x}_{r,s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{r,s} = 0$$

izračunamo sistemsko in vhodno matriko lineariziranega modela:

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(x_{r,s}, u_{r,s})} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{lT_\omega} & -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \left. \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial u} \right|_{(x_{r,s}, u_{r,s})} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{T_\omega} \\ 0 \\ -\frac{k}{lT_\omega} \end{bmatrix}$$

Linearizirani model, ki opisuje obnašanje sistema v okolici izbrane delovne točke, je:

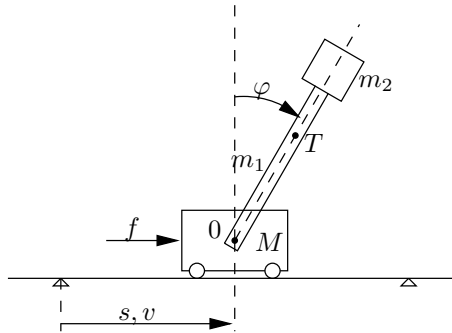
$$\begin{bmatrix} \dot{s}_\Delta \\ \dot{v}_\Delta \\ \dot{\varphi}_\Delta \\ \dot{\omega}_\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{lT_\omega} & -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_\Delta \\ v_\Delta \\ \varphi_\Delta \\ \omega_\Delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{T_\omega} \\ 0 \\ -\frac{k}{lT_\omega} \end{bmatrix} \omega_{r,\Delta}$$

$$s_{Delta} = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} s_\Delta \\ v_\Delta \\ \varphi_\Delta \\ \omega_\Delta \end{bmatrix} + 0\omega_{r,\Delta}$$


---

**Naloga 1.21**

Na sliki 1.20 je prikazan model inverznega nihala.



Slika 1.20: Inverzno nihalo, naloga 1.21

Pomen oznak na sliki 1.20 je naslednji:

$M$  – masa vozička

$m_1$  – masa palice

$m_2$  – masa uteži

$m$  – masa palice in uteži ( $m = m_1 + m_2$ )

$l$  – dolžina od točke  $O$ , v kateri je palica pritrjena na voziček, do točke skupnega težišča palice z utežjo (točke  $T$ )

$J$  – vztrajnostni moment palice in uteži okoli točke skupnega težišča ( $T$ )

$k_{vt}$  – koeficient viskoznega tenja med vozičkom in podlago

Vhodno spremenljivko predstavlja sila, ki deluje na voziček ( $u = f$ ), za izhodni spremenljivki pa izberemo položaj težišča vozička in kotni odmik palice od vertikalne lege ( $\mathbf{y} = [s \ \varphi]^T$ ). Določite nelinearni model in linearizirani model.

**Rešitev**

Komponenti sile, s katero deluje voziček na palico (in obratno) označimo na naslednji način:

$H$  – horizontalna komponenta sile med vozičkom in palico

$V$  – vertikalna komponenta sile med vozičkom in palico

Horizontalno gibanje težišča palice z utežjo opišemo z enačbo:

$$m \frac{d^2}{dt^2} (s + l \sin \varphi) = H$$

vertikalno gibanje težišča palice z utežjo pa z enačbo:

$$m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \varphi) = V - mg$$

Vrtenje palice z utežjo okoli njunega težišča opisuje enačba:

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = Vl \sin \varphi - Hl \cos \varphi,$$

Gibanje vozička v horizontalni smeri:

$$M \frac{d^2 s}{dt^2} = f - H - k_{vt} \frac{ds}{dt},$$

V prvih dveh enačbah izračunamo odvoda:

$$\begin{aligned} m(\ddot{s} + l\ddot{\varphi} \cos \varphi - l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi) &= H \\ -ml(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) &= V - mg \end{aligned}$$

izrazimo komponenti  $V$  in  $H$  in ju vstavimo v preostali dve enačbi. Dobimo:

$$\begin{aligned} (J + ml^2)\ddot{\varphi} - ml(g \sin \varphi - \ddot{s} \cos \varphi) &= 0 \\ (M + m)\ddot{s} + ml(\ddot{\varphi} \cos \varphi + \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) + k_{vt}\dot{s} &= f \end{aligned}$$

Iz tako dobljenega sistema nelinearnih enačb izrazimo  $\ddot{s}$  in  $\ddot{\varphi}$ :

$$\begin{aligned} \ddot{s} &= \frac{1}{M + m} \cdot \\ &\left\{ f - k_{vt}\dot{s} - m^2 l^2 \left[ \frac{g \sin \varphi \cos \varphi (M + m) - \cos^2 \varphi (f - k_{vt}\dot{s} + \dot{\varphi}^2 \sin \varphi)}{(M + m)(J + ml^2) - m^2 l^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\dot{\varphi}^2 \sin \varphi}{ml} \right] \right\} \\ \ddot{\varphi} &= \frac{ml [g \sin \varphi (M + m) - \cos \varphi (f - k_{vt}\dot{s} + \dot{\varphi}^2 \sin \varphi)]}{(M + m)(J + ml^2) - m^2 l^2 \cos^2 \varphi} \end{aligned}$$

Izberemo spremenljivke stanja:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ \dot{s} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

in zapišemo nelinearni model s sistemom diferencialnih enačb prvega reda:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{M + m} \cdot \\ &\left\{ f - k_{vt}x_2 - m^2 l^2 \left[ \frac{g \sin x_3 \cos x_3 (M + m) - \cos^2 x_3 (f - k_{vt}x_2 + x_4^2 \sin x_3)}{(M + m)(J + ml^2) - m^2 l^2 \cos^2 x_3} + \frac{x_4^2 \sin x_3}{ml} \right] \right\} \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{ml [g \sin x_3 (M + m) - \cos x_3 (f - k_{vt}x_2 + x_4^2 \sin x_3)]}{(M + m)(J + ml^2) - m^2 l^2 \cos^2 x_3} \end{aligned}$$



Enačbe nelinearnega modela odvajamo po spremenljivkah stanja in vhodni spremenljivki in dobimo:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{1\Delta} &= 1 \Big|_{\mathbf{x}_0, u_0} x_{2\Delta} \\
\dot{x}_{2\Delta} &= \left[ -k_{vt} - \frac{m^2 l^2 \cos(x_3)^2 k_{vt}}{(M+m)(J+ml^2) - m^2 l^2 \cos(x_3)^2} \right] (M+m)^{-1} \Big|_{\mathbf{x}_0, u_0} x_{2\Delta} \\
&\quad - m^2 l^2 \left( \frac{g \cos(x_3)^2 (M+m) - g \sin(x_3)^2 (M+m)}{(M+m)(J+ml^2) - m^2 l^2 \cos(x_3)^2} \right. \\
&\quad + \frac{2 \cos(x_3) (u - k_{vt} x_2 + x_4^2 \sin(x_3)) \sin(x_3) - \cos(x_3)^3 x_4^2}{(M+m)(J+ml^2) - m^2 l^2 \cos(x_3)^2} \\
&\quad \left. - \frac{(2g \sin(x_3) \cos(x_3) (M+m) - 2 \cos(x_3)^2 (u - k_{vt} x_2 + x_4^2 \sin(x_3))) m^2 l^2 \cos(x_3) \sin(x_3)}{((M+m)(J+ml^2) - m^2 l^2 \cos(x_3)^2)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{x_4^2 \cos(x_3)}{ml} \right) (M+m)^{-1} \Big|_{\mathbf{x}_0, u_0} x_{3\Delta} \\
&\quad - m^2 l^2 \left( \frac{2 \cos(x_3)^2 x_4 \sin(x_3)}{(M+m)(J+ml^2) - m^2 l^2 \cos(x_3)^2} + \frac{2 x_4 \sin(x_3)}{ml} \right) (M+m)^{-1} \Big|_{\mathbf{x}_0, u_0} x_{4\Delta} \\
&\quad + \left( 1 + \frac{m^2 l^2}{(M+m)(J+ml^2) - m^2 l^2} \right) (M+m)^{-1} \Big|_{\mathbf{x}_0, u_0} u_{\Delta} \\
\dot{x}_{3\Delta} &= 1 \Big|_{\mathbf{x}_0, u_0} x_{4\Delta} \\
\dot{x}_{4\Delta} &= \frac{ml \cos(x_3) k_{vt}}{(M+m)(J+ml^2) - m^2 l^2 \cos(x_3)^2} \Big|_{\mathbf{x}_0, u_0} x_{2\Delta} \\
&\quad + \frac{ml (g \cos(x_3) (M+m) + \sin(x_3) (u - k_{vt} x_2 + x_4^2 \sin(x_3)) - \cos(x_3)^2 x_4^2)}{(M+m)(J+ml^2) - m^2 l^2 \cos(x_3)^2} \\
&\quad - \frac{2 m^3 l^3 (g \sin(x_3) (M+m) - \cos(x_3) (u - k_{vt} x_2 + x_4^2 \sin(x_3))) \cos(x_3) \sin(x_3)}{((M+m)(J+ml^2) - m^2 l^2 \cos(x_3)^2)^2} \Big|_{\mathbf{x}_0, u_0} x_{3\Delta} \\
&\quad - \frac{2 ml \cos(x_3) x_4 \sin(x_3)}{(M+m)(J+ml^2) - m^2 l^2 \cos(x_3)^2} \Big|_{\mathbf{x}_0, u_0} x_{4\Delta} \\
&\quad - \frac{ml}{(M+m)(J+ml^2) - m^2 l^2} \Big|_{\mathbf{x}_0, u_0} u_{\Delta}
\end{aligned}$$

Za ravnotežno stanje:

$$\mathbf{x}_{rs} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_{rs} = 0$$

dobimo linearizirani model:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{1\Delta} &= x_{2\Delta} \\
\dot{x}_{2\Delta} &= a_{22} x_{2\Delta} + a_{23} x_{3\Delta} + b_{2\Delta} u_{\Delta} \\
\dot{x}_{3\Delta} &= x_{4\Delta} \\
\dot{x}_{4\Delta} &= a_{42} x_{2\Delta} + a_{43} x_{3\Delta} + b_4 u_{\Delta}
\end{aligned}$$

katerega parametre izračunamo z enačbami:

$$a_{22} = -\frac{k_{vt}}{M+m} - \frac{k_{vt} m^2 l^2}{(M+m)^2 a},$$

$$\begin{aligned}
 a_{23} &= \frac{-m^2 l^2 g}{(M+m)a}, \\
 a_{42} &= \frac{k_{vt} m l}{(M+m)a}, \\
 a_{43} &= \frac{m l g}{a}, \\
 b_2 &= \frac{m^2 l^2}{(M+m)^2 a} + \frac{1}{M+m}, \\
 b_4 &= -\frac{m l}{(M+m)a},
 \end{aligned}$$

kjer je:

$$a = J + m l^2 - \frac{m^2 l^2}{M+m}.$$

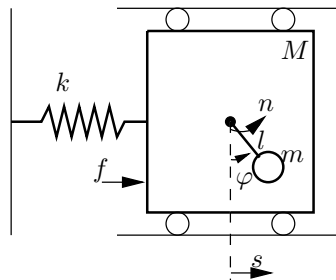
Linearizirani model inverznega nihala zapišemo v vektorsko-matrični obliki:

$$\dot{\mathbf{x}}_{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{\Delta} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{bmatrix} u_{\Delta} = \mathbf{A} \mathbf{x}_{\Delta} + \mathbf{B} u_{\Delta}$$

$$\mathbf{y}_{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{\Delta} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_{\Delta} = \mathbf{C} \mathbf{x}_{\Delta} + \mathbf{D} u_{\Delta}$$

### Naloga 1.22

Na sliki 1.21 je prikazan mehanski sistem vozička z nihalom.



Slika 1.21: Mehanski sistem vozička z nihalom, naloga 1.22

Pomen oznak na sliki 1.21 je naslednji:

$M$  – masa vozička

$m$  – masa bremena na nihalu

$l$  – dolžina od točke, v kateri je nihalo pritrjeno na voziček do točke skupnega težišča nihala

$J$  – vztrajnostni moment nihala okoli točke težišča

$k$  – koeficient vzmeti

$f$  – sila, s katero delujemo na voziček

$n$  – navor, s katerim delujemo na nihalo

$\varphi$  – odmik nihala iz ravnotežnega položaja

$s$  – relativni premik vozička v horizontalni smeri

Vhodni spremenljivki predstavljata sila, ki deluje na voziček in navor, ki deluje na nihalo ( $\mathbf{u} = [f \ n]^T$ ), izhodni spremenljivki pa položaj težišča vozička in kotni odmik nihala od vertikalne lege ( $\mathbf{y} = [s \ \varphi]^T$ ). Določite nelinearni in linearizirani model.

### Rešitev

Komponenti sile, s katero deluje voziček na palico nihala (in obratno), definiramo:

$H$  – horizontalna komponenta sile med vozičkom in palico

$V$  – vertikalna komponenta sile med vozičkom in palico

Horizontalno gibanje težišča nihala opišemo z enačbo:

$$m \frac{d^2}{dt^2} (s + l \sin \varphi) = H$$

vertikalno gibanje težišča nihala podamo z enačbo:

$$m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \varphi) = V + mg$$

vrtenje nihala okoli težišča opisuje enačba:

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = Vl \sin \varphi - Hl \cos \varphi + n$$

Gibanje vozička v horizontalni smeri:

$$M \frac{d^2 s}{dt^2} = f - H - ks,$$

V prvih dveh enačbah rešimo odvoda

$$\begin{aligned} m(\ddot{s} + l\ddot{\varphi} \cos \varphi - l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi) &= H \\ -ml(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) &= V + mg \end{aligned}$$

izrazimo komponenti  $V$  in  $H$  in jih vstavimo v preostali dve enačbi. Dobimo:

$$\begin{aligned} (J + ml^2)\ddot{\varphi} &= n - ml \cos \varphi \ddot{s} - mlg \sin \varphi \\ (M + m)\ddot{s} &= f - ks - ml\ddot{\varphi} \cos \varphi + ml\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \end{aligned}$$

Iz tako dobljenega sistema nelinearnih enačb izrazimo  $\ddot{s}$  in  $\ddot{\varphi}$ :

$$\begin{aligned} \ddot{s} &= \frac{(J + ml^2)(f - ks) + m^2 l^2 g \sin \varphi \cos \varphi - nml \cos \varphi}{(J + ml^2)(M + m) - m^2 l^2 \cos^2 \varphi} \\ \ddot{\varphi} &= \frac{(M + m)(-mgl \sin \varphi + n) - ml \cos \varphi (f - ks + ml\dot{\varphi}^2 \sin \varphi)}{(J + ml^2)(M + m) - m^2 l^2 \cos^2 \varphi} \end{aligned}$$

Izberemo spremenljivke stanja:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ v \\ \varphi \\ \omega \end{bmatrix}$$

in zapišemo nelinearni model s sistemom diferencialnih enačb prvega reda:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= v \\ \dot{v} &= \frac{(J + ml^2)(f - ks) + m^2 l^2 g \sin \varphi \cos \varphi - nml \cos \varphi}{(J + ml^2)(M + m) - m^2 l^2 \cos^2 \varphi} \\ \dot{\varphi} &= \omega \\ \dot{\omega} &= \frac{(M + m)(-mgl \sin \varphi + n) - ml \cos \varphi (f - ks + ml \dot{\varphi}^2 \sin \varphi)}{(J + ml^2)(M + m) - m^2 l^2 \cos^2 \varphi} \end{aligned}$$

Za ravnotežno stanje izberemo:

$$\mathbf{x}_{rs} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{rs} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in po odvajanju nelinearnega modela dobimo linearizirani model v naslednji obliki:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{s}_\Delta \\ \dot{v}_\Delta \\ \dot{\varphi}_\Delta \\ \dot{\omega}_\Delta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-k(J+ml^2)}{(m+M)(J+ml^2)-m^2l^2} & 0 & \frac{m^2l^2g}{(M+m)(J+ml^2)-m^2l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{kml}{(m+M)(J+ml^2)-m^2l^2} & 0 & \frac{-(m+M)mgl}{(m+M)(J+ml^2)-m^2l^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_\Delta \\ v_\Delta \\ \varphi_\Delta \\ \omega_\Delta \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{J+ml^2}{(m+M)(J+ml^2)-m^2l^2} & \frac{ml}{(M+m)(J+ml^2)-m^2l^2} \\ 0 & 0 \\ \frac{-ml}{(m+M)(J+ml^2)-m^2l^2} & \frac{m+M}{(m+M)(J+ml^2)-m^2l^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_\Delta \\ n_\Delta \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} s_\Delta \\ \varphi_\Delta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_\Delta \\ v_\Delta \\ \varphi_\Delta \\ \omega_\Delta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## 1.5 Pristop k modeliranju ob uporabi Lagrangeove enačbe

Pri takšnem načinu modeliranja zapišemo diferencialne enačbe sistemov s pomočjo Lagrangeovih enačb upoštevajoč energijske koncepte. Modeliranje s pomočjo Lagrangeovih enačb je primerno za različne sisteme: mehanske, elektriške, termične, hidravlične, pnevmatske, elektromehanske, ...

Za izbrano predstavitev najprej izberemo tako imenovane posplošene koordinate. Posplošene koordinate so končne in odvedljive (vsaj do druge stopnje) časovne funkcije. Njihovo število je enako številu prostostnih stopenj sistema (t. j. številu neodvisnih možnosti gibanja telesa). Označimo jih s:  $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$ .

Postopek izpeljave matematičnega modela s pomočjo Lagrangeovih enačb razdelimo v 6 faz [17]-[30]:

1. Izberemo primerne posplošene koordinate, ki enolično določajo stanje sistema.
2. Zapišemo izraz, ki na osnovi posplošenih koordinat in njihovih odvodov (t. j. posplošenih hitrosti) določa kinetično energijo sistema:

$$W_k(\dot{q}) = h_1(\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_n(t)) \quad (1.26)$$

3. Za konzervativne sisteme (v njih nastopajo samo potencialna polja, to so polja, pri katerih je delo odvisno samo od začetne in končne točke in je neodvisno od poti) napišemo izraz za potencialno energijo sistema:

$$W_p(q) = h_2(q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)) \quad (1.27)$$

Potencialna energija je odvisna samo od posplošenih koordinat sistema in ne od njihovih odvodov.

4. Za bolj kompakten zapis končnih enačb uvedemo Lagrangeovo funkcijo (uporabljamo tudi izraza lagranžijan ali potencial  $L$ ), ki predstavlja razliko med izraženo kinetično in potencialno energijo:

$$L(q, \dot{q}) = W_k(\dot{q}) - W_p(q) \quad (1.28)$$

5. Po izpeljavi (v učbeniku smo izpeljavo izpustili) zapišemo Lagrangeeve enačbe za konzervativne sisteme:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_i} = 0 \quad (1.29)$$

kjer indeks  $i$  označuje izbrano posplošeno koordinato.

V primeru sistemov, v katerih nastopajo konzervativne in nekonzervativne sile, zapišemo enačbo 1.29 v obliki:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_i} = \sum f \quad (1.30)$$

Izraz na desni strani predstavlja vsoto sil, ki niso bile upoštevane pri izračunu potencialne energije (1.27).

Lagrangeeve enačbe napišemo za vse posplošene koordinate. Dobimo toliko diferencialnih enačb, kot je posplošenih koordinat.

6. Dobljene diferencialne enačbe lahko v nadaljevanju pretvorimo v standardno obliko zapisa parametričnih modelov dinamičnih sistemov v prostoru stanja (1.19):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (1.31)$$

### Naloga 1.23

Zapišite matematični model prostega pada točkastega telesa z maso  $m$ . Silo zračnega upora zanemarite.

### Rešitev

Postopek izpeljave matematičnega modela s pomočjo Lagrangeove enačbe razdelimo v 6 faz:

1. Izberemo posplošeno koordinato, ki enolično določa stanje sistema. Definiramo tudi odvod posplošene koordinate:

$$\begin{aligned} q(t) &= s(t) \\ \dot{q}(t) &= v(t) \end{aligned}$$

$s(t)$  – vertikalni pomik telesa v smeri navzdol

$v(t)$  – vertikalna hitrost telesa v smeri navzdol

2. Zapišemo izraz za kinetično energijo sistema ( $W_k$ ):

$$W_k(\dot{q}(t)) = \frac{mv^2(t)}{2}$$

pri čemer predstavlja  $m$  maso telesa.

3. Zapišemo izraz za potencialno energijo sistema ( $W_p$ ):

$$W_p(q(t)) = -mgs(t)$$

kjer je  $g$  težni pospešek prostega pada.

4. Lagrangeova funkcija  $L(q(t), \dot{q}(t))$  tako dobi naslednjo obliko:

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = W_k(\dot{q}(t)) - W_p(q(t)) = \frac{mv^2(t)}{2} + mgs(t)$$

5. Izračunamo potrebne odvode Lagrangeove funkcije:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}(t)} &= \frac{\partial \left( \frac{mv^2(t)}{2} + mgs(t) \right)}{\partial v(t)} = mv(t) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}(t)} \right) &= \frac{d}{dt} (mv(t)) = m\dot{v}(t) \\ \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial q(t)} &= \frac{\partial \left( \frac{mv^2(t)}{2} + mgs(t) \right)}{\partial s(t)} = mg \end{aligned}$$

Končno zapišemo Lagrangeovo enačbo za obravnavani konzervativni sistem:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}(t)} \right) - \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial q(t)} &= 0 \\ m\dot{v}(t) - mg &= 0 \end{aligned}$$

6. Dobljeno diferencialno enačbo po uvedbi spremenljivk stanja

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

pretvorimo v standardno obliko zapisa parametričnih modelov v prostoru stanja:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

to je:

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= g \end{aligned}$$


---

**Naloga 1.24**

Zapišite matematični model prostega pada točkastega telesa z maso  $m$ . Upoštevajte silo zračnega upora padajočega telesa. Sila zračnega upora je proporcionalna kvadratu hitrosti [21].

**Rešitev**

Postopek izpeljave matematičnega modela ponovno razdelimo v 6 faz:

1. Kot posplošeno koordinato  $q(t)$  izberemo pomik opazovanega telesa  $s(t)$ . Definirajmo tudi odvod posplošene koordinate:

$$\begin{aligned} q(t) &= s(t) \\ \dot{q}(t) &= v(t) \end{aligned}$$

kjer je:

- $s(t)$  – vertikalni pomik telesa v smeri navzdol,
- $v(t)$  – vertikalna hitrost telesa v smeri navzdol.

2. Izraz za kinetično energijo lahko predstavimo kot:

$$W_k(\dot{q}(t)) = \frac{mv^2(t)}{2}$$

kjer je  $m$  masa telesa.

3. Zapišemo še izraz za potencialno energijo sistema:

$$W_p(q(t)) = -mgs(t)$$

kjer je  $g$  pospešek prostega pada.

4. Lagrangeovo funkcijo  $L(q(t), \dot{q}(t))$  lahko zapišemo kot:

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = W_k(\dot{q}(t)) - W_p(q(t)) = \frac{mv^2(t)}{2} + mgs(t)$$

5. Izračunamo potrebne odvode Lagrangeove funkcije:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}(t)} &= \frac{\partial \left( \frac{mv^2(t)}{2} + mgs(t) \right)}{\partial v(t)} = mv(t) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}(t)} \right) &= \frac{d}{dt} (mv(t)) = m\dot{v}(t) \\ \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial q(t)} &= \frac{\partial \left( \frac{mv^2(t)}{2} + mgs(t) \right)}{\partial s(t)} = mg \end{aligned}$$

Enačba za silo zračnega upora  $f(t)$  ima naslednjo obliko:

$$f(t) = -\frac{c_w \rho S}{2} v^2(t)$$

kjer je pomen oznak v gornji enačbi naslednji:

- $c_w$  – koeficient upora,
- $\rho$  – gostota okoliškega medija,
- $S$  – čelni presek telesa.

Tako dobi Lagrangeova enačba naslednjo obliko:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}(t)} \right) - \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial q} (t) = \sum f(t)$$

$$m\dot{v}(t) - mg = -\frac{c_w \rho}{2} v^2(t)$$

6. Dobljeno diferencialno enačbo po uvedbi spremenljivk stanja

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

pretvorimo v standardno obliko zapisa parametričnih modelov v prostoru stanja:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

to je:

$$\dot{s}(t) = v(t)$$

$$\dot{v}(t) = g - \frac{c_w \rho S}{2m} v^2(t)$$

### Naloga 1.25

Zapišite model matematičnega nihala dolžine  $l$  ob uporabi Lagrangeovega pristopa k modeliranju (slika 1.15). Zanemarite silo trenja v osi vrtenja ( $k = 0$ ) [21].

### Rešitev

Postopek izpeljave matematičnega modela ponovno razdelimo v 6 faz:

1. Kot posplošeno koordinato izberemo zasuk  $\varphi(t)$ . Definiramo tudi odvod posplošene koordinate:

$$q(t) = \varphi(t)$$

$$\dot{q}(t) = \omega(t)$$

Pomen opazovanih veličin je naslednji:

$\varphi(t)$  – kotni odmik nihala od navpične lege,  
 $v(t)$  – kotna hitrost nihala.

2. Zapišemo izraz za kinetično energijo sistema ( $W_k$ ):

$$W_k(\dot{q}(t)) = \frac{ml^2 \omega^2(t)}{2}$$

kjer je  $m$  masa telesa.

3. Zapišemo izraz za potencialno energijo sistema ( $W_p$ ):

$$W_p(q(t)) = mgl(1 - \cos(\varphi(t)))$$

kjer je  $g$  pospešek prostega pada.

4. Lagrangeova funkcija  $L(q(t), \dot{q}(t))$  je tako:

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = W_k(\dot{q}(t)) - W_p(q(t)) = \frac{m(l\omega(t))^2}{2} - mgl(1 - \cos(\varphi(t)))$$



5. Izračunamo potrebne odvode Lagrangeove funkcije:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}(t)} &= \frac{\partial \left( \frac{m(l\omega(t))^2}{2} - mgl(1 - \cos(\varphi(t))) \right)}{\partial \omega(t)} = ml^2\omega(t) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}(t)} \right) &= \frac{d}{dt} (ml^2\omega(t)) = ml^2\dot{\omega}(t) \\ \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial q(t)} &= \frac{\partial \left( \frac{m(l\omega(t))^2}{2} - mgl(1 - \cos(\varphi(t))) \right)}{\partial \varphi(t)} = -mgl \sin(\varphi(t))\end{aligned}$$

Tako lahko zapišemo Lagrangeovo enačbo za obravnavani sistem:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}(t)} \right) - \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial q} (t) &= 0 \\ ml^2\dot{\omega}(t) + mgl \sin(\varphi(t)) &= 0\end{aligned}$$

6. Dobljeno diferencialno enačbo po uvedbi spremenljivk stanja

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$$

pretvorimo v standardno obliko zapisa parametričnih modelov v prostoru stanja:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

to je:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(t) &= \omega(t) \\ \dot{\omega}(t) &= -\frac{g}{l} \sin(\varphi(t))\end{aligned}$$

### Naloga 1.26

Zapišite model matematičnega nihala z upoštevanjem sile dušenja v osi vrtenja (slika 1.15) ob uporabi Lagrangeovega pristopa [21].

### Rešitev

Postopek izpeljave matematičnega modela razdelimo v 6 faz:

1. Izberimo najprej posplošeno koordinato  $q(t) = \varphi(t)$ . Definiramo tudi odvod posplošene koordinate:

$$\begin{aligned}q(t) &= \varphi(t) \\ \dot{q}(t) &= \omega(t)\end{aligned}$$

Pomen uporabljenih veličin je naslednji:

$\varphi(t)$  – kotni odmik nihala od navpične lege,  
 $v(t)$  – kotna hitrost nihala.

2. Zapišimo izraz za kinetično energijo sistema ( $W_k$ ):

$$W_k(\dot{q}(t)) = \frac{m(l\omega(t))^2}{2}$$

kjer je  $m$  masa telesa.

3. Zapišemo izraz za potencialno energijo sistema ( $W_p$ ):

$$W_p(q(t)) = mgl(1 - \cos(\varphi(t)))$$

kjer je  $g$  pospešek prostega pada.

4. Lagrangeova funkcija  $L(q(t), \dot{q}(t))$  tako dobi naslednjo obliko:

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = W_k(\dot{q}(t)) - W_p(q(t)) = \frac{m(l\omega(t))^2}{2} - mgl(1 - \cos(\varphi(t)))$$

5. Izračunamo potrebne odvode Lagrangeove funkcije:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}(t)} &= \frac{\partial \left( \frac{m(l\omega(t))^2}{2} - mgl(1 - \cos(\varphi(t))) \right)}{\partial \omega(t)} = ml^2\omega(t) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}(t)} \right) &= \frac{d}{dt} (ml^2\omega(t)) = ml^2\dot{\omega}(t) \\ \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial q(t)} &= \frac{\partial \left( \frac{m(l\omega(t))^2}{2} - mgl(1 - \cos(\varphi(t))) \right)}{\partial \varphi(t)} = -mgl \sin(\varphi(t)) \end{aligned}$$

in zapišemo enačbo za silo dušenja v osi vrtenja  $f(t)$ :

$$f(t) = -k\omega(t)$$

kjer je  $k$  koeficient dušenja.

Lagrangeova enačba za obravnavani sistem je:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}(t)} \right) - \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial q} (t) &= 0 \\ ml^2\dot{\omega}(t) + mgl \sin(\varphi(t)) &= -k_t\omega(t) \end{aligned}$$

6. Dobljeno diferencialno enačbo po uvedbi spremenljivk stanja

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$$

lahko zapišemo kot:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \omega(t) \\ \dot{\omega}(t) &= -\frac{g}{l} \sin(\varphi(t)) - \frac{k_t}{ml^2} \omega(t) \end{aligned}$$


---

**Naloga 1.27**

Zgradite matematični model nihala na gibajočem vozičku (slika 1.18) ob uporabi Lagrangeovega pristopa k modeliranju.

**Rešitev**

Postopek izpeljave razdelimo v 6 faz:

1. Izberemo najprej posplošeni koordinati in definirajmo tudi pripadajoča odvoda:

$$\begin{aligned} q_1(t) &= s(t) \\ \dot{q}_1(t) &= \dot{s}(t) = v(t) \\ q_2(t) &= \varphi(t) \\ \dot{q}_2(t) &= \dot{\varphi}(t) = \omega(t) \end{aligned}$$

2. Uporabimo kosinusni izrek:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$$

kjer so  $a$ ,  $b$  in  $c$  stranice trikotnika s kotom  $\gamma$  med stranicama  $a$  in  $b$ . Stranica  $a$  ustreza hitrosti vozička ( $v(t)$ ), stranica  $b$  obodni hitrosti bremena, ki je samo posledica nihanja bremena ( $l\omega(t)$ ) ter stranica  $c$  skupni hitrosti bremena ( $v_u(t)$ ), ki je posledica gibanja vozička ( $v(t)$ ) in nihanja vrvi ( $\omega(t)$ ).

Ob upoštevanju trigonometričnega izraza:

$$\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos(\varphi)$$

zapišemo izraz za hitrost gibanja uteži  $v_u(t)$ :

$$v_u^2(t) = v^2(t) + l^2\omega^2(t) + 2v(t)l\omega(t) \cos(\varphi(t))$$

in izraz za kinetično energijo sistema ( $W_k$ ):

$$W_k(\dot{q}(t)) = \frac{Mv^2(t)}{2} + \frac{m(v^2(t) + l^2\omega^2(t) + 2v(t)l\omega(t) \cos(\varphi(t)))}{2}$$

3. Zapišimo še izraz za potencialno energijo sistema ( $W_p$ ):

$$W_p(q(t)) = mgl(1 - \cos(\varphi(t)))$$

4. Lagrangeova funkcija  $L(q(t), \dot{q}(t))$  ima naslednjo obliko:

$$\begin{aligned} L(q(t), \dot{q}(t)) &= W_k(q(t), \dot{q}(t)) - W_p(q(t)) = \\ &= \frac{Mv^2(t)}{2} + \frac{m(v^2(t) + l^2\omega^2(t) + 2v(t)l\omega(t) \cos(\varphi(t)))}{2} - mgl(1 - \cos(\varphi(t))) \end{aligned}$$

5. Končno izračunamo še potrebne odvode Lagrangeove funkcije:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{s}(t)} &= Mv(t) + mv(t) + ml\omega(t) \cos(\varphi(t)) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{s}(t)} \right) &= M\dot{v}(t) + m\dot{v}(t) + ml\dot{\omega}(t) \cos(\varphi(t)) - ml\omega(t)\dot{\varphi}(t) \sin(\varphi(t)) \\ \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial s(t)} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{\varphi}(t)} &= ml^2 \omega(t) + mv(t)l \cos \varphi(t) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{\varphi}(t)} \right) &= ml^2 \dot{\omega}(t) + m\dot{v}(t)l \cos \varphi(t) - mv(t)l \dot{\varphi}(t) \sin \varphi(t) \\ \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \varphi(t)} &= -mv(t)l \omega(t) \sin(\varphi(t)) - mgl \sin \varphi(t)\end{aligned}$$

in zapišemo rezultat v naslednji obliki:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}(t)} \right) - \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial q} (t) &= 0 \\ (M + m)\dot{v}(t) + ml\dot{\omega}(t) \cos \varphi(t) - ml\omega^2(t) \sin \varphi(t) &= 0 \\ \dot{\omega}(t) + \frac{\dot{v}(t)}{l} \cos \varphi(t) + \frac{g}{l} \sin \varphi(t) &= 0\end{aligned}$$

6. Spremenljivke stanja izberemo na naslednji način:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \\ \varphi(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$$

in tako dobimo:

$$\begin{aligned}\dot{s}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= \frac{(g \cos \varphi(t) + l\omega^2(t))m \sin \varphi(t)}{M + m \sin^2 \varphi(t)} \\ \dot{\varphi}(t) &= \omega(t) \\ \dot{\omega}(t) &= -\frac{(g + l\omega^2(t) \cos \varphi(t))m \sin \varphi(t) + gM \sin \varphi(t)}{l(M + m \sin^2 \varphi(t))}\end{aligned}$$

### Naloga 1.28

S pomočjo Lagrangeovega postopka k modeliranju določite matematični model lastnega nihanja dušenega mehanskega sistema brez zunanje vzbujalne sile  $f(t)$  (slika 1.9) [21].

### Rešitev

Postopek izpeljave razdelimo v 6 faz:

1. Izberimo posplošeno koordinato in določimo tudi pripadajoči odvod:

$$\begin{aligned}q(t) &= s(t) \\ \dot{q}(t) &= v(t)\end{aligned}$$

$s(t)$  opisuje horizontalni položaj težišča telesa,  $v(t)$  pa horizontalno hitrost težišča telesa mehanskega sistema na sliki 1.9.

2. Zapišimo izraz za kinetično energijo sistema ( $W_k$ ):

$$W_k(\dot{q}(t)) = \frac{mv^2(t)}{2}$$

3. Zapišimo izraz za potencialno energijo sistema ( $W_p$ ):

$$W_p(q(t)) = \frac{k_v s^2(t)}{2}$$

4. Lagrangeova funkcija  $L(q(t), \dot{q}(t))$  je torej enaka:

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = W_k(q(t), \dot{q}(t)) - W_p(q(t)) = \frac{mv^2(t)}{2} - \frac{k_v s^2(t)}{2}$$

5. Izračunajmo potrebne odvode Lagrangeove funkcije:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}(t)} &= \frac{\partial \left( \frac{mv^2(t)}{2} - \frac{k_v s^2(t)}{2} \right)}{\partial v(t)} = mv(t) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}(t)} \right) &= \frac{d}{dt} (mv(t)) = m\dot{v}(t) \\ \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial q(t)} &= \frac{\partial \left( \frac{mv^2(t)}{2} - \frac{k_v s^2(t)}{2} \right)}{\partial s(t)} = -k_v s(t) \end{aligned}$$

in zapišimo enačbo za konzervativno silo dušenja  $f_d(t)$ :

$$f_d(t) = -k_d v(t)$$

Na osnovi podanih relacij lahko zapišemo Lagrangeovo enačbo za sistem, v katerem nastopajo konzervativne in nekonzervativne sile v naslednji obliki:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}(t)} \right) - \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial q} (t) &= \sum f_d(t) \\ m\dot{v}(t) + k_v s(t) &= -k_d v(t) \end{aligned}$$

6. Zgrajeni matematični model po uvedbi spremenljivk stanja

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

pretvorimo v standardno obliko zapisa parametričnih modelov v prostoru stanja:

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= -\frac{k_v}{m} s(t) - \frac{k_d}{m} v(t) \end{aligned}$$

oziroma zapišemo v vektorsko-matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_v}{m} & -\frac{k_d}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ v \end{bmatrix}$$


---

**Naloga 1.29**

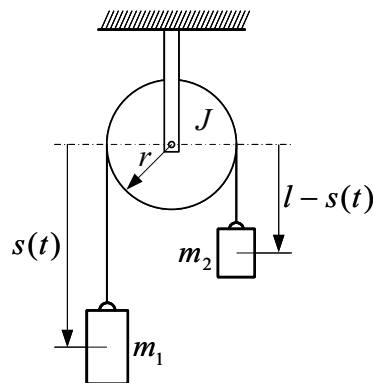
Zapišite matematični model škripčevja na sliki 1.22, ki ga sestavlja kolut, preko katerega sta z neraztegljivo vrvjo povezani dve bremeni [21]. Predpostavimo, da maso vrvi lahko zanemarimo. Uporabimo naslednje oznake parametrov sistema:

$r, J$  – polmer in vztrajnostni moment koluta,

$l$  – dolžina vrvi, ki povezuje obe bremeni,

$m_1, m_2$  masa bremen,

$g$  – pospešek prostega pada.



Slika 1.22: Enostavno škripčevje, naloga 1.29

**Rešitev**

Postopek izpeljave matematičnega modela razdelimo v 6 faz:

1. Izberimo posplošeno koordinato.

Ker so vsa tri telesa (obe bremeni in kolut) povezana z neraztegljivo vrvjo, ima sistem le eno prostostno stopnjo. Za posplošeno koordinato izberimo vertikalni položaj bremena z maso  $m_1$ . Definirajmo tudi odvod posplošene koordinate:

$$\begin{aligned} q(t) &= s(t) \\ \dot{q}(t) &= v(t) \end{aligned}$$

Pri tem je:

$s(t)$  – vertikalni položaj bremena  $m_1$  od koordinatnega izhodišča v smeri navzdol,

$v(t)$  – vertikalna hitrost bremena  $m_1$  od koordinatnega izhodišča v smeri navzdol.

2. Zapišimo izraz za kinetično energijo sistema ( $W_k$ ):

$$W_k(\dot{q}(t)) = \frac{m_1 v^2(t)}{2} + \frac{m_2 v^2(t)}{2} + \frac{J v^2(t)}{2r^2}$$

3. Zapišemo izraz za potencialno energijo sistema ( $W_p$ ):

$$W_p(q(t)) = -m_1 g s(t) - m_2 g (l - s(t))$$

4. Določimo Lagrangeovo funkcijo  $L(q(t), \dot{q}(t))$ :

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = W_k(q(t), \dot{q}(t)) - W_p(q(t)) = \\ \frac{m_1 v^2(t)}{2} + \frac{m_2 v^2(t)}{2} + \frac{Jv^2(t)}{2r^2} + m_1 g s(t) + m_2 g(l - s(t))$$

5. Izračunamo potrebne odvode Lagrangeove funkcije:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}(t)} &= \frac{\partial \left( \frac{m_1 v^2(t)}{2} + \frac{m_2 v^2(t)}{2} + \frac{Jv^2(t)}{2r^2} + m_1 g s(t) + m_2 g(l - s(t)) \right)}{\partial v(t)} \\ &= m_1 v(t) + m_2 v(t) + \frac{Jv(t)}{r^2} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}(t)} \right) &= \frac{d}{dt} \left( m_1 v(t) + m_2 v(t) + \frac{Jv(t)}{r^2} \right) \\ &= m_1 \dot{v}(t) + m_2 \dot{v}(t) + \frac{J\dot{v}(t)}{r^2} \\ \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial q(t)} &= \frac{\partial \left( \frac{m_1 v^2(t)}{2} + \frac{m_2 v^2(t)}{2} + \frac{Jv^2(t)}{2r^2} + m_1 g s(t) + m_2 g(l - s(t)) \right)}{\partial s(t)} \\ &= m_1 g - m_2 g \end{aligned}$$

ter zapišemo Lagrangeovo enačbo za konzervativne sisteme:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial \dot{q}(t)} \right) - \frac{\partial L(q(t), \dot{q}(t))}{\partial q(t)} &= 0 \\ m_1 \dot{v}(t) + m_2 \dot{v}(t) + \frac{J\dot{v}(t)}{r^2} - m_1 g + m_2 g &= 0 \end{aligned}$$

6. Po uvedbi spremenljivk stanja

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

lahko model predstavimo v prostoru stanja:

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= v(t) \\ \dot{v}(t) &= \frac{m_1 g - m_2 g}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}} \end{aligned}$$


---





## Poglavje 2

# Analiza matematičnih modelov

### 2.1 Analiza modela v prostoru stanja

#### 2.1.1 Zapis modela v prostoru stanja

Zapis nelinearnega in linearnega modela v prostoru stanja je bil podrobneje predstavljen v poglavju 2.1.1. V okviru tretjega poglavja bomo obravnavali analizo linearnih, časovno nespremenljivih modelov. V primeru sistema z večimi vhodi in večimi izhodi zapišemo linearni, časovno nespremenljivi model z enačbama (2.1) in (2.2) [3]-[14]:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (2.2)$$

Sisteme z enim vhodom in enim izhodom opišemo z enačbama (2.3) in (2.4):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \quad (2.3)$$

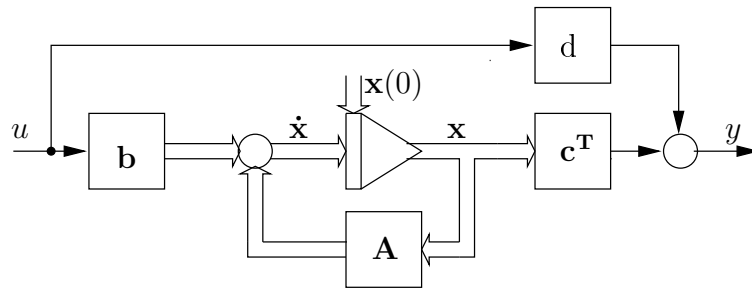
$$y(t) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) + du(t) \quad (2.4)$$

Zapis modela v prostoru stanja je zelo priročen iz številnih razlogov:

- omogoča obravnavo pomembnih kvalitativnih lastnosti dinamičnih sistemov (vodljivost, spoznavnost),
- način opisovanja je prilagojen teoriji reševanja diferencialnih enačb (sistem diferencialnih enačb prvega reda),
- iz zapisa modela v prostoru stanja je enostavno določiti simulacijsko shemo in obratno,
- iz zapisa modela v prostoru stanja je možno enostavno razbrati parametre modela (sistemska, vhodna, izhodna in direktna matrika).

#### 2.1.2 Simulacijska shema

Model v prostoru stanja lahko prikažemo v grafični obliki s pomočjo splošne simulacijske sheme. Osnovni gradniki simulacijskih shem linearnih modelov so integrator, množilnik s konstanto in sumator, kar sovпада z računskimi operacijami v enačbah (2.1), (2.2), (2.3) in (2.4). S tankimi linijami so označene skalarne spremenljivke, z debelejšimi (ali dvojnimi) pa vektorske spremenljivke. Slika 2.1 predstavlja simulacijsko shemo modela v prostoru stanja, opisanega z enačbama (2.3) in (2.4).



Slika 2.1: Simulacijska shema sistema z enim vhomom in enim izhodom

Simulacijske sheme so namenjene izdelavi elektronskega vezja (analogni računalnik) in računalniškega programa (digitalni računalnik), s pomočjo katerih simuliramo obnašanje matematičnega modela.

### 2.1.3 Karakteristična enačba, lastne vrednosti, naravni načini in lastni vektorji modela

Karakteristično enačbo, lastne vrednosti, naravne načine in lastne vektorje modela lahko določimo s pomočjo sistemske matrike  $\mathbf{A}$ .

#### Karakteristična enačba

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad (2.5)$$

Po določitvi (izračunu) determinante zapišemo karakteristično enačbo v obliki:

$$\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + p_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + p_1\lambda + p_0 = 0 \quad (2.6)$$

kjer je  $n$  dimenzija kvadratne sistemske matrike  $\mathbf{A}$ , polinom na levi strani enačbe (2.6) imenujemo karakteristični polinom,  $p_{n-1}, p_{n-2}, \dots, p_1$  in  $p_0$  pa koeficiente karakterističnega polinoma [31]-[36].

#### Lastne vrednosti

Rešitve karakteristične enačbe imenujemo lastne vrednosti sistemske matrike  $\mathbf{A}$  in jih označimo z  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \quad (2.7)$$

Lastne vrednosti so lahko realne ali konjugirano kompleksne, enojne ali večkratne.

#### Načini sistema

Vsaki lastni vrednosti (tudi večkratni) pripada en naravni način. Konjugirano kompleksnemu paru lastnih vrednosti  $\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega$  pripada periodični naravni način:

$$\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega \Rightarrow e^{\sigma t} \cos \omega t, \quad (2.8)$$

realni lastni vrednosti  $\lambda = \sigma$  pa aperiodični naravni način:

$$\lambda = \sigma \Rightarrow e^{\sigma t}. \quad (2.9)$$

**Lastni vektorji**

Lastne vektorje izračunamo z enačbo:

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p} = 0 \quad (2.10)$$

Matriko, katere stolpci so lastni vektorji sistemske matrike  $\mathbf{A}$ , imenujemo matriko lastnih vektorjev in jo označimo s  $\mathbf{P}$ .

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n] \quad (2.11)$$

**Naloga 2.1**

Izračunajte lastne vrednosti, lastne vektorje in načine sistemske matrike  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ .

**Rešitev**

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 4)$$

$$(\lambda + 1)(\lambda - 4) = 0 \Rightarrow \text{lastni vrednosti matrike } \mathbf{A} \text{ sta: } \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4 \Rightarrow \text{načina sistemske matrike } \mathbf{A} \text{ sta: } e^{-1t} \text{ in } e^{4t}$$

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -2 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (\lambda - 1)p_1 - 3p_2 = 0 \\ -2p_1 + (\lambda - 2)p_2 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = -1 \Rightarrow \begin{cases} (\lambda_1 - 1)p_1 - 3p_2 = 0 \\ -2p_1 + (\lambda_1 - 2)p_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-1 - 1)p_1 - 3p_2 = 0 \\ -2p_1 + (-1 - 2)p_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2p_1 - 3p_2 = 0 \\ -2p_1 - 3p_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  dobljeni sistem enačb ima dve neznanki in dve linearno odvisni enačbi  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  en parameter lahko izberemo poljubno in dobimo enoparametrično družino rešitev:  $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ -\frac{2}{3}p_{11} \end{bmatrix}$

$$\lambda_2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} (\lambda_2 - 1)p_1 - 3p_2 = 0 \\ -2p_1 + (\lambda_2 - 2)p_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (4 - 1)p_1 - 3p_2 = 0 \\ -2p_1 + (4 - 2)p_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3p_1 - 3p_2 = 0 \\ -2p_1 + 2p_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  Podobno velja tudi za drugi lastni vektor  $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{12} \end{bmatrix}$

Lastna vektorja sta določena do smeri natančno.

Prosta parametra  $p_{11}$  in  $p_{12}$  izberemo poljubno. V mnogih primerih izberemo prosta parametra tako, da je evklidska norma lastnih vektorjev enaka 1. V našem primeru uporabimo enačbi:

$$\sqrt{(p_{11})^2 + (-\frac{2}{3}p_{11})^2} = 1 \quad \text{in} \quad \sqrt{(p_{12})^2 + (p_{12})^2} = 1$$

in dobimo:

$$p_{11} = 0.8321, p_{12} = 0.7071 \Rightarrow \text{matrika lastnih vektorjev je: } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.8321 & 0.7071 \\ -0.5547 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

**Naloga 2.2**

Izračunajte lastne vrednosti, lastne vektorje in načine sistemske matrike  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ .

**Rešitev**

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

$\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow$  lastne vrednosti matrike  $\mathbf{A}$  so:  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2 \Rightarrow$  naravni načini systemske matrike  $\mathbf{A}$  so:  $e^{0t} = 1, e^{-1t}$  in  $e^{-2t}$

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda + 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{lll} (\lambda)p_1 & -1p_2 & +0p_3 = 0 \\ 0p_1 & +(\lambda + 1)p_2 & -1p_3 = 0 \\ 0p_1 & +0p_2 & +(\lambda + 2)p_3 = 0 \end{array}$$

$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \begin{array}{lll} (\lambda_1)p_1 & -p_2 & +0p_3 = 0 \\ 0p_1 & +(\lambda_1 + 1)p_2 & -1p_3 = 0 \\ 0p_1 & +0p_2 & +(\lambda_1 + 2)p_3 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} -p_2 = 0 \\ +p_2 - p_3 = 0 \\ +2p_3 = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$  tri neznanke in dve linearno neodvisni enačbi  $\Rightarrow$  enoparametrična družina rešitev:  $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\lambda_2 = -1 \Rightarrow \begin{array}{lll} (\lambda_2)p_1 & -p_2 & +0p_3 = 0 \\ 0p_1 & +(\lambda_2 + 1)p_2 & -1p_3 = 0 \\ 0p_1 & +0p_2 & +(\lambda_2 + 2)p_3 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} -p_1 - p_2 = 0 \\ -p_3 = 0 \\ +p_3 = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$  tri neznanke in dve linearno neodvisni enačbi  $\Rightarrow$  enoparametrična družina rešitev:  $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} p_{12} \\ -p_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\lambda_3 = -2 \Rightarrow \begin{array}{lll} (\lambda_3)p_1 & -p_2 & +0p_3 = 0 \\ 0p_1 & +(\lambda_3 + 1)p_2 & -1p_3 = 0 \\ 0p_1 & +0p_2 & +(\lambda_3 + 2)p_3 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} -2p_1 - p_2 = 0 \\ -p_2 - p_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$  tri neznanke in dve linearno neodvisni enačbi  $\Rightarrow$  enoparametrična družina rešitev:  $\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} p_{13} \\ -2p_{13} \\ 2p_{13} \end{bmatrix}$

Proste parametre  $p_{11}, p_{12}$  in  $p_{13}$  izberimo tako, da je evklidska norma lastnih vektorjev enaka ena:

$$\sqrt{(p_{11})^2} = 1 \quad \sqrt{(p_{12})^2 + (-p_{12})^2} = 1 \quad \text{in} \quad \sqrt{(p_{13})^2 + (-2p_{13})^2 + 2(p_{13})^2} = 1$$

in dobimo:

$$p_{11} = 1.0, p_{12} = 0.7071, p_{13} = 0.3333 \Rightarrow \text{matrika lastnih vektorjev je: } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0.7071 & 0.3333 \\ 0 & -0.7071 & -0.6667 \\ 0 & 0 & 0.6667 \end{bmatrix}$$

**Naloga 2.3**

Izračunajte lastne vrednosti, lastne vektorje in načine systemske matrike  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

**Rešitev**

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -2 \\ 1 & \lambda - 1 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 1 - j)(\lambda - 1 + j)$$

$(\lambda - 1)(\lambda - 1 - j)(\lambda - 1 + j) = 0 \Rightarrow$  lastne vrednosti matrike  $\mathbf{A}$  so:  $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 1 \pm j$

$\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 1 \pm j \Rightarrow$  načina systemske matrike  $\mathbf{A}$  sta:  $e^{1t} = 1$  in  $e^{1t} \cos 1t$

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 & -2 \\ 1 & \lambda - 1 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{lll} (\lambda - 1)p_1 & -1p_2 & -2p_3 = 0 \\ 1p_1 & +(\lambda - 1)p_2 & +2p_3 = 0 \\ 0p_1 & +0p_2 & +(\lambda - 1)p_3 = 0 \end{array}$$

$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \begin{array}{cccc} (\lambda_1 - 1)p_1 & -p_2 & -2p_3 & = 0 \\ p_1 & +(\lambda_1 - 1)p_2 & 2p_3 & = 0 \\ 0p_1 & +0p_2 & +(\lambda_1 - 1)p_3 & = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} -p_2 & -2p_3 & = 0 \\ -p_1 & +2p_3 & = 0 \\ 0 & 0 & = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$  tri neznanke in dve linearno neodvisni enačbi  $\Rightarrow$  enoparametrična družina rešitev:  $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{11} \\ -\frac{1}{2}p_{11} \end{bmatrix}$

$$\lambda_2 = 1 + j \Rightarrow \begin{array}{cccc} (\lambda_2 - 1)p_1 & -p_2 & -2p_3 & = 0 \\ 1p_1 & +(\lambda_2 - 1)p_2 & +2p_3 & = 0 \\ 0p_1 & +0p_2 & +(\lambda_2 - 1)p_3 & = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} jp_1 & -p_2 & -2p_3 = 0 \\ p_1 & +jp_2 & +2p_3 = 0 \\ 0 & 0 & 0 = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$  tri neznanke in dve linearno neodvisni enačbi  $\Rightarrow$  enoparametrična družina rešitev:  $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} p_{12} \\ jp_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\lambda_3 = 1 - j \Rightarrow \begin{array}{cccc} (\lambda_3 - 1)p_1 & -p_2 & -2p_3 & = 0 \\ 1p_1 & +(\lambda_3 - 1)p_2 & +2p_3 & = 0 \\ 0p_1 & +0p_2 & +(\lambda_3 - 1)p_3 & = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} -jp_1 & -p_2 & -2p_3 = 0 \\ p_1 & -jp_2 & +2p_3 = 0 \\ 0 & 0 & 0 = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$  tri neznanke in dve linearno neodvisni enačbi  $\Rightarrow$  enoparametrična družina rešitev:  $\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} p_{13} \\ -jp_{13} \\ 0 \end{bmatrix}$

Proste parametre  $p_{11}$ ,  $p_{12}$  in  $p_{13}$  izberemo tako, da je evklidska norma lastnih vektorjev enaka ena:

$$\sqrt{(p_{11})^2 + (p_{11})^2 + (-\frac{1}{2}p_{11})^2} = 1 \quad \sqrt{(p_{12})^2 + (p_{12})^2} = 1 \quad \text{in} \quad \sqrt{(p_{13})^2 + (-p_{13})^2} = 1$$

in dobimo:  $p_{11} = 0.6667, p_{12} = 0.7071, p_{13} = 0.7071$

$$\Rightarrow \text{matrika lastnih vektorjev je: } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.6667 & 0.7071 & 0.7071 \\ 0 - 0.6667j & j0.7071 & -j0.7071 \\ 0.333 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

#### Naloga 2.4

Izračunajte lastne vrednosti, lastne vektorje in načine sistemske matrike  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ .

#### Rešitev

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & +1 \\ -1 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)(\lambda + 2)$$

$(\lambda + 2)(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow$  lastni vrednosti matrike  $\mathbf{A}$  sta:  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -2$

$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -2 \Rightarrow$  načina sistemske matrike  $\mathbf{A}$  sta enaka:  $e^{-2t}$

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda + 1 & +1 \\ -1 & \lambda + 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} (\lambda + 1)p_1 + 1p_2 = 0 \\ -1p_1 + (\lambda + 3)p_2 = 0 \end{array}$$

$$\lambda_{1,2} = -2 \Rightarrow \begin{array}{l} (\lambda_{1,2} + 1)p_1 + 1p_2 = 0 \\ -1p_1 + (\lambda_{1,2} + 3)p_2 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -p_1 + p_2 = 0 \\ -p_1 + p_2 = 0 \end{array} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  sistem ima dve neznanke in eno linearno neodvisno enačbo  
 $\Rightarrow$  enoparametrična družina rešitev:  $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{11} \end{bmatrix}$   $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{12} \end{bmatrix}$

Prosta parametra  $p_{11}$  in  $p_{12}$  izberemo tako, da je evklidska norma lastnih vektorjev enaka 1. V nobenem primeru ne obstaja takšna izbira prostih parametrov  $p_{11}$  in  $p_{12}$ , da bi dobili dva linearno neodvisna vektorja.

$$\sqrt{(p_{11})^2 + (p_{11})^2} = 1 \quad \text{in} \quad \sqrt{(p_{12})^2 + (p_{12})^2} = 1$$

in dobimo:

$$p_{11} = 0.7071, p_{12} = 0.7071 \Rightarrow \text{matrika lastnih vektorjev je: } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 \\ 0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

je zato singularna.

### Naloga 2.5

Izračunajte lastne vrednosti, lastne vektorje in načine sistemske matrike  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

### Rešitev

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & +1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 1)$$

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \text{lastne vrednosti matrike } \mathbf{A} \text{ so: } \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = 1$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = 1 \Rightarrow \text{načina sistemske matrike } \mathbf{A} \text{ sta: } e^{0t} = 1 \text{ in } e^{1t}$$

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{lll} (\lambda - 2)p_1 & +1p_2 & 0p_3 = 0 \\ -1p_1 & +(\lambda)p_2 & +0p_3 = 0 \\ 0p_1 & +1p_2 & +(\lambda)p_3 = 0 \end{array}$$

$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \begin{array}{lll} (\lambda_1 - 2)p_1 & +p_2 & 0p_3 = 0 \\ -1p_1 & +(\lambda_1)p_2 & +0p_3 = 0 \\ 0p_1 & -1p_2 & +(\lambda_1)p_3 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} -2p_1 + 1 = 0 & \\ p_1 = 0 & \\ -p_2 = 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{tri neznanke in dve linearno neodvisni enačbi} \Rightarrow \text{enoparametrična družina rešitev: } \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{31} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{2,3} = 1 \Rightarrow \begin{array}{lll} (\lambda_{2,3} - 2)p_1 & +1p_2 & 0p_3 = 0 \\ -1p_1 & +(\lambda_{2,3})p_2 & +0p_3 = 0 \\ 0p_1 & -1p_2 & +(\lambda_{2,3})p_3 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{lll} -p_1 + p_2 = 0 & & \\ -p_1 + p_2 = 0 & & \\ -p_2 + p_3 = 0 & & \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{tri neznanke in dve enačbi} \Rightarrow \text{enoparametrična družina rešitev: } \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{12} \\ p_{12} \end{bmatrix} \text{ in } \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{13} \\ p_{13} \end{bmatrix}$$

Proste parametre  $p_{31}$ ,  $p_{12}$  in  $p_{13}$  izberemo tako, da je evklidska norma lastnih vektorjev enaka ena. V nobenem primeru ne obstaja takšna izbira prostih parametrov, da bi dobili tri linearno neodvisne lastne vektorje.

$$\sqrt{(p_{31})^2} = 1 \quad \sqrt{3(p_{12})^2} = 1 \quad \text{in} \quad \sqrt{(3p_{13})^2} = 1$$

$$\text{dobimo: } p_{31} = 1, p_{12} = p_{13} = 0.5774 \Rightarrow \text{matrika lastnih vektorjev je: } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5774 & 0.5774 \\ 0 & 0.5774 & 0.5774 \\ 1 & 0.5774 & 0.5774 \end{bmatrix}$$

Tudi v tem primeru je matrika lastnih vektorjev singularna.

### Naloga 2.6

Izračunajte lastne vrednosti, lastne vektorje in načine sistemske matrike  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

**Rešitev**

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 1)$$

$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow$  lastne vrednosti matrike  $\mathbf{A}$  so:  $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = 1$

$\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = 1 \Rightarrow$  naravna načina sistemske matrike  $\mathbf{A}$  sta:  $e^{0t} = 1$  in  $e^{1t}$

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{lll} (\lambda - 1)p_1 & 0p_2 & 0p_3 = 0 \\ 1p_1 & +(\lambda - 1)p_2 & +1p_3 = 0 \\ -1p_1 & +0p_2 & +(\lambda)p_3 = 0 \end{array}$$

$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \begin{array}{lll} (\lambda_1 - 1)p_1 & 0p_2 & 0p_3 = 0 \\ 1p_1 & +(\lambda_1 - 1)p_2 & +1p_3 = 0 \\ -1p_1 & +0p_2 & +(\lambda_1)p_3 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{lll} -p_1 & & = 0 \\ p_1 & -p_2 & +p_3 = 0 \\ -p_1 & & 0 = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$  tri neznanke in dve linearno neodvisni enačbi  $\Rightarrow$  enoparametrična družina rešitev:  $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ p_{21} \\ -p_{21} \end{bmatrix}$

$$\lambda_{2,3} = 1 \Rightarrow \begin{array}{lll} (\lambda_{2,3} - 1)p_1 & 0p_2 & 0p_3 = 0 \\ 1p_1 & +(\lambda_{2,3} - 1)p_2 & +1p_3 = 0 \\ -1p_1 & +0p_2 & +(\lambda_{2,3})p_3 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{lll} 0 & = 0 \\ p_1 & +p_3 = 0 \\ -p_1 & -p_3 = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$  tri neznanke in ena enačba  $\Rightarrow$  dvoparametrična družina rešitev:  $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ -p_{12} \end{bmatrix}$  in  $\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ -p_{13} \end{bmatrix}$

Proste parametre  $p_{21}, p_{12}, p_{22}, p_{13}$  in  $p_{23}$  izberemo tako, da sta lastna vektorja  $\mathbf{p}_2$  in  $\mathbf{p}_3$  linearno neodvisna in da je evklidska norma lastnih vektorjev enaka ena:

$$(p_{12}) : (p_{22}) : (-p_{12}) \neq (p_{13}) : (p_{23}) : (-p_{13})$$

$$\sqrt{(p_{21})^2 + (-p_{21})^2} = 1 \quad \sqrt{(p_{12})^2 + (p_{22})^2 + (-p_{12})^2} = 1 \quad \text{in} \quad \sqrt{(p_{13})^2 + (p_{23})^2 + (-p_{13})^2} = 1$$

Ena izmed možnih rešitev je:  $p_{21} = 0.0.7071, p_{12} = 0, p_{22} = 1, p_{13} = 0.7071, p_{23} = 0$

$$\Rightarrow \text{matrika lastnih vektorjev je: } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.7071 \\ 0.7071 & 1 & 0 \\ -0.7071 & 0 & -0.7071 \end{bmatrix}$$

**2.1.4 Ekvivalentni sistemi in spektralna transformacija**

Za model lahko izberemo različne spremenljivke stanja. Tako dobimo različne matematične modele v prostoru stanj, ki pa opisujejo isti sistem. Različne matematične modele, katerih vektorji spremenljivk stanja so povezani z enačbo (2.12), imenujemo ekvivalentni sistemi.

$$\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{T}\mathbf{x}(t) \tag{2.12}$$

kjer je:

$\mathbf{x}(t)$  – vektor spremenljivk stanja originalnega modela,

$\mathbf{x}^*(t)$  – vektor spremenljivk stanja transformiranega modela,

$\mathbf{T}$  – transformacijska matrika.

Originalni sistem naj bo opisan z enačbama (2.13) in (2.14):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.13)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (2.14)$$

kjer so z  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  in  $\mathbf{x}(t)$  označene matrike in vektor spremenljivk stanja originalnega sistema. Sistem, transformiran iz originalnega zapisa (enačbi (2.13) in (2.14) s pomočjo enačbe (2.12), lahko zapišemo z enačbama (2.15) in (2.16):

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{A}^*\mathbf{x}^*(t) + \mathbf{B}^*\mathbf{u}(t) \quad (2.15)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}^*\mathbf{x}^*(t) + \mathbf{D}^*\mathbf{u}(t) \quad (2.16)$$

kjer so  $\mathbf{A}^*$ ,  $\mathbf{B}^*$ ,  $\mathbf{C}^*$ ,  $\mathbf{D}^*$  in  $\mathbf{x}^*(t)$  matrike in vektor spremenljivk stanja transformiranega sistema.

Iz primerjave enačb (2.13) do (2.16) dobimo ob upoštevanju transformacijske enačbe (2.12) enačbe, ki povezujejo originalni in transformirani model:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{T}\mathbf{B} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{D} \quad (2.20)$$

Ena izmed osnovnih transformacij je transformacija originalnega modela v transformirani model, katerega sistemska matrika je diagonalna. To transformacijo imenujemo tudi spektralna transformacija. Transformacijska matrika  $\mathbf{T}$  (enačba (2.12) je v tem primeru inverzna matrika lastnih vektorjev:  $\mathbf{T} = \mathbf{P}^{-1}$  (enačba 2.11).

### 2.1.5 Določitev odziva modela v prostoru stanj

Rešitev matematičnega modela v prostoru stanja

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.21)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (2.22)$$

izračunamo v dveh korakih:

- najprej rešimo enačbo spremenljivk stanja (2.21) - določimo  $\mathbf{x}(t)$ ,
- nato dobljeno rešitev uporabimo v izhodni enačbi (2.22) in določimo še odziv sistema  $\mathbf{y}(t)$ .

Enačba spremenljivk stanja je linearna diferencialna enačba prvega reda. Zapišemo jo lahko kot:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.23)$$

Enačbi (2.23) izračunamo integracijski multiplikator:

$$\mu(t) = e^{\int -\mathbf{A}dt} = e^{-\mathbf{A}t} \quad (2.24)$$

Enačbo (2.23) z leve množimo z integracijskim multiplikatorjem  $\mu(t) = e^{-\mathbf{A}t}$  in dobimo:

$$e^{-\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{x}}(t) - e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.25)$$



Leva stran enačbe (2.25) je odvod produkta  $e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)$ :

$$\frac{d(e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t))}{dt} = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.26)$$

Iz enačbe (2.26) izrazimo  $\mathbf{x}(t)$  tako, da enačbo najprej integriramo:

$$e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t) = \mathbf{k} + \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (2.27)$$

nato pa preoblikujemo:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \left( \mathbf{k} + \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \right) \quad (2.28)$$

V enačbi (2.28) izberemo  $t = 0$  in izračunamo vrednost konstante  $\mathbf{k}$ :

$$\mathbf{x}(0) = e^{\mathbf{A}0} \left( \mathbf{k} + \int_0^0 e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \right) \Rightarrow \mathbf{k} = \mathbf{x}(0) \quad (2.29)$$

Iz enačb (2.28) in (2.29) zapišemo rešitev enačbe spremenljivk stanja (2.21):

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (2.30)$$

Iz enačb (2.22) in (2.30) sestavimo rešitev izhodne enačbe:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{c}^T \left( e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \right) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (2.31)$$

V rešitvah (2.30) in (2.31) je računsko najzahtevnejša določitev člena  $e^{\mathbf{A}t}$ . Izraz  $e^{\mathbf{A}t}$  imenujemo matrika prehajanja stanj in jo označimo s  $\Phi(t)$ .

$$e^{\mathbf{A}t} = \Phi(t) = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) & \dots & \phi_{1n}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) & \dots & \phi_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1}(t) & \phi_{n2}(t) & \dots & \phi_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Posamezni elementi matrike prehajanja stanj so linearne kombinacije naravnih načinov pripadajoče sistemske matrike. V primeru samih enojnih in realnih lastnih vrednosti sistemske matrike  $n$ -te stopnje lahko zapišemo matriko prehajanja stanj v obliki:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \beta_{11,1}e^{\lambda_1 t} + \dots + \beta_{11,n}e^{\lambda_n t} & \beta_{12,1}e^{\lambda_1 t} + \dots + \beta_{12,n}e^{\lambda_n t} & \dots & \beta_{1n,1}e^{\lambda_1 t} + \dots + \beta_{1n,n}e^{\lambda_n t} \\ \beta_{21,1}e^{\lambda_1 t} + \dots + \beta_{21,n}e^{\lambda_n t} & \beta_{22,1}e^{\lambda_1 t} + \dots + \beta_{22,n}e^{\lambda_n t} & \dots & \beta_{2n,1}e^{\lambda_1 t} + \dots + \beta_{2n,n}e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1,1}e^{\lambda_1 t} + \dots + \beta_{n1,n}e^{\lambda_n t} & \beta_{n2,1}e^{\lambda_1 t} + \dots + \beta_{n2,n}e^{\lambda_n t} & \dots & \beta_{nn,1}e^{\lambda_1 t} + \dots + \beta_{nn,n}e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

kjer so  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  lastne vrednosti sistemske matrike, z  $\beta_{11,1}, \dots, \beta_{11,n}, \beta_{12,1}, \dots, \beta_{12,n}, \dots, \beta_{1n,1}, \dots, \beta_{1n,n}, \dots, \beta_{nn,1}, \dots, \beta_{nn,n}$  pa so označeni koeficienti posameznih linearnih kombinacij.

Za določitev matrike prehajanja stanj je na razpolago več metod. Pogledali si bomo samo najpomembnejše.

**Določitev matrike prehajanja stanj s pomočjo razvoja matrike v Taylorjevo vrsto**

Matriko  $e^{\mathbf{A}t}$  lahko zapišemo v obliki Taylorjeve vrste z neskončno mnogo členi:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i \frac{t^i}{i!} \quad (2.34)$$

Ob upoštevanju enačbe (2.33) zapišemo za vsak element matrike ( $\phi_{11}$  do  $\phi_{nn}$ ) sistem enačb iz katerega izračunamo koeficiente  $\beta_{11,1}$  do  $\beta_{nn,n}$ .

**Naloga 2.7**

S pomočjo Taylorjeve vrste izračunajte matriko prehajanja stanj systemske matrike  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ .

**Rešitev**

Ob upoštevanju enačbe (2.34) zapišemo matriko prehajanja stanj:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}t}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \dots = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2} + \dots$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 + 0t - \frac{2}{2}t^2 \dots & 0 - 2t + \frac{6}{2}t^2 \dots \\ 0 + 1t + \frac{-3}{2}t^2 \dots & 1 - 3t + \frac{7}{2}t^2 \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Funkcije  $\phi_{11}(t)$ ,  $\phi_{12}(t)$ ,  $\phi_{21}(t)$  in  $\phi_{22}(t)$  izračunamo s pomočjo enačbe (2.33).

Najprej izračunamo lastne vrednosti in načine:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & +2 \\ -1 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

$(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow$  lastni vrednosti matrike  $\mathbf{A}$  sta:  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2 \Rightarrow$  načina systemske matrike  $\mathbf{A}$  sta:  $e^{-1t}$  in  $e^{-2t}$

Ob upoštevanju enačbe (2.33) zapišemo matriko prehajanja stanj:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \beta_{11,1}e^{-1t} + \beta_{11,2}e^{-2t} & \beta_{12,1}e^{-1t} + \beta_{12,2}e^{-2t} \\ \beta_{21,1}e^{-1t} + \beta_{21,2}e^{-2t} & \beta_{22,1}e^{-1t} + \beta_{22,2}e^{-2t} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \beta_{11,1}(1 - t + \frac{t^2}{2} \dots) + \beta_{11,2}(1 - 2t + \frac{4t^2}{2} \dots) & \beta_{12,1}(1 - t + \frac{t^2}{2} \dots) + \beta_{12,2}(1 - 2t + \frac{4t^2}{2} \dots) \\ \beta_{21,1}(1 - t + \frac{t^2}{2} \dots) + \beta_{21,2}(1 - 2t + \frac{4t^2}{2} \dots) & \beta_{22,1}(1 - t + \frac{t^2}{2} \dots) + \beta_{22,2}(1 - 2t + \frac{4t^2}{2} \dots) \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Iz primerjave koeficientov posameznih elementov matrik (2.35) in (2.36) zapišemo štiri sisteme enačb, iz katerih izračunamo koeficiente  $\beta_{11,1}$ ,  $\beta_{11,2}$ ,  $\beta_{12,1}$ ,  $\beta_{12,2}$ ,  $\beta_{21,1}$ ,  $\beta_{21,2}$ ,  $\beta_{22,1}$  in  $\beta_{22,2}$ .

Sistem 1:

$$\begin{aligned} 1\beta_{11,1} + 1\beta_{11,2} &= 1 \\ -1\beta_{11,1} - 2\beta_{11,2} &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \beta_{11,1} = 2, \quad \beta_{11,2} = -1$$

Sistem 2:

$$1\beta_{11,1} + 1\beta_{11,2} = 0$$

$$-1\beta_{11,1} - 2\beta_{11,2} = -2 \quad \Rightarrow \beta_{12,1} = -2, \quad \beta_{12,2} = 2$$

Sistem 3:

$$\begin{aligned} 1\beta_{11,1} + 1\beta_{11,2} &= 0 \\ -1\beta_{11,1} - 2\beta_{11,2} &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \beta_{21,1} = 1, \quad \beta_{21,2} = -1$$

Sistem 4:

$$\begin{aligned} 1\beta_{11,1} + 1\beta_{11,2} &= 1 \\ -1\beta_{11,1} - 2\beta_{11,2} &= -3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \beta_{22,1} = -1, \quad \beta_{22,2} = 2$$

Izračunane koeficiente vstavimo v enačbo (2.36) in dobimo:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 2e^{-1t} - 1e^{-2t} & -2e^{-1t} + 2e^{-2t} \\ 1e^{-1t} - 1e^{-2t} & -1e^{-1t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

### Določitev matrike prehajanja stanj s pomočjo spektralne transformacije

Če je možno sistemsko matriko  $\mathbf{A}$  diagonalizirati (t. j. izvesti spektralno transformacijo), potem lahko izračunamo matriko  $e^{\mathbf{A}t}$  tako, da transformiramo matriko prehajanja stanj pripadajočega diagonalnega zapisa sistema. Na glavni diagonali se v tem primeru nahajajo načini sistema.

Originalni homogeni sistem in njegov odziv na začetne pogoje ( $\mathbf{x}(0)$ ) naj bosta opisana z enačbama (2.37):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad \Rightarrow \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \quad (2.37)$$

Z matriko lastnih vektorjev  $\mathbf{P}$  transformiramo originalni sistem v diagonalni ekvivalentni sistem:

$$\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(t) \quad (2.38)$$

Ob upoštevanju enačb (2.37) in (2.38) zapišemo diagonalni sistem in njegov odziv na transformirane začetne pogoje z enačbo (2.39):

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{A}^*\mathbf{x}^*(t) \quad \Rightarrow \mathbf{x}^*(t) = e^{\mathbf{A}^*t}\mathbf{x}^*(0) \quad (2.39)$$

kjer je  $\mathbf{A}^*$  diagonalna matrika lastnih vrednosti

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

pripadajoča matrika prehajanja stanj je označena z  $e^{\mathbf{A}^*t}$

$$e^{\mathbf{A}^*t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix},$$

transformirani začetni pogoji pa z  $\mathbf{x}^*(0)$ :

$$\mathbf{x}^*(0) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(0)$$

Iz primerjave rešitev enačb (2.37) in (2.39) ob upoštevanju transformacije (2.38) dobimo izraz za izračun matrike prehajanja stanj originalnega sistema:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \quad (2.40)$$

### Naloga 2.8

S pomočjo spektralne transformacije izračunajte matriko prehajanja stanj systemske matrike  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ .

#### Rešitev

Najprej izračunamo lastni vrednosti in matriko lastnih vektorjev:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & +2 \\ -1 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

$$(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \text{lastni vrednosti matrike } \mathbf{A} \text{ sta: } \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$$

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{p} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda & +2 \\ -1 & \lambda + 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} \lambda p_1 + 2p_2 &= 0 \\ -1p_1 + (\lambda + 3)p_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = -1 \Rightarrow \begin{aligned} (\lambda_1)p_1 + 2p_2 &= 0 \Rightarrow -1p_1 + 2p_2 = 0 \\ -1p_1 + (\lambda_1 + 3)p_2 &= 0 \Rightarrow -1p_1 + 2p_2 = 0 \end{aligned} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  sistem ima dve neznanki in eno linearno neodvisno enačbo  $\Rightarrow$  enoparametrična družina rešitev:  $\mathbf{p}_1 =$

$$\begin{bmatrix} p_{11} \\ \frac{p_{11}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2 \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_2 p_1 + 2p_2 &= 0 \Rightarrow -2p_1 + 2p_2 = 0 \\ -1p_1 + (\lambda_2 + 3)p_2 &= 0 \Rightarrow -1p_1 + 1p_2 = 0 \end{aligned} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  sistem ima dve neznanki in eno linearno neodvisno enačbo  $\Rightarrow$  enoparametrična družina rešitev:  $\mathbf{p}_2 =$

$$\begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{12} \end{bmatrix}$$

Prosta parametra izberemo poljubno. Zaradi enostavnosti izberimo:

$$p_{11} = 1, p_{12} = 1 \Rightarrow \text{in dobimo matriko lastnih vektorjev: } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformacijska matrika je torej:

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Diagonalna systemska matrika transformiranega modela je:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

in pripadajoča matrika prehajanja stanj:

$$e^{\mathbf{A}^*t} = \begin{bmatrix} e^{-1t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Matriko prehajanja stanj za originalno sistemsko matriko  $\mathbf{A}$  izračunamo s pomočjo enačbe (2.40):

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{A}^*t}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-1t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-1t} - 1e^{-2t} & -2e^{-1t} + 2e^{-2t} \\ 1e^{-1t} - 1e^{-2t} & -1e^{-1t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

### Izračun matrike prehajanja stanj s pomočjo Cayley-Hamiltonovega izreka

Matriko prehajanja stanj lahko izračunamo tudi s pomočjo Cayley-Hamiltonovega izreka (izrek 2.1).

#### Izrek 2.1

Vsaka kvadratna matrika zadovoljuje svojo karakteristično enačbo.

Velja torej:

$$\mathbf{A}^n + p_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + p_{n-2}\mathbf{A}^{n-2} + \dots + p_1\mathbf{A} + p_0\mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (2.41)$$

kjer so  $p_{n-1}, p_{n-2}, \dots, p_1$  in  $p_0$  koeficienti karakterističnega polinoma (enačbi (2.5) in (2.6)).

Iz izreka 2.1 oz. enačbe (2.41) je razvidno, da lahko predstavimo  $n$ -to potenco systemske matrike  $\mathbf{A}$  ( $\mathbf{A}^n$ ) kot linearno kombinacijo matrik  $\mathbf{A}^{n-1}, \mathbf{A}^{n-2}, \dots, \mathbf{A}$  in  $\mathbf{I}$ :

$$\mathbf{A}^n = -p_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} - p_{n-2}\mathbf{A}^{n-2} - \dots - p_1\mathbf{A} - p_0\mathbf{I} \quad (2.42)$$

To pomeni, da lahko tudi vsako višjo potenco systemske matrike  $\mathbf{A}$  zapišemo kot linearno kombinacijo matrik  $\mathbf{A}^{n-1}, \mathbf{A}^{n-2}, \dots, \mathbf{A}$  in  $\mathbf{I}$  - torej kot linearno kombinacijo končno mnogo členov:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{n+1} &= \mathbf{A}\mathbf{A}^n = \mathbf{A}(-p_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} - p_{n-2}\mathbf{A}^{n-2} - \dots - p_1\mathbf{A} - p_0\mathbf{I}) = \\ &= -p_{n-1}\mathbf{A}^n - p_{n-2}\mathbf{A}^{n-1} - \dots - p_1\mathbf{A}^2 - p_0\mathbf{A} \\ &= -p_{n-1}(-p_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} - \dots - p_1\mathbf{A} - p_0\mathbf{I}) - p_{n-2}\mathbf{A}^{n-1} - \dots - p_1\mathbf{A}^2 - p_0\mathbf{A} \\ &= (p_{n-1}^2 - p_{n-2})\mathbf{A}^{n-1} + (p_{n-1}p_{n-2} - p_{n-3})\mathbf{A}^{n-2} \dots + (p_{n-1}p_1 - p_0)\mathbf{A} + p_{n-1}p_0\mathbf{I} \end{aligned}$$

Iz enačbe za izračun matrike prehajanja stanj s pomočjo neskončne vrste (2.34) dobimo ob upoštevanju izreka 2.1 in njegovih posledic enačbo za izračun matrike prehajanja stanj v obliki:

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_0\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_2\mathbf{A}^2 + \dots + \alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} \quad (2.43)$$

kjer je  $n$  dimenzija kvadratne matrike  $\mathbf{A}$ , koeficiente  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$  pa izračunamo s pomočjo sistema z  $n$  enačbami in  $n$  neznankami:

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t} &= \alpha_0 + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_1^2 + \dots + \alpha_{n-1}\lambda_1^{n-1} \\ e^{\lambda_2 t} &= \alpha_0 + \alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\lambda_2^2 + \dots + \alpha_{n-1}\lambda_2^{n-1} \\ &\vdots \\ e^{\lambda_n t} &= \alpha_0 + \alpha_1\lambda_n + \alpha_2\lambda_n^2 + \dots + \alpha_{n-1}\lambda_n^{n-1} \end{aligned} \quad (2.44)$$

V primeru večkratnih lastnih vrednosti dobimo manj kot  $n$  različnih enačb. Za dosego enolične rešljivosti sistema oz. zadovoljivega števila različnih enačb dopolnimo sistem (2.44) z odvodi enačb (2.44) - npr. v primeru 3-kratne lastne vrednosti  $\lambda_2$  sistem (2.44) dopolnimo z enačbama:

$$\begin{aligned} te^{\lambda_2 t} &= \alpha_1 + 2\alpha_2\lambda_2 + 3\alpha_3\lambda_2^2 + \dots + (n-1)\alpha_{n-1}\lambda_2^{n-2} \\ t^2e^{\lambda_2 t} &= 2\alpha_2 + 6\alpha_3\lambda_2 + \dots + (n-1)(n-2)\alpha_{n-1}\lambda_2^{n-3} \end{aligned} \quad (2.45)$$

**Naloga 2.9**

S pomočjo Cayley-Hamiltonovega izreka izračunajte matriko prehajanja stanj systemske matrike

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

**Rešitev**

Najprej izračunamo lastni vrednosti in načina:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & +2 \\ -1 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

$$(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \text{lastni vrednosti matrike } \mathbf{A} \text{ sta: } \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2 \Rightarrow \text{načina systemske matrike } \mathbf{A} \text{ sta: } e^{-1t} \text{ in } e^{-2t}$$

Matriko prehajanja stanj  $e^{\mathbf{A}t}$  izračunamo s pomočjo enačbe (2.43), koeficienta  $\alpha_0$  in  $\alpha_1$  pa z enačbo (2.44):

$$e^{\mathbf{A}t} = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{A}$$

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t} &= \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 \\ e^{\lambda_2 t} &= \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_2 \end{aligned}$$

Najprej rešimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} e^{-1t} &= \alpha_0 + \alpha_1(-1) \\ e^{-2t} &= \alpha_0 + \alpha_1(-2) \end{aligned} \Rightarrow \alpha_0 = 2e^{-1t} - e^{-2t}, \quad \alpha_1 = e^{-1t} - e^{-2t}$$

nato pa izračunamo matriko prehajanja stanj:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \alpha_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = (2e^{-1t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^{-1t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-1t} - 1e^{-2t} & -2e^{-1t} + 2e^{-2t} \\ 1e^{-1t} - 1e^{-2t} & -1e^{-1t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Izračun matrike prehajanja stanj s pomočjo Laplaceove transformacije**

Izhajamo iz homogenega dela enačbe spremenljivk stanja:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \tag{2.46}$$

Rešitev enačbe (2.46) za poljubne začetne pogoje  $\mathbf{x}(0)$  določa enačba (2.47):

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) \tag{2.47}$$

Do rešitve homogene enačbe (2.46) lahko pridemo tudi s pomočjo Laplaceove transformacije. Enačbo (2.46) pretvorimo v s-prostor, poiščemo rešitev v s-prostoru in dobljeno rešitev pretvorimo nazaj v časovni prostor:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad \Rightarrow \quad s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0)$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \right\} \mathbf{x}(0) \quad (2.48)$$

Iz primerjave rešitev (2.47) in (2.48) zapišemo enačbo za izračun matrike prehajanja stanj:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \right\} \quad (2.49)$$

### Naloga 2.10

S pomočjo Laplaceove transformacije izračunajte matriko prehajanja stanj sistemske matrike

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

### Rešitev

Matriko  $e^{\mathbf{A}t}$  bomo izračunali s pomočjo enačbe (2.49):

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \right\}$$

Najprej določimo izraz  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$  (glej dodatek A):

$$\begin{aligned} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \right\}^{-1} = \begin{bmatrix} s & 2 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{\text{adj} \left\{ \begin{bmatrix} s & 2 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix} \right\}}{\det \left\{ \begin{bmatrix} s & 2 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix} \right\}} = \frac{\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}^T}{s^2+3s+2} = \frac{\begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix}}{s^2+3s+2} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s^2+3s+2} & \frac{-2}{s^2+3s+2} \\ \frac{1}{s^2+3s+2} & \frac{s}{s^2+3s+2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Za izvedbo inverzne Laplaceove transformacije (glej dodatek A) je potrebno dobljen rezultat razstaviti v parcialne ulomke:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s^2+3s+2} & \frac{-2}{s^2+3s+2} \\ \frac{1}{s^2+3s+2} & \frac{s}{s^2+3s+2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{-2}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{s+1} + \frac{B_{11}}{s+2} & \frac{A_{12}}{s+1} + \frac{B_{12}}{s+2} \\ \frac{A_{21}}{s+1} + \frac{B_{21}}{s+2} & \frac{A_{22}}{s+1} + \frac{B_{22}}{s+2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} + \frac{-1}{s+2} & \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+2} \\ \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+2} & \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Po uporabi tabele Laplaceovih parov (dodatek B) dobimo:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 2e^{-1t} - 1e^{-2t} & -2e^{-1t} + 2e^{-2t} \\ 1e^{-1t} - 1e^{-2t} & -1e^{-1t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

### Izračun matrike prehajanja stanj s pomočjo Sylvestrove metode

Matriko prehajanja stanj lahko izračunamo tudi s pomočjo enačbe (2.50):

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} \mathbf{Z}_i \quad (2.50)$$

kjer matriko  $\mathbf{Z}_i$  določimo z enačbo (2.51):

$$\mathbf{Z}_i = \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\lambda_i - \lambda_j)} \quad (2.51)$$

### Naloga 2.11

S pomočjo Sylvestrove metode izračunajte matriko prehajanja stanj systemske matrike

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

### Rešitev

Najprej izračunamo lastni vrednosti:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & +2 \\ -1 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

$$(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \text{lastni vrednosti matrike } \mathbf{A} \text{ sta: } \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$$

Matriko  $e^{\mathbf{A}t}$  bomo izračunali s pomočjo enačb (2.50) in (2.51):

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\lambda_1 t} \mathbf{Z}_1 + e^{\lambda_2 t} \mathbf{Z}_2$$

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - (-2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{-1 + 2} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}{1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - (-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{-2 + 1} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{-1t} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-1t} - 1e^{-2t} & -2e^{-1t} + 2e^{-2t} \\ 1e^{-1t} - 1e^{-2t} & -1e^{-1t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Enačbi (2.50) in (2.51) lahko zapišemo tudi v kompaktni matrični obliki s pomočjo Sylvestrove interpolacijske formule:

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \dots & \lambda_1^{n-1} & e^{\lambda_1 t} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & \dots & \lambda_2^{n-1} & e^{\lambda_2 t} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 & \dots & \lambda_3^{n-1} & e^{\lambda_3 t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{I} & \mathbf{A} & \mathbf{A}^2 & \mathbf{A}^3 & \dots & \mathbf{A}^{n-1} & e^{\mathbf{A}t} \end{bmatrix} \right\} = 0 \quad (2.52)$$

kjer je  $n$  dimenzija kvadratne matrike  $\mathbf{A}$ .

### Naloga 2.12

S pomočjo enačbe (2.52) izračunajte matriko prehajanja stanj systemske matrike  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ .



**Rešitev**

Matrika  $\mathbf{A}$  je dimenzije  $n = 2$ , zato se Sylvestrova formula v našem primeru glasi:

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & e^{\lambda_1 t} \\ 1 & \lambda_2 & e^{\lambda_2 t} \\ \mathbf{I} & \mathbf{A} & e^{\mathbf{A}t} \end{bmatrix} \right\} = 0$$

oziroma:

$$\lambda_2 e^{\mathbf{A}t} + \lambda_1 e^{\lambda_2 t} \mathbf{I} + e^{\lambda_1 t} \mathbf{A} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t} \mathbf{I} - e^{\lambda_2 t} \mathbf{A} - \lambda_1 e^{\mathbf{A}t} = 0 \Rightarrow$$

$$e^{\mathbf{A}t} = \frac{(\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}) \mathbf{I} + (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) \mathbf{A}}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (2.53)$$

Ko v enačbo (2.53) vstavimo vrednosti matrik  $\mathbf{I}$  in  $\mathbf{A}$  in pripadajoči lastni vrednosti  $\lambda_1 = -1$  in  $\lambda_2 = -2$ , dobimo:

$$e^{\mathbf{A}t} = \frac{(-1e^{-2t} + 2e^{-1t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^{-1t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}}{-1 - (-2)} = \begin{bmatrix} 2e^{-1t} - 1e^{-2t} & -2e^{-1t} + 2e^{-2t} \\ 1e^{-1t} - 1e^{-2t} & -1e^{-1t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

**Naloga 2.13**

Izračunajte matriko prehajanja stanj systemske matrike  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

**Rešitev**

Lastne vrednosti:

$$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = 2$$

Matrika prehajanja stanj

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 0.5e^{2.0t} + 0.5e^{-2.0t} & e^{2.0t} - 1.0e^{-2.0t} \\ 0.25e^{2.0t} - 0.25e^{-2.0t} & 0.5e^{2.0t} + 0.5e^{-2.0t} \end{bmatrix}$$

**Naloga 2.14**

Izračunajte matriko prehajanja stanj systemske matrike  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -11 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

**Rešitev**

Lastne vrednosti:

$$\lambda_1 = -10 \quad \lambda_2 = -1$$

Iskana matrika:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} -0.11e^{-1.0t} + 1.11e^{-10.0t} & -1.11e^{-1.0t} + 1.11e^{-10.0t} \\ 0.11e^{-1.0t} - 0.11e^{-10.0t} & 1.11e^{-1.0t} - 0.11e^{-10.0t} \end{bmatrix}$$

**Naloga 2.15**

Izračunajte matriko prehajanja stanj systemske matrike  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

**Rešitev**

Lastne vrednosti:

$$\lambda_1 = -1 + j \quad \lambda_2 = -1 - j$$

Iskana matrika:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-1.0t} \cos(t) - 1.0e^{-1.0t} \sin(t) & -2.0e^{-1.0t} \sin(t) \\ e^{-1.0t} \sin(t) & e^{-1.0t} \cos(t) + e^{-1.0t} \sin(t) \end{bmatrix}$$

**Naloga 2.16**

Izračunajte matriko prehajanja stanj systemske matrike  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -13 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

**Rešitev**

Lastne vrednosti:

$$\lambda_1 = -2 + 3j \quad \lambda_2 = -2 - 3j$$

Matrika prehajanja stanj:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-2.0t} \cos(3.0t) - 0.67e^{-2.0t} \sin(3.0t) & -4.33e^{-2.0t} \sin(3.0t) \\ 0.33e^{-2.0t} \sin(3.0t) & e^{-2.0t} \cos(3.0t) + 0.67e^{-2.0t} \sin(3.0t) \end{bmatrix}$$

**Naloga 2.17**

Izračunajte matriko prehajanja stanj systemske matrike  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

**Rešitev**

Lastne vrednosti:

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -1$$

Iskana matrika:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-1.0t} - 1.0te^{-1.0t} & -1.0te^{-1.0t} \\ te^{-1.0t} & e^{-1.0t} + te^{-1.0t} \end{bmatrix}$$

**Naloga 2.18**

Izračunajte matriko prehajanja stanj systemske matrike  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

**Rešitev**

Lastne vrednosti:

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 0$$

Iskana matrika:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ t & 1.0 \end{bmatrix}$$


---

### Naloga 2.19

Izračunajte matriko prehajanja stanj systemske matrike  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

#### Rešitev

Lastne vrednosti:

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -2 \quad \lambda_3 = -3$$

Iskana matrika:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 4.5e^{-3t} - 4e^{-2t} + 0.5e^{-1t} & 13.5e^{-3t} - 16e^{-2t} + 2.5e^{-1t} & 9e^{-3t} - 12e^{-2t} + 3e^{-1t} \\ -1.5e^{-3t} + 2e^{-2t} - 0.5e^{-1t} & -4.5e^{-3t} + 8e^{-2t} - 2.5e^{-1t} & -3e^{-3t} + 6e^{-2t} - 3e^{-1t} \\ 0.5e^{-3t} - 1e^{-2t} + 0.5e^{-1t} & 1.5e^{-3t} - 4e^{-2t} + 2.5e^{-1t} & e^{-3t} - 3e^{-2t} + 3e^{-1t} \end{bmatrix}$$


---

### Naloga 2.20

Izračunajte matriko prehajanja stanj systemske matrike  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -25 & -99 \\ 0 & -25 & -100 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

#### Rešitev

Lastne vrednosti:

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -5 \quad \lambda_3 = -20$$

Iskana matrika:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-1t} & -0.974e^{-1t} - 0.433e^{-5t} + 1.41e^{-20t} & 1.63e^{-1t} - 8.67e^{-5t} + 7.04e^{-20t} \\ 0 & -0.333e^{-5t} + 1.33e^{-20t} & -6.67e^{-5t} + 6.67e^{-20t} \\ 0 & 0.067e^{-5t} - 0.067e^{-20t} & 1.33e^{-5t} - 0.333e^{-20t} \end{bmatrix}$$


---

### Naloga 2.21

Izračunajte matriko prehajanja stanj systemske matrike  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -11 & -44 & -34 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

#### Rešitev

Lastne vrednosti:

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -5 + 3j \quad \lambda_3 = -5 - 3j$$

Iskana matrika:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 0.04e^{-1t} + 0.960e^{-5t} \cos 3t - 2.05e^{-5t} \sin 3t \\ -0.04e^{-1t} + 0.04e^{-5t} \cos 3t + 0.387e^{-5t} \sin 3t \\ 0.04e^{-1t} - 0.04e^{-5t} \cos 3t - 0.0533e^{-5t} \sin 3t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.4e^{-1t} - 0.4e^{-5t} \cos 3t - 15.2e^{-5t} \sin 3t & 1.36e^{-1t} - 1.36e^{-5t} \cos 3t - 13.1e^{-5t} \sin 3t \\ -0.4e^{-1t} + 1.40e^{-5t} \cos 3t + 2.20e^{-5t} \sin 3t & -1.36e^{-1t} + 1.36e^{-5t} \cos 3t + 1.81e^{-5t} \sin 3t \\ 0.4e^{-1t} - 0.4e^{-5t} \cos 3t - 0.200e^{-5t} \sin 3t & 1.36e^{-1t} - 0.360e^{-5t} \cos 3t - 0.147e^{-5t} \sin 3t \end{bmatrix}$$


---

### Naloga 2.22

Izračunajte matriko prehajanja stanj sistemske matrike  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -28 & -26 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

#### Rešitev

Lastne vrednosti:

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -1 + 5j \quad \lambda_3 = -1 - 5j$$

Matrika prehajanja stanj :

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 0.04e^{-1t} + 0.960e^{-1t} \cos 5t - 0.400e^{-1t} \sin 5t \\ -0.04e^{-1t} + 0.04e^{-1t} \cos 5t + 0.2e^{-1t} \sin 5t \\ 0.04e^{-1t} - 0.04e^{-1t} \cos 5t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.08e^{-1t} - 0.08e^{-1t} \cos 5t - 5.60e^{-1t} \sin 5t & 1.04e^{-1t} - 1.04e^{-1t} \cos 5t - 5.20e^{-1t} \sin 5t \\ -0.08e^{-1t} + 1.08e^{-1t} \cos 5t + 0.2e^{-1t} \sin 5t & -1.04e^{-1t} + 1.04e^{-1t} \cos 5t \\ 0.08e^{-1t} - 0.08e^{-1t} \cos 5t + 0.2e^{-1t} \sin 5t & 1.04e^{-1t} - 0.04e^{-1t} \cos 5t + 0.2e^{-1t} \sin 5t \end{bmatrix}$$


---

### Naloga 2.23

Izračunajte matriko prehajanja stanj sistemske matrike  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & -8 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

#### Rešitev

Lastne vrednosti:

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -2 \quad \lambda_3 = -2$$

Iskana matrika:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} - 4te^{-2t} & 4e^{-t} - 4e^{-2t} - 12te^{-2t} & 4e^{-t} - 4e^{-2t} - 8te^{-2t} \\ -e^{-t} + e^{-2t} + 2te^{-2t} & -4e^{-t} + 5e^{-2t} + 6te^{-2t} & -4e^{-t} + 4e^{-2t} + 4te^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} - te^{-2t} & 4e^{-t} - 4e^{-2t} - 3te^{-2t} & 4e^{-t} - 3e^{-2t} - 2te^{-2t} \end{bmatrix}$$


---

### Naloga 2.24

Izračunajte matriko prehajanja stanj sistemske matrike  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

**Rešitev**

Lastne vrednosti:

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = -5$$

Rezultirajoča matrika:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-5t} & 0 & 0 \\ -0.2e^{-5t} + 0.2 & 1 & 0 \\ 0.04e^{-5t} - 0.04 + .2t & t & 1 \end{bmatrix}$$

**Naloga 2.25**

Izračunajte matriko prehajanja stanj sistemske matrike  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ .

**Rešitev**

Lastne vrednosti:

$$\lambda_{1,2,3} = \lambda$$

Iskana matrika:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Naloga 2.26**

Izračunajte odziv sistema na enotsko stopnico  $u(t) = \sigma(t)$  (glej dodatek A, definicija A.3) in začetne pogoje  $\mathbf{x}(0) = [2 \quad 1]^T$ .

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -12 & \frac{2}{3} \\ -36 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1, 0] \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

**Rešitev**

Potek spremenljivk stanja in izhodne spremenljivke izračunamo s pomočjo enačb:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b} u(\tau) d\tau$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + du(t)$$

Z  $\mathbf{x}_1(t)$  je označen odziv spremenljivk stanja na začetne pogoje  $\mathbf{x}(0)$  (pri ničelnem vzburjanju  $u(t) = 0$ ), z  $\mathbf{x}_2(t)$  pa je označen odziv spremenljivk stanja na vzburjanje  $u(t)$  (pri ničelnih začetnih pogojih  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ ).

Lastni vrednosti obravnavanega sistema sta:

$$\lambda_1 = -4 \quad \lambda_2 = -9$$

Za izračun odziva potrebujemo matriko prehajanja stanj:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5}e^{-4t} + \frac{8}{5}e^{-9t} & \frac{2}{15}e^{-4t} - \frac{2}{15}e^{-9t} \\ -\frac{36}{5}e^{-4t} + \frac{36}{5}e^{-9t} & \frac{8}{5}e^{-4t} - \frac{3}{5}e^{-9t} \end{bmatrix}$$

Odziv na začetne pogoje je:

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5}e^{-4t} + \frac{8}{5}e^{-9t} & \frac{2}{15}e^{-4t} - \frac{2}{15}e^{-9t} \\ -\frac{36}{5}e^{-4t} + \frac{36}{5}e^{-9t} & \frac{8}{5}e^{-4t} - \frac{3}{5}e^{-9t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{16}{15}e^{-4t} + \frac{46}{15}e^{-9t} \\ -\frac{64}{5}e^{-4t} + \frac{69}{5}e^{-9t} \end{bmatrix}$$

Odziv na enotsko stopnico je:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2(t) &= \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b}u(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^t \begin{bmatrix} -\frac{3}{5}e^{-4(t-\tau)} + \frac{8}{5}e^{-9(t-\tau)} & \frac{2}{15}e^{-4(t-\tau)} - \frac{2}{15}e^{-9(t-\tau)} \\ -\frac{36}{5}e^{-4(t-\tau)} + \frac{36}{5}e^{-9(t-\tau)} & \frac{8}{5}e^{-4(t-\tau)} - \frac{3}{5}e^{-9(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} 1 d\tau = \\ &= \int_0^t \begin{bmatrix} -\frac{1}{15}e^{-4t}e^{4\tau} + \frac{6}{15}e^{-9t}e^{9\tau} \\ -\frac{12}{15}e^{-4t}e^{4\tau} + \frac{27}{15}e^{-9t}e^{9\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{60}e^{-4t}e^{4\tau} + \frac{6}{135}e^{-9t}e^{9\tau} \\ -\frac{12}{60}e^{-4t}e^{4\tau} + \frac{27}{135}e^{-9t}e^{9\tau} \end{bmatrix}^t_0 = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{36} + \frac{1}{60}e^{-4t} - \frac{2}{45}e^{-9t} \\ \frac{1}{5}e^{-4t} - \frac{1}{5}e^{-9t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Odziv spremenljivk stanja na začetne pogoje in določeno stopnično vzbujanje je:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{36} - \frac{63}{60}e^{-4t} + \frac{136}{45}e^{-9t} \\ -\frac{63}{5}e^{-4t} + \frac{68}{5}e^{-9t} \end{bmatrix}$$

Odziv izhodne spremenljivke je:

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + du(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{36} - \frac{63}{60}e^{-4t} + \frac{136}{45}e^{-9t} \\ -\frac{63}{5}e^{-4t} + \frac{68}{5}e^{-9t} \end{bmatrix} = \frac{1}{36} - \frac{63}{60}e^{-4t} + \frac{136}{45}e^{-9t}$$

## Naloga 2.27

Izračunajte odziv sistema

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 16 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \quad 1] \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

na:

- začetne pogoje  $\mathbf{x}(0) = [1 \quad -1]^T$
- enotsko stopnico  $u(t) = \sigma(t)$
- vzbujanje  $u(t) = t$
- vzbujanje  $u(t) = \sin t$

- vzbujanje  $u(t) = e^{-t}$
- vzbujanje  $u(t) = e^{-t} \sin t$
- vzbujanje  $u(t) = \sin t + \sin 3t$

**Rešitev**

Lastni vrednosti obravnavanega sistema sta:

$$\lambda_1 = -4 \quad \lambda_2 = -2$$

Matrika prehajanja stanj je:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} -e^{-2t} + 2e^{-4t} & 0.5e^{-2t} - 0.5e^{-4t} \\ -4e^{-2t} + 4e^{-4t} & 2e^{-2t} - e^{-4t} \end{bmatrix}$$

- odziv na začetne pogoje  $\mathbf{x}(0) = [1 \quad -1]^T$ :

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} -1.5e^{-2t} + 2.5e^{-4t} \\ -6e^{-2t} + 5e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = -7.5e^{-2t} + 7.5e^{-4t}$$

- odziv na enotsko stopnico  $u(t) = \sigma(t) = 1(t)$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 - 3e^{-2t} + e^{-4t} \\ 10 - 12e^{-2t} + 2e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = 12 - 15e^{-2t} + 3e^{-4t}$$

- odziv na vzbujanje  $u(t) = t$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2t - 1.25 + 1.5e^{-2t} - 0.25e^{-4t} \\ 10t - 5.5 + 6e^{-2t} - 0.5e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = 12t - 6.75 + 7.5e^{-2t} - 0.75e^{-4t}$$

- odziv na vzbujanje  $u(t) = \sin t$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 \sin t - 0.0218 \cos(t) + 0.026e^{-2t} - 0.004e^{-4t} \\ 10 \sin t - 0.096 \cos t + 1.037e^{-2t} - 0.09e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = -0.1178 \cos t + 12 \sin t + 1.063e^{-2t} - 0.094e^{-4t}$$

- odziv na vzbujanje  $u(t) = e^{-t}$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 4.67e^{-t} - 6e^{-2t} + 1.35e^{-4t} \\ 21.33e^{-t} - 24e^{-2t} + 2.67e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = 26e^{-t} - 30e^{-2t} + 4.02e^{-4t}$$

- odziv na vzbujanje  $u(t) = e^{-t} \sin t$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 4.67e^{-t} \sin t - 0.097e^{-t} \cos t + 0.105e^{-2t} - 0.0078e^{-4t} \\ 21.33e^{-t} \sin t - 0.403e^{-t} \cos t + 0.42e^{-2t} - 0.016e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = 26e^{-t} \sin t - 0.5e^{-t} \cos t + 0.525e^{-2t} - 0.024e^{-4t}$$

- odziv na vzbujanje  $u(t) = \sin t + \sin 3t$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 \sin t + 2 \sin 3t - 0.022 \cos t - 0.065 \cos 3t + 0.105e^{-2t} - 0.017e^{-4t} \\ 10 \sin t + 10 \sin 3t - 0.1 \cos t - 0.29 \cos 3t + 0.42e^{-2t} - 0.035e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = 12 \sin t + 12 \sin 3t - 0.122 \cos t - 0.36 \cos 3t + 0.525e^{-2t} - 0.052e^{-4t}$$

### Naloga 2.28

Izračunajte odziv sistema

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \quad 2 \quad 3] \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

na:

- začetne pogoje  $\mathbf{x}(0) = [1 \quad 0 \quad -1]^T$
- enotsko stopnico  $u(t) = \sigma(t)$

### Rešitev

Lastne vrednosti obravnavanega sistema so:

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = -2$$

Matrika prehajanja stanj je:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-1t} & 0.5 - e^{-1t} + 0.5e^{-2t} \\ 0 & e^{-1t} & e^{-1t} - 1e^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

- odziv na začetne pogoje  $\mathbf{x}(0) = [1 \quad 0 \quad -1]^T$ :

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} \\ -e^{-t} + e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} - e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t}$$

- odziv na enotsko stopnico  $u(t) = \sigma(t) = 1(t)$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0.5t - 0.75 + e^{-t} - 0.25e^{-2t} \\ 0.5 - e^{-t} + 0.5e^{-2t} \\ 0.5 - 0.5e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = 0.5t + 1.75 - e^{-t} - 0.75e^{-2t}$$



**Naloga 2.29**

Izračunajte odziv sistema

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -5 & -17 & -13 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \ 2 \ 3] \mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

na:

- začetne pogoje  $\mathbf{x}(0) = [1 \ 0 \ -1]^T$
- enotsko stopnico  $u(t) = \sigma(t)$

**Rešitev**

Lastne vrednosti obravnavanega sistema so:

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -2 + 3j \quad \lambda_3 = -2 - 3j$$

Matrika prehajanja stanj je:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 0.10e^{-1t} + 0.90e^{-2t} \cos 3t - 1.0e^{-2t} \sin 3t & & \\ -0.10e^{-1t} + 0.10e^{-2t} \cos 3t + 0.37e^{-2t} \sin 3t & & \\ 0.10e^{-1t} - 0.10e^{-2t} \cos 3t - 0.33e^{-2t} \sin 3t & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.40e^{-1t} - 0.40e^{-2t} \cos 3t - 5.8e^{-2t} \sin 3t & 1.3e^{-1t} - 1.3e^{-2t} \cos 3t - 4.8e^{-2t} \sin 3t \\ -0.40e^{-1t} + 1.4e^{-2t} \cos 3t + 0.80e^{-2t} \sin 3t & -1.3e^{-1t} + 1.3e^{-2t} \cos 3t + 0.43e^{-2t} \sin 3t \\ 0.40e^{-1t} - 0.40e^{-2t} \cos 3t + 0.20e^{-2t} \sin 3t & 1.3e^{-1t} - 0.30e^{-2t} \cos 3t + 0.23e^{-2t} \sin 3t \end{bmatrix}$$

- odziv na začetne pogoje  $\mathbf{x}(0) = [1 \ 0 \ -1]^T$ :

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{6}{5}e^{-t} + \frac{11}{5}e^{-2t} \cos 3t + \frac{56}{15}e^{-2t} \sin 3t \\ \frac{6}{5}e^{-t} - \frac{6}{5}e^{-2t} \cos 3t - \frac{1}{15}e^{-2t} \sin 3t \\ -\frac{6}{5}e^{-t} + \frac{1}{5}e^{-2t} \cos 3t - \frac{4}{15}e^{-2t} \sin 3t \end{bmatrix}$$

$$y(t) = -\frac{12}{5}e^{-t} + \frac{2}{5}e^{-2t} \cos 3t + \frac{14}{5}e^{-2t} \sin 3t$$

- odziv na enotsko stopnico  $u(t) = \sigma(t) = 1(t)$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} -1.3e^{-t} + 1.3e^{-2t} \cos 3t + 0.43e^{-2t} \sin 3t \\ -1 + 1.3e^{-t} - 0.33e^{-2t} \cos 3t + 0.23e^{-2t} \sin 3t \\ 1.31 - 1.3e^{-t} - 0.0077e^{-2t} \cos 3t - 0.105e^{-2t} \sin 3t \end{bmatrix}$$

$$y(t) = -2.6e^{-t} + 0.677e^{-2t} \cos 3t + 0.585e^{-2t} \sin 3t + 1.923$$

## 2.2 Analiza vhodno-izhodnega modela

### 2.2.1 Zapis vhodno-izhodnega modela

Ker je zapis vhodno - izhodnega matematičnega modela z diferencialnimi enačbami (poglavje 1.2.2) nekompaten in včasih nepregleden, transformiramo sistem (1.11) ob upoštevanju ničelnih začetnih vrednosti

$$\begin{aligned} y_1(0) = \frac{dy_1(t)}{dt}\Big|_0 = \dots = \frac{d^{n-1}y_1(t)}{dt^{n-1}}\Big|_0 = 0, \dots, y_r(0) = \frac{dy_r(t)}{dt}\Big|_0 = \dots = \frac{d^{n-1}y_r(t)}{dt^{n-1}}\Big|_0 = 0, \\ u_1(0) = \frac{du_1(t)}{dt}\Big|_0 = \dots = \frac{d^{n-1}u_1(t)}{dt^{n-1}}\Big|_0 = 0, \dots, u_m(0) = \frac{du_m(t)}{dt}\Big|_0 = \dots = \frac{d^{n-1}u_m(t)}{dt^{n-1}}\Big|_0 = 0 \end{aligned}$$

v  $s$ -prostor. Dobimo sistem algebraičnih enačb:

$$\begin{aligned} s^n Y_1(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y_1(s) + a_{n-2} s^{n-2} Y_1(s) + \dots + a_1 s Y_1(s) + a_0 Y_1(s) = \\ b_{n,11} s^n U_1(s) + b_{n-1,11} s^{n-1} U_1(s) + \dots + b_{1,11} s U_1(s) + b_{0,11} U_1(s) + \\ b_{n,12} s^n U_2(s) + b_{n-1,12} s^{n-1} U_2(s) + \dots + b_{1,12} s U_2(s) + b_{0,12} U_2(s) + \\ \vdots \\ b_{n,1m} s^n U_m(s) + b_{n-1,1m} s^{n-1} U_m(s) + \dots + b_{1,1m} s U_m(s) + b_{0,1m} U_m(s) \\ s^n Y_2(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y_2(s) + a_{n-2} s^{n-2} Y_2(s) + \dots + a_1 s Y_2(s) + a_0 Y_2(s) = \\ b_{n,21} s^n U_1(s) + b_{n-1,21} s^{n-1} U_1(s) + \dots + b_{1,21} s U_1(s) + b_{0,21} U_1(s) + \\ b_{n,22} s^n U_2(s) + b_{n-1,22} s^{n-1} U_2(s) + \dots + b_{1,22} s U_2(s) + b_{0,22} U_2(s) + \\ \vdots \\ b_{n,2m} s^n U_m(s) + b_{n-1,2m} s^{n-1} U_m(s) + \dots + b_{1,2m} s U_m(s) + b_{0,2m} U_m(s) \\ \vdots \\ s^n Y_r(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y_r(s) + a_{n-2} s^{n-2} Y_r(s) + \dots + a_1 s Y_r(s) + a_0 Y_r(s) = \\ b_{n,r1} s^n U_1(s) + b_{n-1,r1} s^{n-1} U_1(s) + \dots + b_{1,r1} s U_1(s) + b_{0,r1} U_1(s) + \\ b_{n,r2} s^n U_2(s) + b_{n-1,r2} s^{n-1} U_2(s) + \dots + b_{1,r2} s U_2(s) + b_{0,r2} U_2(s) + \\ \vdots \\ b_{n,rm} s^n U_m(s) + b_{n-1,rm} s^{n-1} U_m(s) + \dots + b_{1,rm} s U_m(s) + b_{0,rm} U_m(s) \end{aligned} \tag{2.54}$$

Sistem enačb (2.54) lahko zapišemo krajše kot:

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= G_{11}(s)U_1(s) + G_{12}(s)U_2(s) + \dots + G_{1m}(s)U_m(s) \\ Y_2(s) &= G_{21}(s)U_1(s) + G_{22}(s)U_2(s) + \dots + G_{2m}(s)U_m(s) \\ &\vdots \\ Y_r(s) &= G_{r1}(s)U_1(s) + G_{r2}(s)U_2(s) + \dots + G_{rm}(s)U_m(s) \end{aligned} \tag{2.55}$$

kjer vpeljane racionalne funkcije  $G_{11}(s), G_{12}(s), \dots, G_{1m}(s), G_{21}(s), G_{22}(s), \dots, G_{2m}(s), \dots, G_{r1}(s), G_{r2}(s), \dots, G_{rm}(s)$  imenujemo prenosne funkcije. Prenosne funkcije opisujejo vpliv posameznih

vhodov ( $U_1(s), U_2(s), \dots, U_m(s)$ ) na posamezne izhode ( $Y_1(s), Y_2(s), \dots, Y_r(s)$ ):

$$\begin{aligned}
 G_{11}(s) &= \frac{Y_1(s)}{U_1(s)} = \frac{b_{n,11}s^n + b_{n-1,11}s^{n-1} + \dots + b_{1,11}s + b_{0,11}}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0} \\
 G_{12}(s) &= \frac{Y_1(s)}{U_2(s)} = \frac{b_{n,12}s^n + b_{n-1,12}s^{n-1} + \dots + b_{1,12}s + b_{0,12}}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0} \\
 &\vdots \\
 G_{1m}(s) &= \frac{Y_1(s)}{U_m(s)} = \frac{b_{n,1m}s^n + b_{n-1,1m}s^{n-1} + \dots + b_{1,1m}s + b_{0,1m}}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0} \\
 G_{21}(s) &= \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} = \frac{b_{n,21}s^n + b_{n-1,21}s^{n-1} + \dots + b_{1,21}s + b_{0,21}}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0} \\
 G_{22}(s) &= \frac{Y_2(s)}{U_2(s)} = \frac{b_{n,22}s^n + b_{n-1,22}s^{n-1} + \dots + b_{1,22}s + b_{0,22}}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0} \\
 &\vdots \\
 G_{2m}(s) &= \frac{Y_2(s)}{U_m(s)} = \frac{b_{n,2m}s^n + b_{n-1,2m}s^{n-1} + \dots + b_{1,2m}s + b_{0,2m}}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0} \\
 &\vdots \\
 G_{r1}(s) &= \frac{Y_r(s)}{U_1(s)} = \frac{b_{n,r1}s^n + b_{n-1,r1}s^{n-1} + \dots + b_{1,r1}s + b_{0,r1}}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0} \\
 G_{r2}(s) &= \frac{Y_r(s)}{U_2(s)} = \frac{b_{n,r2}s^n + b_{n-1,r2}s^{n-1} + \dots + b_{1,r2}s + b_{0,r2}}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0} \\
 &\vdots \\
 G_{rm}(s) &= \frac{Y_r(s)}{U_m(s)} = \frac{b_{n,rm}s^n + b_{n-1,rm}s^{n-1} + \dots + b_{1,rm}s + b_{0,rm}}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0}
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Enačbe (2.55) lahko zapišemo tudi v vektorsko-matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_r(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \dots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \dots & G_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{r1}(s) & G_{r2}(s) & \dots & G_{rm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix} \tag{2.57}$$

oziroma krajše:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s) \tag{2.58}$$

Matriko  $\mathbf{G}(s)$  imenujemo matrika prenosnih funkcij. Matematični model z enim vhomom in enim izhodom zapišemo v obliki diferencialne enačbe (1.12):

$$\begin{aligned}
 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + a_{n-2}(t) \frac{d^{n-2} y(t)}{dt^{n-2}} + \dots + a_1(t) \frac{dy(t)}{dt} + a_0(t) y(t) = \\
 b_n(t) \frac{d^n u(t)}{dt^n} + b_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}} + b_{n-2}(t) \frac{d^{n-2} u(t)}{dt^{n-2}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0(t) u(t)
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

Če nad diferencialno enačbo (2.59) ob upoštevanju ničelnih začetnih vrednosti izvedemo Laplaceovo transformacijo in tako dobljeno algebrasko enačbo preoblikujemo, dobimo prenosno funkcijo:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \tag{2.60}$$

### 2.2.2 Blokovni diagram

V okviru modeliranja regulacijskih sistemov velikokrat ne poznamo oz. ne izračunamo prenosne funkcije celotnega regulacijskega sistema ampak določimo oz. poznamo prenosne funkcije posameznih delov regulacijskega sistema (torej ne poznamo prenosne funkcije, ki povezuje vhod in izhod celotnega regulacijskega sistema). Sistem, ki je sestavljen iz večih, med sabo povezanih enostavnejših procesov, za katere poznamo prenosne funkcije, grafično predstavimo z blokovnim diagramom. Vsaki prenosni funkciji procesa pripada ustrezni blok. Velikokrat nas zanima vpliv določenega vhoda na določeno izhodno ali notranjo spremenljivko modela dinamičnega sistema. V tem primeru je potrebno iz blokovnega diagrama izračunati prenosno funkcijo, ki povezuje izbrani spremenljivki.

Preoblikovanje blokovnega diagrama oziroma izračun prenosne funkcije, ki povezuje izbrani spremenljivki, je možno na dva načina:

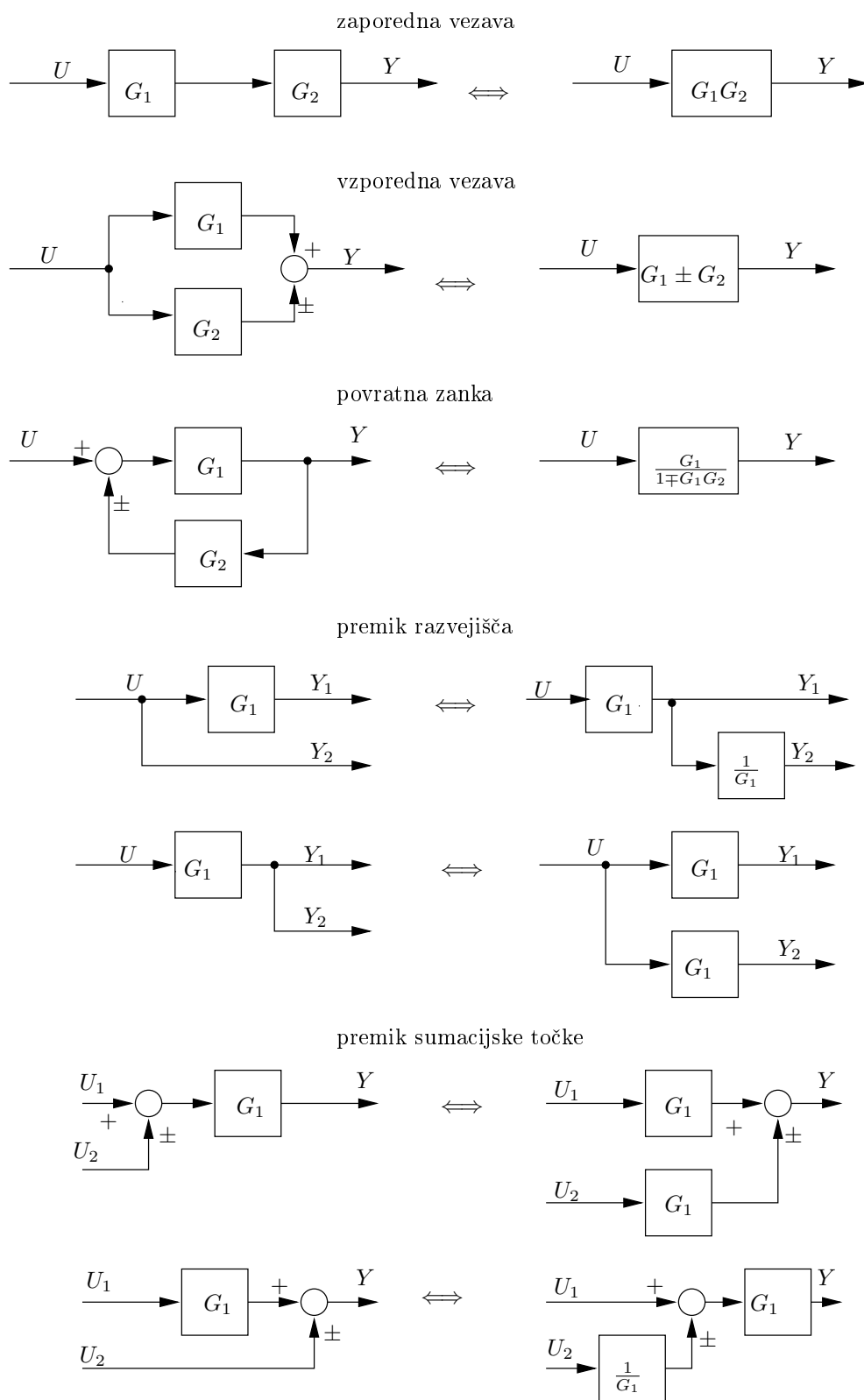
- za preoblikovanje enostavnejših sistemov uporabimo pravila o pretvorbi blokovnega diagrama,
- preoblikovanje kompleksnejših sistemov večinoma izvedemo tako, da ustrezno rešimo sistem enačb, ki opisuje obravnavan blokovni diagram.

#### Dogovor 2.1

V blokovnih diagramih zaradi kompaktnosti ne bomo pisali neodvisne spremenljivke  $s$ .

#### Uporaba pravil za preoblikovanje blokovnih diagramov

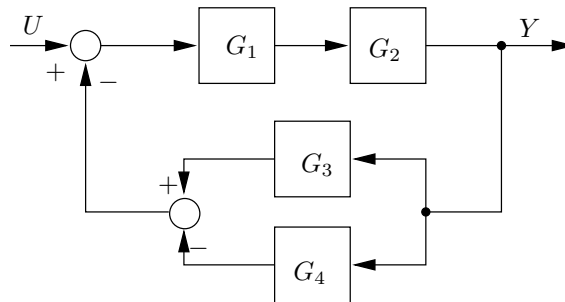
Osnovna pravila za preoblikovanje blokovnih diagramov so prikazana na sliki 2.2. Pretvorba sistema se običajno izvede v večih korakih.



Slika 2.2: Osnovna pravila za preoblikovanje blokovnih diagramov

**Naloga 2.30**

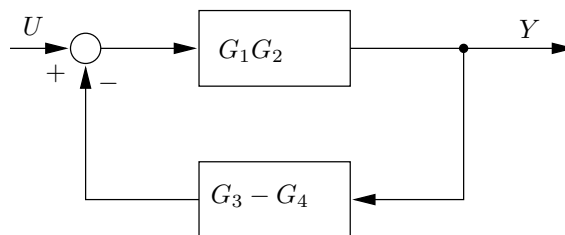
Za blokovni diagram na sliki 2.3 izračunajte prenosno funkcijo  $G(s)$ , ki povezuje vhod  $U(s)$  in izhod  $Y(s)$ .



Slika 2.3: Blokovni diagram, naloga 2.30

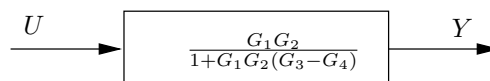
**Rešitev**

Najprej uporabimo pravili o serijski in paralelni vezavi blokov in nadomestimo bloke v direktni in povratni veji z ustreznima nadomestnima blokoma.



Slika 2.4: Blokovni diagram, naloga 2.30

Z uporabo pravila o zaprtozančni vezavi dobimo iskano prenosno funkcijo:



Slika 2.5: Blokovni diagram, naloga 2.30

**Preoblikovanje blokovnih diagramov s pomočjo reševanja sistema enačb**

Uporaba pravil za preoblikovanje blokovnih diagramov je za izračun prenosne funkcije obsežnejših sistemov zamudna in neučinkovita. Zato v teh primerih raje zapišemo sistem enačb, ki opisuje topologijo blokovne sheme, nato pa na osnovi tako dobljenega sistema poiščemo prenosno funkcijo, ki povezuje ustrezno vhodno in izhodno spremenljivko.

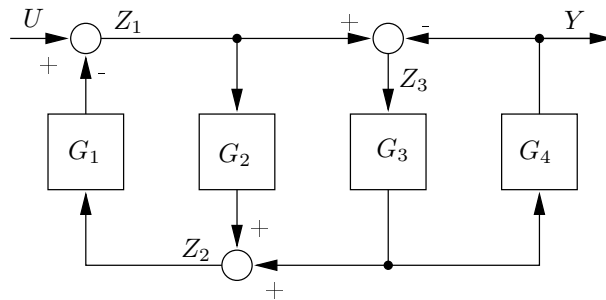
Določitev prenosne funkcije izvedemo v treh korakih:

1. uvedemo toliko pomožnih spremenljivk kot je seštevalnikov - vsak izhod iz seštevalnika je ena pomožna spremenljivka,

2. zapišemo algebrajske enačbe, ki opisujejo blokovni diagram. Enačb mora biti ena več kot je uporabljenih pomožnih spremenljivk,
3. v sistemu eliminiramo pomožne spremenljivke in izračunamo prenosno funkcijo.

**Naloga 2.31**

Za blokovni diagram na sliki 2.6 izračunajte prenosno funkcijo  $G(s)$ , ki povezuje vhod  $U(s)$  in izhod  $Y(s)$ .



Slika 2.6: Blokovni diagram, naloga 2.31

**Rešitev**

1. Uvedemo pomožne spremenljivke  $Z_1(s)$ ,  $Z_2(s)$  in  $Z_3(s)$  (slika 2.6).
2. Zapišemo sistem enačb:

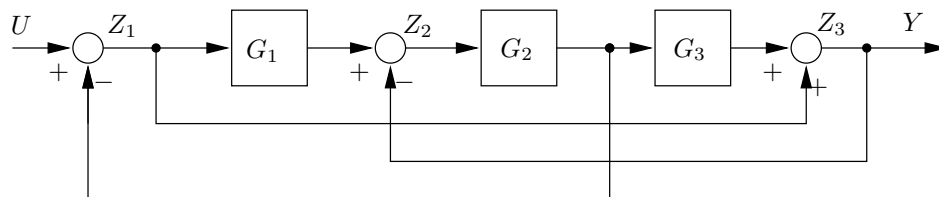
$$\begin{aligned}
 Z_1(s) &= U(s) - G_1(s)Z_2(s) \\
 Z_2(s) &= G_2(s)Z_1(s) + G_3(s)Z_3(s) \\
 Z_3(s) &= Z_1(s) - Y(s) \\
 Y(s) &= G_3(s)G_4(s)Z_3(s)
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

3. Iz sistema enačb eliminiramo  $Z_1(s)$ ,  $Z_2(s)$  in  $Z_3(s)$  ter izračunamo prenosno funkcijo  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{G_3(s)G_4(s)}{1 + G_1(s)G_2(s) + G_1(s)G_3(s) + G_3(s)G_4(s) + G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}$$

**Naloga 2.32**

Za blokovni diagram na sliki 2.7 izračunajte prenosno funkcijo  $G(s)$ , ki povezuje vhod  $U(s)$  in izhod  $Y(s)$ .



Slika 2.7: Blokovni diagram, naloga 2.32

**Rešitev**

Po rešitvi sistema enačb:

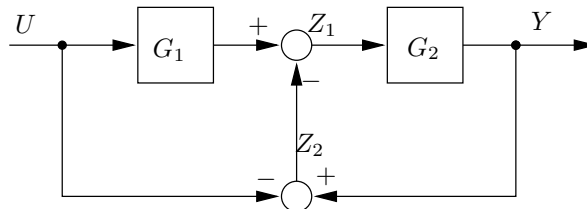
$$\begin{aligned} Z_1(s) &= U(s) - G_2(s)Z_2(s) \\ Z_2(s) &= G_1(s)Z_1(s) - Y(s) \\ Z_3(s) &= Z_1(s) + G_2(s)G_3(s)Z_2(s) \\ Y(s) &= Z_3(s) \end{aligned} \tag{2.62}$$

dobimo prenosno funkcijo  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{1 + G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1 + G_1(s)G_2(s) + G_2(s)G_3(s) - G_2(s)}$$

**Naloga 2.33**

Za blokovni diagram na sliki 2.8 izračunajte prenosno funkcijo  $G(s)$ , ki povezuje vhod  $U(s)$  in izhod  $Y(s)$ .



Slika 2.8: Blokovni diagram, naloga 2.33

**Rešitev**

Po rešitvi sistema enačb:

$$\begin{aligned} Z_1(s) &= G_1(s)U(s) - Z_2(s) \\ Z_2(s) &= Y(s) - U(s) \\ Y(s) &= G_2(s)Z_1(s) \end{aligned}$$

dobimo prenosno funkcijo  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{G_2(s) + G_1(s)G_2(s)}{1 + G_2(s)}$$

**2.2.3 Določitev odziva vhodno-izhodnega modela**

Odziv vhodno-izhodnega modela, opisanega z matriko prenosnih funkcij  $\mathbf{G}(s)$  (enačba 2.57), na vzbujanje  $\mathbf{u}(t)$  izračunamo v treh korakih:

1. izračunamo Laplaceovo transformiranko vhodne spremenljivke:  $\mathbf{U}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{u}(t)\}$ ,
2. izračunamo Laplaceovo transformiranko izhodne spremenljivke:  $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s)$ ,
3. Laplaceovo transformiranko  $\mathbf{Y}$  pretvorimo v časovni prostor:  $\mathbf{y}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{Y}(s)\}$ .



**Naloga 2.34**

Izračunajte odziv sistema, opisanega s prenosno funkcijo  $G(s)$ , na enotsko stopnico  $u(t) = \sigma(t)$ .

$$G(s) = \frac{k}{sT + 1}$$

**Rešitev**

1.  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$
2.  $Y(s) = G(s)U(s) = \frac{k}{sT+1} \frac{1}{s}$
3.  $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} \frac{k}{sT+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s} - \frac{k}{s+\frac{1}{T}}\right\} = (k - ke^{-\frac{t}{T}})\sigma(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}})$

## 2.3 Povezava vhodno-izhodnega modela in modela v prostoru stanja

### 2.3.1 Pretvorba modela v prostoru stanja v prenosno funkcijo

Pretvorbo modela v prostoru stanja v prenosno funkcijo izvedemo s pomočjo enačbe (2.63):

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (2.63)$$

**Naloga 2.35**

Modelu v prostoru stanja,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = [3 \quad 4], \quad d = 0$$

določite prenosno funkcijo  $G(s)$ .

**Rešitev**

Prenosno funkcijo  $G(s)$  izračunamo s pomočjo enačbe (2.63), ki jo za sistem z enim vhomom in enim izhodom zapišemo v obliki:

$$G(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + d$$

V našem primeru dobimo:

$$\begin{aligned} G(s) &= [3 \quad 4] \left\{ s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 = [3 \quad 4] \begin{bmatrix} s-1 & +2 \\ -3 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \\ &= [3 \quad 4] \frac{\begin{bmatrix} s+4 & -2 \\ +3 & s-1 \end{bmatrix}}{s^2 + 3s + 2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{11s + 4}{s^2 + 3s + 2} \end{aligned}$$

Prenosno funkcijo sistema z enim vhomom in enim izhodom lahko izračunamo tudi z enačbo (2.64). Uporaba enačbe (2.64) je enostavnejša, saj ni potrebno invertiranje matrike.

$$G(s) = \frac{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{bc}^T) - \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} + d \quad (2.64)$$

### Naloga 2.36

Modelu v prostoru stanja,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = [3 \quad 4], \quad d = 0$$

določite prenosno funkcijo  $G(s)$  s pomočjo enačbe (2.64).

### Rešitev

Prenosno funkcijo  $G(s)$  izračunamo s pomočjo enačbe (2.64):

$$G(s) = \frac{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{bc}^T) - \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} + d$$

V našem primeru dobimo:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\det \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \right\} - \det \left\{ \begin{bmatrix} s-1 & 2 \\ -3 & s+4 \end{bmatrix} \right\}}{\det \left\{ \begin{bmatrix} s-1 & 2 \\ -3 & s+4 \end{bmatrix} \right\}} \\ &= \frac{(s^2 + 14s + 6) - (s^2 + 3s + 2)}{s^2 + 3s + 2} = \frac{11s + 4}{s^2 + 3s + 2} \end{aligned}$$

### 2.3.2 Pretvorba prenosne funkcije v model v prostoru stanja

Pri pretvorbi modela v prostoru stanja v vhodno-izhodni model dobimo vedno samo eno rešitev (prenosno funkcijo  $G(s)$  ali matriko prenosnih funkcij  $\mathbf{G}(s)$ ). Nasprotno pa lahko dobimo pri pretvorbi vhodno-izhodnega modela v model v prostoru stanja množico rešitev, ki vse na enak način povezujejo vhodne in izhodne spremenljivke modela, razlikujejo pa se v izbiri vektorja spremenljivk stanja. Izmed množice teh različnih zapisov modela v prostoru stanja so pomembnejše tri kanonične oblike:

- vodljivostna kanonična oblika,
- spoznavnostna kanonična oblika in
- diagonalna kanonična oblika.

Za pretvorbo vhodno-izhodnih modelov z enim vhomom in enim izhodom v kanonične oblike v prostoru stanja lahko uporabimo naslednje nastavke (enačbe (2.65) do (2.72)).

**Vodljivostna kanonična oblika**

Vhodno-izhodni model, opisan s prenosno funkcijo  $G(s)$ ,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2.65)$$

pretvorimo v vodljivostno kanonično obliko s pomočjo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.66)$$

$$\mathbf{c}^T = [b_0 - a_0 b_n \quad b_1 - a_1 b_n \quad b_2 - a_2 b_n \quad \dots \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_n], \quad d = b_n$$

**Spoznavnostna kanonična oblika**

Vhodno-izhodni model, opisan s prenosno funkcijo  $G(s)$  (enačba 2.65), pretvorimo v spoznavnostno normalno obliko s pomočjo nastavka:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_0 - a_0 b_n \\ b_1 - a_1 b_n \\ b_2 - a_2 b_n \\ \vdots \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_n \end{bmatrix}, \quad (2.67)$$

$$\mathbf{c}^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1], \quad d = b_n$$

**Diagonalna kanonična oblika**

Vhodno-izhodni model, ki ima različne (enojne) pole (poli prenosne funkcije ustrezajo lastnim vrednostim pripadajoče systemske matrike), lahko pretvorimo v model v prostoru stanja v diagonalni obliki. Systemska matrika takšnega modela je diagonalna matrika z lastnimi vrednostmi na diagonali. Model pretvorimo v diagonalno matriko preko razstavitve prenosne funkcije v parcialne ulomke.

$$G(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = c_0 + \frac{c_1}{s - \lambda_1} + \frac{c_2}{s - \lambda_2} + \dots + \frac{c_n}{s - \lambda_n} \quad (2.68)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.69)$$

$$\mathbf{c}^T = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad \dots \quad c_n], \quad d = c_0$$

Če ima prenosna funkcija večkratne pole, potem pretvorba v diagonalno matriko večinoma ni možna. V takšnih primerih pretvorimo vhodno-izhodni model v model v prostoru stanja, katerega systemska matrika ima na diagonali lastne vrednosti, pod (ali nad) večkratnimi lastnimi vrednostmi pa ima enice. Takšno obliko zapisa modela v prostoru stanja imenujemo Jordanova kanonična oblika.

Prenosna funkcija, kjer je  $\lambda_3$   $m$ -kratni pol, je predstavljena z enačbo (2.71):

$$G(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \quad (2.70)$$

$$= c_0 + \frac{c_1}{s - \lambda_1} + \frac{c_2}{s - \lambda_2} + \frac{c_3}{s - \lambda_3} + \frac{c_4}{(s - \lambda_3)^2} + \dots + \frac{c_n}{(s - \lambda_3)^m} \quad (2.71)$$

Pripadajoč model v prostoru stanja v Jordanovi kanonični obliki je:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.72)$$

$$\mathbf{c}^T = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad \dots \quad c_n], \quad d = c_0$$

### Naloga 2.37

Vhodno-izhodni model v obliki prenosne funkcije  $G(s)$  pretvorite v vse tri kanonične oblike modela v prostoru stanja.

$$G(s) = \frac{11s + 4}{s^2 + 3s + 2}$$

### Rešitev

Modele v prostoru stanja zapišemo s pomočjo enačb (2.65) do (2.71).

- Vodljivostna kanonična oblika

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}^T = [4 \quad 11], \quad d = 0$$

- Spoznavnostna kanonična oblika

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}^T = [0 \quad 1], \quad d = 0$$

- Diagonalna kanonična oblika

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}^T = [-7 \quad 18], \quad d = 0$$

### 2.3.3 Pretvorba modela v prostoru stanja v kanonične oblike

Model v prostoru stanja lahko pretvorimo v ustrezno kanonično obliko tako, da originalni model v prostoru stanja pretvorimo v vhodno-izhodni model, nato pa iz prenosne funkcije zapišemo model v prostoru stanja v ustrezni kanonični obliki (enačbe (2.65) do (2.72)). Obstaja pa tudi direktna pretvorba modela v prostoru stanja iz originalne v kanonično obliko. Za direktno pretvorbo je potrebno določiti transformacijsko matriko  $\mathbf{T}$ , ki preslika vektor spremenljivk stanja originalnega modela  $\mathbf{x}(t)$  v vektor spremenljivk stanja v ustrezni kanonični obliki  $\mathbf{x}^*(t)$ :

$$\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{T}\mathbf{x}(t) \quad (2.73)$$

Sistemsko ( $\mathbf{A}^*$ ), vhodno ( $\mathbf{B}^*$ ), izhodno ( $\mathbf{C}^*$ ) in direktno matriko ( $\mathbf{D}^*$ ) tako transformiranega kanoničnega modela določimo z enačbami:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} \quad (2.74)$$

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{T}\mathbf{B} \quad (2.75)$$

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1} \quad (2.76)$$

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{D} \quad (2.77)$$

#### Vodljivostna kanonična oblika

Model v prostoru stanja z enim vhodom, enim izhodom in  $n$  spremenljivkami stanja ( $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}^T$  in  $d$ ) pretvorimo v vodljivostno kanonično obliko s pomočjo enačb (2.78) do (2.84).

1. Izračunamo vodljivostno matriko  $\mathbf{Q}_v$ :

$$\mathbf{Q}_v = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] \quad (2.78)$$

2. Matriko  $\mathbf{Q}_v$  invertiramo:

$$\mathbf{Q}_{vi} = \mathbf{Q}_v^{-1} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

3. S pomočjo spodnje vrstice matrike  $\mathbf{Q}_{vi}$  tvorimo transformacijsko matriko  $\mathbf{T}$ :

$$\mathbf{q}_{viv} = [q_{n1} \quad q_{n2} \quad \dots \quad q_{nn}]$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{viv} \\ \mathbf{q}_{viv}\mathbf{A} \\ \mathbf{q}_{viv}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{viv}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

4. Model v vodljivostni kanonični obliki določimo s pomočjo naslednjih enačb:

$$\mathbf{A}_{vko} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} \quad (2.81)$$

$$\mathbf{b}_{vko} = \mathbf{T}\mathbf{b} \quad (2.82)$$

$$\mathbf{c}_{vko}^T = \mathbf{c}^T\mathbf{T}^{-1} \quad (2.83)$$

$$d_{vko} = d \quad (2.84)$$

### Spoznavnostna kanonična oblika

Model v prostoru stanja z enim vhom, enim izhodom in  $n$  spremenljivkami stanja ( $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}^T$  in  $d$ ) pretvorimo v spoznavnostno kanonično obliko s pomočjo enačb (2.85) do (2.91).

1. Izračunamo matriko  $\mathbf{Q}_s$ :

$$\mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

2. Matriko  $\mathbf{Q}_s$  invertiramo:

$$\mathbf{Q}_{si} = \mathbf{Q}_s^{-1} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

3. S pomočjo zadnjega stolpca matrike  $\mathbf{Q}_{si}$  tvorimo transformacijsko matriko  $\mathbf{T}$ :

$$\mathbf{q}_{sis} = \begin{bmatrix} q_{1n} \\ q_{2n} \\ \dots \\ q_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = [\mathbf{q}_{sis} \quad \mathbf{A}\mathbf{q}_{sis} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{q}_{sis} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{q}_{sis}]^{-1} \quad (2.87)$$

4. Model v spoznavnostni kanonični obliki določimo z enačbami:

$$\mathbf{A}_{sko} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} \quad (2.88)$$

$$\mathbf{b}_{sko} = \mathbf{T}\mathbf{b} \quad (2.89)$$

$$\mathbf{c}_{sko}^T = \mathbf{c}^T \mathbf{T}^{-1} \quad (2.90)$$

$$d_{sko} = d \quad (2.91)$$

### Diagonalna in Jordanova kanonična oblika

Model v prostoru stanja z enim vhom, enim izhodom in  $n$  spremenljivkami stanja ( $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}^T$  in  $d$ ) pretvorimo v diagonalno kanonično obliko s pomočjo matrike lastnih vektorjev na naslednji način:

1. Izračunamo lastne vrednosti  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ .
2. Določimo lastne vektorje  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \dots, \mathbf{p}_n$ .
3. Transformacijska matrika  $\mathbf{T}$  je inverzna matrika lastnih vektorjev:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \mathbf{p}_3 \quad \dots \quad \mathbf{p}_n]^{-1} \quad (2.92)$$

Proste parametre v matriki lastnih vektorjev določimo s pomočjo pogoja:

$$\mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{b} \quad (2.93)$$

4. Model v diagonalni kanonični obliki določimo z enačbami:

$$\mathbf{A}_{dko} = \mathbf{TAT}^{-1} \quad (2.94)$$

$$\mathbf{b}_{dko} = \mathbf{Tb} \quad (2.95)$$

$$\mathbf{c}_{dko}^T = \mathbf{c}^T \mathbf{T}^{-1} \quad (2.96)$$

$$d_{dko} = d \quad (2.97)$$

### Naloga 2.38

Model v prostoru stanja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = [3 \quad 4], \quad d = 0$$

pretvorite v:

- vodljivostno kanonično obliko,
- spoznavnostno kanonično obliko in
- diagonalno kanonično obliko.

### Rešitev

- Vodljivostna kanonična oblika:

1. Izračunamo matriko  $\mathbf{Q}_v$ :

$$\mathbf{Q}_v = [\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab}] = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

2. Matriko  $\mathbf{Q}_v$  invertiramo:

$$\mathbf{Q}_{vi} = \mathbf{Q}_v^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Vzamemo spodnjo vrstico matrike  $\mathbf{Q}_{vi}$  in tvorimo transformacijsko matriko  $\mathbf{T}$ :

$$\mathbf{q}_{viv} = [q_{21} \quad q_{22}] = [-2 \quad 1] \Rightarrow \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{viv} \\ \mathbf{q}_{viv} \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Model v vodljivostni kanonični obliki:

$$\mathbf{A}_{vko} = \mathbf{TAT}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_{vko} = \mathbf{Tb} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_{vko}^T = \mathbf{c}^T \mathbf{T}^{-1} = [4 \quad 11]$$

$$d_{vko} = d = 0$$

- Spoznavnostna kanonična oblika:

1. Izračunamo matriko  $\mathbf{Q}_s$ :

$$\mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 15 & -22 \end{bmatrix}$$

2. Matriko  $\mathbf{Q}_s$  invertiramo:

$$\mathbf{Q}_{si} = \mathbf{Q}_s^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 15 & -22 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-126} \begin{bmatrix} -22 & 3 \\ -15 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1746 & 0.0317 \\ 0.119 & -0.0238 \end{bmatrix}$$

3. Vzamemo zadnji stolpec matrike  $\mathbf{Q}_{sis}$  in tvorimo transformacijsko matriko  $\mathbf{T}$ :

$$\mathbf{q}_{sis} = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0317 \\ -0.0238 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{T} = [\mathbf{q}_{sis} \quad \mathbf{q}_{sis}\mathbf{A}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0317 & 0.0794 \\ -0.0238 & 0.1905 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 24 & -10 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

4. Model v spoznavnostni kanonični obliki:

$$\mathbf{A}_{sko} = \mathbf{TAT}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_{sko} = \mathbf{Tb} = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_{sko}^T = \mathbf{c}^T\mathbf{T}^{-1} = [0 \quad 1]$$

$$d_{sko} = d = 0$$

• Diagonalna kanonična oblika:

1. Lastni vrednosti sistema sta:  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -2$

2. Pripadajoča lastna vektorja sta  $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix}$  in  $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} p_{12} \\ \frac{3}{2}p_{12} \end{bmatrix}$

3. Transformacijska matrika  $\mathbf{T}$  je:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2]^{-1} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{11} & \frac{3}{2}p_{12} \end{bmatrix}^{-1}$$

Po rešitvi sistema enačb:

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{11} & \frac{3}{2}p_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

dobimo:  $p_{11} = -1$  in  $p_{12} = 2$  in s tem ustrezno transformacijsko matriko:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

4. Model v diagonalni kanonični obliki:

$$\mathbf{A}_{dko} = \mathbf{TAT}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_{dko} = \mathbf{Tb} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_{dko}^T = \mathbf{c}^T\mathbf{T}^{-1} = [-7 \quad 18]$$

$$d_{dko} = d = 0$$

## 2.4 Frekvenčne karakteristike

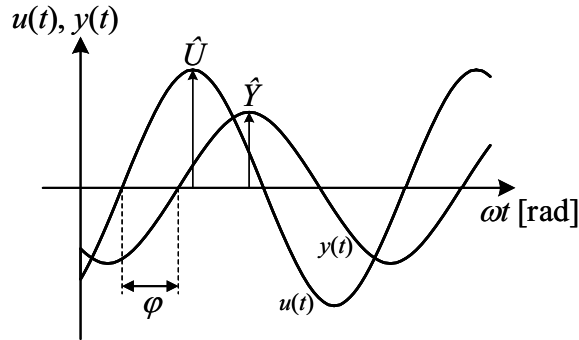
V prejšnjih poglavjih smo spoznali parametrične matematične modele. Parametrični modeli so enačbe, ki povezujejo vhode, izhode in spremenljivke stanja. V teh enačbah so parametri modela izraženi eksplicitno. Neparometrični modeli pa podajajo povezavo med vhom in izhodom v obliki tabele ali krivulje. Enega izmed najpomembnejših neparometričnih matematičnih modelov predstavljajo frekvenčni odzivi.

Frekvenčna karakteristika sistema pove, kako se sistem odziva na sinusno vhodno vzbujanje v stacionarnem stanju. Ena izmed lastnosti linearnih, časovno nespremenljivih sistemov je, da je pri sinusnem vzbujanju v ustaljenem stanju izhodna veličina tudi sinusna veličina z enako frekvenco,



kot jo ima vhodna veličina. Seveda pa v splošnem vhodna in izhodna veličina nimata enakih amplitud in nista sofazni. S spreminjanjem frekvence vhodne veličine se spreminjata tudi amplituda in faza izhodne veličine.

Slika 2.9 prikazuje časovna poteka sinusne vhodne veličine  $u(t) = U \sin(\omega t)$  in izhodne veličine  $y(t) = Y \sin(\omega t + \varphi)$ .  $U$  in  $Y$  označujeta amplitudi vhodne in izhodne veličine,  $\omega$  je označena njuna krožna frekvenca in  $\varphi$  fazni premik izhodne veličine glede na vhodno veličino.



Slika 2.9: Sinusni vhod in izhod sistema za izračun frekvenčne karakteristike

Frekvenčno karakteristiko sistema torej predstavlja tabela oz. ustrezna grafična predstavitev odvisnosti **ojačenja**  $\alpha(\omega) = \frac{Y}{U}$  (t. j. razmerja med amplitudama sinusne izhodne in vhodne veličine) in odvisnosti **faznega premika**  $\varphi(\omega)$  med izhodno in vhodno veličino od **krožne frekvence**  $\omega$  vhodnega sinusnega vzbujanja.

Frekvenčno karakteristiko sistema lahko dobimo z meritvijo (eksperimentalno) ali z izračunom (teoretično).

- Pri eksperimentalni določitvi frekvenčne karakteristike sistema le-tega vzbujamo z vhodnim sinusnim signalom. Počakamo, da je doseženo stacionarno stanje in nato izmerimo amplitudo vhodnega in izhodnega signala in fazni premik med vhodnim in izhodnim signalom. Dobljene rezultate predstavimo v tabeli oz. v ustreznem diagramu.
- Pri teoretični določitvi frekvenčne karakteristike sistema izhajamo iz njegove prenosne funkcije. V prenosni funkciji sistema  $G(s)$  kompleksno spremenljivko  $s$  nadomestimo s spremenljivko  $j\omega$ .

$$G(s) \xrightarrow{s \rightarrow j\omega} G(j\omega) \quad (2.98)$$

Tako dobljeno kompleksno funkcijo  $G(j\omega)$  zapišemo v algebrski obliki

$$G(j\omega) = \text{Re}(\omega) + j\text{Im}(\omega) \quad (2.99)$$

in izračunamo ojačenje  $\alpha(\omega)$  in kot fazne premaknitve  $\varphi(\omega)$ :

$$\alpha(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{\text{Re}[G(j\omega)]^2 + \text{Im}[G(j\omega)]^2} \quad (2.100)$$

$$\varphi(\omega) = \angle\{G(j\omega)\} = \arctan \frac{\text{Im}[G(j\omega)]}{\text{Re}[G(j\omega)]} \quad (2.101)$$

Izračunani vrednosti  $\alpha(\omega)$  in  $\varphi(\omega)$  predstavimo v ustreznem diagramu. V diagramih frekvenčnih karakteristik prikazujemo ojačenje  $\alpha(\omega)$  velikokrat v decibelih. Povezavo med ojačenjem  $\alpha(\omega)$  in ojačenjem v decibelih  $\alpha_{dB}(\omega)$  predstavlja enačba (2.102):

$$\alpha_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} \alpha(\omega) \quad (2.102)$$

Za grafično predstavitev frekvenčnih karakteristik imamo na razpolago več različnih diagramov. Najbolj pogosto uporabljena sta Bodejev in polarni diagram.

- V Bodejevem diagramu predstavimo frekvenčno karakteristiko z dvema diagramoma, v enem prikažemo odvisnost ojačenja  $\alpha_{dB}(\omega)$  od frekvence vzbujalnega signala, v drugem pa odvisnost faznega premika  $\varphi(\omega)$  od frekvence vzbujalnega signala. Na abscisah v obeh diagramih uporabimo logaritemsko merilo (z osnovo 10), na ordinatah pa uporabimo linearno merilo. V primeru, ko v diagramu ojačenja prikazujemo brezdimenzijsko ojačenje  $\alpha(\omega)$ , uporabimo na ordinati diagrama ojačenja logaritemsko merilo.
- V polarnem diagramu prikažemo frekvenčno karakteristiko z grafom v kompleksni ravnini, kjer prikažemo realno in imaginarno komponento kompleksne veličine  $G(j\omega)$  za različne vrednosti krožne frekvence  $\omega$  (najpogosteje od  $\omega = 0$  do  $\omega = \infty$ ). Na obeh oseh uporabljamo linearno merilo.

### Naloga 2.39

Narišite frekvenčno karakteristiko člena 1. reda z ojačenjem  $k = 1$  in časovno konstanto  $T = 1$  s v Bodejevem in polarnem diagramu.

$$G(s) = \frac{k}{sT + 1}, \quad k = 1, \quad T = 1 \text{ s}$$

### Rešitev

Frekvenčno karakteristiko izračunamo tako, da v prenosni funkciji  $G(s)$  kompleksno spremenljivko  $s$  nadomestimo s spremenljivko  $j\omega$ :

$$G(s) = \frac{k}{sT + 1} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{k}{j\omega T + 1}$$

Za dobljeni izraz izračunamo realni in imaginarni del:

$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega T + 1} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2} + j\left(-\frac{k\omega T}{1 + \omega^2 T^2}\right) = \text{Re}[G(j\omega)] + j\text{Im}[G(j\omega)]$$

Realna in imaginarna komponenta  $G(j\omega)$  sta:

$$\text{Re}[G(j\omega)] = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2}, \quad \text{Im}[G(j\omega)] = -\frac{k\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

Iz realne in imaginarne komponente izračunamo izraze za ojačenje  $\alpha(\omega)$  in  $\alpha_{dB}(\omega)$  ter fazni premik  $\varphi(\omega)$ :

$$\alpha(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{\text{Re}[G(j\omega)]^2 + \text{Im}[G(j\omega)]^2} = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

$$\alpha_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} \alpha(\omega) = 20 \log_{10} \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

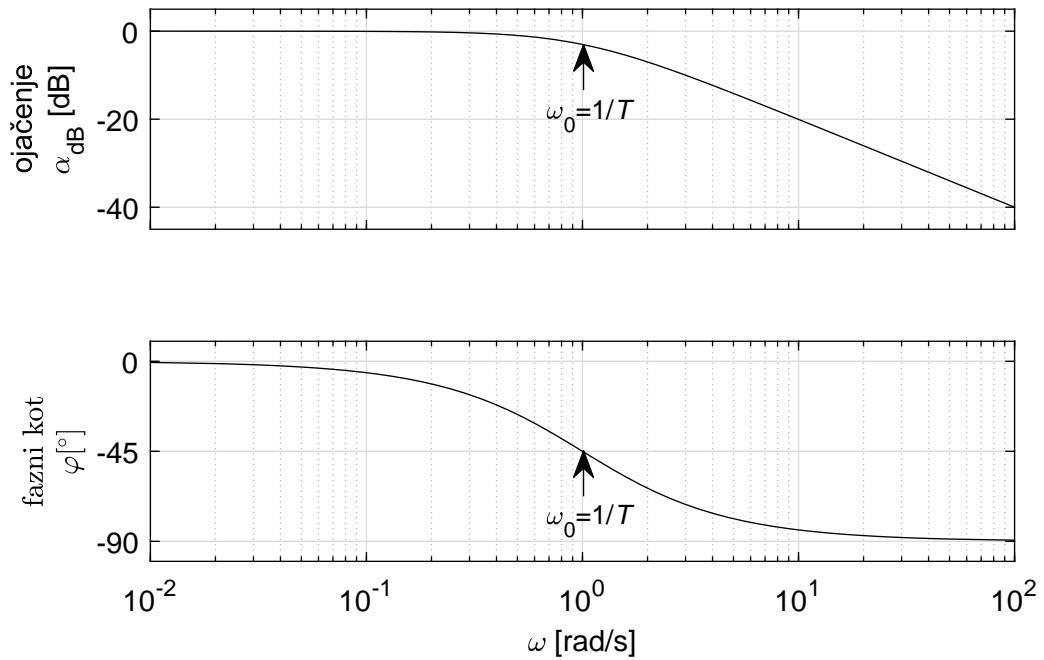
$$\varphi(\omega) = \angle\{G(j\omega)\} = \arctan \frac{\text{Im}[G(j\omega)]}{\text{Re}[G(j\omega)]} = \arctan \frac{-\omega T}{1}$$

V dobljene izraze vstavimo vrednosti  $k = 1$  in  $T = 1$  s in izračunamo  $\alpha(\omega)$ ,  $\alpha_{dB}(\omega)$  in  $\varphi(\omega)$  za različne vrednosti krožne frekvence  $\omega$  v razponu od  $\omega = 0$  do  $\omega = \infty$ . Z namenom čim boljšega prikaza frekvenčne karakteristike v celotnem frekvenčnem razponu je smiselno frekvenčno območje od  $\omega = 0$  do  $\omega = \infty$  logaritemsko diskretizirati. Tabela 2.1 prikazuje izračunane vrednosti:

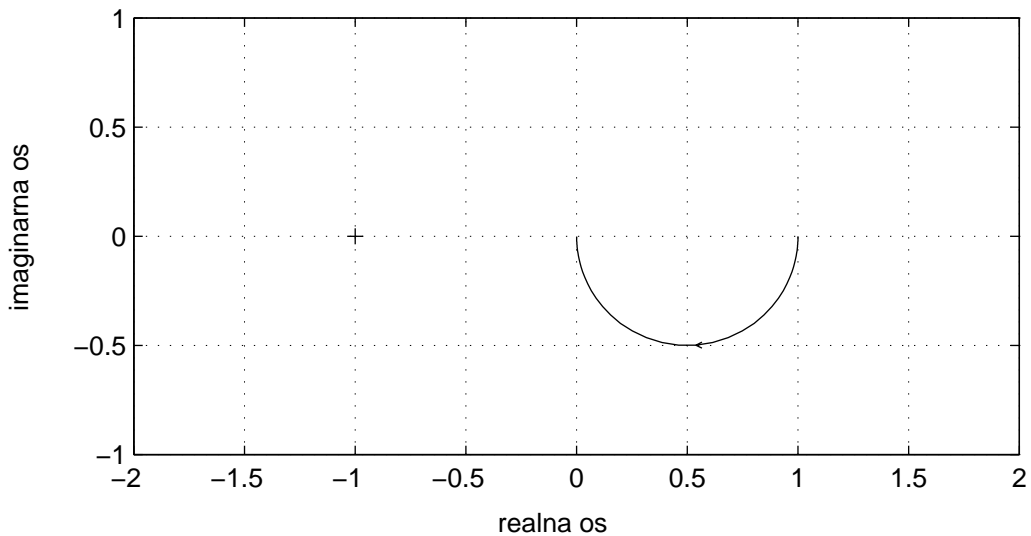
$\omega$ [rad/s]	$\alpha(\omega)$	$\alpha_{dB}(\omega)$ [dB]	$\varphi(\omega)$ [°]
0	1	0	0
0,0001	0,999999995	-4,34294e-08	-0,0057
0,0002	0,999999980	-1,73718e-07	-0,0115
0,0004	0,999999920	-6,94871e-07	-0,0229
0,0007	0,999999755	-2,12804e-06	-0,0401
0,001	0,999999500	-4,34294e-06	-0,0573
0,002	0,999998000	-1,73717e-05	-0,1146
0,004	0,999992000	-6,94866e-05	-0,2292
0,007	0,999975501	-0,000212799	-0,4011
0,01	0,999950004	-0,000434273	-0,5729
0,02	0,999800060	-0,001736831	-1,1458
0,04	0,999200959	-0,006943159	-2,2906
0,07	0,997558967	-0,021228462	-4,0042
0,1	0,995037190	-0,043213738	-5,7106
0,2	0,980580676	-0,170333393	-11,3099
0,4	0,928476691	-0,644579892	-21,8014
0,7	0,819231921	-1,731862684	-34,9920
1	0,707106781	-3,010299957	-45,0000
2	0,447213595	-6,989700043	-63,4349
4	0,242535625	-12,30448921	-75,9638
7	0,141421356	-16,98970004	-81,8699
10	0,099503719	-20,04321374	-84,2894
20	0,049937617	-26,03144373	-87,1376
40	0,024992191	-32,04391332	-88,5679
70	0,014284257	-36,90284703	-89,1815
100	0,009999500	-40,00043427	-89,4271
200	0,004999938	-46,02070849	-89,7135
400	0,002499992	-52,04122697	-89,8568
700	0,001428570	-56,90196966	-89,9181
1000	0,001000000	-60,00000434	-89,9427
2000	0,000500000	-66,020601	-89,9714
4000	0,000250000	-72,0412001	-89,9857
7000	0,000142857	-76,90196089	-89,9918
10000	0,000100000	-80,00000004	-89,9943
20000	0,000050000	-86,02059992	-89,9971
40000	0,000025000	-92,04119983	-89,9986
70000	0,000014286	-96,9019608	-89,9992
100000	0,000010000	-100	-89,9994
200000	0,000005000	-106,0205999	-89,9997
400000	0,000002500	-112,0411998	-89,9999
700000	0,000001429	-116,9019608	-89,9999
$\infty$	0	$-\infty$	-90

Tabela 2.1: Izračunane vrednosti  $\alpha(\omega)$ ,  $\alpha_{dB}(\omega)$  in  $\varphi(\omega)$  v razponu od  $\omega = 0$  do  $\omega = \infty$  za člen 1. reda z ojačenjem  $k = 1$  in časovno konstanto  $T = 1$  s, naloga 2.39

Bodejev diagram sestoji iz dveh diagramov, ki ju narišemo enega pod drugim. V obeh na absciso nanašamo krožno frekvenco v logaritemskem merilu, v zgornjem diagramu na ordinato narišemo ojačenje v decibelih, v spodnjem pa fazni premik v stopinjah.



Slika 2.10: Bodejev diagram člena 1. reda, naloga 2.39



Slika 2.11: Polarni diagram člena 1. reda, naloga 2.39

Frekvenčno karakteristiko lahko v Bodejevem diagramu narišemo tudi poenostavljeno oziroma asimptotično. Potek ojačenja, ki smo ga narisali na osnovi izračunanih vrednosti v tabeli 2.1, nadomestimo z dvema asimptotama, ki predstavljata dober približek originalni krivulji pri nizkih in visokih frekvencah:

$$\text{za } \omega \ll \frac{1}{T} \text{ približno velja } \alpha(\omega) \approx k \quad (\text{nizkofrekvenčna asimptota})$$

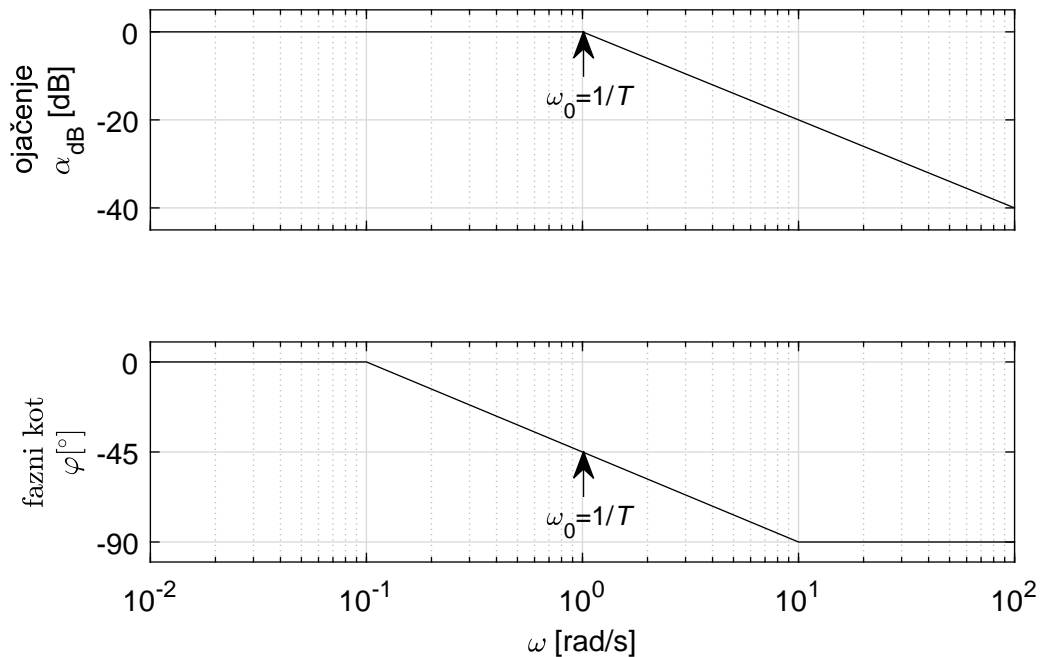
$$\text{za } \omega \gg \frac{1}{T} \text{ približno velja } \alpha(\omega) \approx \frac{k}{\omega T} \quad (\text{visokofrekvenčna asimptota})$$

Obe asimptoti, visoko- in nizkofrekvenčna, se sekata pri krožni frekvenci  $\omega_0 = \frac{1}{T}$ . Krožno frekvenco  $\omega_0$  imenujemo lomna frekvenca.

Podobno postopamo tudi pri faznem kotu  $\varphi(\omega)$ :

$$\begin{aligned} \text{za } \omega \leq 0.1 \frac{1}{T} & \text{ približno velja } \varphi(\omega) \approx 0^\circ & (\text{nizkofrekvenčna asimptota}) \\ \text{za } \omega \geq 10 \frac{1}{T} & \text{ približno velja } \varphi(\omega) \approx -90^\circ & (\text{visokofrekvenčna asimptota}) \end{aligned}$$

V frekvenčnem območju  $0.1 \frac{1}{T} \leq \omega < 10 \frac{1}{T}$  nadomestimo  $\varphi(\omega)$  z linearno upadajočo funkcijo, ki seka kot  $-45^\circ$  v opazovani lomni točki  $\frac{1}{T}$ . Asimptotski Bodejev diagram prikazuje slika 2.12:



Slika 2.12: Asimptotski Bodejev diagram člena 1. reda, naloga 2.39

---

#### Naloga 2.40

Narišite frekvenčno karakteristiko integratorja z integracijsko konstanto  $T_i = 1$  s v Bodejevem diagramu.

$$G(s) = \frac{1}{sT_i}, \quad T_i = 1 \text{ s}$$

#### Rešitev

Frekvenčno karakteristiko sistema, opisanega s prenosno funkcijo  $G(s)$ , narišemo tako, da najprej določimo frekvenčno karakteristiko:

$$G(s) = \frac{1}{sT_i} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T_i}$$

Določimo realni in imaginarni del frekvenčne karakteristike:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T_i} \Rightarrow G(j\omega) = 0 + j\left(-\frac{1}{\omega T_i}\right) = \text{Re}[G(j\omega)] + j\text{Im}[G(j\omega)]$$

Realna in imaginarna komponenta  $G(j\omega)$  sta:

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)] = 0, \quad \operatorname{Im}[G(j\omega)] = -\frac{1}{\omega T_i}$$

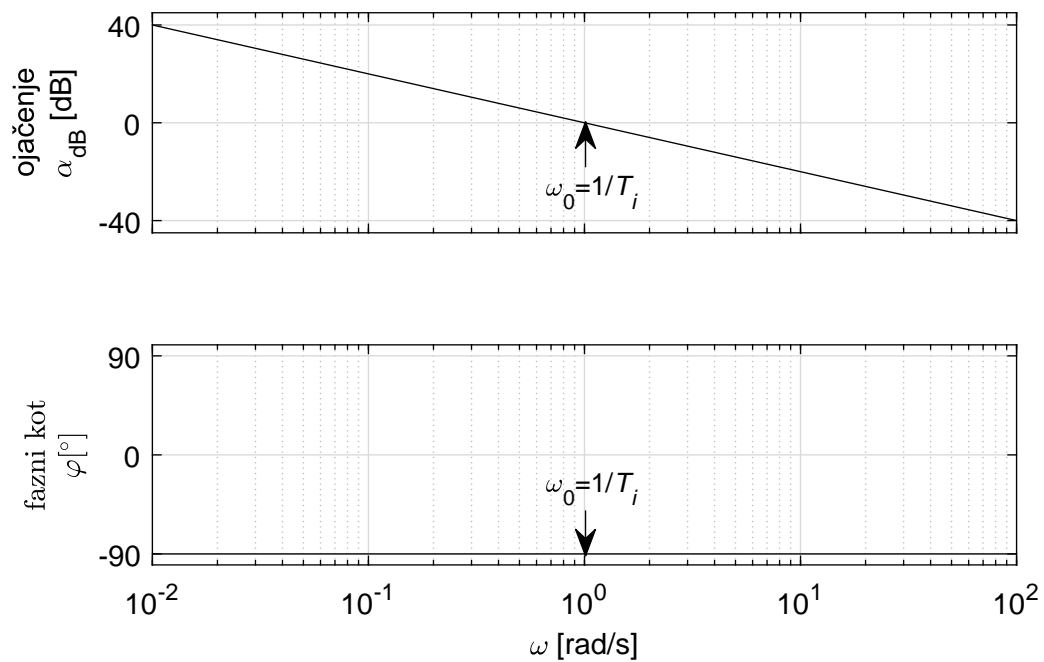
Sedaj lahko določimo ojačenje frekvenčne karakteristike v odvisnosti od frekvence  $\alpha(\omega)$  in fazni premik  $\varphi(\omega)$ :

$$\alpha(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}[G(j\omega)]^2 + \operatorname{Im}[G(j\omega)]^2} = \sqrt{\frac{1}{\omega^2 T_i^2}} = \frac{1}{\omega T_i}$$

$$\alpha_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} \alpha(\omega) = 20 \log_{10} \frac{1}{\omega T_i} = -20 \log_{10} \omega T_i$$

$$\varphi(\omega) = \angle\{G(j\omega)\} = \arctan \frac{\operatorname{Im}[G(j\omega)]}{\operatorname{Re}[G(j\omega)]} = \arctan \frac{-\omega T_i}{0} = -90^\circ$$

Izračunana  $\alpha_{dB}(\omega)$  in  $\varphi(\omega)$  narišemo v Bodejevem diagramu (slika 2.13):



Slika 2.13: Bodejev diagram integratorja, naloga 2.40

**Naloga 2.41**

Narišite frekvenčno karakteristiko idealnega diferenciatorja z diferencirno konstanto  $T_d = 1$  s v Bodejevem diagramu.

$$G(s) = sT_d, \quad T_d = 1 \text{ s}$$

**Rešitev** Za podano prenosno funkcijo najprej določimo frekvenčno karakteristiko ( $s$  zamenjamo z  $j\omega$ )

$$G(s) = sT_d \Rightarrow G(j\omega) = j\omega T_d$$

Realna in imaginarna komponenta  $G(j\omega)$  sta:

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)] = 0, \quad \operatorname{Im}[G(j\omega)] = \omega T_d$$

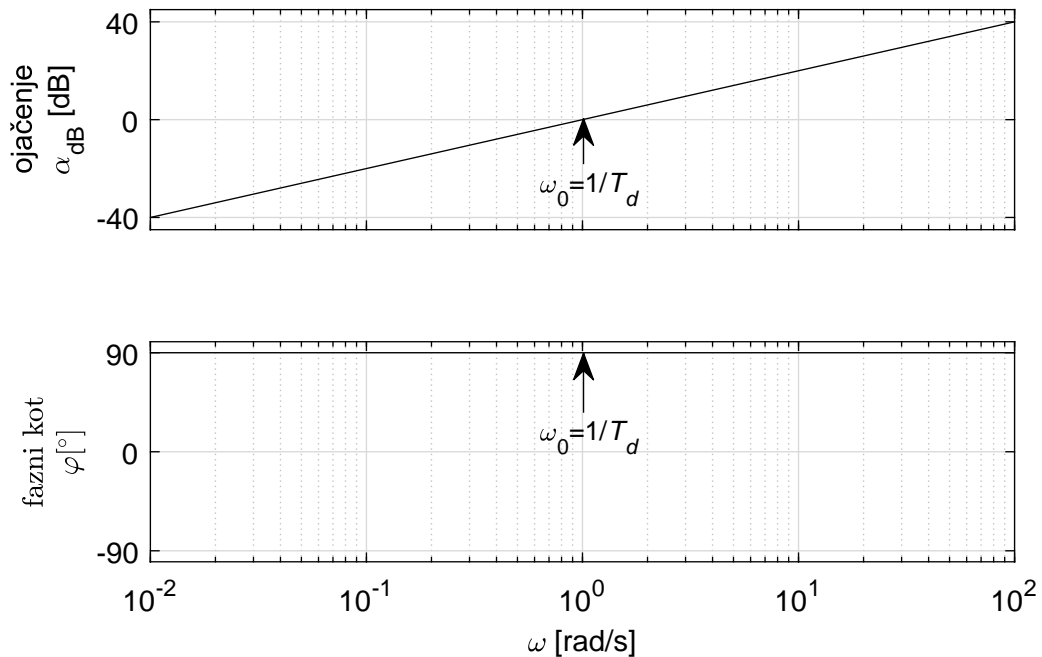
Iz realne in imaginarne komponente izračunamo ojačenje frekvenčne karakteristike  $\alpha(\omega)$  in fazni premik  $\varphi(\omega)$ :

$$\alpha(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}[G(j\omega)]^2 + \operatorname{Im}[G(j\omega)]^2} = \sqrt{\omega^2 T_d^2} = \omega T_d$$

$$\alpha_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} \alpha(\omega) = 20 \log_{10} \omega T_d$$

$$\varphi(\omega) = \angle\{G(j\omega)\} = \arctan \frac{\operatorname{Im}[G(j\omega)]}{\operatorname{Re}[G(j\omega)]} = \arctan \frac{\omega T_d}{0} = 90^\circ$$

Dobljena  $\alpha_{dB}(\omega)$  in  $\varphi(\omega)$  narišemo v Bodejevem diagramu (slika 2.14):



Slika 2.14: Bodejev diagram idealnega diferenciatorja, naloga 2.41

**Naloga 2.42**

Narišite frekvenčno karakteristiko diferencirnega člena 1. reda z ojačenjem  $k = 1$  in parametrom  $T = 1$  s v Bodejevem diagramu.

$$G(s) = k(sT + 1), \quad k = 1, \quad T = 1 \text{ s}$$

**Rešitev**

Za podano prenosno funkcijo  $G(s)$  določimo frekvenčno karakteristiko:

$$G(s) = k(sT + 1) \Rightarrow G(j\omega) = k(j\omega T + 1)$$

Realna in imaginarna komponenta  $G(j\omega)$  sta:

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)] = k, \quad \operatorname{Im}[G(j\omega)] = k\omega T$$

Iz realne in imaginarne komponente izračunamo ojačenje frekvenčne karakteristike v odvisnosti od frekvence  $\alpha(\omega)$  in fazni premik frekvenčne karakteristike v odvisnosti od frekvence  $\varphi(\omega)$ :

$$\alpha(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}[G(j\omega)]^2 + \operatorname{Im}[G(j\omega)]^2} = \sqrt{k^2 + k^2\omega^2 T^2} = k\sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

$$\alpha_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} \alpha(\omega) = 20 \log_{10} k\sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

$$\varphi(\omega) = \angle\{G(j\omega)\} = \arctan \frac{\operatorname{Im}[G(j\omega)]}{\operatorname{Re}[G(j\omega)]} = \arctan \frac{\omega T}{1}$$

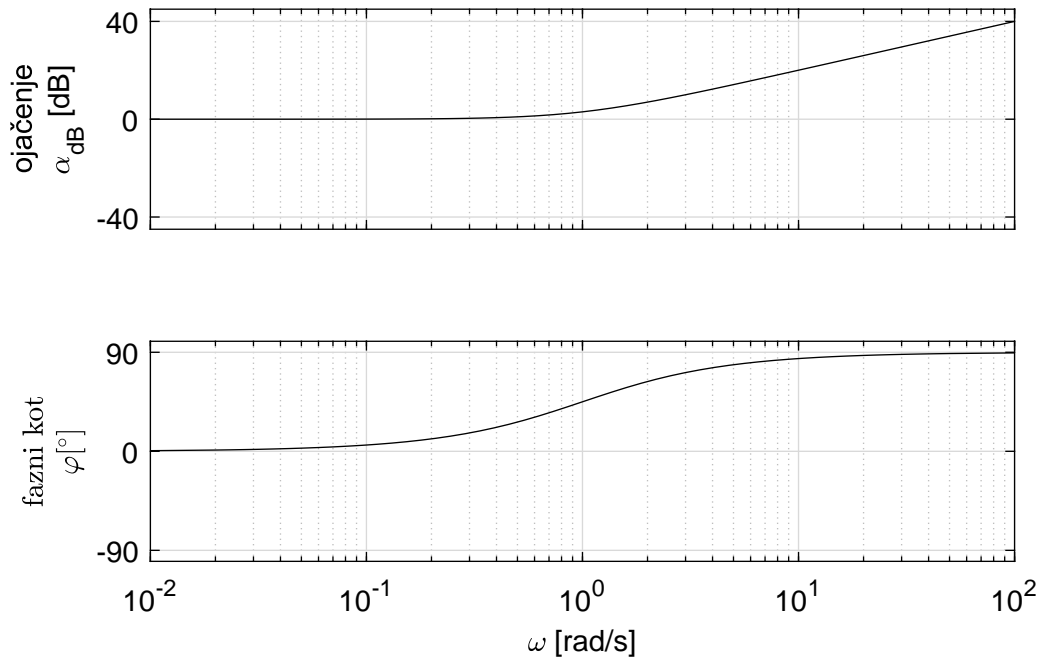
V dobljene izraze vstavimo vrednosti  $k = 1$  in  $T = 1$  s in izračunamo  $\alpha(\omega)$ ,  $\alpha_{dB}(\omega)$  in  $\varphi(\omega)$  za različne vrednosti krožne frekvence  $\omega$  v razponu od  $\omega = 0$  do  $\omega = \infty$ . Tabela 2.2 prikazuje izračunane vrednosti:



$\omega$ [rad/s]	$\alpha(\omega)$	$\alpha_{dB}(\omega)$ [dB]	$\varphi(\omega)$ [°]
0	1	0	0
0,0001	1,000000005	4,34294e-08	0,0057
0,0002	1,00000002	1,73718e-07	0,0115
0,0004	1,00000008	6,94871e-07	0,0229
0,0007	1,000000245	2,12804e-06	0,0401
0,001	1,0000005	4,34294e-06	0,0573
0,002	1,000002	1,73717e-05	0,1146
0,004	1,000008	6,94866E-05	0,2292
0,007	1,0000245	0,000212799	0,4011
0,01	1,000049999	0,000434273	0,5729
0,02	1,00019998	0,001736831	1,1458
0,04	1,00079968	0,006943159	2,2906
0,07	1,002447006	0,021228462	4,0042
0,1	1,004987562	0,043213738	5,7106
0,2	1,019803903	0,170333393	11,3099
0,4	1,077032961	0,644579892	21,8014
0,7	1,220655562	1,731862684	34,9920
1	1,414213562	3,010299957	45,0000
2	2,236067977	6,989700043	63,4349
4	4,123105626	12,30448921	75,9638
7	7,071067812	16,98970004	81,8699
10	10,04987562	20,04321374	84,2894
20	20,02498439	26,03144373	87,1376
40	40,01249805	32,04391332	88,5679
70	70,00714249	36,90284703	89,1815
100	100,0049999	40,00043427	89,4271
200	200,0025	46,02070849	89,7135
400	400,00125	52,04122697	89,8568
700	700,0007143	56,90196966	89,9181
1000	1000,0005	60,00000434	89,9427
2000	2000,00025	66,020601	89,9714
4000	4000,000125	72,0412001	89,9857
7000	7000,000071	76,90196089	89,9918
10000	10000,00005	80,00000004	89,9943
20000	20000,00003	86,02059992	89,9971
40000	40000,00001	92,04119983	89,9986
70000	70000,00001	96,9019608	89,9992
100000	100000	100	89,9994
200000	200000	106,0205999	89,9997
400000	400000	112,0411998	89,9999
700000	700000	116,9019608	89,9999
$\infty$	$\infty$	$\infty$	90

Tabela 2.2: Izračunane vrednosti  $\alpha(\omega)$ ,  $\alpha_{dB}(\omega)$  in  $\varphi(\omega)$  v razponu od  $\omega = 0$  do  $\omega = \infty$  za diferencirni člen 1. reda z ojačenjem  $k = 1$  in parametrom  $T = 1$  s, naloga 2.42

Izračunane vrednosti ojačenja  $\alpha_{dB}(\omega)$  in faznega kota  $\varphi(\omega)$  narišemo v Bodejevem diagramu (slika 2.15).



Slika 2.15: Bodejev diagram diferencirnega člena 1. reda, naloga 2.42

V mnogih primerih se izkaže kot zelo priročno, če frekvenčno karakteristiko prikažemo zgolj asimptotsko. Funkcijo  $\alpha_{dB}(\omega)$  prikažemo z dvema asimptotama, ki predstavljata dober približek originalnemu izrazu pri visokih in nizkih frekvencah:

$$\text{za } \omega \ll \frac{1}{T} \text{ približno velja } \alpha_{dB}(\omega) \approx 20 \log_{10}(k) \quad (\text{nizkofrekvenčna asimptota})$$

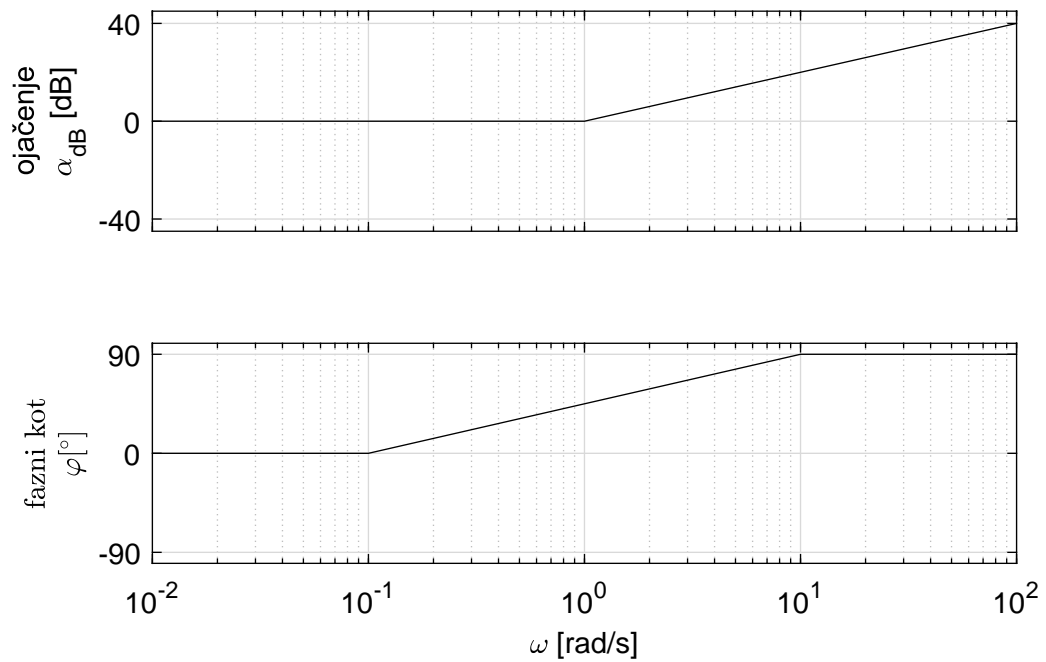
$$\text{za } \omega \gg \frac{1}{T} \text{ približno velja } \alpha(\omega) \approx 20 \log_{10}(k\omega T) \quad (\text{visokofrekvenčna asimptota})$$

Obe asimptoti podaljšamo tudi v frekvenčno območje  $\omega \approx \frac{1}{T}$ . Podobno aproksimiramo tudi izraz  $\varphi(\omega)$ :

$$\text{za } \omega \leq 0.1 \frac{1}{T} \text{ približno velja } \varphi(\omega) \approx 0^\circ \quad (\text{nizkofrekvenčna asimptota})$$

$$\text{za } \omega \geq 10 \frac{1}{T} \text{ približno velja } \varphi(\omega) \approx 90^\circ \quad (\text{visokofrekvenčna asimptota})$$

V frekvenčnem območju  $0.1 \frac{1}{T} \leq \omega \leq 10 \frac{1}{T}$  aproksimiramo izraz  $\varphi(\omega)$  z linearno naraščajočo funkcijo. Poenostavljen Bodejev diagram prikazuje slika 2.16:



Slika 2.16: Asimptotski Bodejev diagram diferencirnega člena 1. reda, naloga 2.42

**Naloga 2.43**

Narišite frekvenčno karakteristiko člena drugega reda, kot ga opisuje spodnja prenosna funkcija, v Bodejevem diagramu.

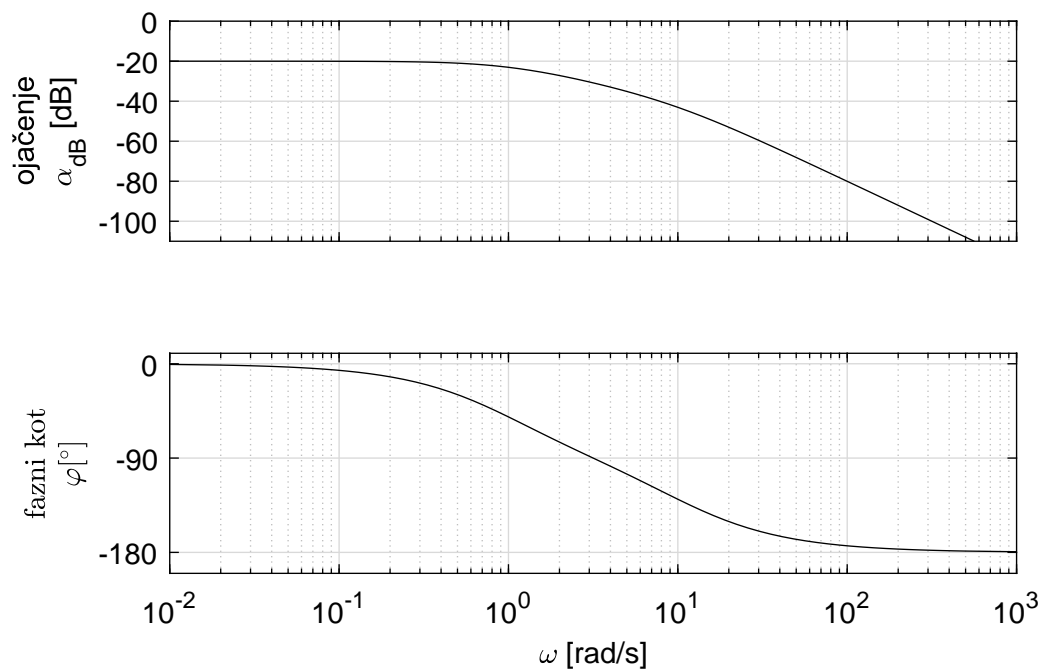
$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 11s + 10}$$

**Rešitev**

Prenosno funkcijo lahko razstavimo v serijsko vezavo dveh členov prvega reda:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 11s + 10} = \frac{1}{s + 1} \frac{1}{s + 10}$$

V Bodejevem diagramu narišemo frekvenčni karakteristiki obeh členov 1. reda. Fazni premik serijske vezave obeh členov dobimo tako, da seštejemo fazna premika obeh členov. Ojačenje serijske vezave obeh členov dobimo tako, da ojačenja obeh členov pomnožimo. Zaradi tega, ker v Bodejevem diagramu ojačenje običajno prikažemo v decibelih, lahko oba ojačevalna prispevka, izračunana v dB, kar seštejemo pri določanju skupnega ojačevalnega poteka. Rezultirajoča amplitudni in fazni odziv sta prikazana na sliki 2.17.



Slika 2.17: Bodejev diagram člena drugega reda, naloga 2.43

**Naloga 2.44**

Narišite frekvenčno karakteristiko realnega diferenciatorja v Bodejevem diagramu.

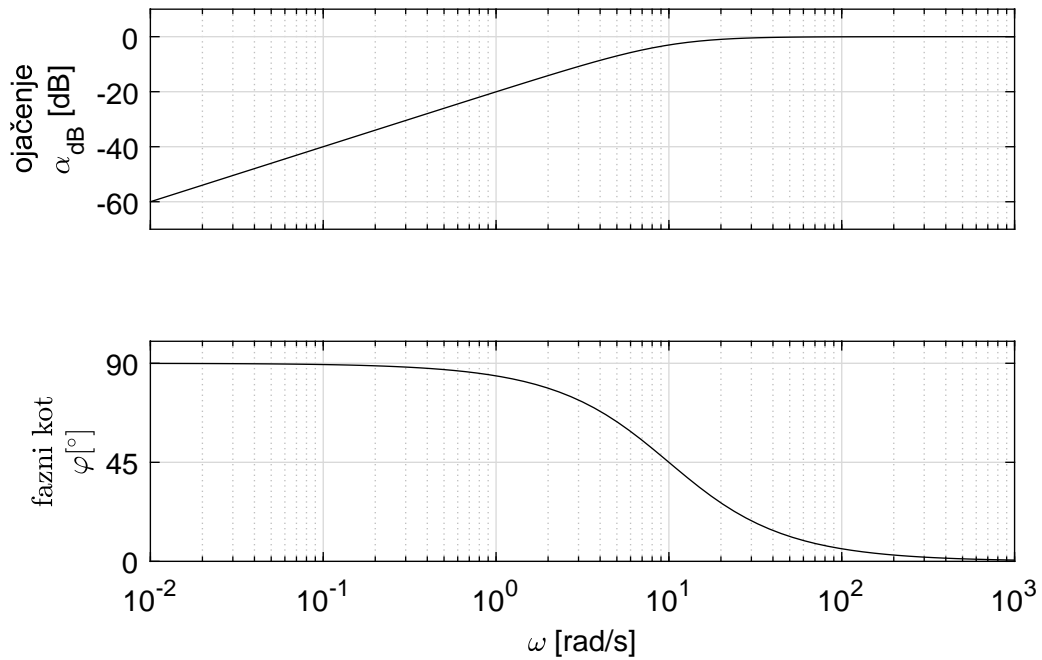
$$G(s) = \frac{s}{s + 10}$$

**Rešitev**

Realni diferenciator predstavlja serijska vezava idealnega diferenciatorja in člena 1. reda:

$$G(s) = \frac{s}{s + 10} = s \frac{1}{s + 10}$$

Ločeno narišemo obe frekvenčni karakteristiki in nato geometrično določimo skupno amplitudno in fazno karakteristiko. Amplitudna in fazna karakteristika realnega diferenciatorja sta prikazani na sliki 2.18.



Slika 2.18: Bodejev diagram realnega diferenciatorja, naloga 2.44

## 2.5 Stabilnost

### 2.5.1 Splošne metode ugotavljanja stabilnosti dinamičnih sistemov

Ugotavljanje stabilnosti se v večini primerov pretvori v izračunavanje realnega dela polov ulomljene racionalne funkcije oziroma lastnih vrednosti kvadratne matrike. V primeru, ko je sistem opisan z vhodno-izhodnim modelom - to je s prenosno funkcijo ali z matriko prenosnih funkcij, je sistem stabilen, če so vsi realni deli polov prenosnih funkcij negativni. V matriki prenosnih funkcij imajo vse prenosne funkcije enak imenovalac, zato je za ugotavljanje stabilnosti modela z večimi vhodi in izhodi dovolj, da ugotovimo stabilnost ene prenosne funkcije (seveda v primeru skupnih korenov števca in imenovalca le-teh ne smemo krajšati). V primeru, ko je sistem opisan z modelom v prostoru stanja, pa je sistem stabilen, če so vsi realni deli lastnih vrednosti negativni.

#### Naloga 2.45

Ugotovite stabilnost sistema, opisanega s prenosno funkcijo:

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

#### Rešitev

Izračunamo pole prenosne funkcije:

$$s^3 + 3s^2 + 3s + 1 = 0 \Rightarrow s_{1,2,3} = -1$$

Vsi poli prenosne funkcije imajo negativni del, zato je model stabilen.

**Naloga 2.46**

Ugotovite stabilnost sistema, opisanega z modelom v prostoru stanja:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -12 & \frac{2}{3} \\ -36 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1, 0] \mathbf{x}\end{aligned}$$

**Rešitev**

Izračunamo karakteristični polinom in lastne vrednosti sistemske matrike  $\mathbf{A}$ :

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda + 12 & -\frac{2}{3} \\ 36 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 13\lambda + 36 = (\lambda + 4)(\lambda + 9)$$

$$(\lambda + 4)(\lambda + 9) = 0 \Rightarrow \text{lastni vrednosti matrike } \mathbf{A} \text{ sta: } \lambda_1 = -4, \lambda_2 = -9$$

Obe lastni vrednosti imata negativni realni del, zato je model stabilen.

**Osnovni pravili o predznaku realnih delov korenov polinoma**

Za ugotavljanje stabilnosti sistema moramo poiskati korene karakterističnega polinoma (če je podan model v prostoru stanja) ali korene polinoma v imenovalcu prenosne funkcije (če je model podan v vhodno/izhodni obliki s prenosno funkcijo). Korene polinomov višjih redov izračunamo s pomočjo numeričnih metod (tangenta, sekantna, ...). Za potrebe ugotavljanja stabilnosti, kjer nas ne zanimajo vrednosti posameznih korenov, ampak samo odgovor na vprašanje, ali so vsi koreni v levi polravnini ali ne, obstajajo poenostavljeni kriteriji določanja stabilnosti. Najbolj znana sta Hurwitzev in Routhov stabilnostni kriterij.

Hitri vpogled v stabilnost sistema nam velikokrat omogočata osnovni pravili o predznaku realnih delov korenov polinoma. Polinom  $I(s)$  naj bo opisan z enačbo (2.103):

$$I(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \quad (2.103)$$

kjer je  $a_n$  pozitivno število. Velja:

- Če ima polinom (2.103) vsaj en koeficient negativen ali enak nič, potem bo imel vsaj en koren polinoma pozitiven ali ničelni realni del - v kompleksni  $s$ -ravnini bo torej vsaj en koren ležal desno od imaginarne osi ali na njej.
- Polinom drugega reda, katerega vsi koeficienti so pozitivni, ima oba korena z negativnim realnim delom.

**Hurwitzev stabilnostni kriterij**

Iz koeficientov polinoma (2.103) reda  $n$  tvorimo kvadratno matriko  $\mathbf{H}$  dimenzije  $n \times n$ :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ 0 & 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots \\ 0 & 0 & a_n & a_{n-2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (2.104)$$



Vrednosti ustreznih poddeterminant so (enačba (2.104)):

$$H_1 = 10$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 10 & 50 \\ 1 & 35 \end{vmatrix} = 300$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 10 & 50 & 0 \\ 1 & 35 & 24 \\ 0 & 10 & 50 \end{vmatrix} = 12600$$

$$H_4 = \begin{vmatrix} 10 & 50 & 0 & 0 \\ 1 & 35 & 24 & 0 \\ 0 & 10 & 50 & 0 \\ 0 & 1 & 35 & 24 \end{vmatrix} = 24H_3 = 302400$$

Vse štiri poddeterminante so pozitivne, kar pomeni, da vsi poli prenosne funkcije ležijo v odprti levi polravnini - torej je sistem stabilen. (Z numeričnimi metodami lahko potrdimo rešitev - poli prenosne funkcije so:  $p_1 = -1$ ,  $p_2 = -2$ ,  $p_3 = -3$ ,  $p_4 = -4$ ).

### Naloga 2.48

Ugotovite stabilnost sistema, opisanega s prenosno funkcijo:

$$G(s) = \frac{s^3 + 18s^2 + 107s + 210}{1s^4 + 0.7s^3 + 0.35s^2 + 1.05s + 0.1}$$

### Rešitev

Tvorimo kvadratno matriko  $\mathbf{H}$  (enačba (2.104)):

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0.7 & 1.05 & 0 & 0 \\ 1 & 0.35 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.7 & 1.05 & 0 \\ 0 & 1 & 0.35 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Vrednosti ustreznih poddeterminant so (enačba (2.104)):

$$H_1 = 0.7$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 0.7 & 1.05 \\ 1 & 0.35 \end{vmatrix} = -0.8050$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 0.7 & 1.05 & 0 \\ 1 & 0.35 & 0.1 \\ 0 & 0.7 & 1.05 \end{vmatrix} = -0.8943$$

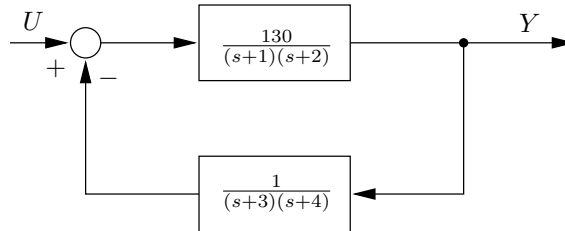
$$H_4 = \begin{vmatrix} 0.7 & 1.05 & 0 & 0 \\ 1 & 0.35 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.7 & 1.05 & 0 \\ 0 & 1 & 0.35 & 0.1 \end{vmatrix} = 0.1H_3 = -0.0894$$

Ker niso vse štiri poddeterminante pozitivne, sledi, da vsi poli prenosne funkcije nimajo negativnega realnega dela - torej je sistem nestabilen. (Z numeričnimi metodami potrdimo rešitev - poli prenosne funkcije so:  $p_1 = -1.1367$ ,  $p_2 = -0.0979$ ,  $p_{3,4} = 0.2673 \pm j0.9095$ ).



**Naloga 2.49**

Ugotovite stabilnost zaprtozančnega sistema z negativno povratno vezavo, prikazanega na sliki 2.19:



Slika 2.19: Zaprtozančni sistem, naloga 2.49

**Rešitev**

Za analizo stabilnosti regulacijskega sistema je odločilnega pomena polinom v imenovalcu prenosne funkcije, ki povezuje vhod in izhod regulacijskega sistema t. j. imenovalec prenosne funkcije zaprtozančnega sistema.

Odpertozančna prenosna funkcija predstavlja zmnožek prenosnih funkcij direktne poti in povratne zveze. Odpertozančna prenosna funkcija  $G_o(s)$  sistema na sliki 2.19 je:

$$G_o(s) = \frac{130}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} = \frac{\check{S}_o(s)}{I_o(s)}$$

Za podan regulacijski sistem izračunamo imenovalec zaprtozančne prenosne funkcije z enačbo

$$I(s) = I_o(s) + \check{S}_o(s)$$

kjer je z  $I(s)$  označen imenovalec zaprtozančne prenosne funkcije, z  $\check{S}_o(s)$  in z  $I_o(s)$  pa sta označena števec in imenovalec odpertozančne prenosne funkcije.

$$I(s) = I_o(s) + \check{S}_o(s) \Rightarrow I(s) = (s+1)(s+2)(s+3)(s+4) + 130 = s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 154$$

Tvorimo kvadratno matriko  $\mathbf{H}$  (enačba (2.104)):

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 10 & 50 & 0 & 0 \\ 1 & 35 & 154 & 0 \\ 0 & 10 & 50 & 0 \\ 0 & 1 & 35 & 150 \end{bmatrix}$$

Vrednosti ustreznih poddeterminant so (enačba (2.104)):

$$H_1 = 10$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 10 & 50 \\ 1 & 35 \end{vmatrix} = 300$$

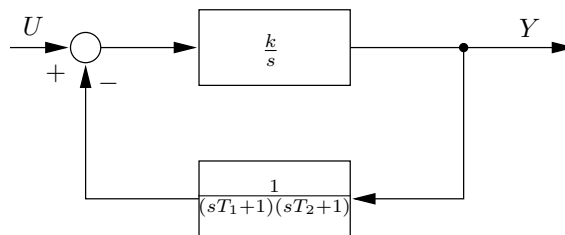
$$H_3 = \begin{vmatrix} 10 & 50 & 0 \\ 1 & 35 & 150 \\ 0 & 10 & 50 \end{vmatrix} = 0$$

$$H_4 = \begin{vmatrix} 10 & 50 & 0 & 0 \\ 1 & 35 & 150 & 0 \\ 0 & 10 & 50 & 0 \\ 0 & 1 & 35 & 150 \end{vmatrix} = 150H_3 = 0$$

Ker niso vse štiri poddeterminante pozitivne sledi, da vsi poli prenosne funkcije ne ležijo v odprti levi polravnini - torej je sistem nestabilen. (Z numeričnimi metodami potrdimo rešitev - poli prenosne funkcije so:  $p_{1,2} = -5.0176 \pm j2.2557$ ,  $p_{3,4} = 0.0176 \pm j2.2557$ ).

### Naloga 2.50

Analizirajte vpliv ojačenja  $k$  na stabilnost zaprtozančnega sistema, prikazanega na sliki 2.20:



Slika 2.20: Zaprtozančni sistem, naloga 2.50

Časovni konstanti  $T_1$  in  $T_2$  sta pozitivni.

### Rešitev

Odpertozančna prenosna funkcija sistema je:

$$G_o(s) = \frac{k}{(sT_1 + 1)(sT_2 + 1)(s)} = \frac{\check{S}_o(s)}{I_o(s)}$$

izračunamo polinom v imenovalcu zaprtozančne prenosne funkcije:

$$I(s) = I_o(s) + \check{S}_o(s) \Rightarrow I(s) = (sT_1 + 1)(sT_2 + 1)(s) + k = T_1T_2s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + k$$

Tvorimo kvadratno matriko  $\mathbf{H}$  (enačba 2.104):

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} T_1 + T_2 & k & 0 & 0 \\ T_1T_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & T_1 + T_2 & k & 0 \end{bmatrix}$$

Vrednosti ustreznih poddeterminant so (enačba 2.104):

$$\begin{aligned}
 H_1 &= T_1 + T_2 \\
 H_2 &= \begin{vmatrix} T_1 + T_2 & k \\ T_1 + T_2 & 1 \end{vmatrix} = T_1 + T_2 - kT_1T_2 \\
 H_3 &= \begin{vmatrix} T_1 + T_2 & k & 0 \\ T_1T_2 & 1 & 0 \\ 0 & T_1T_2 & k \end{vmatrix} = kH_2
 \end{aligned}$$

Pogoj  $H_1 > 0$  je izpolnjen, saj sta obe časovni konstanti pozitivni. Pogoj  $H_2 > 0$  je izpolnjen v primeru, ko velja

$$T_1 + T_2 - kT_1T_2 > 0$$

oziroma

$$k < \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}$$

V primeru, ko je pogoj  $H_2 > 0$  izpolnjen, je za izpolnitev pogoja  $H_3 > 0$  potrebno:

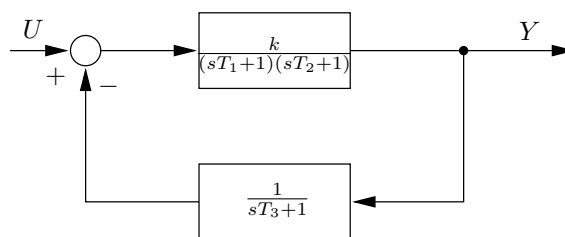
$$k > 0$$

Ob združitvi zadnjih dveh pogojev lahko zaključimo, da je zaprtozančni sistem stabilen, če ojačenje  $k$  izpolnjuje neenačbi:

$$0 < k < \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}$$

### Naloga 2.51

Analizirajte vpliv ojačenja  $k$  na stabilnost zaprtozančnega sistema, prikazanega na sliki 2.21:



Slika 2.21: Zaprtozančni sistem, naloga 2.51

Časovne konstante  $T_1$ ,  $T_2$  in  $T_3$  so pozitivne.

### Rešitev

Prenosna funkcija odprtozančnega sistema je:

$$G_o(s) = \frac{k}{(sT_1 + 1)(sT_2 + 1)(sT_3 + 1)} = \frac{\check{S}_o(s)}{I_o(s)}$$

Izračunamo polinom v imenovalcu prenosne funkcije zaprtozančnega sistema:

$$\begin{aligned} I(s) &= I_o(s) + \check{S}_o(s) \Rightarrow I(s) = (sT_1 + 1)(sT_2 + 1)(sT_3 + 1) + k \\ \Rightarrow I(s) &= T_1T_2T_3s^3 + (T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3)s^2 + (T_1 + T_2 + T_3)s + (k + 1) \end{aligned}$$

Tvorimo kvadratno matriko  $\mathbf{H}$  (enačba (2.104)):

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3 & k + 1 & 0 \\ T_1T_2T_3 & T_1 + T_2 + T_3 & 0 \\ 0 & T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3 & k + 1 \end{bmatrix}$$

Vrednosti ustreznih poddeterminant so (enačba (2.104)):

$$\begin{aligned} H_1 &= T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3 \\ H_2 &= \begin{vmatrix} T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3 & k + 1 \\ T_1T_2T_3 & T_1 + T_2 + T_3 \end{vmatrix} \\ &= (T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3)(T_1 + T_2 + T_3) - (T_1T_2T_3)(k + 1) \\ H_3 &= \begin{vmatrix} T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3 & k + 1 & 0 \\ T_1T_2T_3 & T_1 + T_2 + T_3 & 0 \\ 0 & T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3 & k + 1 \end{vmatrix} = (k + 1)H_2 \end{aligned}$$

Pogoj  $H_1 > 0$  je izpolnjen, saj so vse časovne konstante pozitivne. Pogoj  $H_2 > 0$  je izpolnjen v primeru, ko velja:

$$(T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3)(T_1 + T_2 + T_3) - (T_1T_2T_3)(k + 1) > 0$$

oziroma:

$$k + 1 < \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3}\right)(T_1 + T_2 + T_3)$$

V primeru, ko je pogoj  $H_2 > 0$  izpolnjen, je za izpolnitev pogoja  $H_3 > 0$  potrebno:

$$k + 1 > 0$$

Ob združitvi zadnjih dveh pogojev lahko zaključimo, da je zaprtozančni sistem stabilen, če ojačenje  $k$  izpolnjuje neenačbi:

$$-1 < k < \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3}\right)(T_1 + T_2 + T_3) - 1$$

---

## Routhov stabilnostni kriterij

Routhov stabilnostni kriterij nam da več informacij o legi korenov polinoma v imenovalcu opazovane prenosne funkcije - pove, koliko korenov je levo, desno in na imaginarni osi kompleksne s-ravnine.

Izhodišče predstavljajo koeficienti karakterističnega polinoma (enačba (2.103)). Iz koeficientov polinoma reda  $n$  tvorimo tabelo z  $n + 1$  vrsticami:

$$\begin{array}{c|cccc}
 s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} \\
 s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} \\
 s^{n-2} & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} \\
 s^{n-3} & c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & c_{n-3} \\
 s^{n-4} & d_n & d_{n-1} & d_{n-2} & d_{n-3} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 s^1 & & & & \\
 s^0 & & & & 
 \end{array} \tag{2.106}$$

Koeficiente  $b_n, b_{n-1}, b_{n-2}, b_{n-3}, \dots, c_n, c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, d_n, d_{n-1}, \dots$  izračunamo s pomočjo enačb (2.107):

$$\begin{array}{lcl}
 b_n & = & \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \\
 b_{n-1} & = & \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \\
 \vdots & & \vdots \\
 c_n & = & \frac{b_n a_{n-3} - a_{n-1} b_{n-1}}{b_n} \\
 c_{n-1} & = & \frac{b_n a_{n-5} - a_{n-1} b_{n-2}}{b_n} \\
 \vdots & & \vdots \\
 d_n & = & \frac{c_n b_{n-1} - b_n c_{n-1}}{c_n} \\
 d_{n-1} & = & \frac{c_n b_{n-2} - b_n c_{n-2}}{c_n} \\
 \vdots & & \vdots
 \end{array} \tag{2.107}$$

Iz predznakov elementov v prvem stolpcu tabele (2.106) (elementi  $a_n, a_{n-1}, b_n, c_n, \dots$ ) lahko sklepamo na vrednosti realnih delov korenov karakterističnega polinoma:

- Če so vsi elementi prvega stolpca tabele (2.106) pozitivni, ima polinom le korene z negativnim realnim delom.
- Če se predznak elementov prvega stolpca tabele (2.106) spremeni  $k$  krat, ima polinom  $k$  korenov s pozitivnim realnim delom.
- Če so vsi elementi ene vrstice tabele (2.106) enaki nič, ima polinom enega ali več polov na imaginarni osi ravnine s (realni deli so enaki nič).

### Naloga 2.52

Ugotovite stabilnost sistema, opisanega s prenosno funkcijo

$$G(s) = \frac{10}{s^5 + s^4 + 9s^3 + 7s^2 + 14s + 6}$$

### Rešitev

Tvorimo tabelo (2.106):

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^5 & 1 & 9 & 14 \\
 s^4 & 1 & 7 & 6 \\
 s^3 & 2|1 & 8|4 & 0 & /2 \\
 s^2 & 3|1 & 6|2 & & /3 \\
 s^1 & 2 & 0 & & \\
 s^0 & 2 & & & 
 \end{array}$$

Izračun elementov v tabeli se poenostavi, če vse elemente neke vrstice množimo ali delimo z istim številom.

Vsi elementi v prvem stolpcu so pozitivni, kar pomeni, da vsi poli prenosne funkcije ležijo v levi s-polravnini - torej je sistem stabilen. (Z numeričnimi metodami potrdimo rešitev - poli prenosne funkcije so:  $p_{1,2} = -0.075 \pm j2.6156$ ,  $p_{3,4} = -0.1878 \pm j1.3461$ ,  $p_5 = -0.4744$ ).

### Naloga 2.53

Ugotovite stabilnost sistema, opisanega s prenosno funkcijo:

$$G(s) = \frac{10}{20s^4 + 14s^3 + 7s^2 + 21s + 2}$$

### Rešitev

Tvorimo tabelo (2.106):

$$\begin{array}{l|llll} s^4 & 20 & 7 & 2 & \\ s^3 & 14|2 & 21|3 & 0 & /7 \\ s^2 & -23 & 2 & & \\ s^1 & \frac{65}{23} & 0 & & \\ s^0 & 2 & & & \end{array}$$

Elementi v prvem stolpcu dvakrat spremenijo predznak (14 v -23 in -23 v  $\frac{65}{23}$ ), zato imata dva pola pozitivni realni del. Sistem, opisan s prenosno funkcijo je torej nestabilen. (Z numeričnimi metodami potrdimo rešitev - poli prenosne funkcije so:  $p_{1,2} = 0.2673 \pm j0.9095$ ,  $p_3 = -0.0979$ ,  $p_4 = -1.1367$ ).

### Naloga 2.54

Ugotovite stabilnost sistema, katerega karakteristični polinom je:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 24\lambda^4 + 50\lambda^3 + 35\lambda^2 + 10\lambda + 2$$

### Rešitev

Tvorimo tabelo (2.106):

$$\begin{array}{l|llll} \lambda^4 & 24 & 35 & 2 & \\ \lambda^3 & 50|5 & 10|1 & 0 & /10 \\ \lambda^2 & \frac{151}{5}|151 & 2|10 & & *5 \\ \lambda^1 & \frac{101}{151} & 0 & & \\ \lambda^0 & 2 & & & \end{array}$$

Vsi elementi v prvem stolpcu so pozitivni kar pomeni, da ima karakteristični polinom samo korene z negativnim realnim delom - sistem s takšnim karakterističnim polinomom je torej stabilen. (Z numeričnimi metodami potrdimo rešitev - lastne vrednosti karakterističnega polinoma so:  $\lambda_{1,2} = -0.9005 \pm j0.2030$ ,  $\lambda_{3,4} = -0.1411 \pm j0.2791$ ).

**Naloga 2.55**

Ugotovite stabilnost sistema, opisanega s prenosno funkcijo:

$$G(s) = \frac{10}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 9s^2 + 2s + 10}$$

**Rešitev**

Tvorimo tabelo (2.106):

$s^5$	1	3	2	
$s^4$	2	9	10	
$s^3$	$-1.5  -1$	$-3  -2$	0	/1.5
$s^2$	$5 1$	$10 2$		/5
$s^1$	$0 2$	$0 0$		$\frac{d(s^2+2)}{ds}$
$s^0$	2			

Vsi elementi predzadnje vrstice so enaki nič. Za nadaljnji izračun nadomestimo ničelne elemente z vrednostmi, ki jih dobimo z odvajanjem polinoma, katerega koeficiente zapišemo iz elementov predhodne vrstice.

Elementi v prvem stolpcu tabele dvakrat spremenijo predznak (iz 2 v -1 in iz -1 v 1), zato ima polinom dve rešitvi s pozitivnim realnim delom. Ker so bili v tabeli v predzadnji vrstici vsi elementi enaki nič, ima polinom dve rešitvi, katerih realni del je enak nič. Polinom ima torej pet rešitev - eno z negativnim realnim delom, dve s pozitivnim realnim delom in dve z ničelnim realnim delom. (Z numeričnimi metodami potrdimo rešitev - poli prenosne funkcije so:  $p_{1,2} = 0.2167 \pm j1.417$ ,  $p_{3,4} = 0 \pm j1.4142$ ,  $p_5 = -2.4334$ ).

**Naloga 2.56**

Ugotovite stabilnost sistema, opisanega s prenosno funkcijo:

$$G(s) = \frac{10}{s^5 + 3s^4 + 10s^3 + 16s^2 + 24s + 16}$$

**Rešitev**

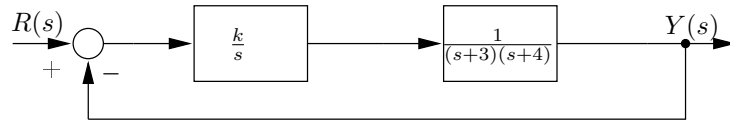
Tvorimo tabelo (2.106):

$s^5$	1	10	24	
$s^4$	3	16	16	
$s^3$	1	4	0	
$s^2$	1	4	0	
$s^1$	$0 2$	$0 0$		$\frac{d(s^2+4)}{ds}$
$s^0$	4			

Ker so bili v tabeli v predzadnji vrstici vsi elementi enaki nič, ima polinom dve rešitvi, katerih realni del je enak nič. Po nadomestitvi ničelnih elementov v predzadnji vrstici tabele z elementi, ki jih dobimo z odvajanjem ustreznega polinoma vidimo, da elementi v prvem stolpcu ne spremenijo predznaka. Polinom ima torej pet rešitev - tri z negativnim realnim delom in dve z ničelnim realnim delom. (Z numeričnimi metodami potrdimo rešitev - poli prenosne funkcije so:  $p_{1,2} = 0 \pm j2$ ,  $p_{3,4} = -1 \pm j1.7321$ ,  $p_5 = -1$ ).

**Naloga 2.57**

Analizirajte vpliv ojačenja  $k$  na stabilnost zaprtozančnega sistema, prikazanega na sliki 2.22:



Slika 2.22: Zaprtozančni sistem, naloga 2.57

**Rešitev**

Iz odprtozančne prenosne funkcije:

$$G_o(s) = \frac{k}{(s)(s+4)(s+3)} = \frac{\check{S}_o(s)}{I_o(s)}$$

izračunamo polinom v imenovalcu zaprtozančne prenosne funkcije:

$$I(s) = I_o(s) + \check{S}_O(s) \Rightarrow I(s) = (s)(s+3)(s+4) + k = s^3 + 7s^2 + 12s + k$$

Tvorimo tabelo (enačba (2.106)):

$$\begin{array}{l|ll} s^3 & 1 & 12 \\ s^2 & 7 & k \\ s^1 & \frac{84-k}{7} & 0 \\ s^0 & k & \end{array}$$

Povratnozančni sistem bo stabilen, če bo imel imenovalec zaprtozančne prenosne funkcije samo korene z negativnim realnim delom - t. j. če bodo vsi elementi v prvem stolpcu tabele pozitivni. Za izpolnitev tega pogoja mora veljati:

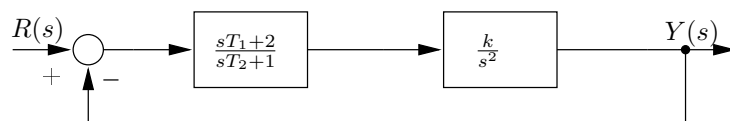
$$k > 0 \quad \wedge \quad \frac{84-k}{7} > 0$$

Ob združitvi obeh pogojev lahko zaključimo, da je zaprtozančni sistem stabilen, če ojačenje  $k$  izpolnjuje neenačbi:

$$0 < k < 84$$

**Naloga 2.58**

Analizirajte vpliv ojačenja  $k$  in parametrov  $T_1$  in  $T_2$  na stabilnost zaprtozančnega sistema, prikazanega na sliki 2.23:



Slika 2.23: Zaprtozančni sistem, naloga 2.58



**Rešitev**

Iz odprtozančne prenosne funkcije:

$$G_o(s) = \frac{k(sT_1 + 2)}{(s^2)(sT_2 + 1)} = \frac{\check{S}_o(s)}{I_o(s)}$$

izračunamo polinom v imenovalcu zaprtozančne prenosne funkcije:

$$I(s) = I_o(s) + \check{S}_o(s) \Rightarrow I(s) = k(sT_1 + 2) + (s^2)(sT_2 + 1) = s^3T_2 + s^2 + skT_1 + 2k$$

Tvorimo tabelo (enačba (2.106)):

$$\begin{array}{l|ll} s^3 & T_2 & kT_1 \\ s^2 & 1 & 2k \\ s^1 & k(T_1 - 2T_2) & 0 \\ s^0 & 2k & \end{array}$$

Povratnozančni sistem bo stabilen, če bo imel imenovalac zaprtozančne prenosne funkcije samo korene z negativnim realnim delom - t. j., če bodo vsi elementi v prvem stolpcu tabele pozitivni. Za izpolnitev tega pogoja mora veljati:

$$T_2 > 0 \quad \wedge \quad k(T_1 - 2T_2) > 0 \quad \wedge \quad 2k > 0$$

Ob združitvi pogojev lahko zaključimo, da je zaprtozančni sistem stabilen, če je ojačenje  $k$  pozitivno, časovni konstanti pa izpolnjujeta pogoj:

$$T_1 > 2T_2$$

### 2.5.2 Metode za ugotavljanje stabilnosti zaprtozančnih dinamičnih sistemov

Splošne metode ugotavljanja stabilnosti so primerne tako za ugotavljanje stabilnosti sistemov, opisanih z vhodno - izhodnimi modeli, kot tudi z modeli v prostoru stanj. Če je model podan v obliki blokovnega diagrama, je potrebno izračunati nadomestni vhodno - izhodni model - t. j. prenosno funkcijo, ki direktno (brez vmesnih spremenljivk) povezujejo vhode in izhode modela.

V teoriji regulacij je zelo pogosta uporaba negativne povratne zanke. Regulacijski sistem je v tem primeru sestavljen iz dinamičnega sistema v direktni veji (v primeru enovhodnih - enoizhodnih sistemov velikokrat opisanim s prenosno funkcijo  $G_1(s)$ ) in iz sistema v povratni zanki (opisanim s prenosno funkcijo  $G_2(s)$ ). Večkrat se srečamo s situacijo, ko je merilni element v povratni zanki proporcionalni člen z ojačenjem ena ( $G_2(s) = 1$ ). V tem primeru govorimo o regulacijskem sistemu z enotsko negativno povratno zanko. Stabilnost takšnih sistemov lahko ugotovimo z že predstavljenimi metodami, vendar moramo za njihovo uporabo predhodno izračunati nadomestni model zaprtozančnega regulacijskega sistema (če sta sistema v direktni veji in v povratni zanki opisana z  $G_1(s)$  in z  $G_2(s)$  izračunamo prenosno funkcijo zaprtozančnega sistema z izrazom  $\frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$ ).

V regulacijski tehniki zasledimo veliko metod, ki so namenjene ugotavljanju stabilnosti zaprtozančnih sistemov. Pri uporabi nekaterih med njimi ni potrebno izračunavati zaprtozančne prenosne funkcije, ampak temelji analiza stabilnosti na uporabi odprtozančne prenosne funkcije ( $G_o(s) = G_1(s)G_2(s)$ ). Zaradi takšnega pristopa je bolj pregleden vpliv posameznih parametrov regulacijskega sistema na stabilnost zaprtozančnega sistema. Izmed različnih metod za ugotavljanje stabilnosti zaprtozančnega sistema na osnovi poznane odprtozančne prenosne funkcije je najbolj razširjen Nyquistov stabilnostni kriterij. Uporaba Nyquistovega stabilnostnega kriterija se razlikuje glede na stabilnost odprtozančne prenosne funkcije.

### Nyquistov stabilnostni kriterij za regulacijske sisteme s stabilno odprtozančno prenosno funkcijo

Odprtozančna prenosna funkcija  $G_o(s)$  naj bo opisana z enačbo (2.108):

$$G_o(s) = k \frac{1}{s^q} \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + 1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + 1} e^{-sT_m} = \frac{\check{S}_o(s)}{I_o(s)} e^{-sT_m} \quad (2.108)$$

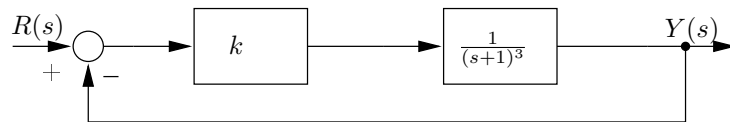
Uporaba Nyquistovega stabilnostnega kriterija se poenostavi, če odprtozančna prenosna funkcija (enačba (2.108)) izpolnjuje naslednje pogoje:

- Polinoma  $\check{S}_o(s)$  in  $I_o(s)$  naj bosta tuja, polinom v števcu ( $\check{S}_o(s)$ ) naj bo nižje stopnje od polinoma v imenovalcu ( $I_o(s)$ ), ojačenje  $k$  naj bo pozitivno ( $k > 0$ ), mrtvi čas  $T_m$  naj bo nenegativen ( $T_m \geq 0$ ), odprtozančna prenosna funkcija naj bo največ druge vrste (naj vsebuje največ dva integralna dela  $q = 0, 1$  ali  $2$ ).
- Vsi poli odprtozančne prenosne funkcije  $G_o(s)$  (razen enega ali dveh v koordinatnem izhodišču) naj ležijo levo od imaginarne osi v  $s$ -ravnini.
- Krivulja ojačenja v Bodejevem diagramu naj samo enkrat seka linijo ojačenja 0 dB, frekvenco sekanja imenujemo presečna frekvenca in označimo z  $\omega_c$ .
- V frekvenčnem področju, v katerem je ojačenje odprte regulacijske zanke večje ali enako ena ( $|G_o(j\omega)| \geq 1$ ), naj leži fazna karakteristika med  $-540^\circ$  in  $180^\circ$ .

Če odprtozančna prenosna funkcija (enačba (2.108)) izpolnjuje te pogoje, bo zaprtozančni sistem stabilen, če leži fazna karakteristika pri presečni frekvenci  $\omega_c$  nad fazo  $-180^\circ$  in bo nestabilen, če to ni izpolnjeno.

#### Naloga 2.59

Analizirajte vpliv ojačenja  $k$  na stabilnost zaprtozančnega sistema, prikazanega na sliki 2.24:



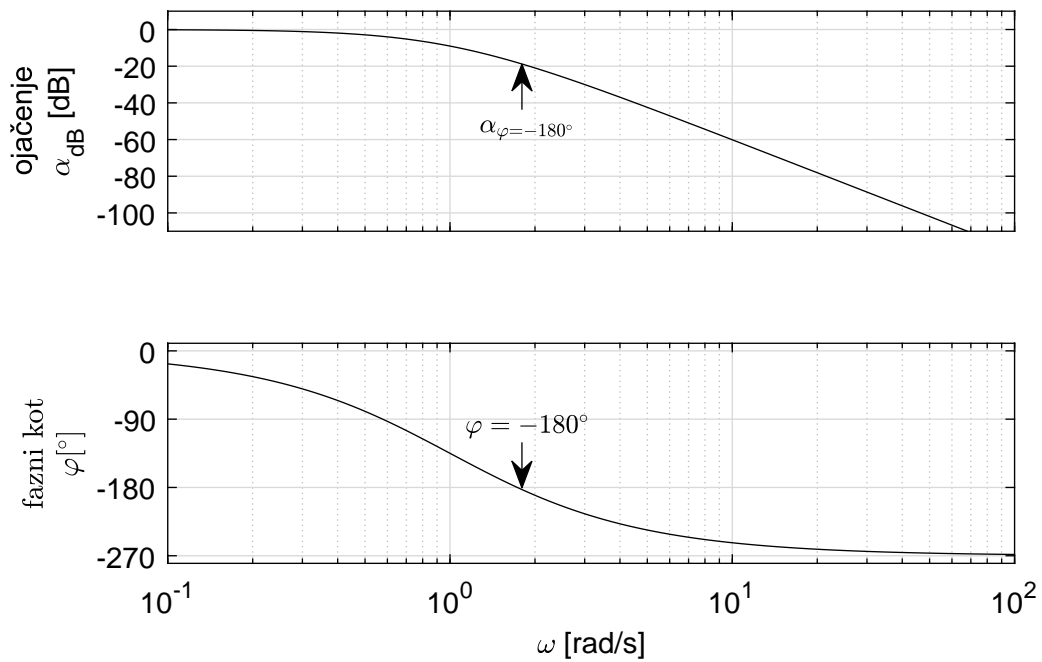
Slika 2.24: Zaprtozančni sistem, naloga 2.59

#### Rešitev

Odprtozančna prenosna funkcija je:

$$G_o(s) = \frac{k}{(s+1)(s+1)(s+1)}$$

Ker odprtozančna prenosna funkcija  $G_o(s)$  izpolnjuje zahtevane pogoje, lahko uporabimo Nyquistov stabilnostni kriterij za regulacijske sisteme s stabilno odprtozančno prenosno funkcijo. V ta namen izračunamo frekvenčno karakteristiko odprtozančne prenosne funkcije  $G_o(s)$  in jo narišemo v Bodejevem diagramu. Bodejev diagram za vrednost ojačenja  $k = 1$  prikazuje slika 2.25.

Slika 2.25: Bodejev diagram odprtozančne prenosne funkcije  $G_o(s)$  za  $k = 1$ , naloga 2.59

Iz Bodejevega diagrama je razvidno, da je pri vrednosti  $k = 1$  ojačenje odprtozančne prenosne funkcije za vse vrednosti  $\omega > 0$  manjše od 1. Ojačenje odprtozančne prenosne funkcije je enako 1 pri krožni frekvenci  $\omega = 0 \text{ s}^{-1}$  kar pomeni, da je presečna frekvenca  $\omega_c$  enaka  $0 \text{ s}^{-1}$ . Fazna karakteristika poteka pri presečni frekvenci  $\omega_c$  nad fazo  $-180^\circ$ , iz česar sklepamo, da je zaprtozančni sistem za vrednost  $k = 1$  stabilen. S spreminjanjem parametra  $k$  vplivamo na presečno frekvenco  $\omega_c$ . Mejno vrednost parametra  $k$ , do katere je sistem stabilen, ugotovimo tako, da iz Bodejevega diagrama odčitamo ojačenje pri frekvenci, pri kateri ima fazna karakteristika vrednost  $-180^\circ$ . Odčitano ojačenje označimo z  $\alpha_{\varphi=-180^\circ}$ . Mejno vrednost parametra  $k$ , do katerega je sistem stabilen, izračunamo z enačbo:

$$\alpha_{ms} = \frac{1}{\alpha_{\varphi=-180^\circ}}$$

V našem primeru velja:

$$\begin{aligned} \alpha_{\varphi=-180^\circ} &= 0.12 & \alpha_{ms} &= 8.3 \\ k < 8.3 &\Rightarrow \text{sistem je stabilen} \\ k > 8.3 &\Rightarrow \text{sistem je nestabilen} \end{aligned}$$

### Nyquistov stabilnostni kriterij za regulacijske sisteme z nestabilno odprtozančno prenosno funkcijo

Odrprtozančna prenosna funkcija  $G_o(s)$  naj bo opisana z enačbo (2.109):

$$G_o(s) = \frac{\check{S}_o(s)}{I_o(s)} e^{-sT_m} \quad (2.109)$$

Polinoma  $\check{S}_o(s)$  in  $I_o(s)$  naj bosta tuja, polinom v števcu ( $\check{S}_o(s)$ ) naj bo nižje stopnje od polinoma v imenovalcu ( $I_o(s)$ ), mrtvi čas  $T_m$  naj bo nenegativen ( $T_m \geq 0$ ). Število polov prenosne funkcije  $G_o(s)$  (enačba (2.109)) levo od imaginarne osi označimo z  $l_o$ , število polov na imaginarni osi (ordinati) z  $n_o$  in število polov desno od imaginarne osi z  $d_o$ .

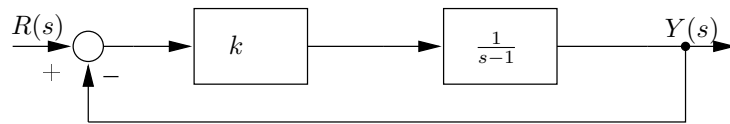
Zaprtozančni sistem je stabilen, če v polarnem diagramu žarek iz točke  $-1+0j$  na krivuljo frekvenčne karakteristike odprtozančnega sistema, ko gre  $\omega$  od 0 do  $\infty$  opiše kot  $W$ , ki je enak:

$$W = d_o\pi + a_o\frac{\pi}{2} \quad (2.110)$$

Zaprtozančni sistem je nestabilen, če enačba (2.110) ni izpolnjena.

### Naloga 2.60

Analizirajte vpliv ojačenja  $k$  na stabilnost zaprtozančnega sistema, prikazanega na sliki 2.26:



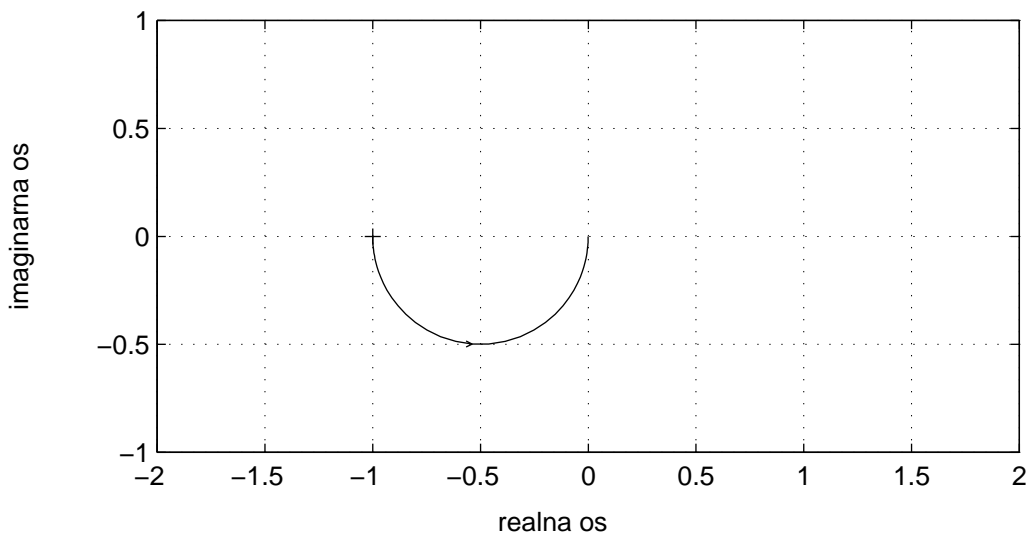
Slika 2.26: Zaprtozančni sistem, naloga 2.60

### Rešitev

Odprtozančna prenosna funkcija je:

$$G_o(s) = \frac{k}{s-1}$$

Odprtozančna prenosna funkcija  $G_o(s)$  ima en pol v desni s-polravnini, kar pomeni, da moramo uporabiti Nyquistov stabilnostni kriterij za regulacijske sisteme z nestabilno odprtozančno prenosno funkcijo. V ta namen narišemo frekvenčno karakteristiko odprtozančne prenosne funkcije  $G_o(s)$  v polarnem diagramu. Diagram prikazuje slika 2.27.



Slika 2.27: Polarni diagram odprtozančne prenosne funkcije  $G_o(s)$ , naloga 2.60

Iz polarnega diagrama je razvidno, da je kot, ki ga opiše žarek iz točke  $-1+0j$  na krivuljo frekvenčne karakteristike odprtozančnega sistema, ko gre  $\omega$  od 0 do  $\infty$ , odvisen od ojačenja  $k$ . V primeru, ko je ojačenje  $k$  večje od 1, znaša kot  $180^\circ$ , v primeru, ko pa je ojačenje  $k$  manjše od 1, pa znaša kot  $0^\circ$ . Ker ima obravnavana odprtozančna prenosna funkcija en pol v desni s-polravnini ( $d_o=1$ ) in nobenega na imaginarni osi ( $a_o = 0$ ), lahko v skladu z enačbo (2.110) zaključimo, da mora za stabilni zaprtozančni sistem žarek iz točke  $-1 + 0j$  na krivuljo frekvenčne karakteristike odprtozančnega sistema, ko gre  $\omega$  od 0 do  $\infty$ , opisati kot:

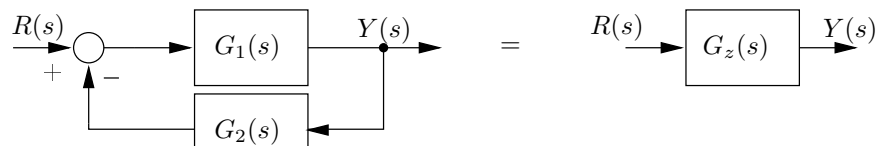
$$W = d_o\pi + a_o\frac{\pi}{2} = 1\pi + 0\frac{\pi}{2} = \pi$$

V našem primeru velja:

$$\begin{aligned} k > 1 &\Rightarrow \text{sistem je stabilen} \\ k < 1 &\Rightarrow \text{sistem je nestabilen} \end{aligned}$$

## 2.6 Diagram lege korenov

Eno izmed osnovnih nalog v regulacijski tehniki predstavlja ugotavljanje vpliva uvedbe povratne zanke na dinamiko tako nastalega zaprtozančnega sistema. Večinoma namreč poznamo dinamične lastnosti sistema brez regulacijske zanke, ne vemo pa, kako se bo spremenila dinamika sistema, ko bomo realizirali zaprto zanko. Numerično problem ni zahteven. Če natančno poznamo odprtozančno prenosno funkcijo  $G_o(s)$  (dobimo jo tako, da prekinemo povratno zanko in izračunamo produkt vseh prenosnih funkcij v zanki, enačba (2.111)), lahko s pomočjo enačbe (2.112) enostavno izračunamo zaprtozančno prenosno funkcijo  $G_z(s)$



Slika 2.28: Ekvivalentni predstavitvi zaprtozančnega sistema

$$G_o(s) = G_1(s)G_2(s) \quad (2.111)$$

$$G_z(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_o(s)} \quad (2.112)$$

Iz tako določene zaprtozančne prenosne funkcije  $G_z(s)$  (ki je v bistvu ulomljena racionalna funkcija s polinomoma v števcu in imenovalcu), izračunamo ničle in pole, ki omogočajo določitev lastnosti zaprtozančnega sistema.

Pogosto pa odprtozančna prenosna funkcija  $G_o(s)$  ni dokončno določena. Izbran parameter odprtozančne prenosne funkcije  $G_o(s)$  lahko spreminjamo in s tem vplivamo na dinamiko zaprtozančnega sistema. V takšnih primerih bi koristila metoda, s pomočjo katere bi lahko na relativno enostaven način pokazali vpliv izbranega parametra odprtozančne prenosne funkcije  $G_o(s)$  na dinamiko zaprtozančnega sistema, opisanega z zaprtozančno prenosno funkcijo  $G_z(s)$ . Ničle zaprtozančne prenosne funkcije  $G_z(s)$  so enake ničlam odprtozančne prenosne funkcije  $G_o(s)$ . Za določitev vpliva izbranega parametra odprtozančne prenosne funkcije  $G_o(s)$  na zaprtozančno prenosno funkcijo  $G_z(s)$  pa lahko uporabimo diagram lege korenov.

Diagram lege korenov tvorijo v kompleksni  $s$ -ravnini narisane krivulje, katerih točke predstavljajo lego polov zaprtozančne prenosne funkcije  $G_z(s)$  pri različnih vrednostih prostega parametra odprtozančne prenosne funkcije  $G_o(s)$ . Kot prosti parameter običajno izberemo ojačenje odprtozančne prenosne funkcije  $G_o(s)$  in predpostavljamo, da se spreminja med 0 in  $\infty$ .

Konstrukcijo diagrama lege korenov lahko razdelimo v tri korake:

1. Izhodišče za risanje diagrama lege korenov predstavlja odprtozančna prenosna funkcija  $G_o(s)$ . Prenosno funkcijo  $G_o(s)$  zapišemo v faktorizirani obliki in izpostavimo prosti parameter:

$$G_o(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = KQ \frac{(s - q_1)(s - q_2) \dots (s - q_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (2.113)$$

kjer posamezne oznake pomenijo:

$K$  – spremenljivo ojačenje  $G_o(s)$  (prosti parameter),

$Q$  – nespremenljivo ojačenje  $G_o(s)$ ,

$q_1, q_2, \dots, q_m$  – ničle prenosne funkcije  $G_o(s)$ ,

$m$  – število ničel prenosne funkcije  $G_o(s)$ ,

$p_1, p_2, \dots, p_n$  – poli prenosne funkcije  $G_o(s)$ ,

$n$  – število polov prenosne funkcije  $G_o(s)$ ,

Pole in ničle prenosne funkcije  $G_o(s)$  narišemo v kompleksni  $s$ -ravnini. Pole označimo z  $\times$ , ničle pa s  $\circ$ .

2. Diagram lege korenov ima toliko krivulj, kot je polov prenosne funkcije  $G_o(s)$ . Pri vrednosti prostega parametra  $K = 0$  začnejo vse krivulje v polih prenosne funkcije  $G_o(s)$ , pri vrednosti prostega parametra  $K = \infty$  se  $m$  krivulj konča v ničlah prenosne funkcije  $G_o(s)$ ,  $n - m$  krivulj pa gre z naraščanjem prostega parametra  $K \rightarrow \infty$  v neskončnost. Asimptote, katerim se  $n - m$  krivulj približuje pri vrednosti  $K \rightarrow \infty$ , se sekajo v presečišču asimptot  $\sigma_A$ . Presečišče asimptot leži na realni osi, oddaljenost presečišča asimptot od koordinatnega izhodišča pa izračunamo z enačbo (2.114)

$$\sigma_A = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m q_i}{n - m} \quad (2.114)$$

Asimptot je  $n - m$ , vse izhajajo iz realne osi v točki  $\sigma_A$ . Vsaka od asimptot tvori z realno osjo kot  $\varphi_k$ , ki ga izračunamo s pomočjo enačbe (2.115):

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \frac{(2k-1)180^\circ}{n-m} & \text{za } KQ > 0 \\ \varphi_k &= \frac{(2k-2)180^\circ}{n-m} & \text{za } KQ < 0 \end{aligned} \quad (2.115)$$

za  $k = 1, 2, 3, \dots, n - m$

V kompleksno ravnino narišemo presečišče asimptot in asimptote.

3. Krivulje diagrama lege korenov potekajo po realni osi ali pa so simetrične na realno os. Točka na realni osi pripada krivulji lege korenov sistema s  $KQ > 0$ , če je desno od nje na realni osi liho število polov in ničel prenosne funkcije  $G_o(s)$ . Točka na realni osi pripada krivulji lege korenov sistema s  $KQ < 0$ , če je desno od nje na realni osi sodo število polov in ničel prenosne funkcije  $G_o(s)$ .
4. Ob upoštevanju napotkov iz točk 1 do 3 lahko skiciramo potek krivulj v diagramu lege korenov. V primeru, ko lahko natančno določimo potek krivulj (enostaven potek krivulj ali zadostno tabeliranje), lahko na geometrični način izračunamo vrednost prostega parametra  $K$  pri poljubni vrednosti pola zaprtozančnega sistema. Za izračun vrednosti prostega parametra  $K$  moramo izmeriti razdalje med izbranim polom in ničlami in poli odprtozančne prenosne funkcije  $G_o(s)$ . Vrednost prostega parametra  $K$  izračunamo z enačbo 2.116:

$$K = \frac{1 \prod_{i=1}^n |p_{G_z(s)} - p_i|}{Q \prod_{i=1}^m |p_{G_z(s)} - q_i|} \quad (2.116)$$

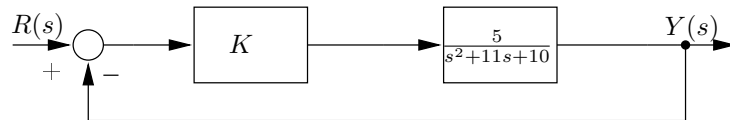
kjer je:

$|p_{G_z(s)} - p_i|$  – razdalja med izbranim polom zaprtozančnega sistema  $p_{G_z(s)}$  in polom odprtozančnega sistema  $p_i$ ,

$|p_{G_z(s)} - q_i|$  – razdalja med izbranim polom zaprtozančnega sistema  $p_{G_z(s)}$  in ničlo odprtozančnega sistema  $q_i$ ,

### Naloga 2.61

Narišite diagram lege korenov za zaprtozančni sistem, prikazan na sliki 2.29:



Slika 2.29: Zaprtozančni sistem, naloga 2.61

Izračunajte vrednost spremenljivega ojačenja  $K$ , kjer ima zaprtozančni sistem pola, ki imata absolutno vrednost realnega in imaginarnega dela enako.

### Rešitev

1. Odprtozančno prenosno funkcijo  $G_o(s)$  zapišemo v faktorizirani obliki:

$$G_o(s) = \frac{5K}{s^2 + 11s + 10} = K5 \frac{1}{(s+1)(s+10)}$$

Iz faktorizirane prenosne funkcije odčitamo:

spremenljivo ojačenje:	$K$
nespremenljivo ojačenje:	$Q = 5$
ničle:	$m = 0$
poli:	$n = 2, \quad p_1 = -1, \quad p_2 = -10$

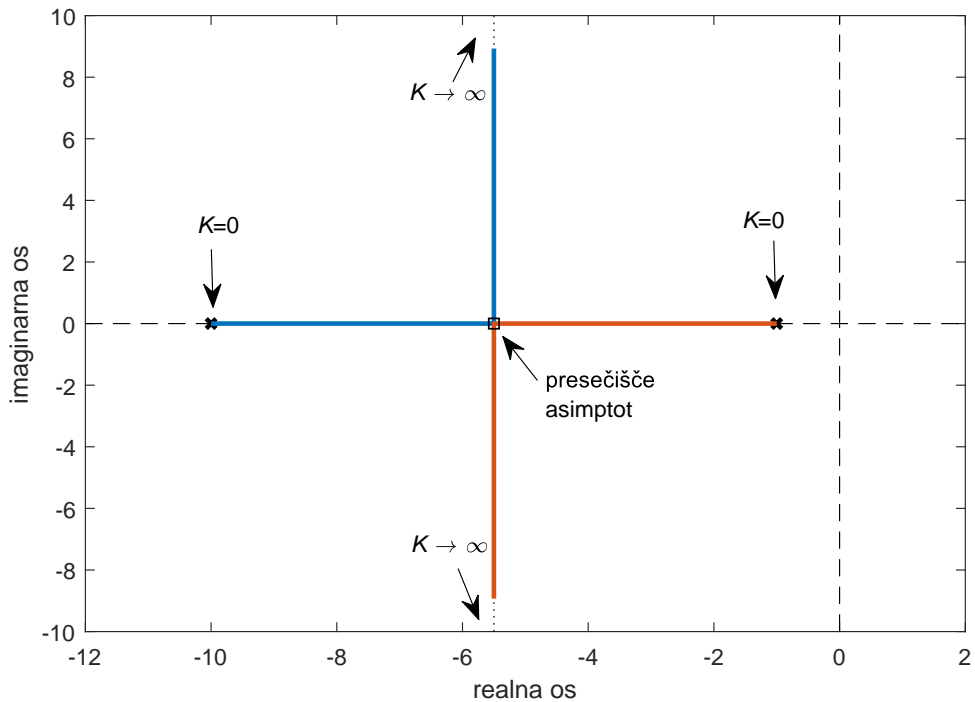
2. Izračunamo presečišče asimptot in kote, ki jih asimptote tvorijo z realno osjo:

$$\sigma_A = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m q_i}{n - m} = \frac{(-1 - 10) - (0)}{2 - 0} = -5.5$$

$$\varphi_k = \frac{(2k - 1)180^\circ}{n - m} = \frac{(2k - 1)180^\circ}{2 - 0} = (2k - 1)90^\circ$$

$$\varphi_1 = 90^\circ \quad \varphi_2 = 270^\circ$$

3. Narišemo krivulje diagrama lege korenov v kompleksni  $s$ -ravnini:



Slika 2.30: Diagram lege korenov, naloga 2.61

4. Iz diagrama lege korenov je razvidno, da ima zaprtozančni sistem pola, ki imata absolutno vrednost realnega in imaginarnega dela enako pri:  $p_{G_z(s)} = -5.5 \pm j5.5$ . Iz diagrama odčitamo razdalji med izbranim polom zaprtozančne prenosne funkcije  $p_{G_z(s)} = -5.5 + j5.5$  in poloma odprtozančne prenosne funkcije  $p_1 = -1$  in  $p_2 = -10$ .

$$p_{G_z(s)} = -5.5 + j5.5 \quad p_1 = -1, \quad p_2 = -10$$

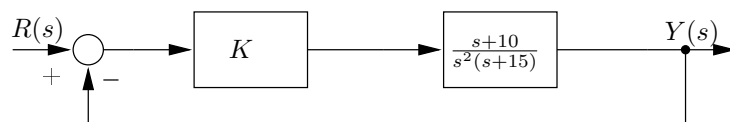
$$|p_{G_z(s)} - p_1| = 7.1 \quad |p_{G_z(s)} - p_2| = 7.1$$

Izračunana vrednost spremenljivega ojačenja  $K$  znaša:

$$K = \frac{1 \prod_{i=1}^n |p_{G_z(s)} - p_i|}{Q \prod_{i=1}^m |p_{G_z(s)} - q_i|} = \frac{1 (7.1^2)}{5 \cdot 1} = 10.1$$

### Naloga 2.62

Narišite diagram lege korenov za zaprtozančni sistem, prikazan na sliki 2.31:



Slika 2.31: Zaprtozančni sistem, naloga 2.62



**Rešitev**

1. Odprtozančno prenosno funkcijo  $G_o(s)$  zapišemo v faktorizirani obliki:

$$G_o(s) = K \frac{s + 10}{s^2(s + 15)} = K1 \frac{s + 10}{ss(s + 15)}$$

Iz faktorizirane prenosne funkcije odčitamo:

spremenljivo ojačenje:	$K$
nespremenljivo ojačenje:	$Q = 1$
ničle:	$m = 1, \quad q_1 = -10$
poli:	$n = 3, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = -15$

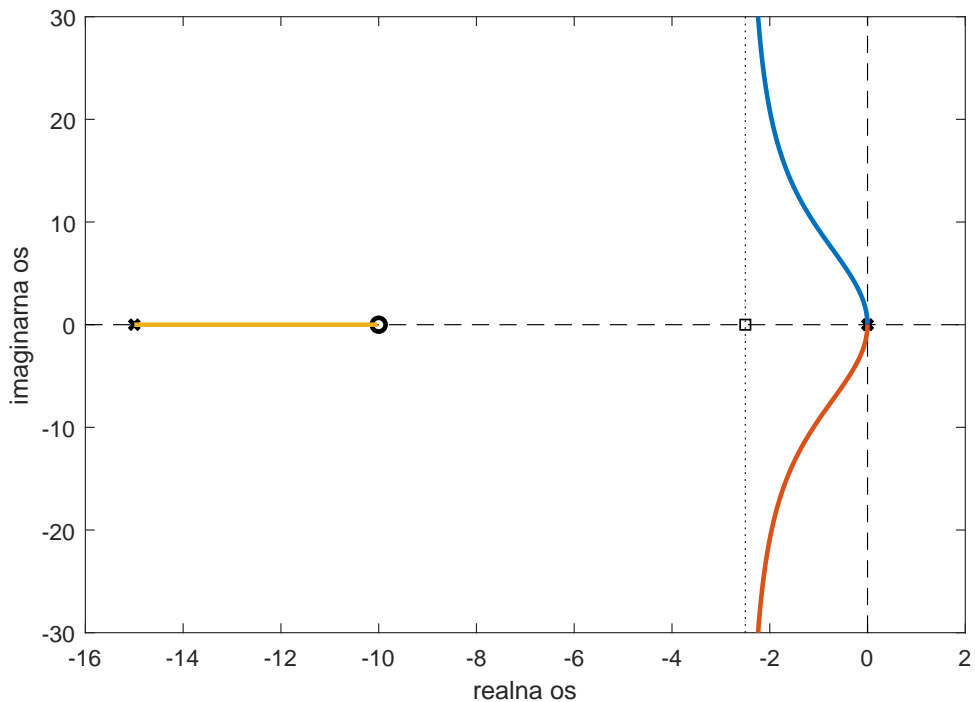
2. Izračunamo presečišče asimptot in kote, ki jih asimptote tvorijo z realno osjo:

$$\sigma_A = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m q_i}{n - m} = \frac{(-15) - (-10)}{3 - 1} = -2.5$$

$$\varphi_k = \frac{(2k - 1)180^\circ}{n - m} = \frac{(2k - 1)180^\circ}{3 - 1} = (2k - 1)90^\circ$$

$$\varphi_1 = 90^\circ \quad \varphi_2 = 270^\circ$$

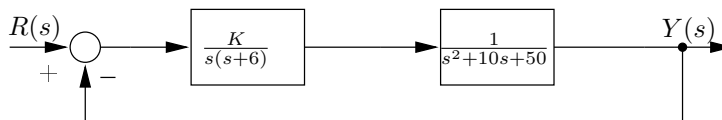
3. Narišemo krivulje diagrama lege korenov:



Slika 2.32: Diagram lege korenov, naloga 2.62

**Naloga 2.63**

Narišite diagram lege korenov za zaprtozančni sistem, prikazan na sliki 2.33:



Slika 2.33: Zaprtozančni sistem, naloga 2.63

**Rešitev**

1. Odprtozančno prenosno funkcijo  $G_o(s)$  zapišemo v faktorizirani obliki:

$$G_o(s) = K \frac{1}{s^4 + 16s^3 + 110s^2 + 300s} = K1 \frac{1}{s(s+6)(s+5+5j)(s+5-5j)}$$

Iz faktorizirane prenosne funkcije odčitamo:

spremenljivo ojačenje:	$K$
nespremenljivo ojačenje:	$Q = 1$
ničle:	$m = 0$
poli:	$n = 4, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = -6, \quad p_3 = -5 - 5j, \quad p_4 = -5 + 5j$

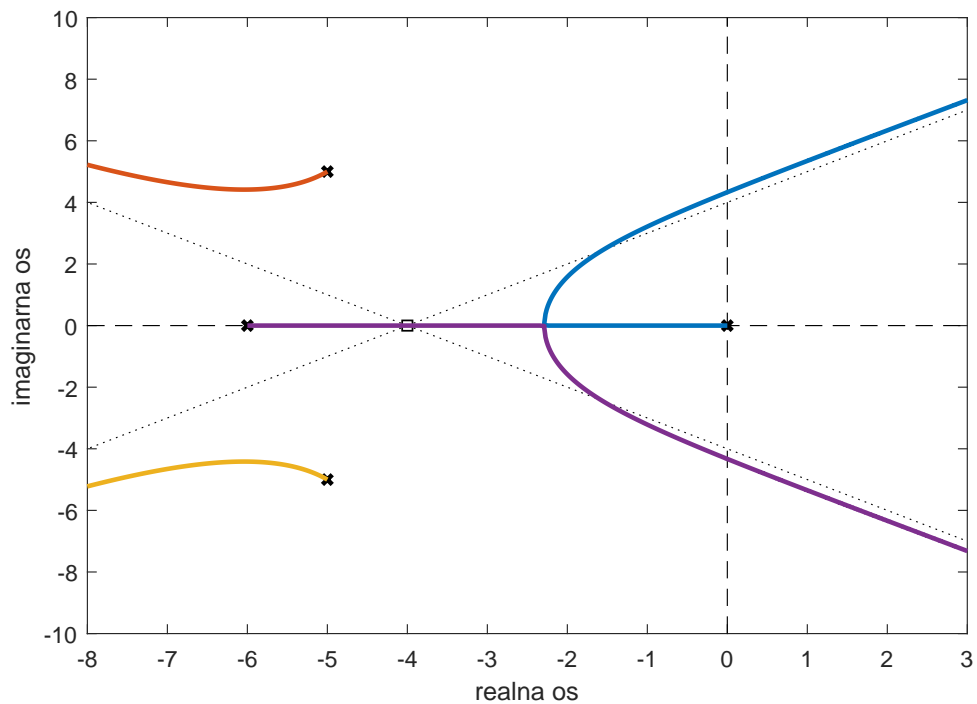
2. Izračunamo presečišče asimptot in kote, ki jih asimptote tvorijo z realno osjo:

$$\sigma_A = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m q_i}{n - m} = \frac{(-16) - (0)}{4 - 0} = -4$$

$$\varphi_k = \frac{(2k - 1)180^\circ}{n - m} = \frac{(2k - 1)180^\circ}{4 - 0} = (2k - 1)90^\circ$$

$$\varphi_1 = 45^\circ \quad \varphi_2 = 135^\circ \quad \varphi_3 = 225^\circ \quad \varphi_4 = 315^\circ$$

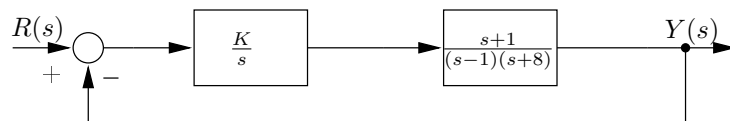
3. Narišemo krivulje diagrama lege korenov:



Slika 2.34: Diagram lege korenov, naloga 2.63

**Naloga 2.64**

Narišite diagram lege korenov za zaprtozančni sistem, prikazan na sliki 2.35:



Slika 2.35: Zaprtozančni sistem, naloga 2.64

**Rešitev**

1. Odprtozančno prenosno funkcijo  $G_o(s)$  zapišemo v faktorizirani obliki:

$$G_o(s) = K1 \frac{s+1}{s(s-1)(s+8)}$$

Iz faktorizirane prenosne funkcije odčitamo:

spremenljivo ojačenje:	$K$
nespremenljivo ojačenje:	$Q = 1$
ničle:	$m = 1, \quad q_1 = -1$
poli:	$n = 3, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = 1, \quad p_3 = -8$

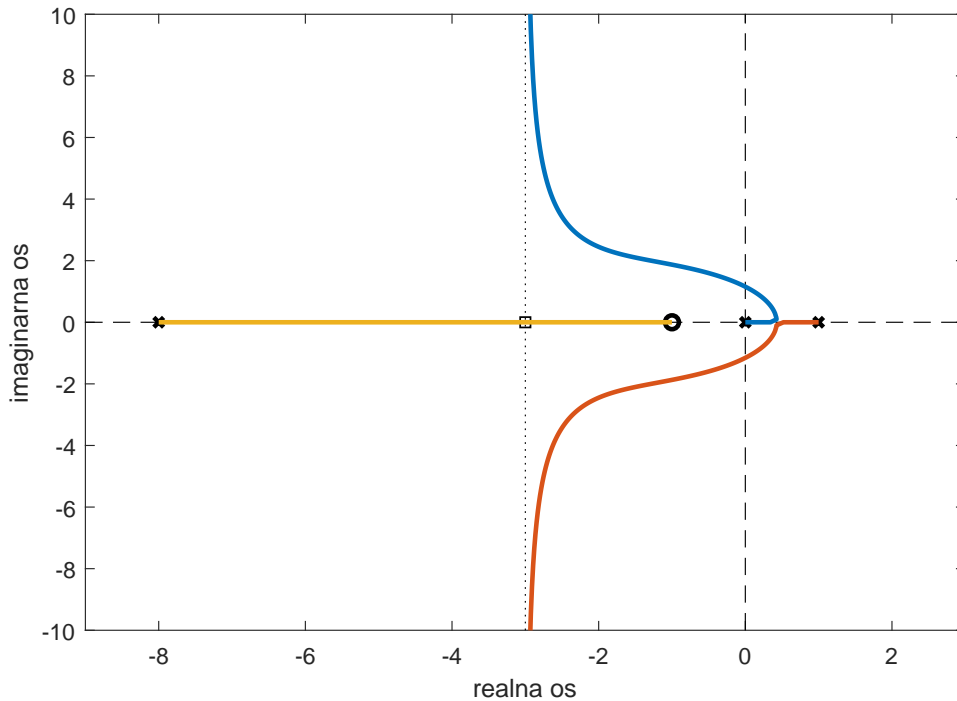
2. Izračunamo presečišče asimptot in kote, ki jih asimptote tvorijo z realno osjo:

$$\sigma_A = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m q_i}{n - m} = \frac{(-7) - (-1)}{3 - 1} = -3$$

$$\varphi_k = \frac{(2k - 1)180^\circ}{n - m} = \frac{(2k - 1)180^\circ}{3 - 1} = (2k - 1)90^\circ$$

$$\varphi_1 = 90^\circ \quad \varphi_2 = 270^\circ$$

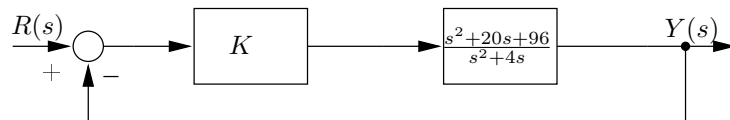
3. Narišemo krivulje diagrama lege korenov:



Slika 2.36: Diagram lege korenov, naloga 2.64

### Naloga 2.65

Narišite diagram lege korenov za zaprtozančni sistem, prikazan na sliki 2.37:



Slika 2.37: Zaprtozančni sistem, naloga 2.65

### Rešitev

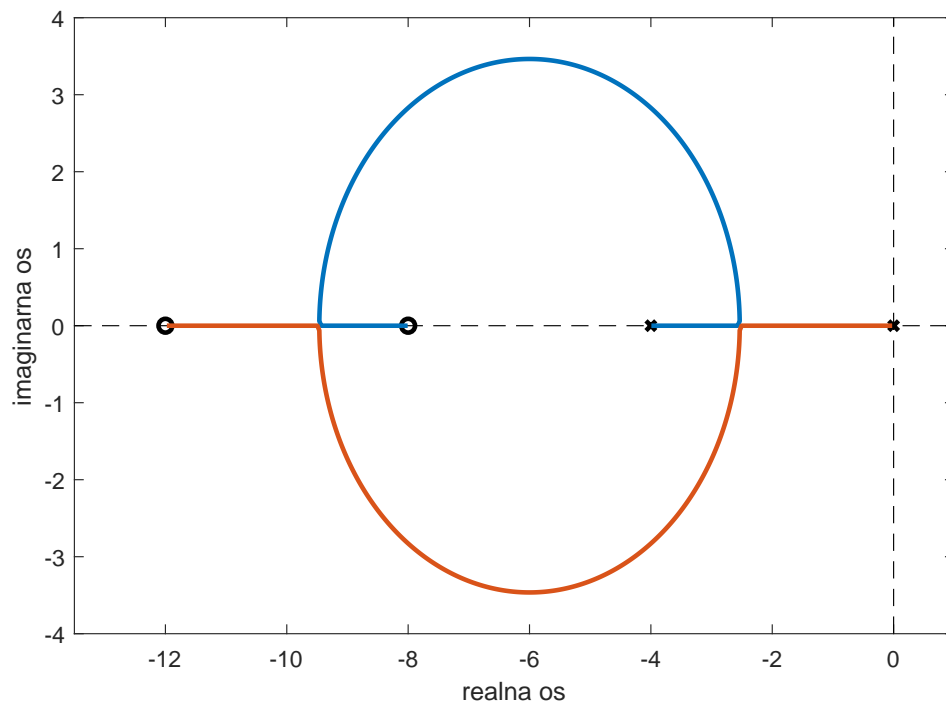
1. Odprtozančno prenosno funkcijo  $G_o(s)$  zapišemo v faktorizirani obliki:

$$G_o(s) = K \frac{s^2 + 20s + 96}{s^2 + 4s} = K1 \frac{(s + 8)(s + 12)}{s(s + 4)}$$

Iz faktorizirane prenosne funkcije odčitamo:

$$\begin{aligned} \text{spremenljivo ojačenje: } & K \\ \text{nespremenljivo ojačenje: } & Q = 1 \\ \text{ničle: } & m = 2, \quad q_1 = -8, \quad q_2 = -12 \\ \text{poli: } & n = 2, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = -4 \end{aligned}$$

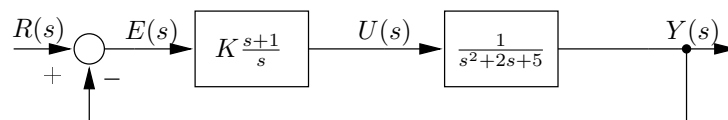
2. Ker je število polov enako številu ničel se bodo vse krivulje diagrama lege korenov končale v ničlah. Asimptot torej ni.
3. Narišemo krivulje diagrama lege korenov:



Slika 2.38: Diagram lege korenov, naloga 2.65

### Naloga 2.66

Narišite diagram lege korenov za zaprtozančni sistem, prikazan na sliki 2.39.



Slika 2.39: Zaprtozančni sistem, naloga 2.66

**Rešitev**

1. Odprtozančno prenosno funkcijo  $G_o(s)$  zapišemo v faktorizirani obliki:

$$G_o(s) = K \frac{s+1}{(s)(s^2+2s+5)} = K \frac{s+1}{(s)(s+1+2j)(s+1-2j)}$$

Iz faktorizirane prenosne funkcije odčitamo:

spremenljivo ojačenje:	$K$
nespremenljivo ojačenje:	$Q = 1$
ničle:	$m = 1, \quad q_1 = -1$
poli:	$n = 3, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = -1 - 2j, \quad p_3 = -1 + 2j$

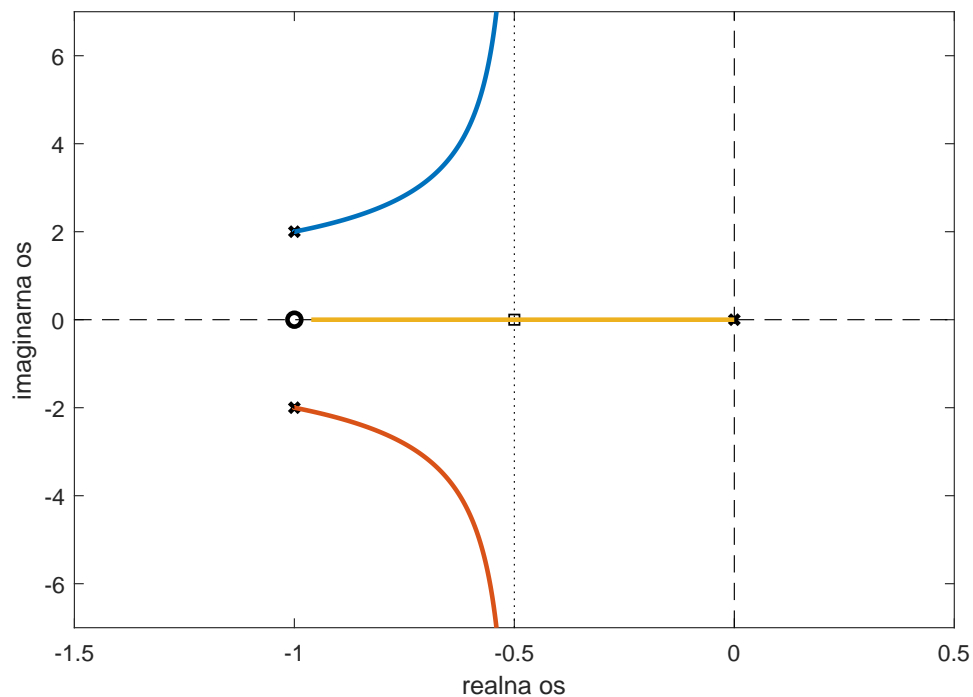
2. Izračunamo presečišče asimptot in kote, ki jih asimptote tvorijo z realno osjo:

$$\sigma_A = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m q_i}{n - m} = \frac{(-2) - (-1)}{3 - 1} = -0.5$$

$$\varphi_k = \frac{(2k-1)180^\circ}{n-m} = \frac{(2k-1)180^\circ}{3-1} = (2k-1)90^\circ$$

$$\varphi_1 = 90^\circ \quad \varphi_2 = 270^\circ$$

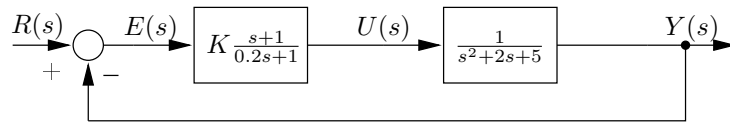
3. Narišemo krivulje diagrama lege korenov:



Slika 2.40: Diagram lege korenov, naloga 2.66

**Naloga 2.67**

Narišite diagram lege korenov za zaprtozančni sistem, prikazan na sliki 2.41.



Slika 2.41: Zaprtozančni sistem, naloga 2.67

**Rešitev**

1. Odprtozančno prenosno funkcijo  $G_o(s)$  zapišemo v faktorizirani obliki:

$$G_o(s) = K \frac{s+1}{(0.2s+1)(s^2+2s+5)} = K5 \frac{s+1}{(s+5)(s+1+2j)(s+1-2j)}$$

Iz faktorizirane prenosne funkcije odčitamo:

spremenljivo ojačenje:	$K$
nespremenljivo ojačenje:	$Q = 5$
ničle:	$m = 1, \quad q_1 = -1$
poli:	$n = 3, \quad p_1 = -5, \quad p_2 = -1 - 2j, \quad p_3 = -1 + 2j$

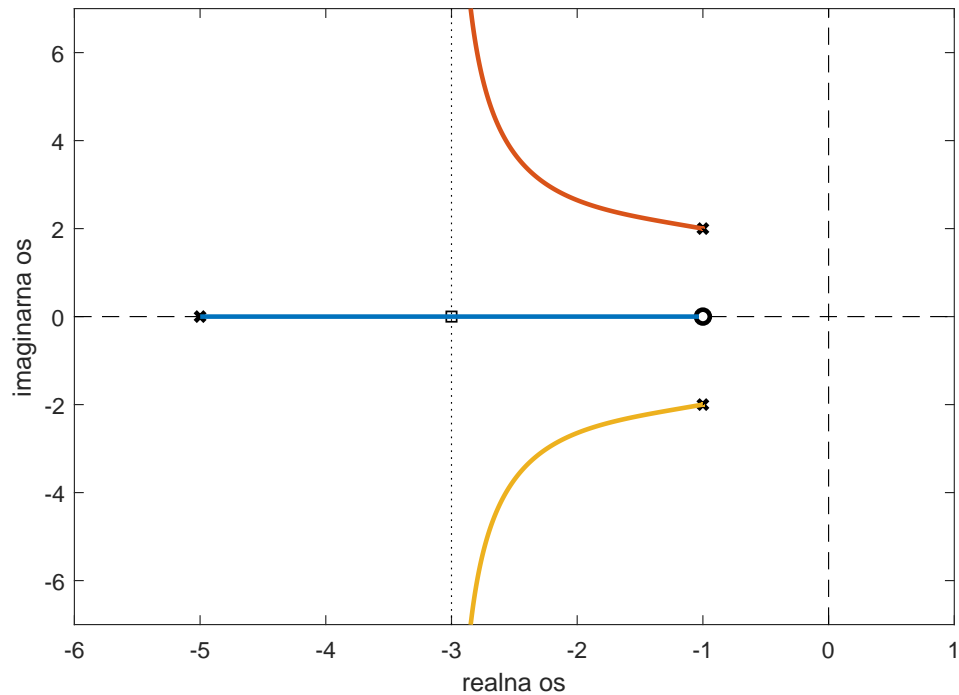
2. Izračunamo presečišče asimptot in kote, ki jih asimptote tvorijo z realno osjo:

$$\sigma_A = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m q_i}{n - m} = \frac{(-7) - (-1)}{3 - 1} = -3$$

$$\varphi_k = \frac{(2k-1)180^\circ}{n-m} = \frac{(2k-1)180^\circ}{3-1} = (2k-1)90^\circ$$

$$\varphi_1 = 90^\circ \quad \varphi_2 = 270^\circ$$

3. Narišemo krivulje diagrama lege korenov:



Slika 2.42: Diagram lege korenov, naloga 2.67

## 2.7 Vodljivost

Poenostavljeno opišemo pojem vodljivost kot lastnost dinamičnega sistema, ki pove, ali lahko preko vhodov vplivamo na vse spremenljivke stanja sistema. Natančneje določa pojem vodljivost definicija 2.1:

### Definicija 2.1

Zvezni, časovno nespremenljivi sistem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.117)$$

je vodljiv, če lahko vsako začetno stanje  $\mathbf{x}(t_0)$  z ustreznim vhodnim signalom  $\mathbf{u}(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$  pripeljemo v ničelno stanje  $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{0}$ .

Vodljivost sistema, opisanega z enačbo (2.117) izračunamo s pomočjo izreka 2.2

### Izrek 2.2

Sistem (2.117) je vodljiv, če je vodljivostna matrika  $\mathbf{Q}_v$ , definirana z enačbo (2.118), nesingularna (t. j. determinanta  $\mathbf{Q}_v$  je različna od nič v primeru kvadratne matrike  $\mathbf{Q}_v$ ) oz. rang matrike  $\mathbf{Q}_v$  je enak dimenziji matrike  $\mathbf{A}$  v primeru, ko  $\mathbf{Q}_v$  ni kvadratna matrika.

$$\mathbf{Q}_v = [\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \mathbf{A}^3\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (2.118)$$

Izrek 2.2 je uporaben za izračun vodljivosti eno- in večvhodnih sistemov.



### Ugotavljanje vodljivosti s pomočjo pretvorbe v diagonalno kanonično obliko

Lastnost vodljivost je neodvisna od izbire spremenljivk stanja - če je sistem vodljiv so vodljivi tudi vsi njegovi ekvivalentni sistemi. Vodljivost je najbolj očitna, če zapišemo sistem v diagonalni ali Jordanovi obliki. Za diagonaliziran sistem

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (2.119)$$

lahko zapišemo vodljivostno matriko kot produkt dveh matrik:

$$\mathbf{Q}_v = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.120)$$

Iz tako zapisane vodljivostne matrike je razvidno, da je sistem popolnoma vodljiv, če sta izpolnjena dva pogoja:

- vsi parametri vhodnega vektorja so različni od nič ( $b_1, b_2, \dots, b_n \neq 0$ ) in
- so vse lastne vrednosti sistema ( $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ) različne.

V primeru, ko ugotovimo, da je obravnavan sistem nevodljiv, velikokrat želimo ugotoviti, katere lastne vrednosti so vodljive in katere so nevodljive. Iz zapisa sistema v diagonalni kanonični obliki lahko neposredno razberemo vodljivost posameznih lastnih vrednosti.

Iz enačbe (2.120) je razvidno,

- da so nevodljive tiste lastne vrednosti, ki imajo pripadajoč člen  $b_i$  vhodnega vektorja  $\mathbf{b}$  enak nič in
- da so vodljive tiste lastne vrednosti, ki imajo pripadajoč člen  $b_i$  vhodnega vektorja  $\mathbf{b}$  različen od nič.

### Ugotavljanje vodljivosti posameznih lastnih vrednosti s pomočjo Hautusovega kriterija

Velikokrat želimo ugotoviti vodljivost posamebnih lastnih vrednosti brez pretvorbe sistema v diagonalno kanonično obliko. Obstaja več postopkov, s katerimi ugotovimo, kateri načini oz. lastne vrednosti so vodljivi in kateri so nevodljivi, ki ne zahtevajo zapisa sistema v diagonalni kanonični obliki. Eden izmed postopkov za ugotavljanje vodljivosti posameznih lastnih vrednosti je Hautusov kriterij, predstavljen z izrekom 2.3

#### Izrek 2.3

Lastna vrednost  $\lambda_i$  sistema 2.117 je vodljiva, če velja enačba 2.121:

$$\text{rang} [\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}, \mathbf{B}] = n \quad (2.121)$$

kjer je  $n$  red sistema.

**Naloga 2.68**

Določite vodljivost sistema:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \ 2 \ 3] \mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

**Rešitev**

Sistem je tretjega reda:  $n = 3$ . Lastne vrednosti obravnavanega sistema so:

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = -2$$

Za ugotavljanje vodljivosti potrebujemo vodljivostno matriko:

$$\mathbf{Q}_v = [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}]$$

Posamezni elementi vodljivostne matrike so:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^2\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Vodljivostna matrika znaša:

$$\mathbf{Q}_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Izračunamo determinanto vodljivostne matrike:

$$\det \mathbf{Q}_v = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$$

Ker je determinanta vodljivostne matrike  $\mathbf{Q}_v$  različna od nič je sistem vodljiv.

## 2.8 Spoznavnost

Poenostavljeno opišemo spoznavnost kot lastnost dinamičnega sistema, ki pove, ali lahko iz vhodov in izhodov sistema določimo vse spremenljivke stanja sistema. Natančneje določa to lastnost definicija 2.2:

### Definicija 2.2

Zvezni, časovno nespremenljivi sistem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.122)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (2.123)$$

je spoznaven, če lahko določimo stanje  $\mathbf{x}(t_1)$  na osnovi poznanih potekov  $\mathbf{u}(t)$  in  $\mathbf{y}(t)$  v končnem intervalu  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

Spoznavnost sistema, opisanega z enačbama (2.122) in (2.123) izračunamo s pomočjo izreka 2.4.

### Izrek 2.4

Sistem (2.122), (2.123) je spoznaven, če je spoznavnostna matrika  $\mathbf{Q}_s$ , definirana z enačbo (2.124), nesingularna (t. j. determinanta  $\mathbf{Q}_s$  je različna od nič v primeru kvadratne matrike  $\mathbf{Q}_s$ ) oz. rang matrike  $\mathbf{Q}_s$  je enak dimenziji matrike  $\mathbf{A}$  v primeru, ko  $\mathbf{Q}_s$  ni kvadratna matrika.

$$\mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^3 \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^4 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (2.124)$$

Algebrsko je spoznavnost dualna lastnost vodljivosti in zato veljajo vse ugotovitve v okviru vodljivosti tudi za spoznavnost.

### Naloga 2.69

Ugotovite spoznavnost sistema:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \ 2 \ 3] \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

### Rešitev

Sistem je tretjega reda:  $n = 3$ . Lastne vrednosti obravnavanega sistema so:

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = -2$$

Za ugotavljanje spoznavnosti potrebujemo spoznavnostno matriko:

$$\mathbf{Q}_s = [\mathbf{c}^T, \mathbf{c}^T \mathbf{A}, \mathbf{c}^T \mathbf{A}^2]$$

Posamezni elementi spoznavnostne matrike so:

$$\mathbf{c}^T = [1 \quad 2 \quad 3]$$

$$\mathbf{c}^T \mathbf{A} = [1 \quad 2 \quad 3] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = [0 \quad -1 \quad -4]$$

$$\mathbf{c}^T \mathbf{A}^2 = [0 \quad -1 \quad -4] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = [0 \quad 1 \quad 7]$$

Spoznavnostna matrika je:

$$\mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Izračunamo determinanto spoznavnostne matrike:

$$\det \mathbf{Q}_s = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} = -3 \neq 0$$

Ker je determinanta spoznavnostne matrike  $\mathbf{Q}_s$  različna od nič, je sistem spoznaven.

---

## Poglavje 3

# Sinteza regulacijskih sistemov

### 3.1 Razčlenitev nalog pri sintezi regulacijskih sistemov

Cilj sinteze regulacijskega sistema predstavlja zadovoljiv časovni odziv zaprtozančnega sistema v primeru spreminjanja referenčne veličine in v primeru prisotnosti motenj. Postopek razvoja, projektiranja in gradnje regulacijskih naprav oz. sistemov poteka v večih fazah. Delo največkrat razdelimo v naslednje korake:

1. Določitev parametričnega matematičnega modela izhodiščnega procesa. Za določitev parametričnega matematičnega modela uporabimo postopke teoretičnega in/ali eksperimentalnega (identifikacija) modeliranja. Določeni matematični model vrednotimo pogosto tako, da primerjamo simulacijsko dobljene odzive matematičnega modela z izmerjenimi odzivi opazovanega sistema.
2. Analiza matematičnega modela: določimo pomembne lastnosti (red, vrsta, poli, ničle, ojačenje pri enosmernem vzbujanju v stacionarnem stanju, stabilnost, vodljivost, spoznavnost, ...)
3. Definicija in utemeljitev zahtev, ki naj jih regulacijski sistem izpolnjuje: stacionarna točnost, hitrost in dušenje prehodnega pojava v primeru pričakovanih sprememb referenčnega signala in v primeru pojava pričakovanih motenj, ...
4. Izbira strukture regulacijskega sistema, izbira vrste (strukture) regulatorja in izračun parametrov regulatorja.
5. Simulacija obnašanja regulacijskega sistema.
6. Projektiranje, gradnja in montaža regulacijske naprave oz. sistema.
7. Dokončna uglasitev parametrov regulatorja v obratovalnih pogojih.
8. Poskusno obratovanje in optimiranje.

V okviru tega učbenika se bomo pri obravnavi sinteze osredotočili predvsem na točko 4, to pomeni na:

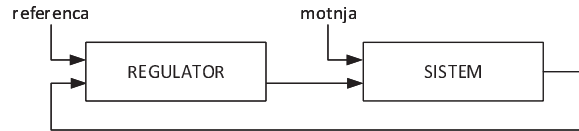
- izbiro strukture regulacijskega sistema,
- izbiro strukture regulatorja in
- izračun parametrov regulatorja.

Poudarek bo predvsem na izračunu parametrov regulatorja.

## 3.2 Načrtovanje na osnovi prenosne funkcije

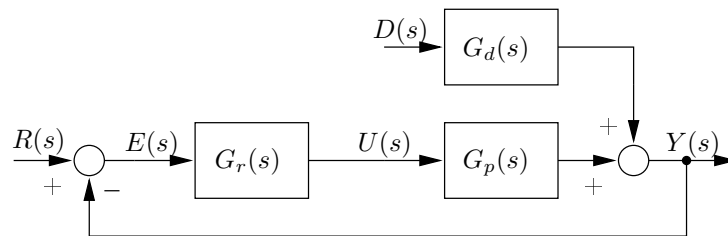
### 3.2.1 Regulacijska struktura

Obstajajo različne strukture regulacijskih sistemov. Osnovna struktura, ki prestavlja temelj za razvoj zapletenejših regulacijskih struktur, je prikazana na sliki 3.1:



Slika 3.1: Osnovna struktura regulacijskega sistema

Ob poznavanju vhodno-izhodnih matematičnih modelov regulatorja in reguliranega sistema narišemo blokovni diagram modela regulacijskega sistema:



Slika 3.2: Blokovni diagram zaprtozančnega sistema

Na sliki 3.2 imajo posamezne oznake naslednji pomen:

$G_r(s)$ ,  $G_p(s)$ ,  $G_d(s)$  – prenosne funkcije regulatorja, procesa in motnje,

$R(s)$ ,  $E(s)$ ,  $U(s)$ ,  $Y(s)$ ,  $D(s)$  – referenca, vhod v regulator, vhod v proces, izhod iz procesa, motnja.

Za regulacijski sistem na sliki določimo odprtozančno prenosno funkcijo in značilne prenosne funkcije zaprte zanke na naslednji način:

$$G_o(s) = G_r(s)G_p(s) \quad (3.1)$$

$$G_{R-Y}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} \quad (3.2)$$

$$G_{D-Y}(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_d(s)}{1 + G_o(s)} \quad (3.3)$$

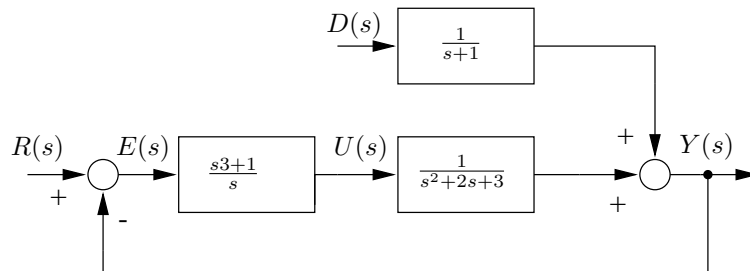
$$G_{R-E}(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_o(s)} \quad (3.4)$$

$$G_{D-E}(s) = \frac{E(s)}{D(s)} = -\frac{G_d(s)}{1 + G_o(s)} \quad (3.5)$$

Od regulatorja pričakujemo, da bo zagotovil čim večjo podobnost izhodnega signala  $Y(s)$  referenčnemu signalu  $R(s)$  kljub motnjam v sistemu in spremembam reference  $R(s)$ . V nadaljevanju se bomo omejili na problematiko določevanja regulatorjev za regulacijske sisteme, katerih struktura je prikazana na sliki 3.2.

**Naloga 3.1**

Določite odprtozančno prenosno funkcijo in vse štiri značilne zaprtozančne prenosne funkcije sistema, prikazanega na sliki 3.3.



Slika 3.3: Blokovni diagram regulacijskega sistema, naloga 3.1

**Rešitev**

$$\begin{aligned}
 G_o(s) &= \frac{3s+1}{s^3+2s^2+3s} \\
 G_{R-Y}(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)} = \frac{3s+1}{s^3+2s^2+6s+1} \\
 G_{D-Y}(s) &= \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_d(s)}{1+G_o(s)} = \frac{s^3+2s^2+3s}{s^4+3s^3+8s^2+7s+1} \\
 G_{R-E}(s) &= \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G_o(s)} = \frac{s^3+2s^2+3s}{s^3+2s^2+6s+1} \\
 G_{D-E}(s) &= \frac{E(s)}{D(s)} = -\frac{G_d(s)}{1+G_o(s)} = -\frac{s^3+2s^2+3s}{s^4+3s^3+8s^2+7s+1}
 \end{aligned}$$

**3.2.2 Značilne strukture regulatorjev**

Osnovne strukture regulatorjev so:

- Proporcionalni regulator (P regulator):

$$G_r = K_p \quad (3.6)$$

- Proporcionalno-integrirni regulator (PI regulator):

$$G_r(s) = K_p \frac{sT_i + 1}{sT_i} = K_p + K_p \frac{1}{sT_i} = K_p + \frac{K_I}{s} \quad (3.7)$$

- Proporcionalno-integrirni-diferencirni regulator (PID regulator)

$$G_r(s) = K_p \frac{(sT_i + 1)(sT_d + 1)}{sT_i(sT'_d + 1)} = K_p^* \left( 1 + \frac{1}{sT_i^*} + \frac{sT_d^*}{sT_d'^* + 1} \right) = K_p + \frac{K_I}{s} + \frac{sK_D}{sT_d' + 1} \quad (3.8)$$

V enačbah (3.6), (3.7) in (3.8) parameter  $K_p$  označuje ojačenje, parameter  $T_i$  integrirno časovno konstanto in parameter  $T_d$  diferencirno časovno konstanto regulatorjev.

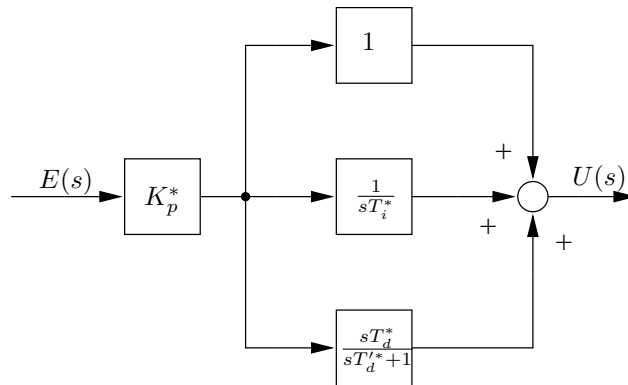
- prehitavalno (zakasnilni) regulator (imenujemo tudi člen za dvig (spust) faze)

$$G_r(s) = k \frac{sT_1 + 1}{sT_2 + 1} \quad (3.9)$$

Regulator v primeru, ko velja  $T_1 > T_2$  dvigne fazo v izbranem frekvenčnem območju in v primeru, ko velja  $T_1 < T_2$  spusti fazo v izbranem frekvenčnem območju.

### Naloga 3.2

V okviru sinteze regulacijskega sistema smo določili parametre PID regulatorja v skladu s prenosno funkcijo (3.8). Regulator nameravamo realizirati z elektronskim vezjem, katerega model prikazuje blokovni diagram na sliki 3.4. Kakšna je povezava med parametri  $K_p$ ,  $T_i$ ,  $T_d$ ,  $T'_d$  (enačba 3.8) in parametri  $K_p^*$ ,  $T_i^*$ ,  $T_d^*$ ,  $T_d'^*$  (slika 3.4)?



Slika 3.4: Blokovni diagram realiziranega regulatorja, naloga 3.2

### Rešitev

Iz blokovnega diagrama (slika 3.4) izračunamo prenosno funkcijo regulatorja:

$$G_r^*(s) = K_p^* \frac{(sT_d'^* + 1)(sT_i^*) + (sT_d'^* + 1) + sT_d^*sT_i^*}{sT_i^*(sT_d'^* + 1)} = K_p^* \frac{s^2(T_i^*T_d'^* + T_i^*T_d^*) + s(T_i^* + T_d^*) + 1}{sT_i^*(sT_d'^* + 1)}$$

in jo primerjamo s prenosno funkcijo, za katero smo določili parametre regulatorja (enačba (3.8))

$$G_r(s) = K_p \frac{(sT_i + 1)(sT_d + 1)}{sT_i(sT_d' + 1)} = K_p \frac{s^2T_iT_d + s(T_i + T_d) + 1}{sT_i(sT_d' + 1)}$$

Po primerjanju koeficientov obeh prenosnih funkcij dobimo povezavo med parametri obeh regulatorjev:

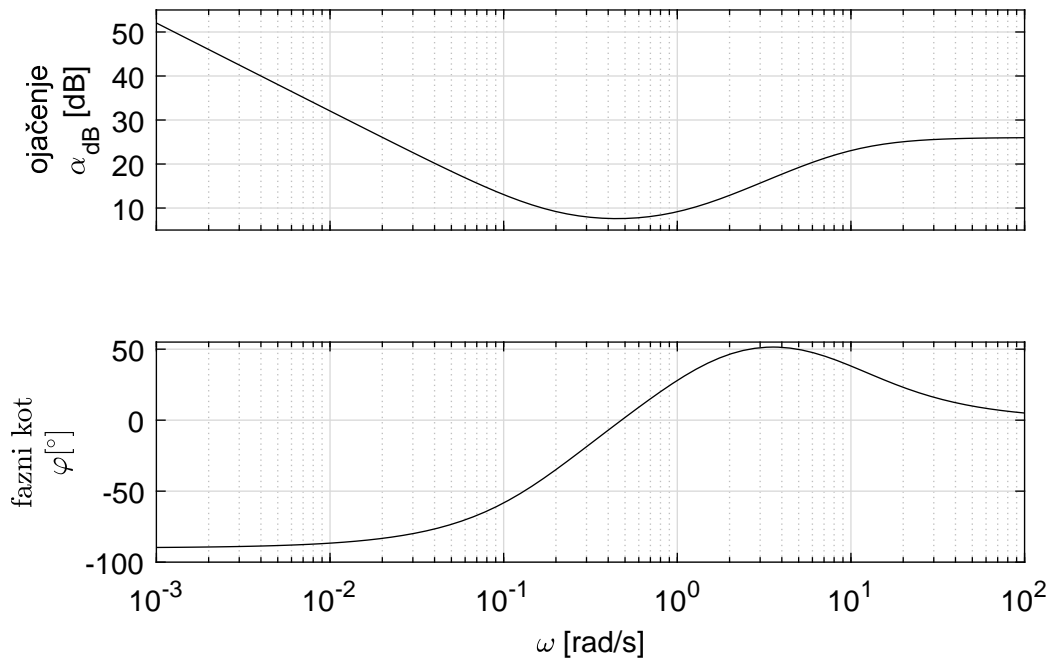
$$\begin{aligned} T_d'^* &= T_d' \\ T_i^* + T_d'^* &= T_i + T_d \Rightarrow T_i^* = T_i + T_d - T_d' \\ T_i^*T_d'^* + T_i^*T_d^* &= T_iT_d \Rightarrow T_d^* = \frac{T_iT_d + T_d'T_d' - T_iT_d' - T_dT_d'}{T_i + T_d - T_d'} \\ \frac{K_p^*}{T_i^*} &= \frac{K_p}{T_i} \Rightarrow K_p^* = K_p \frac{T_i + T_d - T_d'}{T_i} \end{aligned}$$



**Naloga 3.3**

Narišite frekvenčno karakteristiko PID regulatorja v Bodejevem diagramu. Parametri PID regulatorja so:

$$K_p = 2, \quad T_i = 5 \text{ s}, \quad T_d = 1 \text{ s}, \quad T'_d = 0.1 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad G_r(s) = 2 \frac{(s5 + 1)(s + 1)}{s5(s0.1 + 1)}$$

**Rešitev**

Slika 3.5: Bodejev diagram PID regulatorja, naloga 3.3

**Naloga 3.4**

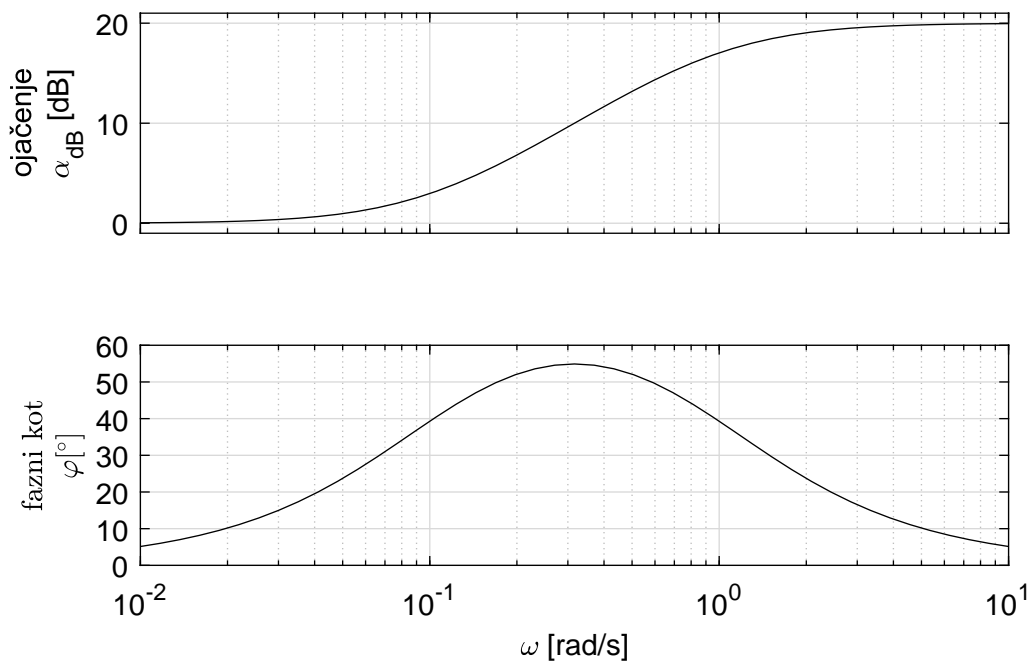
Narišite frekvenčni karakteristiki prehodevalnega in zakasnilnega regulatorja:

$$k = 1, \quad T_1 = 10 \text{ s}, \quad T_2 = 1 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad G_r(s) = 1 \frac{s10 + 1}{s + 1} \quad (3.10)$$

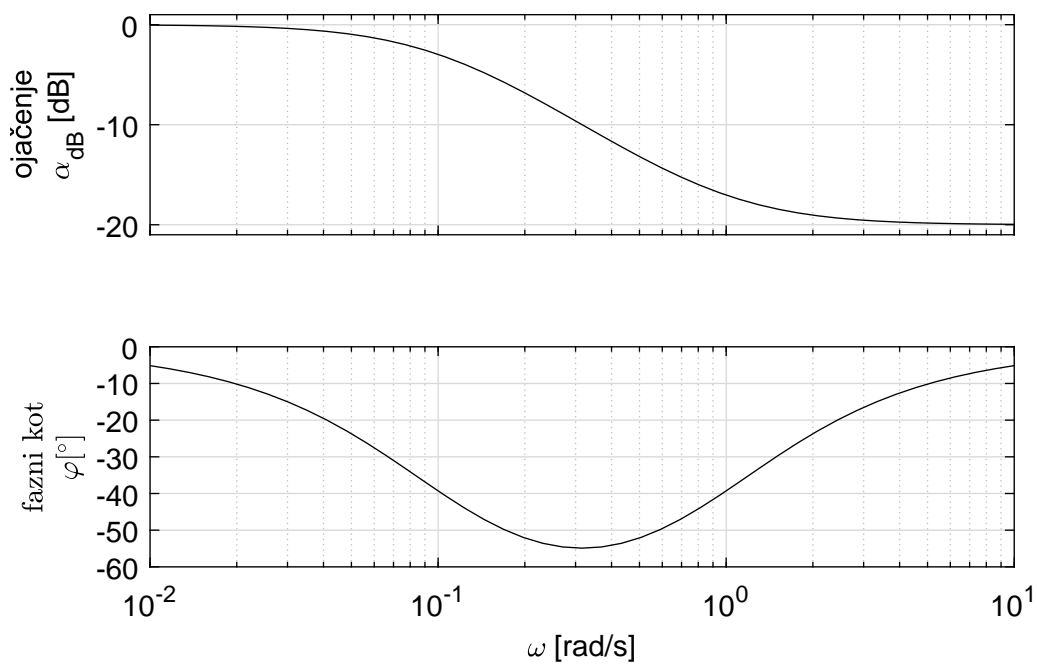
$$k = 1, \quad T_1 = 1 \text{ s}, \quad T_2 = 10 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad G_r(s) = 1 \frac{s + 1}{s10 + 1} \quad (3.11)$$

Komentirajte razliko.

**Rešitev**



Slika 3.6: Bodejev diagram prehitevalnega regulatorja, naloga 3.4



Slika 3.7: Bodejev diagram zakasnilnega regulatorja, naloga 3.4

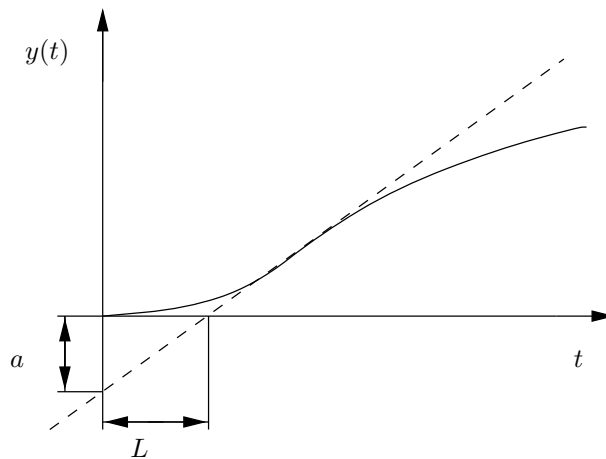
Poglavitno razliko med členoma, opisanima z enačbama (3.10) in (3.11) predstavlja dejstvo, da lahko s členom (3.10) v določenem frekvenčnem območju dvignemo fazni premik odprtozančne frekvenčne karakteristike, medtem ko s členom (3.11) v določenem frekvenčnem območju spustimo fazni premik odprtozančne frekvenčne karakteristike.

### 3.2.3 Določanje parametrov PID regulatorjev s pomočjo nastavitvenih pravil

Najenostavnejši način izračuna parametrov regulatorja predstavlja uporaba nastavitvenih pravil. Osnovno prednost uporabe nastavitvenih pravil v primerjavi z ostalimi metodami predstavlja dejstvo, da pri uporabi nastavitvenih pravil ne potrebujemo parametričnega matematičnega modela sistema. Izmed množice različnih nastavitvenih pravil bomo predstavili metodi, ki sta jih razvila Ziegler in Nichols in se po njiju imenujeta Ziegler-Nicholsovi metodi.

#### Ziegler-Nicholsova metoda odziva na stopničasto vzbujanje

Pri tej metodi potrebujemo za določitev parametrov regulatorja odziv odprtozančnega sistema na stopničasto vzbujanje. Odziv odprtozančnega sistema dobimo tako, da prekinemo povratno regulacijsko zanko in stopničasto vzbujamo samo sistem z aktuatorjem. Iskani odziv določimo običajno eksperimentalno. Na opazovanem odzivu določimo prevojno točko. V tej točki narišemo tangento na krivuljo in odčitamo presečišči  $(a, L)$  tangente s koordinatnima osema. Slika 3.8 prikazuje odziv odprtozančnega sistema na stopničasto vzbujanje z enotino amplitudo.



Slika 3.8: Določitev parametrov regulatorja s pomočjo Ziegler-Nicholsove metode stopničnega odziva

Na osnovi eksperimentalno-grafično dobljenih vrednosti  $a$  in  $L$  določimo parametre regulatorjev s pomočjo tabele 3.1:

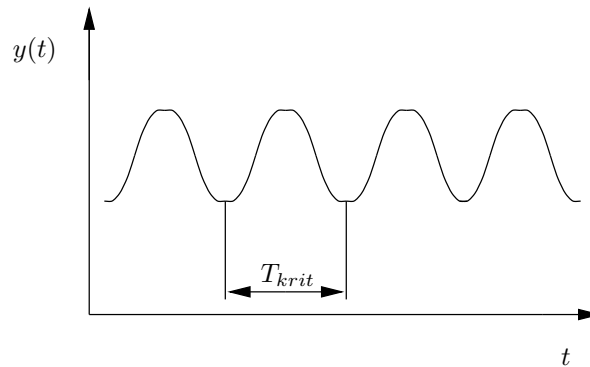
vrsta regulatorja	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P regulator	$\frac{1}{a}$	/	/
PI regulator	$\frac{0.9}{a}$	$3L$	/
PID regulator	$\frac{1.2}{a}$	$2L$	$\frac{L}{2}$

Tabela 3.1: Tabela izrazov za izračun parametrov regulatorjev po Ziegler-Nicholsovi metodi odziva na stopničasto vzbujanje

#### Ziegler-Nicholsova metoda nihajnega preizkusa

Parametre regulatorja lahko določimo tudi tako, da ostane povratna regulacijska zanka ves čas aktivna. V tem primeru na regulatorju izklopimo integrirni in diferencirni člen in pustimo aktiven

samo proporcionalni del regulatorja. Ojačenje proporcionalnega regulatorja povečujemo tako dolgo, da preide regulacijski sistem v mejno stabilno stanje (slika 3.9).



Slika 3.9: Določitev parametrov regulatorja s pomočjo Ziegler-Nicholsovega nihajnega preizkusa

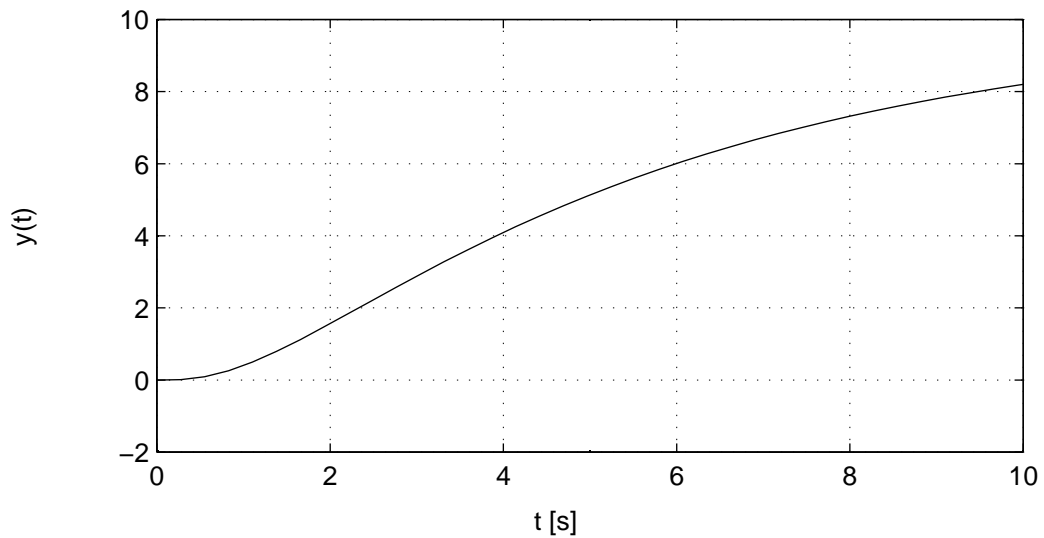
Na osnovi poznane vrednosti ojačenja proporcionalnega regulatorja  $K_{krit}$ , pri kateri je zaprtozančni sistem mejno stabilen in periode nihanja mejno stabilnega regulacijskega sistema  $T_{krit}$  določimo parametre regulatorjev s pomočjo tabele 3.2:

vrsta regulatorja	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P regulator	$0.5 K_{krit}$	/	/
PI regulator	$0.4 K_{krit}$	$0.8 T_{krit}$	/
PID regulator	$0.6 K_{krit}$	$0.5 T_{krit}$	$0.12 T_{krit}$

Tabela 3.2: Tabela izrazov za izračun parametrov regulatorjev po Ziegler-Nicholsovi metodi nihajnega preizkusa

### Naloga 3.5

Odrprtozančni odziv sistema na stopničasto vzbujanje v bližini izbrane delovne točke je prikazan na sliki 3.10. S pomočjo Ziegler-Nicholsove metode določite parametre P, PI in PID regulatorjev.



Slika 3.10: Odziv odprtozančnega sistema na stopnico amplitude 1, naloga 3.5

**Rešitev**

Za krivuljo na sliki 3.10 ocenimo točko prevoja in potegnemo tangento. Odčitamo presečišča z obema koordinatnima osema (slika 3.8) in dobimo:

$$a = 1.18, \quad L = 0.85 \text{ s}$$

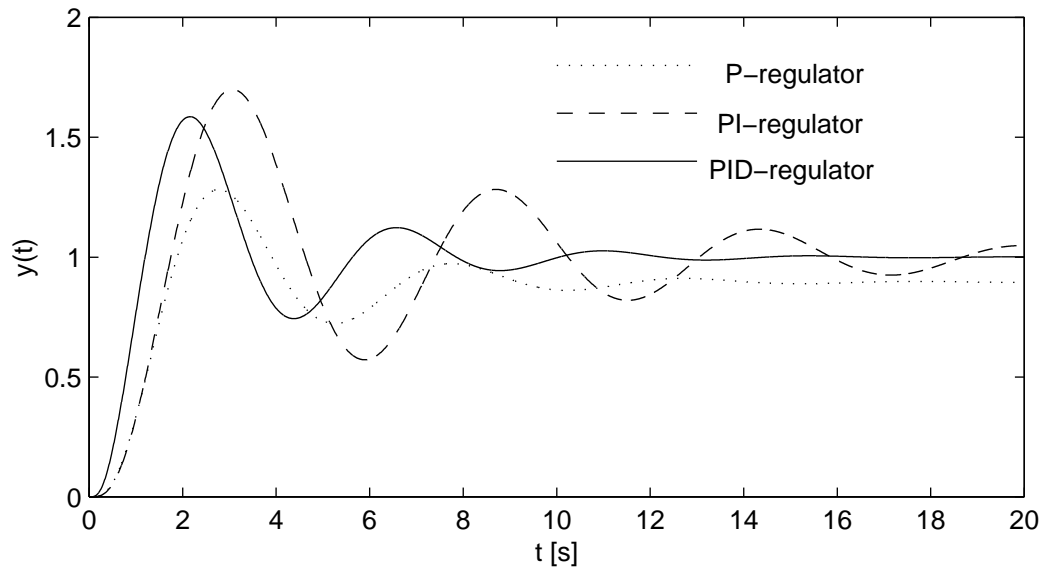
S pomočjo izrazov iz tabele 3.1 določimo parametre regulatorjev:

$$\begin{aligned} \text{P regulator:} & \quad K_p = 0.85 \\ \text{PI regulator:} & \quad K_p = 0.76, \quad T_i = 2.55 \text{ s} \\ \text{PID regulator:} & \quad K_p = 1.02, \quad T_i = 1.7 \text{ s}, \quad T_d = 0.42 \text{ s}, \quad T'_d = 0.06 \text{ s} \end{aligned}$$

Prenosne funkcije regulatorjev so:

$$\begin{aligned} \text{P regulator:} & \quad G_r(s) = 0.85 \\ \text{PI regulator:} & \quad G_r(s) = 0.76 \frac{s2.55 + 1}{s2.55} \\ \text{PID regulator:} & \quad G_r(s) = 1.02 \frac{(s1.7 + 1)(s0.42 + 1)}{s1.7(s0.06 + 1)} \end{aligned}$$

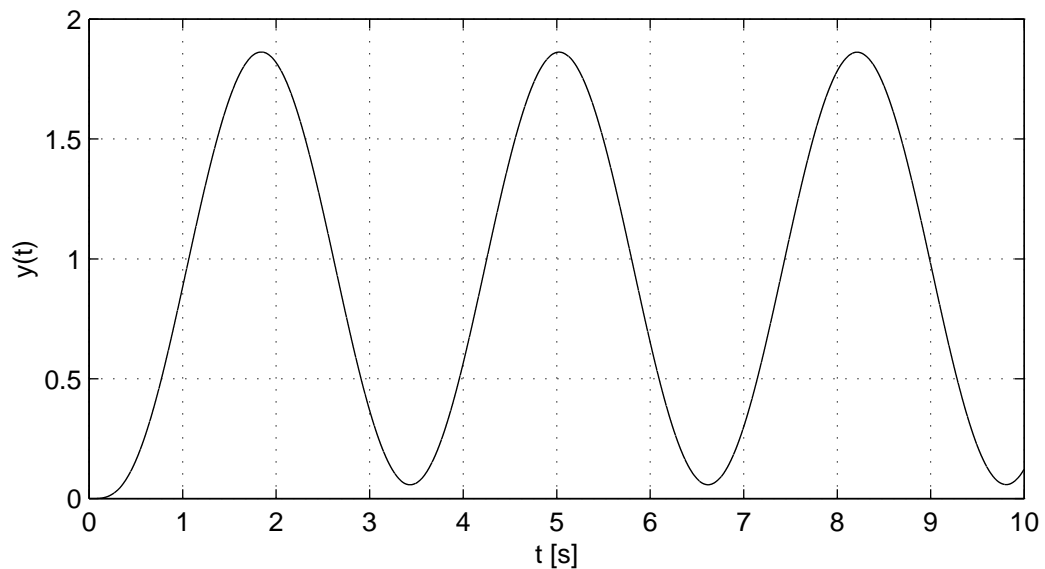
Odzivi obranavanega regulacijskega sistema s tako določenimi parametri regulatorjev so prikazani na sliki 3.11.



Slika 3.11: Odzivi zaprtozančnega regulacijskega sistema iz naloge 3.5 pri uporabi P, PI in PID regulatorja pri vzbujanju sistema s stopničnim referenčnim signalom amplitude 1

### Naloga 3.6

Za zaprtozančni sistem s P regulatorjem smo določili kritično ojačenje  $K_{krit} = 2.4$ . Odziv regulacijskega sistema je prikazan na sliki 3.12. S pomočjo Ziegler-Nicholsove metode frekvenčnega odziva določite parametre P, PI in PID regulatorjev.



Slika 3.12: Odziv zaprtozančnega sistema s P regulatorjem pri vrednosti ojačenja  $K_{krit} = 2.4$ , sistem je vzbujan z referenčnim signalom stopničaste oblike in amplitude 1, naloga 3.6

**Rešitev**

Za krivuljo na sliki 3.12 ocenimo periodo nihanja:

$$T_{krit} = 3.165 \text{ s}$$

Ob upoštevanju vrednosti kritičnega ojačenja  $K_{krit} = 2.4$  izračunamo s pomočjo izrazov iz tabele 3.2 parametre regulatorjev:

$$\begin{aligned} \text{P regulator:} & \quad K_p = 1.2 \\ \text{PI regulator:} & \quad K_p = 0.96, \quad T_i = 2.53 \text{ s} \\ \text{PID regulator:} & \quad K_p = 1.44, \quad T_i = 1.58 \text{ s}, \quad T_d = 0.38 \text{ s}, \quad T'_d = 0.07 \text{ s} \end{aligned}$$

Prenosne funkcije regulatorjev so:

$$\begin{aligned} \text{P regulator:} & \quad G_r(s) = 1.2 \\ \text{PI regulator:} & \quad G_r(s) = 0.96 \frac{s2.53 + 1}{s2.53} \\ \text{PID regulator:} & \quad G_r(s) = 1.44 \frac{(s1.58 + 1)(s0.38 + 1)}{s1.58(s0.07 + 1)} \end{aligned}$$

---

### 3.2.4 Določanje parametrov regulatorjev s pomočjo frekvenčnih karakteristik

#### Povezava med frekvenčno karakteristikom odprte regulacijske zanke in časovnim odzivom zaprte regulacijske zanke

Težavnost sinteze regulacijskih sistemov predstavlja dejstvo, da ne obstaja neposredna kvantitativna povezava med parametri regulatorjev in časovnimi odzivi zaprtozančnega sistema. Metode določevanja parametrov regulatorjev s pomočjo frekvenčnih karakteristik izhajajo iz kvalitativne in kvantitativne povezave med frekvenčno karakteristikom odprte regulacijske zanke in časovnimi odzivi zaprte regulacijske zanke. Ob poznavanju omenjenih povezav poteka postopek določevanja parametrov običajno v štirih fazah:

1. Definicija zahtev, ki naj jih izpolnjuje časovni odziv zaprtozančnega sistema.
2. Določitev frekvenčne karakteristike odprtozančnega sistema, ki bo omogočila izpolnitev predpisanih zahtev za obnašanje zaprtozančnega sistema.
3. Izbira strukture in določitev parametrov regulatorja, ki bo zadovoljil zahtevi po predpisani frekvenčni karakteristiki odprtozančnega sistema.
4. Preizkus obnašanja zaprtozančnega regulacijskega sistema v časovnem prostoru.

V nadaljevanju so posamezne faze predstavljene podrobneje.

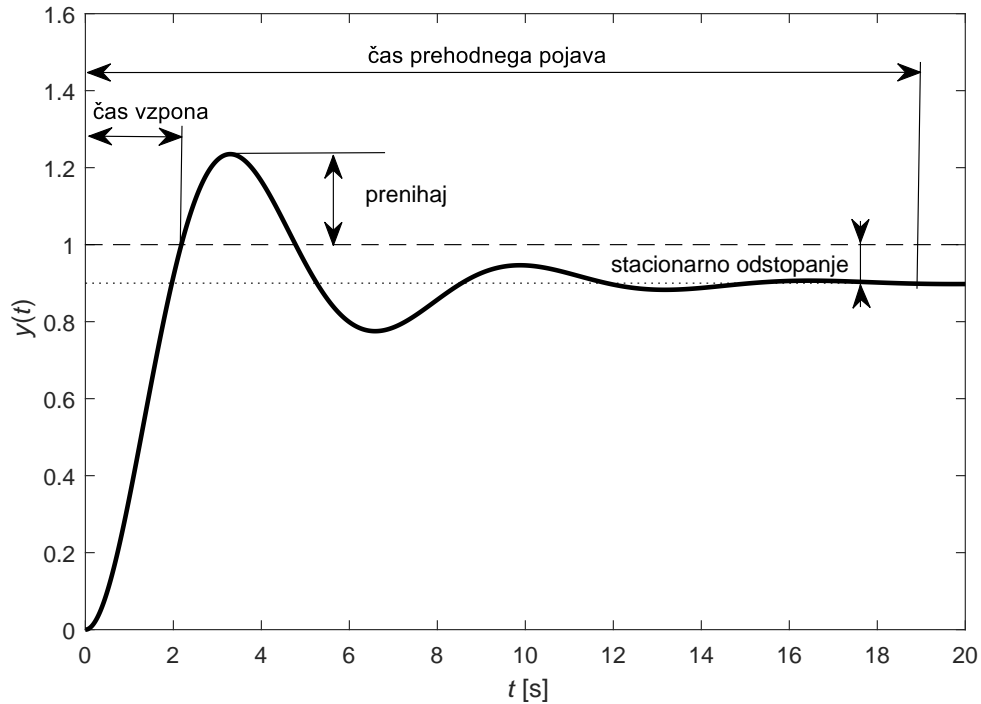
#### 1. Definicija ciljev načrtovanja v časovnem prostoru

Osnovne zahteve, ki jih mora izpolnjevati večina regulacijskih sistemov, se nanašajo na:

- stacionarno točnost regulacijskega sistema v primeru različnih potekov referenčnega in motilnih signalov (pogreški v ustaljenem stanju naj bodo čim manjši),

- hitrost in dušenje prehodnih pojavov v primeru različnih potekov referenčnega in motilnih signalov in
- neobčutljivost regulacijskega sistema na visokofrekvenčne motnje merilnikov (običajno je definirano frekvenčno območje in amplituda motenj) ter spremenljive lastnosti realnih sistemov.

Slika 3.13 prikazuje časovni potek odziva zaprtozančnega sistema na stopničasto vzbujanje.

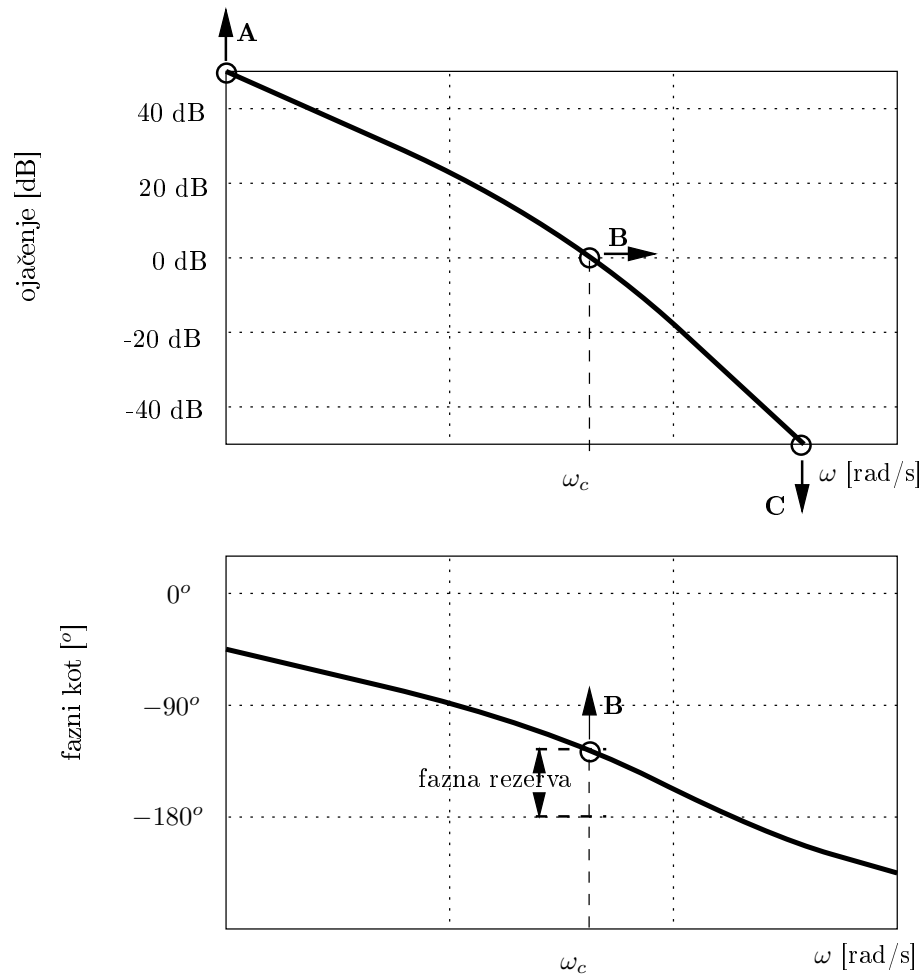


Slika 3.13: Časovni potek odziva zaprtozančnega sistema na stopničasto vzbujanje

## 2. Določitev frekvenčne karakteristike odprtozančnega sistema

Za izpolnitev definiranih zahtev časovnih odzivov regulacijskega sistema mora biti frekvenčna karakteristika odprte regulacijske zanke oblikovana v skladu s smernicami, prikazanimi na sliki 3.14.





Slika 3.14: Frekvenčna karakteristika odprtozančnega sistema

**A)** Dobre razmere v ustaljenem stanju zagotavlja čim večja vrednost ojačanja odprtozančnega sistema pri nizkih frekvencah:

$$|G_o(j\omega)| \gg 1 \quad \text{za} \quad 0 \leq \omega \ll \omega_c \quad (3.12)$$

**B)** Dobre prehodne pojave (t. j. majhne prenehaje in veliko dušenje regulirane veličine) na spremembe referenčne veličine in motenj bomo dosegli z ustrežno frekvenco  $\omega_c$  (t. j. frekvenca, pri kateri ima amplitudna karakteristika vrednost 0 dB), z ustrežno vrednostjo fazne karakteristike pri frekvenci  $\omega_c$  in z ustrežno obliko amplitudne karakteristike v bližini frekvence  $\omega_c$ .

Od vrednosti frekvence  $\omega_c$  je odvisna hitrost odziva regulacijskega sistema. Če želimo imeti hiter prehodni pojav naj bo vrednost frekvence  $\omega_c$  čim večja. Za čas vzpona  $t_r$  pri stopničnem vzbujanju velja izkustveno pravilo:

$$\omega_c t_r \approx 1.5 \quad (3.13)$$

Od vrednosti fazne karakteristike pri frekvenci  $\omega_c$  je odvisno dušenje prehodnega pojava. Regulacijski sistem je tem bolje dušen, čim večja je fazna rezerva. Za oceno amplitude prvega prenehaja pri stopničnem vzbujanju regulacijskega sistema velja izkustveno pravilo:

$$\varphi_{rez} [^\circ] + \text{prenehaj} [\%] \approx 70 \quad (3.14)$$

v katerem  $\varphi_{rez} [^\circ]$  predstavlja fazno rezervo, ki jo odčitamo iz frekvenčne karakteristike odprtozančnega sistema, t. j. razlika med faznim kotom odprtozančnega sistema pri krožni frekvenci  $\omega_c$  in vrednostjo

$-180^\circ$  (če je npr.  $\varphi(\omega_c) = -100^\circ$  potem znaša  $\varphi_{rez} = 80^\circ$ ), prenihaj[%] predstavlja relativno vrednost prve amplitude regulirane veličine glede na njeno ustaljeno vrednost pri stopnični spremembi referenčne veličine.

Glede oblike amplitudne karakteristike je priporočljivo, da amplitudna karakteristika v bližini frekvence  $\omega_c$  upada s strmino  $20 \frac{\text{dB}}{\text{dekado}}$  (t. j. ojačenje se zmanjša 10-krat ko se frekvenca poveča 10-krat).

$$|G_o(j\omega)| \approx \frac{1}{\omega} \quad \text{za} \quad 0.5\omega_c < \omega < 5\omega_c \quad (3.15)$$

V primeru, ko je izpolnjen pogoj (3.15), lahko ocenimo čas trajanja prehodnega pojava  $T_f$  pri odzivu na stopničasto vzbujanje z enačbo:

$$T_f \approx \frac{4}{\omega_c} \quad (3.16)$$

C) Zmanjšanje vpliva visokofrekvenčnih motenj (merilnega šuma) dosežemo s strmim upadanjem amplitudne karakteristike pri višjih frekvencah:

$$|G_o(j\omega)| \ll 1 \quad \text{za} \quad \omega \gg \omega_c \quad (3.17)$$

### 3. Izbira strukture in določitev parametrov regulatorja

Proporcionalni regulator v večini primerov omogoča samo zagotovitev zahtev, ki izhajajo iz predpisane stacionarne točnosti regulacijskega sistema in ne omogoča poljubnega preoblikovanja frekvenčne karakteristike odprtozannega sistema. Za preoblikovanje frekvenčne karakteristike uporabljamo proporcionalno-integrirne regulatorje, proporcionalno-integrirno-diferencirne regulatorje, predvsem pa prehitevalne in zakasnilne regulatorje (člene za dvig (spust) faze):

- za dvig fazne karakteristike v določenem frekvenčnem področju uporabimo člen s pozitivnim faznim kotom:

$$G(s) = k \frac{sT_1 + 1}{sT_2 + 1}, \quad T_1 > T_2 \quad (3.18)$$

- za spust fazne karakteristike v določenem frekvenčnem področju uporabimo člen z negativnim faznim kotom:

$$G(s) = k \frac{sT_1 + 1}{sT_2 + 1}, \quad T_1 < T_2 \quad (3.19)$$

### 4. Simulacijski preizkus obnašanja regulacijskega sistema

Pravilnost izbrane strukture in parametrov regulatorja preverimo običajno tudi s simulacijo obnašanja regulacijskega sistema v razpoložljivem programskem okolju.

### Poenostavljena kompenzacijska metoda določanja parametrov regulatorjev

Izbira strukture in parametrov regulatorja v skladu z nakazanimi zahtevami nas pripelje do regulacijskih sistemov, katerih časovni odzivi zadovoljujejo zahtevane cilje. Tako dobljeni regulatorji so običajno sestavljeni iz več serijsko vezanih členov, ki poskrbijo za ustrezno oblikovanje frekvenčne karakteristike. Pogosto zahteve glede časovnih odzivov regulacijskega sistema niso povsem natančno določene. V teh primerih lahko za začetno grobo nastavitvev regulatorjev uporabimo poenostavljeno kompenzacijsko metodo določanja parametrov regulatorjev. Izhodišče pri uporabi te metode predstavlja zahtevana stacionarna točnost in fazna rezerva ( $\varphi_{rez} [^\circ]$ ) oz. prenihaj (prenihaj[%]) pri stopnični spremembi referenčne veličine. Dobljeni regulatorji so običajno P, PI ali PID strukture. Postopek poenostavljene kompenzacijske metode določanja parametrov regulatorjev lahko razdelimo v štiri korake:

1. Določitev vseh časovnih konstant izbranega regulatorja - pri P regulatorju ta korak preskočimo, pri PI regulatorju določimo časovno konstanto  $T_i$ , pri PID regulatorju pa določimo časovne konstante  $T_i$ ,  $T_d$  in  $T'_d$ . Časovne konstante izberemo tako, da z njimi kompenziramo najdaljše časovne konstante reguliranega procesa:

- integrirno konstanto  $T_i$  izberemo enako največji časovni konstanti reguliranega procesa,
- diferencirno konstanto  $T_d$  izberemo enako drugi najdaljši časovni konstanti reguliranega procesa (pri PID regulatorju) oziroma enako najdaljši časovni konstanti reguliranega procesa (pri PD regulatorju),
- časovno konstanto  $T'_d$  izberemo glede na izbrano konstanto  $T_d$ :

$$T'_d = \frac{1}{10} T_d \quad (3.20)$$

2. Iz prenosne funkcije reguliranega procesa  $G_p(s)$  in tako določene prenosne funkcije regulatorja  $G_{r,K_p=1}$  (ojačenja regulatorja ne poznamo, zato vstavimo vrednost ojačenja regulatorja  $K_p = 1$ ) izračunamo prenosno funkcijo odprte regulacijske zanke za regulator z vrednostjo ojačenja  $K_p = 1$ :

$$G_{o,K_p=1}(s) = G_{r,K_p=1}(s)G_p(s) \quad (3.21)$$

3. V Bodejevem diagramu narišemo odprtozančno frekvenčno karakteristiko  $G_{o,K_p=1}$ . Iz Bodejevega diagrama odčitamo vrednost ojačenja pri frekvenci, pri kateri ima fazna karakteristika vrednost, kot je predpisano s fazno rezervo ( $\varphi_{rez} [^\circ]$ ). Odčitano vrednost označimo z  $\alpha_{\varphi_{rez}}$ . Ojačenje regulatorja izračunamo z enačbo

$$K_p = \frac{1}{\alpha_{\varphi_{rez}}} \quad (3.22)$$

4. Rezultat načrtovanja preverimo glede na nastavljene cilje.

### Naloga 3.7

Določite parametre P, PI in PID regulatorja za proces, opisan s prenosno funkcijo

$$G_p(s) = \frac{10}{(s+1)(0.1s+1)(0.01s+1)}$$

Parametre regulatorjev izračunajte samo na osnovi predpisane fazne rezerve. Izračunajte parametre regulatorjev, ki bodo zagotovili fazno rezervo  $30^\circ$  oz.  $60^\circ$ .

### Rešitev

1. Določitev časovnih konstant regulatorjev  
Glede na časovne konstante procesa izberemo konstante regulatorjev:

$$T_i = 1 \text{ s}, \quad T_d = 0.1 \text{ s}, \quad T'_d = 0.01 \text{ s}$$

Prenosne funkcije regulatorjev z ojačenjem  $K_p = 1$  so:

$$\text{P regulator: } G_{r,K_p=1,P} = 1$$

$$\text{PI regulator: } G_{r,K_p=1,PI} = \frac{1s+1}{1s}$$

$$\text{PID regulator: } G_{r,K_p=1,PID} = \frac{(1s+1)(0.1s+1)}{1s(0.01s+1)}$$

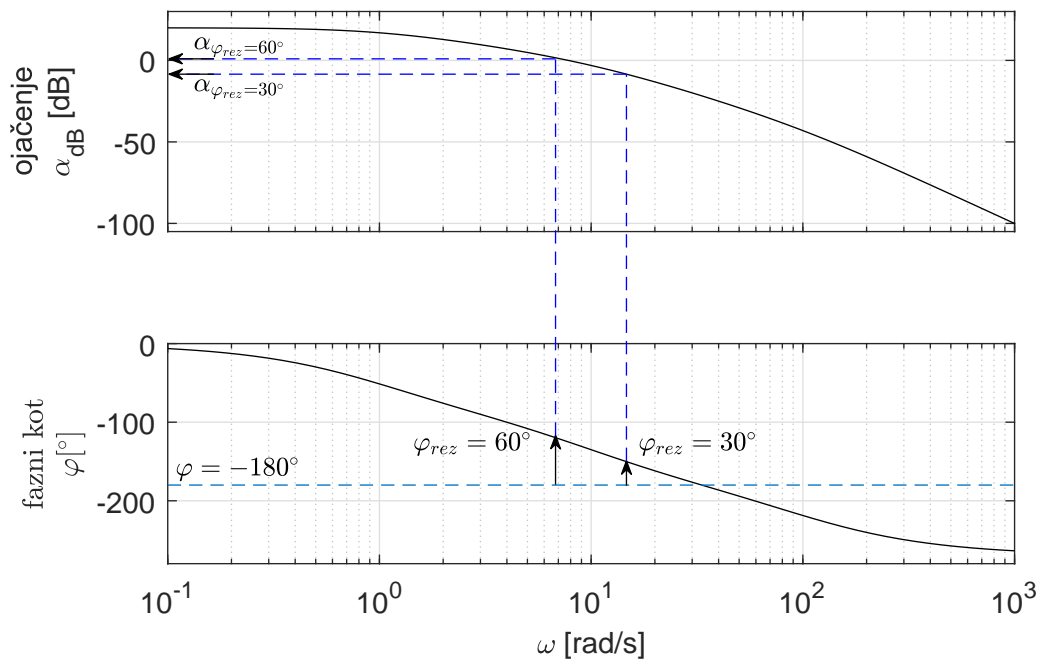
2. Izračun prenosne funkcije odprte regulacijske zanke za regulatorje z vrednostjo ojačenja  $K_p = 1$ :

$$\text{P regulator: } G_{o,K_p=1,P} = \frac{10}{(s+1)(0.1s+1)(0.01s+1)}$$

$$\begin{aligned} \text{PI regulator: } G_{o,K_p=1,PI} &= \frac{1s+1}{1s} \frac{10}{(s+1)(0.1s+1)(0.01s+1)} \\ &= \frac{10}{s(0.1s+1)(0.01s+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{PID regulator: } G_{o,K_p=1,PID} &= \frac{(1s+1)(0.1s+1)}{1s(0.01s+1)} \frac{10}{(s+1)(0.1s+1)(0.01s+1)} \\ &= \frac{10}{s(0.01s+1)(0.01s+1)} \end{aligned}$$

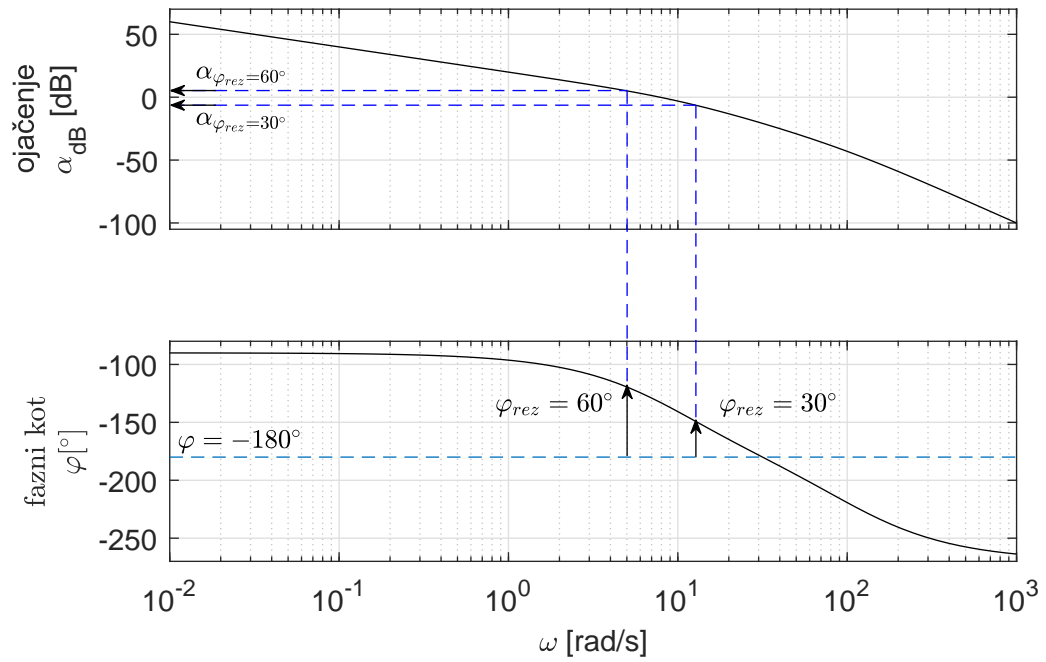
3. Na osnovi izračunanih odprtozančnih prenosnih funkcij narišemo pripadajoče frekvenčne karakteristike v Bodejevem diagramu, kot prikazujejo slike 3.15, 3.16 in 3.17.



Slika 3.15: Frekvenčna karakteristika odprtozančnega sistema s P regulatorjem z ojačenjem  $K_p = 1$ , naloga 3.7

Iz frekvenčne karakteristike odčitamo ojačenje pri predpisanih faznih rezervah:

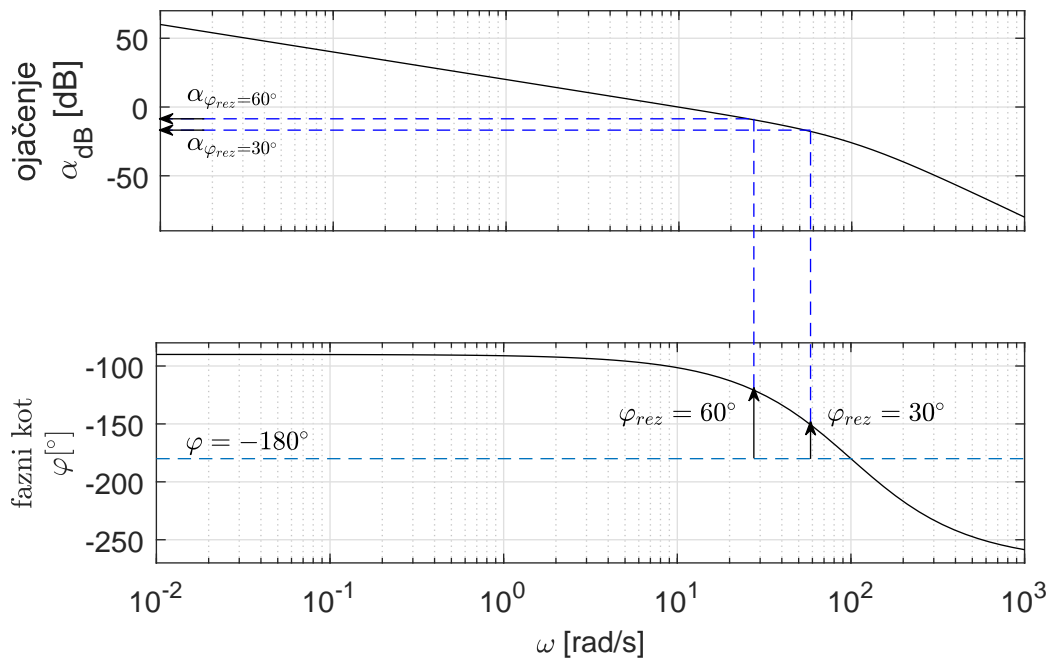
$$\varphi_{rez} = 30^\circ \Rightarrow \alpha_{\varphi_{rez}=30^\circ} = 0.37, \quad \varphi_{rez} = 60^\circ \Rightarrow \alpha_{\varphi_{rez}=60^\circ} = 1.2$$



Slika 3.16: Frekvenčna karakteristika odprtozančnega sistema s PI regulatorjem z ojačenjem  $K_p = 1$ , naloga 3.7

Iz frekvenčne karakteristike odčitamo ojačenje pri predpisanih faznih rezervah:

$$\varphi_{rez} = 30^\circ \Rightarrow \alpha_{\varphi_{rez}=30^\circ} = 0.45, \quad \varphi_{rez} = 60^\circ \Rightarrow \alpha_{\varphi_{rez}=60^\circ} = 1.7$$



Slika 3.17: Frekvenčna karakteristika odprtozančnega sistema s PID regulatorjem z ojačenjem  $K_p = 1$ , naloga 3.7

Iz frekvenčne karakteristike odčitamo ojačenje pri predpisanih faznih rezervah:

$$\varphi_{rez} = 30^\circ \Rightarrow \alpha_{\varphi_{rez}=30^\circ} = 0.13, \quad \varphi_{rez} = 60^\circ \Rightarrow \alpha_{\varphi_{rez}=60^\circ} = 0.34$$

Iz odčitanih vrednosti amplitudne karakteritike izračunamo ojačenja regulatorjev:

$$\begin{aligned} \text{P regulator} \quad \varphi_{rez} = 30^\circ, \alpha_{\varphi_{rez}=30^\circ} = 0.37 &\Rightarrow K_p = 2.7, \\ \varphi_{rez} = 60^\circ, \alpha_{\varphi_{rez}=60^\circ} = 1.2 &\Rightarrow K_p = 0.83 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{PI regulator} \quad \varphi_{rez} = 30^\circ, \alpha_{\varphi_{rez}=30^\circ} = 0.45 &\Rightarrow K_p = 2.2, \\ \varphi_{rez} = 60^\circ, \alpha_{\varphi_{rez}=60^\circ} = 1.7 &\Rightarrow K_p = 0.59 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{PID regulator} \quad \varphi_{rez} = 30^\circ, \alpha_{\varphi_{rez}=30^\circ} = 0.13 &\Rightarrow K_p = 7.7, \\ \varphi_{rez} = 60^\circ, \alpha_{\varphi_{rez}=60^\circ} = 0.34 &\Rightarrow K_p = 2.9 \end{aligned}$$

Prenosne funkcije načrtanih regulatorjev so:

$$\varphi_{rez} = 30^\circ$$

$$\text{P regulator: } G_r(s) = 2.7$$

$$\text{PI regulator: } G_r(s) = 2.2 \frac{s1 + 1}{s1}$$

$$\text{PID regulator: } G_r(s) = 7.7 \frac{(s1 + 1)(s0.1 + 1)}{s1(s0.01 + 1)}$$

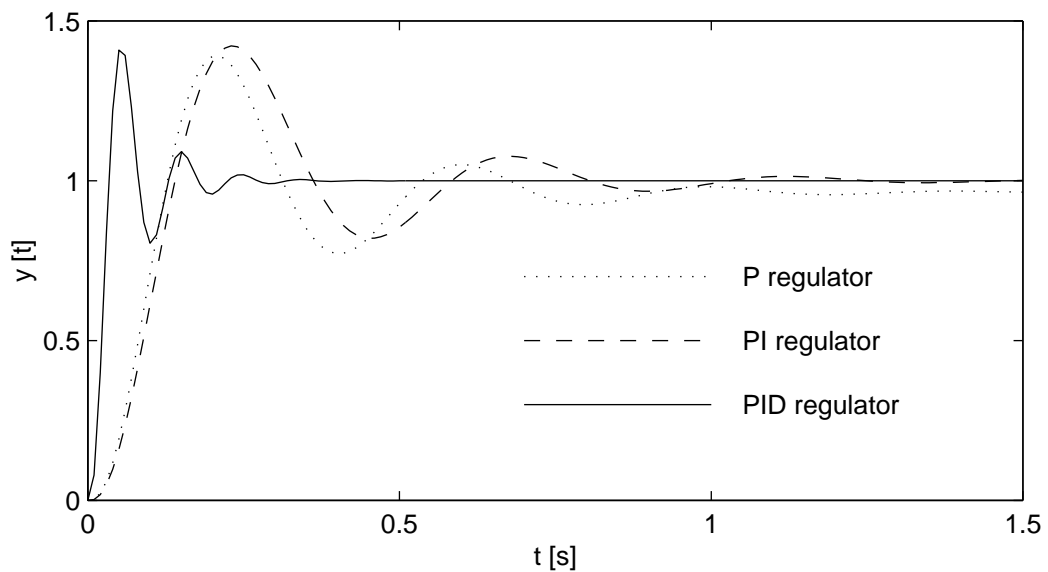
$$\varphi_{rez} = 60^\circ$$

$$\text{P regulator: } G_r(s) = 0.83$$

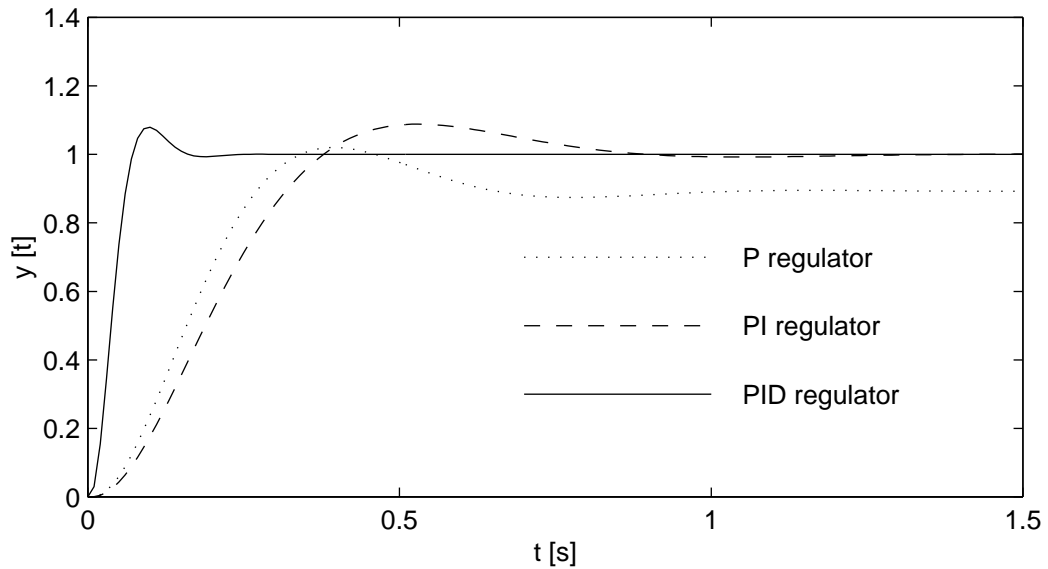
$$\text{PI regulator: } G_r(s) = 0.59 \frac{s1 + 1}{s1}$$

$$\text{PID regulator: } G_r(s) = 2.9 \frac{(s1 + 1)(s0.1 + 1)}{s1(s0.01 + 1)}$$

4. Odzivi načrtanih zaprtozančnih sistemov na referenčni stopničasti signal amplitude 1 so prikazani na slikah 3.18 in 3.19:



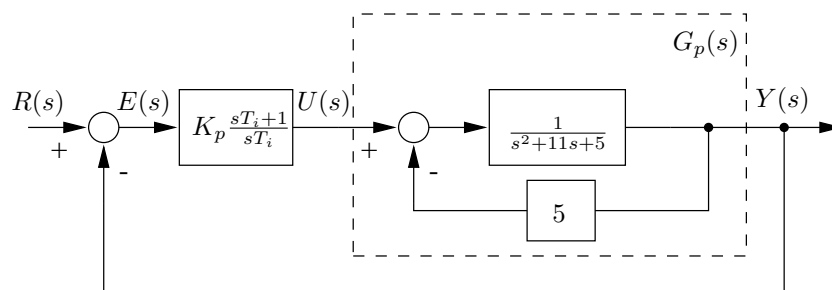
Slika 3.18: Odzivi zaprtozančnega regulacijskega sistema iz naloge 3.7 pri uporabi P, PI in PID regulatorja za fazno rezervo  $\varphi_{rez} = 30^\circ$ , sistem je vzbujan z referenčnim signalom stopničaste oblike in amplitude 1



Slika 3.19: Odzivi zaprtozančnega regulacijskega sistema iz naloge 3.7 pri uporabi P, PI in PID regulatorja za fazno rezervo  $\varphi_{rez} = 60^\circ$ , sistem je vzbujan z referenčnim signalom stopničaste oblike in amplitude 1

### Naloga 3.8

Določite parametre PI regulatorja za regulacijski sistem, prikazan na sliki 3.20.



Slika 3.20: Regulacijski sistem iz naloge 3.8

Parametre regulatorja določite tako, da bo fazna rezerva odprtozančnega sistema  $60^\circ$ .

### Rešitev

Za določitev parametrov regulatorja  $G_r(s)$  moramo najprej določiti prenosno funkcijo reguliranega procesa  $G_p(s)$ :

$$G_p(s) = \frac{\frac{1}{s^2 + 11s + 5}}{1 + \frac{5}{s^2 + 11s + 5}} = \frac{0.1}{(s + 1)(0.1s + 1)}$$

Parametra regulatorja  $K_p$  in  $T_i$  določimo s poenostavljeno kompenzacijsko metodo:

1. Določitev konstant regulatorjev:

Glede na časovni konstanti procesa ( $T_1 = 1$  s,  $T_2 = 0.1$  s) izberemo časovno konstanto integrirnega dela PI regulatorja kot največjo konstanto procesa:

$$T_i = 1 \text{ s}$$

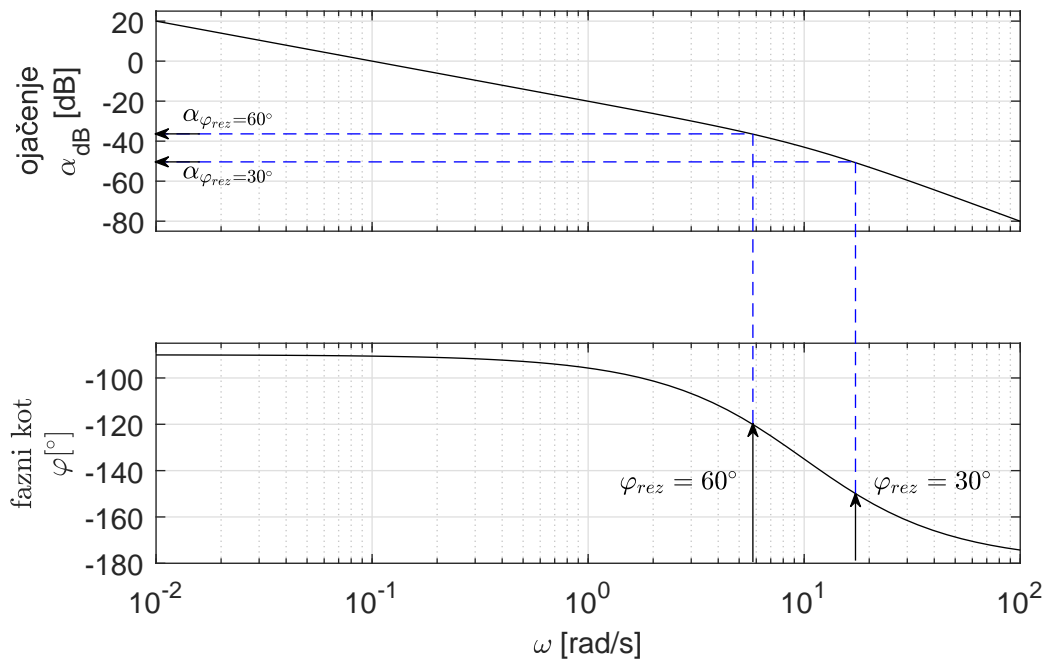
Prenosna funkcija regulatorja z ojačenjem  $K_p = 1$  je:

$$G_{r,K_p=1} = \frac{1s + 1}{1s}$$

2. Izračun odprtozančne prenosne funkcije, ko ima regulator ojačenje  $K_p = 1$ :

$$G_{o,K_p=1} = \frac{1s + 1}{1s} \frac{0.1}{(s + 1)(0.1s + 1)} = \frac{0.1}{s(0.1s + 1)}$$

3. Iz izračunane odprtozančne prenosne funkcije določimo pripadajočo frekvenčno karakteristiko in jo prikazemo v Bodejevem diagramu, kot je ilustirano na sliki 3.21.



Slika 3.21: Frekvenčna karakteristika odprtozančnega sistema s PI regulatorjem z ojačenjem  $K_p = 1$ , naloga 3.8

Iz frekvenčne karakteristike odčitamo amplitudo pri predpisani fazni rezervi:

$$\varphi_{rez} = 60^\circ \Rightarrow \alpha_{\varphi_{rez}=60^\circ} = 0.015$$

Iz odčitane vrednosti amplitudne karakteritike izračunamo ojačenje regulatorja:

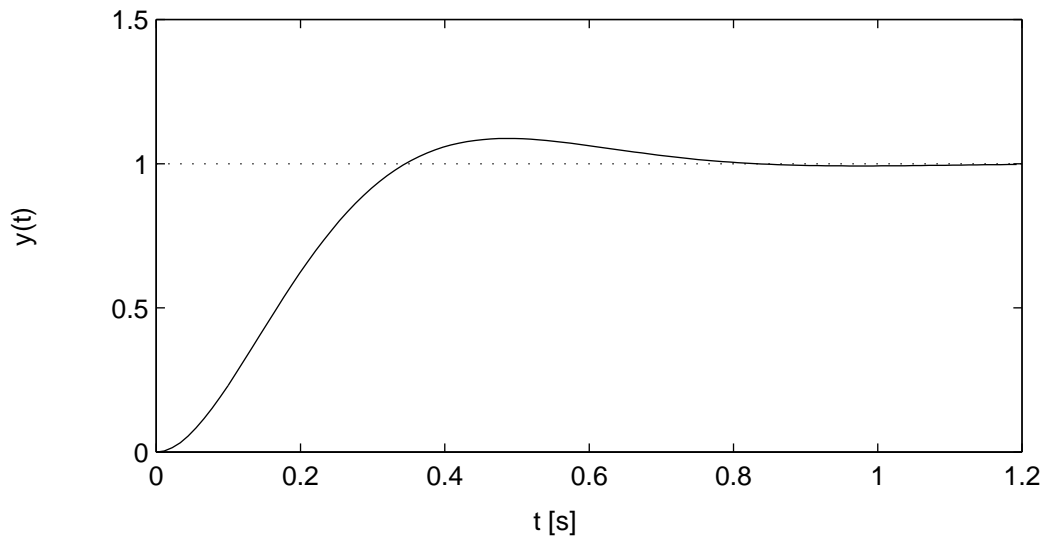
$$\varphi_{rez} = 60^\circ, \alpha_{\varphi_{rez}=60^\circ} = 0.015 \Rightarrow K_p = 66.7$$

Prenosna funkcija regulatorja je:

$$\text{PI regulator: } G_r(s) = 66.7 \frac{s1 + 1}{s1}$$

4. Odziv na stopničasti referenčni signl z amplitudo 1 obravnavanega regulacijskega sistema s tako določenimi parametri regulatorja je prikazan na sliki 3.22.

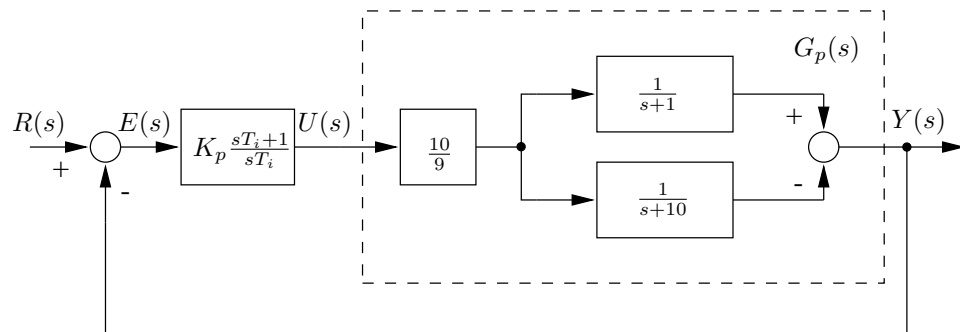




Slika 3.22: Odziv zaprtozančnega regulacijskega sistema iz naloge 3.8 pri uporabi PI regulatorja za fazno rezervo  $\varphi_{rez} = 60^\circ$ , sistem je vzbujan z referenčnim signalom stopničaste oblike in amplitude 1

### Naloga 3.9

Določite parametre PI regulatorja za regulacijski sistem, prikazan na sliki 3.23.



Slika 3.23: Regulacijski sistem iz naloge 3.9

Parametre regulatorja izračunajte za fazno rezervo  $45^\circ$ .

### Rešitev

Za določitev parametrov regulatorja  $G_r(s)$  moramo najprej določiti prenosno funkcijo reguliranega procesa  $G_p(s)$ :

$$G_p(s) = \frac{10}{9} \left( \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+10} \right) = \frac{10}{9} \frac{(s+10) - (s+1)}{(s+1)(s+10)} = \frac{1}{(s+1)(0.1s+1)}$$

Parametra regulatorja  $K_p$  in  $T_i$  določimo s poenostavljeno kompenzacijsko metodo:

1. Določitev konstant regulatorjev

Glede na časovni konstanti sistema ( $T_1 = 1$  s,  $T_2 = 0.1$  s) izberemo konstanto integrirnega dela PI regulatorja kot največjo časovno konstanto procesa:

$$T_i = 1 \text{ s}$$

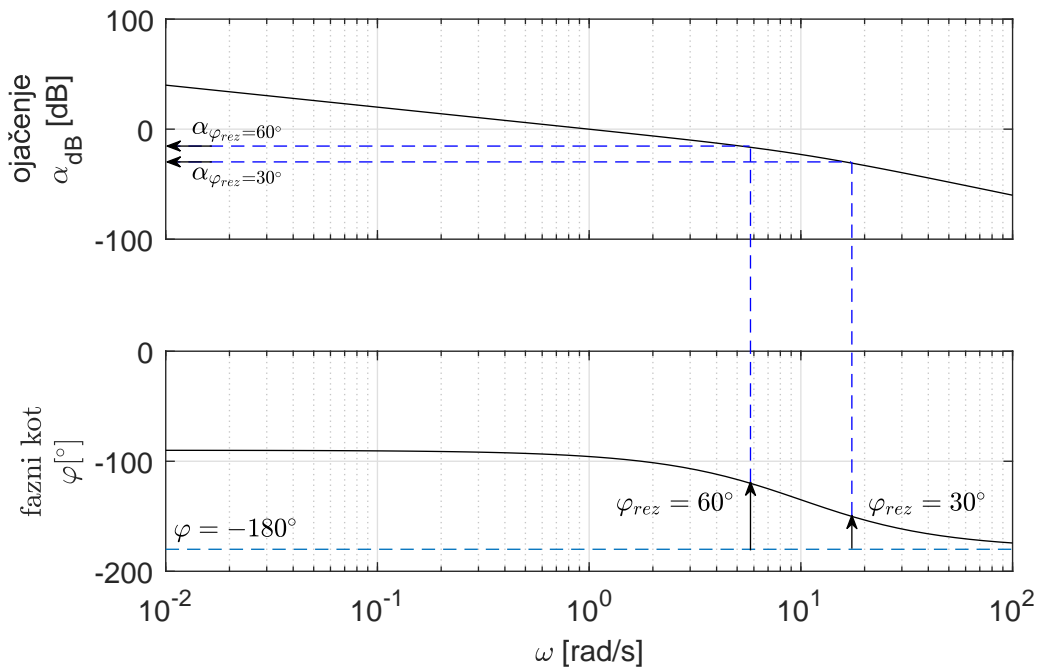
Prenosna funkcija regulatorja z ojačenjem  $K_p = 1$  je:

$$G_{r,K_p=1} = \frac{1s + 1}{1s}$$

2. Izračun odprtozančne prenosne funkcije pri vrednosti ojačenja regulatorja  $K_p = 1$ :

$$G_{o,K_p=1} = \frac{1s + 1}{1s} \frac{1}{(s + 1)(0.1s + 1)} = \frac{0.1}{s(0.1s + 1)}$$

3. Iz izračunane odprtozančne prenosne funkcije izračunamo in narišemo pripadajočo frekvenčno karakteristiko v Bodejevem diagramu, kot prikazujejo slika 3.24.



Slika 3.24: Odprtozančna frekvenčna karakteristika sistema s PI regulatorjem z ojačenjem  $K_p = 1$ , naloga 3.8

Iz frekvenčne karakteristike odčitamo amplitudo pri predpisani fazni rezervi:

$$\varphi_{rez} = 45^\circ \Rightarrow \alpha_{\varphi_{rez}=45^\circ} = 0.0707$$

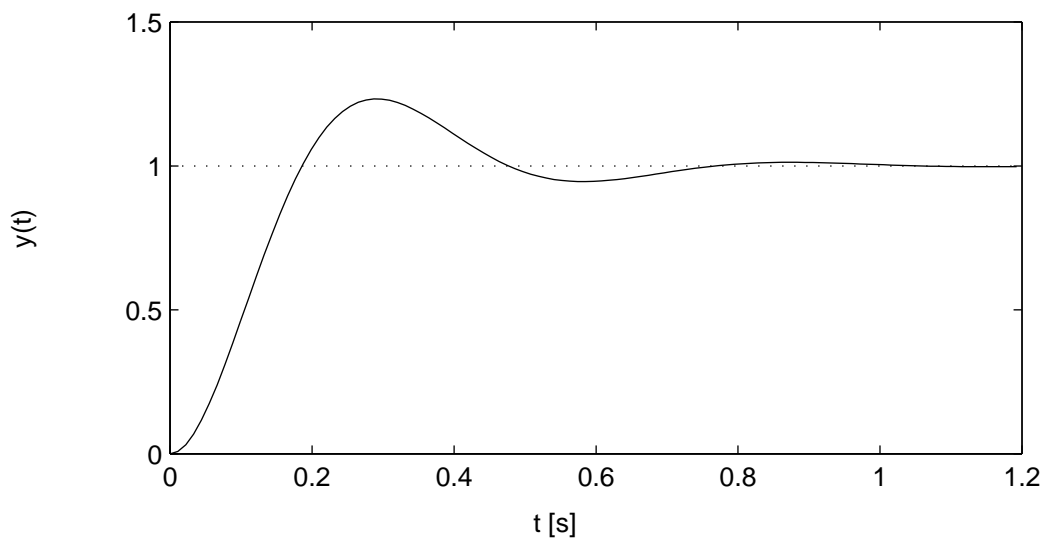
Iz odčitane vrednosti amplitudne karakteritike izračunamo ojačenje regulatorja:

$$\varphi_{rez} = 45^\circ, \alpha_{\varphi_{rez}=60^\circ} = 0.0707 \Rightarrow K_p = 14.14$$

Prenosna funkcija regulatorja je:

$$G_r(s) = 14.14 \frac{s1 + 1}{s1}$$

4. Odziv obranavanega regulacijskega sistema na referenco stopničaste oblike amplitude 1 s tako določenimi parametri regulatorja je prikazan na sliki 3.25.



Slika 3.25: Odziv zaprtozančnega regulacijskega sistema iz naloge 3.9 pri uporabi PI regulatorja za fazno rezervo  $\varphi_{rez} = 45^\circ$ , sistem je vzbujan z referenčnim signalom stopničaste oblike in amplitude 1

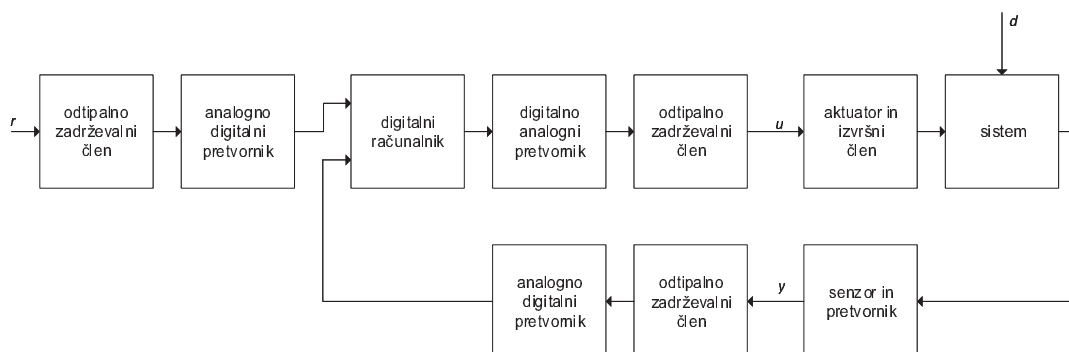


## Poglavje 4

# Diskretna realizacija regulacijskih sistemov

### 4.1 Diskretni regulacijski sistemi in signali

V preteklosti je bila večina regulatorjev realizirana z analognimi elektronskimi vezji, zgrajenimi iz operacijskih ojačevalnikov, uporov, kondenzatorjev in ostalih elektronskih elementov. Danes pa pri realizaciji regulatorjev elektronska vezja vse bolj izpodrivajo digitalni računalniki. Shema diskretnega regulacijskega sistema je prikazana na sliki 4.1:



Slika 4.1: Shema diskretnega regulacijskega sistema

kjer so  $r$ ,  $u$ ,  $y$  in  $d$  označeni referenca, vhod, izhod in motnja.

Diskretni regulacijski sistem sestavljajo [40]-[44]:

- digitalni računalnik, ki na osnovi zaporedij, ki ustrezajo referenčnemu signalu  $r$  in izhodnemu signalu reguliranega procesa  $y$  s pomočjo ustreznega algoritma izračuna ustrezno zaporedje, kateremu mora slediti vhodna veličina procesa  $u$ ;
- odtipalno zadrževalni členi, ki v pravilnem trenutku odtipajo vrednost vhodnega signala in odtipano vrednost zadržijo na svojem izhodu ves časovni interval odtipavanja,
- analogno digitalni pretvornik, ki odtipano napetost pretvori v binarno število; pogrešek, ki nastane zaradi končnega števila bitov binarnega števila in s tem končnega števila možnih nivojev, imenujemo pogrešek kvantizacije;
- digitalno analogni pretvornik, ki digitalizirani signal ponovno pretvori v časovno zvezni napetostni signal.

Diskretni regulacijski sistemi imajo v primerjavi z zveznimi regulacijskimi sistemi, ki so realizirani z analognimi komponentami, mnogo prednosti. Najpomembnejše prednosti so:

- parametre algoritmov diskretnih regulacijskih sistemov lahko nastavimo poljubno natančno,
- parametri algoritmov diskretnih regulacijskih sistemov niso občutljivi na motnje,
- v diskretnih regulacijskih sistemih lahko na enostaven način realiziramo zapletene regulacijske algoritme (adaptivno vodenje, ...)
- diskretne regulacijske sisteme je možno enostavneje povezati z nadrejenimi računalniki (hierarhično vodenje).

Osnovno vprašanje, ki se pojavi pri uporabi diskretnih regulacijskih sistemov je, ali pride pri opisanem postopku pretvorbe zveznega signala v številčno zaporedje do izgube informacij. Zvezni signal namreč vzorčimo samo v določenih trenutkih, vrednosti zveznega signala med temi trenutki vzorčenja ne poznamo, pri kvantizaciji pa dejansko vrednost nadomestimo z najbližjo standardno vrednostjo. Ker je potrebno, da digitalni računalnik, ki izračunava regulacijski algoritem, dobi čim popolnejšo informacijo o regulirani veličini ( $y$ ), moramo poskrbeti za čim manjšo izgubo informacij pri vzorčenju in analogno digitalni pretvorbi (kvantizaciji). Shannonov teorem o vzorčenju pravi, da lahko frekvenčno omejeni signal teoretično rekonstruiramo iz časovno diskretnih vzorcev, če je frekvenca vzorčenja več kot dvakrat višja od najvišje frekvence vzorčenega signala. Vhodni analogni signal zato filtriramo z analognim nizkopasovnim vhodnim filtrom (antialiasing filter), ki zadosti zahtevi po frekvenčni omejenosti vhodnega signala. Pogrešek kvantizacije pa lahko poljubno zmanjšamo s povečanjem števila bitov analogno digitalnega pretvornika. Razločljivost analogno digitalnega pretvornika, t. j. razliko med dvema sosednjima standardnima nivojema, izračunamo z enačbo (4.1):

$$q = \frac{V_{max} - V_{min}}{2^n - 1} \quad (4.1)$$

kjer je  $q$  označena razločljivost,  $n$  število bitov analogno digitalnega pretvornika in  $V_{max}$  in  $V_{min}$  maksimalna in minimalna dovoljena vrednost vhodnega signala analogno digitalnega pretvornika. Maksimalna vrednost pogreška kvantizacije znaša polovico razločljivosti analogno digitalnega pretvornika, standardni odklon pogreška pa izračunamo z enačbo (4.2):

$$\sigma = \frac{q}{2\sqrt{3}} \quad (4.2)$$

Zaključimo lahko, da pri vzorčenju ne izgubimo nobene informacije, če izberemo dovolj veliko frekvenco vzorčenja, z izbiro zadostnega števila bitov analogno digitalnega pretvornika pa lahko zmanjšamo pogrešek kvantizacije na poljubno majhen nivo. V naslednjih poglavjih bomo kvantizacijski pogrešek zanemarili.

#### Naloga 4.1

Analogni signal, ki vsebuje frekvence med 0 in 7 kHz in katerega vrednosti so v območju med -1 V in +1 V želimo vzorčiti z analogno digitalnim pretvornikom. Kakšna mora biti frekvenca vzorčenja in koliko biten mora biti analogno digitalni pretvornik, da bo kvantizacijski pogrešek manjši od 1 mV.

#### Rešitev

Glede na najvišjo frekvenco vhodnega signala mora biti v skladu s Shannonovim teoremom vzorčenja [5] frekvenca vzorčenja več kot dvakratna vrednost najvišje frekvence vhodnega signala, kar znaša v našem primeru več kot 14 kHz. V praksi izberemo raje frekvenco vzorčenja vsaj tri do štirikratno vrednost najvišje frekvence analognega signala (21 do 28 kHz).

Glede na predpisan kvantizacijski pogrešek 1 mV mora biti razločljivost analogno digitalnega pretvornika  $q$  manjša ali enaka 2 mV. Ob poznanem obsegu analognega signala lahko izračunamo potrebno število

bitov analogno digitalnega pretvornika:

$$2^n \geq \frac{V_{max} - V_{min}}{q} + 1 \Rightarrow n = 10$$

### Naloga 4.2

Analogni signal, ki vsebuje frekvence manjše od 10 kHz vzorčimo z 12 bitnim analogno digitalnim pretvornikom. Najmanj koliko pomnilnika potrebujemo za shranitev ene minute analognega signala.

#### Rešitev

Glede na najvišjo frekvenco vhodnega signala mora biti v skladu s Shannonovim teoremom vzorčenja frekvenca vzorčenja več kot dvakratna vrednost najvišje frekvence vhodnega signala, kar znaša v našem primeru več kot 20 kHz. Za shranitev ene minute analognega signala torej potrebujemo:

$$\text{pomnilnik} = 12 \text{ bitov } 60s \cdot 20\,000s^{-1} = 14\,400\,000 \text{ bitov}$$

### Naloga 4.3

Analogna veličina vsebuje frekvence manjše od 1 kHz. Pri meritvi in prenosu analognega signala se pojavi šum v frekvenčnem področju od 500 kHz do 1 MHz. Kakšna naj bo frekvenca vzorčenja takšnega analognega signala?

#### Rešitev

Ker šum ne nosi nobene koristne informacije uporabimo analogni nizkopasovni filter (imenovan tudi antialiasing filter), s pomočjo katerega iz signala odstranimo šumni del frekvenc. Model najenostavnejšega nizkopasovnega filtra je člen 1. reda z ojačenjem  $k = 1$  in časovno konstanto  $T$ , ki jo izberemo glede na zahtevano lomno frekvenco filtra:

$$G(s) = \frac{k}{sT + 1}$$

Ker vsebuje koristni del analognega signala frekvence do 1 kHz, šumni del analognega signala pa frekvence nad 500 kHz, izberemo lomno frekvenco nizkopasovnega filtra v področju med tema frekvencama. Nizkopasovni filter mora čim boljše dušiti šum, zato naj bo njegova lomna frekvenca bližje največji frekvenci koristnega signala. Če izberemo lomno frekvenco nizkopasovnega filtra enako 5 kHz, bo na izhodu nizkopasovnega filtra amplituda signala s frekvenco 500 kHz znašala samo 1 % vhodne amplitude. Za izbrano lomno frekvenco 5 kHz ( $\omega_0 = 31400 \text{ rad s}^{-1}$ ) znaša časovna konstanta člena 1. reda:

$$T = \frac{1}{\omega_0} = \frac{1}{31400} = 31.8 \mu s$$

Na ta način lahko uporabimo analogno digitalni pretvornik, katerega frekvenco vzorčenja izberemo glede na najvišjo koristno frekvenco analognega signala. V skladu s Shannonovim teoremom vzorčenja izberemo frekvenco vzorčenja več kot dvakratno vrednost najvišje frekvence vhodnega signala, kar znaša v našem primeru več kot 2 kHz. V praksi izberemo raje frekvenco vzorčenja tri do štirikratno vrednost najvišje frekvence analognega signala (3 do 4 kHz).

## 4.2 $\mathcal{Z}$ -transformacija

Diskretne signale lahko predstavimo v časovno diskretnem prostoru kot zaporedje števil:

$$f(k) = \{f(0), f(1), f(2), \dots\} \quad (4.3)$$

Podobno, kot smo pri analizi časovno zveznih sistemov uporabili **Laplaceovo transformacijo**, s katero smo originalne časovno zvezne funkcije pretvorili v Laplaceove ali s-transformiranke, uporabimo pri analizi časovno diskretnih sistemov  **$\mathcal{Z}$ -transformacijo**, s pomočjo katere časovno diskretne signale pretvorimo v z-transformiranke. Obe transformaciji nam omogočita, da sisteme opišemo s prenosnimi funkcijami. Praviloma bomo originalne časovno diskretne funkcije oz. zaporedja in njihove pripadajoče z-transformiranke označevali z istima črkama - originalne časovno diskretne funkcije z malimi črkami ( $f(k), g(k), h(k), \dots$ ), transformiranke pa z velikimi tiskanimi črkami ( $F(z), G(z), H(z), \dots$ ).

z-transformiranko zaporedja  $f(k)$  izračunamo z enačbo:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} \quad (4.4)$$

Rezultat  $F(z)$  je v splošnem neskončna vrsta. Za vrednosti  $z$ , za katere je neskončna vrsta konvergentna, lahko zapišemo  $F(z)$  v zaprti ali zaključeni obliki.

Izmed lastnosti  $\mathcal{Z}$ -transformacije sta za našo uporabo najpomembnejši linearnost in izrek o časovnem pomiku v desno:

1.  $\mathcal{Z}$ -transformacija je linearna

$$\mathcal{Z}\{a_1 f_1(k) + a_2 f_2(k)\} = a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z)$$

2. Izrek o časovnem pomiku v desno

Če je

$$\mathcal{Z}\{f(k)\} = F(z),$$

potem velja

$$\mathcal{Z}\{f(k-a)\} = z^{-a} F(z)$$

### Naloga 4.4

Izračunajte z-transformiranko časovno diskretne enotine stopnične funkcije

$$f(k) = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots\}$$

### Rešitev

Uporabimo enačbo (4.4):

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5} + \dots$$

Za vrednosti  $|z^{-1}| < 1$  je dobljena neskončna geometrijska vrsta konvergentna. z-transformiranko časovno diskretne enotine stopnične funkcije lahko zapišemo v zaprti obliki:

$$F(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$



**Naloga 4.5**

Izračunajte z-transformiranko časovno diskretne funkcije

$$f(k) = e^{-akT_0}$$

**Rešitev**

Uporabimo enačbo (4.4):

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT_0} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-aT_0} z^{-1})^k$$

Za vrednosti  $|e^{-aT_0} z^{-1}| < 1$  je dobljena neskončna geometrijska vrsta konvergenta. z-transformiranko časovno diskretne funkcije lahko zapišemo v zaprti obliki:

$$F(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT_0} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT_0}}$$

**Naloga 4.6**

Izračunajte z-transformiranko časovno diskretne funkcije

$$f(k) = k$$

**Rešitev**

Uporabimo enačbo (4.4):

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k} = 0 + 1z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + 5z^{-5} + \dots$$

Rezultat je enak produktu dveh geometrijskih vrst in ga lahko zapišemo v zaprti obliki:

$$F(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{z}{(z - 1)^2}$$

### 4.3 Diferenčna enačba in diskretna prenosna funkcija

Linearni diskretni sistem z enim vhomom  $u(k)$  in enim izhodom  $y(k)$  opišemo z linearno diferenčno enačbo:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + a_3 y(k-3) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + b_3 u(k-3) + \dots + b_m u(k-m) \quad (4.5)$$

Za poznano vhodno funkcijo  $u(k)$  in poznanih prvih  $n$  vrednosti  $y(k)$  izračunamo  $y(k)$  z rekurzivno enačbo:

$$y(k) = \sum_{i=0}^m b_i u(k-i) - \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) \quad (4.6)$$

Če nad diferenčno enačbo (4.5) ob upoštevanju ničelnih začetnih pogojev izvedemo  $\mathcal{Z}$ -transformacijo in uporabimo izrek o premaknitvi v desno, dobimo polinomsko enačbo:

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z) + a_3 z^{-3} Y(z) + \dots + a_n z^{-n} Y(z) = b_0 U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + b_2 z^{-2} U(z) + b_3 z^{-3} U(z) + \dots + b_m z^{-m} U(z) \quad (4.7)$$

Razmerje med  $z$ -transformirankama izhoda in vhoda sistema, opisanega z diferenčno enačbo (4.5), imenujemo diskretna prenosna funkcija. Diskretno prenosno funkcijo označimo z  $G(z)$ :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (4.8)$$

### Naloga 4.7

Za sistem, opisan s spodnjo diferenčno enačbo, izračunajte prvih deset vrednosti izhoda  $y(k)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, 10$ .

$$y(k) + 0.4y(k-1) - 0.15y(k-2) = 1u(k) + 0.5u(k-1) - 0.3u(k-2)$$

za vhodni signal  $u(k) = 1$  za  $k = 1, 2, 3, \dots$  in ničelne začetne vrednosti  $y(0) = y(-1) = u(0) = u(-1) = 0$ .

### Rešitev

Uporabimo enačbo (4.6):

$$\begin{aligned} y(k) &= \sum_{i=0}^2 b_i u(k-i) - \sum_{i=1}^2 a_i y(k-i) \\ y(k) &= 1.0u(k) + 0.5u(k-1) - 0.3u(k-2) - 0.4y(k-1) + 0.15y(k-2) \end{aligned}$$

in izračunamo:

$$\begin{aligned} y(k) &= 1.0u(k) + 0.5u(k-1) - 0.3u(k-2) - 0.4y(k-1) + 0.15y(k-2) \\ y(1) &= 1.0u(1) + 0.5u(0) - 0.3u(-1) - 0.4y(0) + 0.15y(-1) \\ &= 1.0 \cdot 1 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1.0000 \\ y(2) &= 1.0u(2) + 0.5u(1) - 0.3u(0) - 0.4y(1) + 0.15y(0) \\ &= 1.0 \cdot 1 + 0.5 \cdot 1 + 0 - 0.4 \cdot 1 + 0 = 1.1000 \\ y(3) &= 1.0u(3) + 0.5u(2) - 0.3u(1) - 0.4y(2) + 0.15y(1) \\ &= 1 \cdot 1 + 0.5 \cdot 1 - 0.3 \cdot 1 - 0.4 \cdot 1.1 + 0.15 \cdot 1 = 0.9100 \\ y(4) &= 1.0u(4) + 0.5u(3) - 0.3u(2) - 0.4y(3) + 0.15y(2) \\ &= 1.0 \cdot 1 + 0.5 \cdot 1 - 0.3 \cdot 1 - 0.4 \cdot 0.91 + 0.15 \cdot 1.1 = 1.001 \\ y(5) &= 1.0u(5) + 0.5u(4) - 0.3u(3) - 0.4y(4) + 0.15y(3) \\ &= 1.0 \cdot 1 + 0.5 \cdot 1 + 0.3 \cdot 1 - 0.4 \cdot 1.001 + 0.15 \cdot 0.9100 = 0.9361 \\ y(6) &= 1.0u(6) + 0.5u(5) - 0.3u(4) - 0.4y(5) + 0.15y(4) \\ &= 1.0 \cdot 1 + 0.5 \cdot 1 + 0.3 \cdot 1 - 0.4 \cdot 0.9361 + 0.15 \cdot 1.001 = 0.9757 \\ y(7) &= 1.0u(7) + 0.5u(6) - 0.3u(5) - 0.4y(6) + 0.15y(5) \\ &= 1.0 \cdot 1 + 0.5 \cdot 1 + 0.3 \cdot 1 - 0.4 \cdot 0.9757 + 0.15 \cdot 0.9361 = 0.9501 \\ y(8) &= 0.9663 \\ y(9) &= 0.9560 \\ y(10) &= 0.9625 \end{aligned}$$

**Naloga 4.8**

Diskretni sistem je opisan z diskretno prenosno funkcijo:

$$G(z) = \frac{0.01(1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - 1.98z^{-1} + 0.99z^{-2}}$$

Napišite pripadajočo diferenčno enačbo.

**Rešitev**

Pripadajoča diferenčna enačba se glasi:

$$y(k) - 1.984y(k-1) + 0.99y(k-2) = 0.01u(k) + 0.02u(k-1) + 0.01u(k-2)$$

## 4.4 Diskretni ekvivalenti zveznih prenosnih funkcij

### 4.4.1 Uporaba numerične integracije

Najenostavnejše metode za izračun diskretnih ekvivalentov zveznih prenosnih funkcij temeljijo na pretvorbi zvezne prenosne funkcije v diferencialno enačbo in na aproksimativni rešitvi diferencialne enačbe s pomočjo diferenčne enačbe. V odvisnosti od izbrane numerične integracijske metode dobimo različne rešitve. Najbolj uporabna je rešitev, ki temelji na uporabi trapezne enačbe za numerično integracijo. V tem primeru izračunamo diskretno prenosno funkcijo iz zvezne prenosne funkcije enostavno tako, da v zvezni prenosni funkciji kompleksno spremenljivko  $s$  nadomestimo z izrazom:

$$s = \frac{2}{T_0} \frac{z-1}{z+1} \quad (4.9)$$

kjer  $T_0$  označuje čas vzorčenja. Metodo imenujemo tudi **metoda bilinearne transformacije**.

**Naloga 4.9**

S pomočjo metode bilinearne transformacije izračunajte diskretni ekvivalent zvezne prenosne funkcije:

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

Frekvenca vzorčenja znaša  $f_v = 10$  Hz

**Rešitev**

Diskretno prenosno funkcijo dobimo tako, da v zvezni prenosni funkciji  $G(s)$  kompleksno spremenljivko  $s$  nadomestimo z izrazom iz enačbe (4.9):

$$s = \frac{2}{T_0} \frac{z-1}{z+1} = 20 \frac{z-1}{z+1}$$

Po vstavljanju v zvezno prenosno funkcijo dobimo:

$$G(z) = \frac{2}{\left(20 \frac{z-1}{z+1} + 1\right) \left(20 \frac{z-1}{z+1} + 2\right)} = \frac{2(z+1)^2}{(20z - 20 + z + 1)(20z - 20 + 2z + 2)} =$$

$$= \frac{2(z+1)^2}{(21z-19)(22z-18)} = \frac{2z^2+4z+2}{462z^2-796z+342} = \frac{0.00433(1+2z^{-1}+z^{-2})}{1-1.72294z^{-1}+0.74026z^{-2}}$$


---

**Naloga 4.10**

S pomočjo metode bilinearne transformacije izračunajte diskretni ekvivalent zvezne prenosne funkcije:

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

Frekvenca vzorčenja znaša  $f_v = 100$  Hz

**Rešitev**

Diskretno prenosno funkcijo izračunamo s pomočjo enačbe (4.9):

$$G(z) = \frac{0.0000433(1+2z^{-1}+z^{-2})}{1-1.9702z^{-1}+0.9704z^{-2}}$$


---

**Naloga 4.11**

S pomočjo metode bilinearne transformacije izračunajte diskretni ekvivalent integratorja:

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

Frekvenca vzorčenja znaša  $f_v = 10$  Hz

**Rešitev**

Diskretno prenosno funkcijo izračunamo s pomočjo enačbe (4.9):

$$G(z) = \frac{0.05+0.05z^{-1}}{1-z^{-1}}$$


---

**Naloga 4.12**

S pomočjo metode bilinearne transformacije izračunajte diskretni ekvivalent člena 1. reda:

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

Frekvenca vzorčenja znaša  $f_v = 10$  Hz

**Rešitev**

Diskretno prenosno funkcijo izračunamo s pomočjo enačbe (4.9):

$$G(z) = \frac{0.0476 + 0.0476z^{-1}}{1 - 0.9048z^{-1}}$$


---

**4.4.2 Metoda stopnične invariance**

Pri izračunu diskretnega ekvivalenta zvezne prenosne funkcije s pomočjo metode stopnične invariance izhajamo iz izhodišča, da naj bo odziv diskretnega sistema na stopnični vhodni signal enak odzivu zveznega sistema na stopnični vhodni signal v trenutkih vzorčenja. V tem primeru izračunamo diskretno prenosno funkcijo s pomočjo enačbe (4.10):

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{G(s)}{s} \right] \right\} \quad (4.10)$$

kjer  $\mathcal{Z}$  označuje  $\mathcal{Z}$ -transformacijo originalne časovne funkcije, ki jo izvedemo s pomočjo tabele A.2 in  $\mathcal{L}^{-1}$  označuje inverzno Laplaceovo transformacijo ulomljene racionalne funkcije  $\frac{G(s)}{s}$ , ki jo izvedemo s pomočjo tabele A.1.

---

**Naloga 4.13**

S pomočjo metode stopnične invariance izračunajte diskretni ekvivalent zvezne prenosne funkcije:

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

Frekvenca vzorčenja znaša  $f_v = 10$  Hz

**Rešitev**

Diskretno prenosno funkcijo izračunamo s pomočjo enačbe (4.10). Najprej izračunamo inverzno Laplaceovo transformiranko ulomljene racionalne funkcije  $\frac{G(s)}{s}$ :

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} \Rightarrow \text{tabela A.1} \Rightarrow 1 - 2e^{-t} + 1e^{-2t}$$

Dobljeni funkciji izračunamo s pomočjo tabele A.2 ustrezno  $z$ -transformiranko:

$$1 - 2e^{-t} + 1e^{-2t} \Rightarrow \text{tabela A.2} \Rightarrow \frac{z}{z-1} - \frac{2z}{z-e^{-1T_0}} + \frac{z}{z-e^{-2T_0}}$$

V dobljen izraz vstavimo ustrezno vrednost časa vzorčenja  $T_0 = \frac{1}{f_v} = 0.1$  s in ga preoblikujemo:

$$\frac{z}{z-1} - \frac{2z}{z-e^{-0.1}} + \frac{z}{z-e^{-0.2}} = \frac{z}{z-1} - \frac{2z}{z-0.9048} + \frac{z}{z-0.8187} =$$

$$\frac{0.00906z^2 + 0.00819z}{(z-1)(z^2 - 1.72353z + 0.74075)}$$

Dobljen izraz pomnožimo z  $\frac{z-1}{z}$  in zapišemo v pravilni obliki:

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \frac{0.00906z^2 + 0.00819z}{(z-1)(z^2 - 1.72353z + 0.74075)} = \frac{0.00906z^{-1} + 0.00819z^{-2}}{1 - 1.72353z^{-1} + 0.74075z^{-2}}$$


---

#### Naloga 4.14

S pomočjo metode stopnične invariance izračunajte diskretni ekvivalent zvezne prenosne funkcije:

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

Frekvenca vzorčenja znaša  $f_v = 100$  Hz

#### Rešitev

Diskretno prenosno funkcijo izračunamo s pomočjo enačbe (4.10):

$$G(z) = \frac{0.000099(1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - 1.9702z^{-1} + 0.9704z^{-2}}$$


---

#### Naloga 4.15

S pomočjo metode stopnične invariance izračunajte diskretni ekvivalent integratorja:

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

Frekvenca vzorčenja znaša  $f_v = 10$  Hz

#### Rešitev

Diskretno prenosno funkcijo izračunamo s pomočjo enačbe (4.10):

$$G(z) = \frac{0.1z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$


---

#### Naloga 4.16

S pomočjo metode stopnične invariance izračunajte diskretni ekvivalent člena 1. reda:

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

Frekvenca vzorčenja znaša  $f_v = 10$  Hz

#### Rešitev

Diskretno prenosno funkcijo izračunamo s pomočjo enačbe (4.10):

$$G(z) = \frac{0.0952z^{-1}}{1 - 0.9048z^{-1}}$$


---

# Literatura

- [1] J. Ritonja. *Regulacijska tehnika, zbirka vaj*. Založba FERi, Maribor, 2004.
- [2] D. Dolinar. *Dinamika linearnih sistemov in regulacije*. Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko, Maribor, 1997.
- [3] R. Karba, G. Karer, J. Kocijan, T. Bajd, M. Žagar Karer. *Terminološki slovar avtomatike*. Založba ZRC, Ljubljana, 2014.
- [4] P. Šega. *Regulacija in sistemi*. Založba FER, Ljubljana, 1988.
- [5] B. Zupančič. *Zvezni regulacijski sistemi I del*. Založba FER, Ljubljana, 1995.
- [6] B. Zupančič. *Zvezni regulacijski sistemi II del*. Založba FER, Ljubljana, 1995.
- [7] Cajhen. *Regulacije*. FER, Ljubljana, 1987.
- [8] C. Landgraf, G. Schneider. *Elemente der Regelungstechnik*. Springer Verlag, Berlin, 1970.
- [9] R. C. Dorf, R. H. Bishop. *Modern Control Systems*. Addison Wasley, New York, 1995.
- [10] J. Schwarzenbach, K. F. Gill. *System Modelling and Control*. Edward Arnold, London, 1984.
- [11] O. Foellinger. *Regelungstechnik*. Huethig Buch Verlag, Heidelberg, 1992.
- [12] N. Munro. *Modern Approaches to Control System Design*. Peter Peregrinus - IEEE, New York, 1979.
- [13] N. S. Nise. *Control Systems Engineering - International Student Version*. John Wiley and Sons, Asia, 2008.
- [14] S. M. Shinnars. *Modern Control System Theory and Design*. John Wiley and Sons, New York, 1998.
- [15] R. Isermann. *Identifikacija dinamičnih sistemov, 1. del*. FER, Ljubljana, 1986.
- [16] C. Becker, L. Litz, G. Siffling. *Regelungstechnik Uebungsbuch*. Huethig, Heidelberg, 1993
- [17] L. Rusov. *Mehanika - Kinematika*. Naučna knjiga, Beograd, 1988.
- [18] L. Rusov. *Mehanika - Dinamika*. Naučna knjiga, Beograd, 1988.
- [19] A. Kuhelj ml. *Mehanika - Dinamika*. FS, Ljubljana, 1998.
- [20] M. Muršič. *Osnove tehniške mehanike 1 - Statika*. Slovensko društvo za mehaniko, Ljubljana, 1993.
- [21] M. Muršič. *Osnove tehniške mehanike 3 - Dinamika*. Slovensko društvo za mehaniko, Ljubljana, 1991.
- [22] J. Stropnik. *Kinetika - Zbirka nalog z rešitvami, 3. izdaja*. FS, Ljubljana, 1990.
- [23] M. Oblak, J. Avsec, I. Gubenšek. *Dinamika strojev*. FS, Maribor, 2004.

- [24] M. Oblak. *Rešene naloge iz dinamike*. FS, Maribor, 1999.
- [25] M. Oblak. *Rešene naloge iz kinematike*. FS, Maribor, 2001.
- [26] J. Vukovic, M. Simonovic, A. Obradovic, S. Markovic. *Zbirka zadataka iz dinamike sistema*. Univerzitet u Beogradu, Neograd, 1999.
- [27] S. Jecic. *Mehanika II - Kinematika i dinamika*. Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.
- [28] T. R. Kane. *Dynamics: Theory and Applications*. McGraw-Hill, New York, 1985.
- [29] G. R. Fowles, G. L. Cassiday. *Analytical Mechanics, Fifth Edition*. Saunders College Publishing, Fort Worth, 1993.
- [30] J. L. Meriam, L. G. Kraige. *Engineering Mecganics - Dynamics*. John Wiley and Sons, New York, 1998.
- [31] D. Rowell, D. N. Wormley. *System Dynamics - An Introduction*. Pearson Education-Prentice Hall, New Jersey, 1997.
- [32] J. J. D'Azzo, C. H. Houpis. *Linear Control System Analysis and Design*. McGraw-Hill, New York, 1995.
- [33] Peter V. O'Neil. *Advanced Engineering Mathematics, Fourth Edition*. PWS Publishing Company, Birmingham, 1995.
- [34] E. D. Sontag. *Mathematical Control Theory*. Springer Verlag, New York, 1990.
- [35] R. Zurmuehl, S. Falk. *Matrizen und Ihre Anwendungen*. Springer Verlag, Berlin, 1984.
- [36] P. C. Mueller. *Stabilitaet und Matrizen*. Springer Verlag, Berlin, 1977.
- [37] J. Ziegler, N. B. Nichols. *Optimum Settings for Automatic Controllers*. Trans. ASME, Vol. 64, No. 1, pp. 759-768, 1942.
- [38] K. J. Astrom, T. Hagglund. *Automatic Tuning of PID Controllers*. Instrument Society of America, 1988.
- [39] K. Astrom, T. Hagglund. *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning, 2nd Edition*. Instrument Society of America, 1995.
- [40] D. Matko, B. Zupančič. *Računalniški sistemi v vodenju procesov*. Založba FER, Ljubljana, 1987.
- [41] D. Matko. *Diskretni regulacijski sistemi*. FE, Ljubljana, 1984.
- [42] R. Isermann. *Digital Control Systems*. Springer Verlag, Berlin, 1981.
- [43] L. Gyergyek. *Signali in statistične metode*. FE, Ljubljana, 1987.
- [44] P. B. Deshpande, R. H. Ash. *Computer Process Control, With Advanced Control Applications*. Instrument Society of America, 1988.
- [45] F. Brešar, T. Zorič. *Laplaceova transformacija*. VTŠ, Maribor, 1983.
- [46] O. Foellinger. *Laplace- und Fourier-Transformation*. Huethig Verlag, Berlin, 1986.



## Dodatek A

# Laplaceova transformacija

Laplaceova transformacija predstavlja zmogljivo orodje za reševanje diferencialnih enačb [45],[46]. Osnovni lastnosti, zaradi katerih je Laplaceova transformacija tako uporabna, sta:

- **linearnost** Laplaceove transformacije - sestavljene funkcije lahko transformiramo tako, da uporabimo tabele z Laplaceovimi transformirankami elementarnih funkcij in
- **izrek o odvodu** originalne funkcije - diferencialne enačbe s pomočjo Laplaceove transformacije pretvorimo v algebrske enačbe.

### A.1 Direktna Laplaceova transformacija

Funkcije, nad katerimi lahko izvedemo direktno Laplaceovo transformacijo, imenujemo **originalne funkcije** ali **originali**. Definicija A.1 določa potrebne in zadostne pogoje za to, da lahko določeno funkcijo uvrstimo v množico originalnih funkcij.

#### Definicija A.1

Kompleksna funkcija  $t \mapsto f(t)$ , kjer je  $t$  realna spremenljivka, se imenuje originalna funkcija, če izpolnjuje naslednje pogoje:

- funkcija  $t \mapsto f(t)$  je zvezna na vsej realni osi razen morda v izoliranih točkah, v katerih ima nezveznosti prve vrste, na vsakem končnem intervalu osi  $t$  sme biti kvečjemu končno mnogo takšnih točk,
- na negativnem delu realne osi je funkcija  $t \mapsto f(t)$  identična nič:  $t < 0 \Rightarrow f(t) \equiv 0$ ,
- funkcija  $t \mapsto f(t)$  ima kvečjemu eksponentno rast, t. j. obstajata takšni konstanti  $0 < M < \infty$  in  $0 < m < \infty$ , da velja za  $\forall t \geq 0$ :  $|f(t)| < Me^{mt}$ .

Nad vsako originalno funkcijo lahko izvedemo Laplaceovo transformacijo s pomočjo definicije A.2.

#### Definicija A.2

Naj bo funkcija  $t \mapsto f(t)$  original in  $s = \alpha + j\beta$  kompleksna spremenljivka. Kompleksna funkcija  $s \mapsto F(s)$ , definirana z enačbo

$$F(s) := \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \tag{A.1}$$

se imenuje **Laplaceova transformiranka** funkcije  $f(t)$ .

Če je funkcija  $t \mapsto f(t)$  originalna funkcija, ki je na območju  $t \geq 0$  periodična s periodo  $T$ , potem njeno Laplaceovo transformiranko izračunamo z enačbo:

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t)e^{-st} dt \quad (\text{A.2})$$

### Dogovor A.1

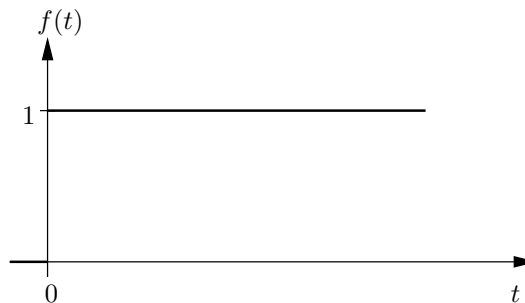
- Praviloma bomo originalne funkcije in pripadajoče Laplaceove transformiranke označevali z istima črkama - originalne funkcije z malimi tiskanimi črkami ( $f(t), g(t), h(t), \dots$ ), Laplaceove transformiranke pa z velikimi tiskanimi črkami ( $F(s), G(s), H(s), \dots$ ). Originalno funkcijo in pripadajočo Laplaceovo transformiranko imenujemo tudi Laplaceov par.
- Enačba A.1 se imenuje **direktna Laplaceova transformacija** in jo zapišemo krajše  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ .
- V tehniki množici originalnih funkcij pravimo tudi množica časovnih funkcij. Laplaceova transformacija torej preslikuje funkcije iz časovnega področja v funkcije v Laplaceovem področju.

V nadaljevanju bomo za opis časovnih funkcij potrebovali **enotino stopnično funkcijo**  $\sigma(t)$ , definirano z definicijo A.3.

### Definicija A.3

Enotina stopnična funkcija  $\sigma(t)$  je definirana z enačbo (A.3) in prikazana na sliki A.1:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$



Slika A.1: Enotina stopnična funkcija  $\sigma(t)$

---

### Naloga A.1

S pomočjo enačb (A.1) in (A.2) določimo Laplaceove transformiranke naslednjih funkcij:

$$\begin{array}{llll} f(t) = \sigma(t), & f(t) = \sigma(t-a); a > 0, & f(t) = t & f(t) = t\sigma(t), \\ f(t) = t^2\sigma(t), & f(t) = t^3\sigma(t) & f(t) = e^{-at}\sigma(t), & f(t) = te^{-at}\sigma(t), \\ f(t) = \sigma(t)\sin\omega t, & f(t) = \sigma(t)\cos\omega t, & f(t) = \sigma(t)e^{-at}\sin\omega t, & f(t) = \sigma(t)e^{-at}\cos\omega t, \end{array}$$

Predhodno preverimo, če so funkcije  $f(t)$  originalne funkcije.

### Rešitev

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(t) \\ F(s) &= \int_0^{\infty} 1e^{-st} dt = \left[ \frac{e^{-st}}{(-s)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(t-a), \quad a > 0 \\ F(s) &= \int_a^\infty 1e^{-st} dt = \left[ \frac{e^{-st}}{(-s)} \right]_a^\infty = \frac{e^{-as}}{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= t \\ f(t) &= t \text{ ni originalna funkcija (definicija A.1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= t\sigma(t) \\ F(s) &= \int_0^\infty te^{-st} dt = \text{Br. 448} = \left[ \frac{e^{-st}}{(-s)^2} (-st - 1) \right]_0^\infty = \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2\sigma(t) \\ F(s) &= \int_0^\infty t^2 e^{-st} dt = \text{Br. 449} = \left[ e^{-st} \left( \frac{t^2}{(-s)} - \frac{2t}{(-s)^2} + \frac{2}{(-s)^3} \right) \right]_0^\infty = \frac{2}{s^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= t^3\sigma(t) \\ F(s) &= \int_0^\infty t^3 e^{-st} dt = \text{Br. 450} = \left[ e^{-st} \left( \frac{t^3}{(-s)} - \frac{3t^2}{(-s)^2} + \frac{6t}{(-s)^3} - \frac{6}{(-s)^4} \right) \right]_0^\infty = \frac{6}{s^4} = \frac{3!}{s^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{-at}\sigma(t) \\ F(s) &= \int_0^\infty e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(a+s)t} dt = \left[ \frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)} \right]_0^\infty = \frac{1}{s+a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= te^{-at}\sigma(t) \\ F(s) &= \int_0^\infty te^{-at} e^{-st} dt = \int_0^\infty te^{-(a+s)t} dt = \text{Br. 448} = \left[ \frac{e^{-(a+s)t}}{(-a-s)^2} ((-a-s)t - 1) \right]_0^\infty = \frac{1}{(s+a)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(t) \sin \omega t \\ F(s) &= \int_0^\infty \sin \omega t e^{-st} dt = \int_0^\infty \sin \omega t e^{-st} dt = \text{Br. 459} = \left[ \frac{e^{-st}}{(-s)^2 + \omega^2} (-s \sin \omega t - \omega \cos \omega t) \right]_0^\infty \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(t) \cos \omega t \\ F(s) &= \int_0^\infty \cos \omega t e^{-st} dt = \int_0^\infty \cos \omega t e^{-st} dt = \text{Br. 460} = \left[ \frac{e^{-st}}{(-s)^2 + \omega^2} (-s \cos \omega t + \omega \sin \omega t) \right]_0^\infty \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(t) e^{-at} \sin \omega t \\ F(s) &= \int_0^\infty e^{-at} \sin \omega t e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-a-s} t \sin \omega t dt = \text{Br. 459} \\ &= \left[ \frac{e^{-(a+s)t}}{(-s)^2 + \omega^2} ((-a-s) \sin \omega t - \omega \cos \omega t) \right]_0^\infty = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

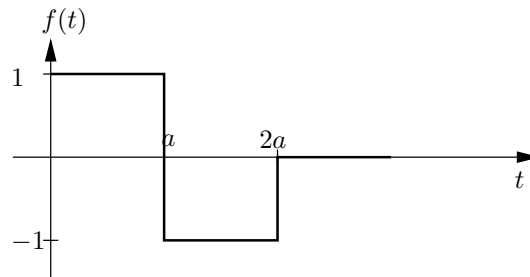
$$\begin{aligned} f(t) &= \sigma(t) e^{-at} \cos \omega t \\ F(s) &= \int_0^\infty e^{-at} \cos \omega t e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-a-s} t \cos \omega t dt = \text{Br. 460} \\ &= \left[ \frac{e^{-(a+s)t}}{(-s)^2 + \omega^2} ((-a-s) \cos \omega t - \omega \sin \omega t) \right]_0^\infty = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

---

Podobno bi lahko nadaljevali za ostale pogosto uporabljane funkcije. Na osnovi tako dobljenih izračunov tvorimo tabelo parov originalnih funkcij in njihovih Laplaceovih transformirank (dodatek A, tabela B.1).

**Naloga A.2**

S pomočjo enačbe (A.1) določimo Laplaceovo transformiranko grafično predstavljene funkcije:



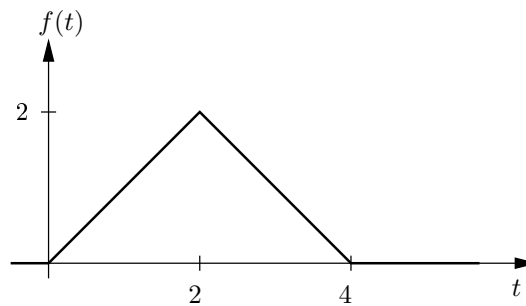
Slika A.2: Časovni potek originalne funkcije  $f(t)$ , naloga A.2

**Rešitev**

$$F(s) = \int_0^a 1e^{-st} dt + \int_a^{2a} (-1)e^{-st} dt = \frac{1}{s}(1 - e^{-as})^2$$

**Naloga A.3**

S pomočjo enačbe (A.1) določimo Laplaceovo transformiranko grafično predstavljene funkcije:



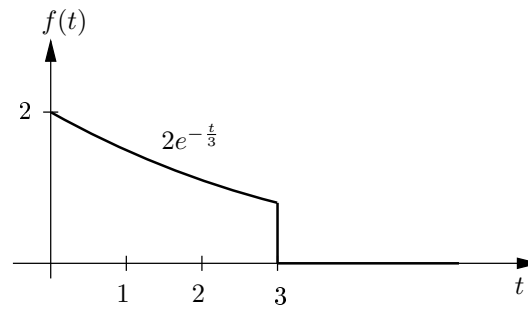
Slika A.3: Časovni potek originalne funkcije  $f(t)$ , naloga A.3

**Rešitev**

$$F(s) = \int_0^2 te^{-st} dt + \int_2^4 (4-t)e^{-st} dt = \frac{1}{s^2}(1 - e^{-2s})^2$$

**Naloga A.4**

S pomočjo enačbe (A.1) določimo Laplaceovo transformiranko grafično predstavljene funkcije:

Slika A.4: Časovni potek originalne funkcije  $f(t)$ , naloga A.4**Rešitev**

$$F(s) = \int_0^3 2e^{-\frac{t}{3}} e^{-st} dt = \frac{6}{3s+1} [1 - e^{-(3s+1)}]$$

**Naloga A.5**

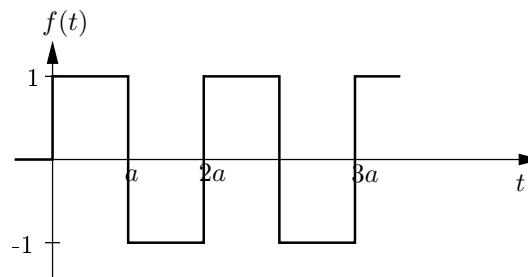
S pomočjo enačbe (A.2) določimo ustrezno Laplaceovo transformiranko originalne funkcije, predstavljene z opisom:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < a \\ -1 & a \leq t < 2a \end{cases}$$

Za  $t \geq 0$  velja:  $f(t + 2a) = f(t)$

**Rešitev**

Funkcija  $f(t)$  je periodična in jo grafično predstavimo na sliki A.5:

Slika A.5: Časovni potek originalne funkcije  $f(t)$ , naloga A.5

Uporabimo enačbo (A.2) in dobimo:

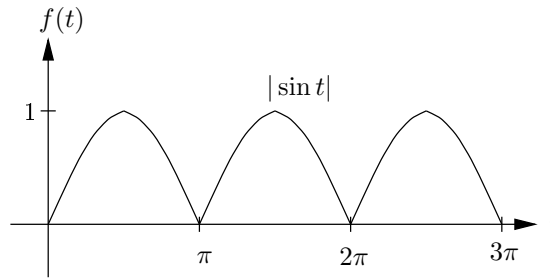
$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-2as}} \left[ \int_0^a 1e^{-st} dt + \int_a^{2a} (-1)e^{-st} dt \right] = \frac{1}{s(1-e^{-2as})} (1 - e^{-as})^2$$

**Naloga A.6**

S pomočjo enačbe (A.2) določimo ustrezno Laplaceovo transformiranko originalne funkcije, predstavljene z opisom:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ |\sin t| & t \geq 0 \end{cases}$$

Za  $t \geq 0$  velja:  $f(t + \pi) = f(t)$



Slika A.6: Časovni potek originalne funkcije  $f(t)$ , naloga A.6

### Rešitev

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \int_0^\pi \sin t e^{-st} dt = \frac{1+e^{-\pi s}}{(1+s^2)(1-e^{-s\pi})}$$

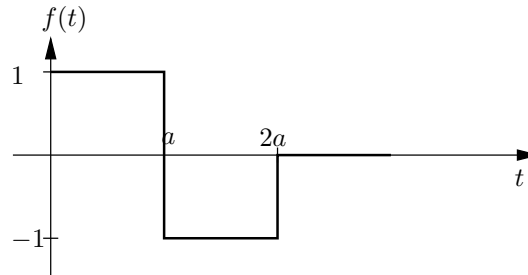
## A.2 Lastnosti Laplaceove transformacije

Poznavanje lastnosti Laplaceove transformacije nam velikokrat olajša njeno uporabo. Naštejmo samo najosnovnejše lastnosti.

- Laplaceova transformacija je linearna  
 $\mathcal{L}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$
- Izrek o podobnosti  
 Če je  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , potem velja  $\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
- Izrek o zakasnitvi (paralelni pomik originala)  
 Če je  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , potem velja  $\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-as} F(s)$
- Izrek o dušenju (paralelni pomik transformiranke)  
 Če je  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , potem velja  $\mathcal{L}\{e^{-at} f(t)\} = F(a+s)$
- Izrek o odvodu originalne funkcije  
 Če je  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , potem velja  $\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0)$   
 in podobno za odvode višje stopnje:  
 $\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right\} = s^2 F(s) - s f(0) - \left.\frac{df(t)}{dt}\right|_0$   
 $\mathcal{L}\left\{\frac{d^3 f(t)}{dt^3}\right\} = s^3 F(s) - s^2 f(0) - s \left.\frac{df(t)}{dt}\right|_0 - \left.\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right|_0$   
 $\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \left.\frac{df(t)}{dt}\right|_0 \dots - s \left.\frac{d^{(n-2)} f(t)}{dt^{(n-2)}}\right|_0 - \left.\frac{d^{(n-1)} f(t)}{dt^{(n-1)}}\right|_0$
- Izrek o integralu originalne funkcije  
 Če je  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , potem velja  $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} F(s)$
- Izrek o začetni vrednosti  
 Če je  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , potem velja  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
- Izrek o končni vrednosti  
 Če je  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , potem velja  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$  če limita obstaja.

**Naloga A.7**

S pomočjo izreka o zakasnitvi originalne funkcije določimo Laplaceovo transformiranko grafično predstavljene funkcije (slika A.7):



Slika A.7: Časovni potek originalne funkcije  $f(t)$ , naloga A.7

**Rešitev**

Funkcijo  $f(t)$  lahko zapišemo kot vsoto treh stopničnih funkcij:

$$f(t) = \sigma(t) - 2\sigma(t - a) + \sigma(t - 2a)$$

Ker je Laplaceova transformacija linearna, transformiramo vsako funkcijo posebej, nato pa dobljene transformiranke seštejemo:

$$F(s) = \frac{1}{s} - 2\frac{1}{s}e^{-as} + \frac{1}{s}e^{-2as} = \frac{1}{s}(1 - e^{-as})^2$$

**A.3 Inverzna Laplaceova transformacija**

Pretvorbo Laplaceove transformiranke  $F(s)$  v originalno funkcijo  $f(t)$  izvedemo s pomočjo enačbe:

$$f(t) := \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (\text{A.4})$$

Inverzna Laplaceova transformacija je računsko zahtevnejša kot direktna Laplaceova transformacija, zato za izračun originalne funkcije praviloma uporabljamo tabelo Laplaceovih parov (dodatek A, tabela B.1).

Laplaceova transformiranka je v splošnem ulomljena racionalna funkcija:

$$F(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (\text{A.5})$$

Za pretvorbo Laplaceove transformiranke v originalno funkcijo s pomočjo uporabe tabele Laplaceovih parov je potrebno zaradi omejenega števila Laplaceovih parov zapisati Laplaceovo transformiranko v obliki vsote parcialnih ulomkov. Glede na korene imenovalca ulomljene racionalne funkcije ločimo štiri nastavke za razstavitev enačbe (A.5) v parcialne ulomke.

1. koreni imenovalca:  $s_1, s_2, \dots, s_n$  so realni in različni, npr.:

$$F(s) = \frac{b_1 s + b_0}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{A}{s-s_1} + \frac{B}{s-s_2}$$

2. koreni imenovalca:  $s_1, s_2, \dots, s_n$  so realni in večkratni, npr.:

$$F(s) = \frac{b_1 s + b_0}{(s-s_1)^2 (s-s_2)^3} = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{(s-s_1)^2} + \frac{B_1}{s-s_2} + \frac{B_2}{(s-s_2)^2} + \frac{B_3}{(s-s_2)^3}$$

3. koreni imenovalca:  $s_1, s_2, \dots, s_n$  so kompleksni in različni, npr.:

$$F(s) = \frac{b_1 s + b_0}{(s^2 + c_1 s + c_0)(s^2 + d_1 s + d_0)} = \frac{As + B}{s^2 + c_1 s + c_0} + \frac{Cs + D}{s^2 + d_1 s + d_0}$$

4. koreni imenovalca:  $s_1, s_2, \dots, s_n$  so kompleksni in večkratni, npr.:

$$F(s) = \frac{b_1 s + b_0}{(s^2 + c_1 s + c_0)^2 (s^2 + d_1 s + d_0)^3} = \frac{A_1 s + B_1}{s^2 + c_1 s + c_0} + \frac{A_2 s + B_2}{(s^2 + c_1 s + c_0)^2} + \frac{C_1 s + D_1}{s^2 + d_1 s + d_0} + \frac{C_2 s + D_2}{(s^2 + d_1 s + d_0)^2} + \frac{C_3 s + D_3}{(s^2 + d_1 s + d_0)^3}$$

### Naloga A.8

Izračunajmo originalno funkcijo Laplaceove transformiranke  $F(s)$ :

$$F(s) = \frac{7}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

### Rešitev

Laplaceovo transformiranko razstavimo v parcialne ulomke:

$$F(s) = \frac{7}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{7}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$\frac{7}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3} \quad (***)$$

Koeficiente  $A$ ,  $B$  in  $C$  najhitreje določimo s pomočjo residuumov. Koeficient  $A$  izračunamo tako, da enačbo (\*\*\*) pomnožimo z izrazom, ki je v imenovalcu ulomka, katerega števec je koeficient  $A$  (v našem primeru  $(s+1)$ ), nato pa v tako dobljeno enačbo vstavimo za  $s$  vrednost pola ustreznega ulomka (v našem primeru  $s = -1$ ). Na podoben način določimo tudi koeficienta  $B$  in  $C$ .

- $(s+1)(***) \Rightarrow \frac{7(s+1)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A(s+1)}{s+1} + \frac{B(s+1)}{s+2} + \frac{C(s+1)}{s+3}$   
 $\Rightarrow \frac{7}{(s+2)(s+3)} = A + \frac{B(s+1)}{s+2} + \frac{C(s+1)}{s+3} \Rightarrow$  vstavimo:  $s = -1 \Rightarrow A = 3.5$
- $(s+2)(***) \Rightarrow \frac{7(s+2)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A(s+2)}{s+1} + \frac{B(s+2)}{s+2} + \frac{C(s+2)}{s+3}$   
 $\Rightarrow \frac{7}{(s+1)(s+3)} = \frac{A(s+2)}{s+1} + B + \frac{C(s+2)}{s+3} \Rightarrow$  vstavimo:  $s = -2 \Rightarrow B = -7$
- $(s+3)(***) \Rightarrow \frac{7(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A(s+3)}{s+1} + \frac{B(s+3)}{s+2} + \frac{C(s+3)}{s+3}$   
 $\Rightarrow \frac{7}{(s+1)(s+2)} = \frac{A(s+3)}{s+1} + \frac{B(s+3)}{s+2} + C \Rightarrow$  vstavimo:  $s = -3 \Rightarrow C = 3.5$

$$F(s) = \frac{3.5}{s+1} + \frac{-7}{s+2} + \frac{3.5}{s+3}$$

Uporabimo tabelo Laplaceovih parov (dodatek A, tabela B.1) in dobimo:

$$f(t) = [3.5e^{-1t} - 7e^{-2t} + 3.5e^{-3t}] \sigma(t)$$

### Naloga A.9

Izračunajmo originalno funkcijo Laplaceove transformiranke  $F(s)$ :

$$F(s) = \frac{s+3}{s^3 + 3s^2 - 28s}$$

### Rešitev

Laplaceovo transformiranko razstavimo v parcialne ulomke:

$$F(s) = \frac{s+3}{s^3 + 3s^2 - 28s} = \frac{s+3}{s(s+7)(s-4)}$$

$$\frac{s+3}{s(s+7)(s-4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+7} + \frac{C}{s-4} \quad (***)$$

Koeficiente  $A$ ,  $B$  in  $C$  določimo s pomočjo residuumov.

- $s(***) \Rightarrow \frac{s(s+3)}{s(s+7)(s-4)} = \frac{As}{s} + \frac{Bs}{s+7} + \frac{Cs}{s-4} \Rightarrow$  vstavimo:  $s = 0 \Rightarrow A = -0.1071$



- $(s+7)(***) \Rightarrow \frac{(s+7)(s+3)}{s(s+7)(s-4)} = \frac{A(s+7)}{s} + \frac{B(s+7)}{s+7} + \frac{C(s+7)}{s-4} \Rightarrow$  vstavimo:  $s = -7 \Rightarrow B = -0.0519$
- $(s-4)(***) \Rightarrow \frac{(s-4)(s+3)}{s(s+7)(s-4)} = \frac{A(s-4)}{s} + \frac{B(s-4)}{s+7} + \frac{C(s-4)}{s-4} \Rightarrow$  vstavimo:  $s = 4 \Rightarrow C = 0.1591$

$$F(s) = \frac{-0.1071}{s} + \frac{-0.0519}{s+7} + \frac{0.1591}{s-4}$$

Uporabimo tabelo Laplaceovih parov (dodatek A, tabela B.1) in dobimo:

$$f(t) = [-0.1071e^{0t} - 0.0519e^{-7t} + 0.1591e^{4t}] \sigma(t)$$


---

### Naloga A.10

Izračunajmo originalno funkcijo Laplaceove transformiranke  $F(s)$ :

$$F(s) = \frac{s^2}{s^3+9s^2+23s+15}$$

#### Rešitev

Laplaceovo transformiranko razstavimo v parcialne ulomke:

$$F(s) = \frac{s^2}{s^3+9s^2+23s+15} = \frac{s^2}{(s+1)(s+3)(s+5)} = \frac{0.125}{s+1} - \frac{2.25}{s+3} + \frac{3.125}{s+5}$$

Uporabimo tabelo Laplaceovih parov (dodatek A, tabela B.1) in dobimo:

$$f(t) = [0.125e^{-t} - 2.25e^{-3t} + 3.125e^{-5t}] \sigma(t)$$


---

### Naloga A.11

Izračunajmo originalno funkcijo Laplaceove transformiranke  $F(s)$ :

$$F(s) = \frac{s^2+3s+7}{s^2+15s+8}$$

#### Rešitev

Laplaceovo transformiranko razstavimo v parcialne ulomke:

$$F(s) = \frac{s^2+3s+7}{s^2+15s+8} = \frac{s^2+3s+7}{(s+0.5538)(s+14.4462)} = 1 + \frac{0.4064}{s+0.5538} - \frac{12.4064}{s+14.4462}$$

Uporabimo tabelo Laplaceovih parov (dodatek A, tabela B.1) in dobimo:

$$f(t) = [\delta(t) + 0.4064e^{0.5538t} - 12.4064e^{14.4462t}] \sigma(t)$$


---

### Naloga A.12

Izračunajmo originalno funkcijo Laplaceove transformiranke  $F(s)$ :

$$F(s) = \frac{s^4+6s^3+23s^2+42s+49}{0.2s^4+3.6s^3+23.8s^2+68.4s+72}$$

#### Rešitev

Laplaceovo transformiranko razstavimo v parcialne ulomke:

$$F(s) = \frac{s^4+6s^3+23s^2+42s+49}{0.2s^4+3.6s^3+23.8s^2+68.4s+72} = \frac{s^4+6s^3+23s^2+42s+49}{(s+3)(s+4)(s+5)(s+6)} = 5 + \frac{40.8333}{s+3} - \frac{302.5}{s+4} + \frac{722.5}{s+5} - \frac{520.8333}{s+6}$$

Uporabimo tabelo Laplaceovih parov (dodatek A, tabela B.1) in dobimo:

$$f(t) = [5\delta(t) + 40.8333e^{-3t} - 302.5e^{-4t} + 722.5e^{-5t} - 520.8333e^{-6t}] \sigma(t)$$


---

**Naloga A.13**

Izračunajmo originalno funkcijo Laplaceove transformiranke  $F(s)$ :

$$F(s) = \frac{1}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$$

**Rešitev**

Laplaceovo transformiranko razstavimo v parcialne ulomke:

$$F(s) = \frac{1}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4} = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B_2}{(s+2)^2} + \frac{B_1}{s+2} \quad (\text{en.}*)$$

Koeficiente  $A$ ,  $B_1$  in  $B_2$  določimo s pomočjo residuumov. V primeru, ko imamo opraviti z večkratnimi poli Laplaceove transformiranke, je potrebno do sedaj uporabljeni postopek določevanja koeficientov parcialnih ulomkov dopolniti. Koeficienta  $A$  in  $B_2$  določimo enako kot v prejšnjih nalogah, za določitev koeficienta  $B_1$  pa je potrebno enačbo (en.\*\*) odvajati po spremenljivki  $s$ .

- $(s+1)(\text{en.}*) \Rightarrow \frac{1(s+1)}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{A(s+1)}{s+1} + \frac{B_2(s+1)}{(s+2)^2} + \frac{B_1(s+1)}{s+2} \Rightarrow$  vstavimo:  $s = -1 \Rightarrow A = 1$
- $(s+2)^2(\text{en.}*) \Rightarrow \frac{1(s+2)^2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{A(s+2)^2}{s+1} + \frac{B_2(s+2)^2}{(s+2)^2} + \frac{B_1(s+2)^2}{s+2} \Rightarrow$   
 $\frac{1}{s+1} = \frac{A(s+2)^2}{s+1} + B_2 + B_1(s+2) \quad (\text{en.**}) \Rightarrow$  vstavimo:  $s = -2 \Rightarrow B_2 = -1$
- $\frac{d(\text{en.**})}{ds} \Rightarrow \frac{0(s+1)-1(1)}{(s+1)^2} = A \frac{2(s+2)(s+1)-(s+2)^2 \cdot 1}{(s+1)^2} + 0 + B_1 \Rightarrow$  vstavimo:  $s = -2 \Rightarrow B_1 = -1$

$$F(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{(s+2)^2} + \frac{-1}{s+2}$$

Uporabimo tabelo Laplaceovih parov (dodatek A, tabela B.1) in dobimo:

$$f(t) = [1e^{-1t} - 1te^{-2t} - 1e^{-2t}] \sigma(t)$$

**Naloga A.14**

Izračunajmo originalno funkcijo Laplaceove transformiranke  $F(s)$ :

$$F(s) = \frac{s+1}{s^4 + 4s^3 + 4s^2}$$

**Rešitev**

Laplaceovo transformiranko razstavimo v parcialne ulomke:

$$F(s) = \frac{s+1}{s^4 + 4s^3 + 4s^2} = \frac{s+1}{s^2(s+2)^2} = \frac{0.25}{s^2} + \frac{-0.25}{(s+2)^2}$$

Uporabimo tabelo Laplaceovih parov (dodatek A, tabela B.1) in dobimo:

$$f(t) = [0.25t - 0.25te^{-2t}] \sigma(t)$$

**Naloga A.15**

Izračunajmo originalno funkcijo Laplaceove transformiranke  $F(s)$ :

$$F(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}{s^4 + 7s^3 + 18s^2 + 20s + 8}$$

**Rešitev**

Laplaceovo transformiranko razstavimo v parcialne ulomke:

$$F(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}{s^4 + 7s^3 + 18s^2 + 20s + 8} = \frac{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}{(s+1)(s+2)^3} = \frac{2}{s+1} + \frac{-1}{(s+2)} + \frac{-5}{(s+2)^2} + \frac{2}{(s+2)^3}$$

Uporabimo tabelo Laplaceovih parov (dodatek A, tabela B.1) in dobimo:  
 $f(t) = [2e^{-1t} - 1e^{-2t} - 5te^{-2t} + \frac{2}{2}t^2e^{-2t}] \sigma(t)$

### Naloga A.16

Izračunajmo originalno funkcijo Laplaceove transformiranke  $F(s)$ :

$$F(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$$

### Rešitev

Laplaceova transformiranka ima same različne konjugirano kompleksne korene zato razstavitev v parcialne ulomke ni potrebna. Inverz Laplaceove transformiranke lahko izračunamo na dva načina.

- Uporabimo enačbo iz tabele B.1:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \right\} = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t)$$

V našem primeru je :

$$\zeta = 0.5, \quad \omega_n = 1$$

sledi:

$$f(t) = 1.1547e^{-0.5t} \sin(0.8660t)$$

- Laplaceovo transformiranko lahko pretvorimo v obliko, kjer imamo v imenovalcu vsoto kvadratov, in uporabimo enačbo (tabela B.1):

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+\alpha)^2+\omega_n^2} \right\} = \frac{1}{\omega_n} e^{-\alpha t} \sin \omega_n t$$

V našem primeru je :

$$F(s) = \frac{1}{s^2+s+1} = \frac{1}{(s^2+s+0.25)+0.75} = \frac{1}{(s+0.5)^2+(\sqrt{0.75})^2}$$

sledi:

$$f(t) = 1.1547e^{-0.5t} \sin(0.8660t)$$

### Naloga A.17

Izračunajmo originalno funkcijo Laplaceove transformiranke  $F(s)$ :

$$F(s) = \frac{2s+1}{s^3+2s^2+2s+1}$$

### Rešitev

Laplaceovo transformiranko razstavimo v parcialne ulomke:

$$F(s) = \frac{2s+1}{s^3+2s^2+2s+1} = \frac{2s+1}{(s+1)(s^2+s+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+c}{s^2+s+1} = \frac{-1}{s+1} + \frac{s+2}{s^2+s+1}$$

Uporabimo tabelo Laplaceovih parov (tabela B.1) in dobimo:

$$f(t) = \{-e^{-1t} + e^{-0.5t} [1.732 \sin(0.8660t) + \cos(0.8660t)]\} \sigma(t)$$

**Naloga A.18**

Izračunajmo originalno funkcijo Laplaceove transformiranke  $F(s)$ :

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{3s^4 + 2s^3 + s^2}$$

**Rešitev**

$$f(t) = \{3t - 4 + e^{-0.333t} [-2.828 \sin(0.4713t) + 4 \cos(0.4713t)]\} \sigma(t)$$

**Naloga A.19**

Izračunajmo originalno funkcijo Laplaceove transformiranke  $F(s)$ :

$$F(s) = \frac{3s^4 + s^2 + s + 1}{5s^4 + 2s^3 + s^2}$$

**Rešitev**

$$f(t) = \{0.6\delta(t) + t - 1 + e^{-0.2t} [-1.680 \sin(0.4t) + 0.76 \cos(0.4t)]\} \sigma(t)$$

**Naloga A.20**

Izračunajmo originalno funkcijo Laplaceove transformiranke  $F(s)$ :

$$F(s) = e^{-s} \frac{1}{4s^3 + 4s}$$

**Rešitev**

Izpostavimo  $e^{-s}$  in preostali del razstavimo v parcialne ulomke:

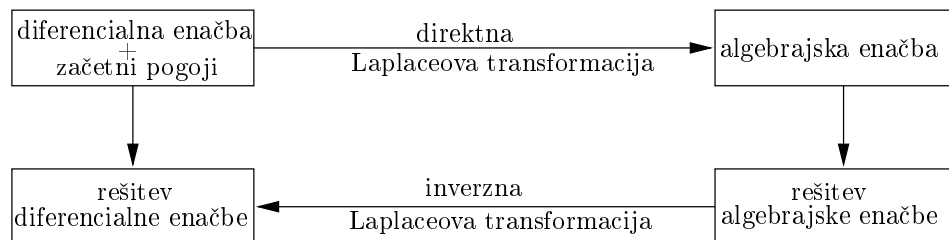
$$F(s) = e^{-s} \frac{1}{4s^3 + 4s} = e^{-s} \left[ \frac{A}{s} - \frac{Bs+C}{s^2+1} \right] = e^{-s} \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} \right]$$

Ob upoštevanju lastnosti o premiku originalne funkcije dobimo:

$$f(t) = \left\{ \frac{1}{4} [1 - \cos(t-1)] \right\} \sigma(t-1)$$

## A.4 Reševanje diferencialnih enačb z Laplaceovo transformacijo

Laplaceova transformacija omogoča enostavno reševanje navadnih linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti. Potek reševanja je shematično prikazan na sliki:



Slika A.8: Reševanje diferencialnih enačb s pomočjo Laplaceove transformacije

V naslednjih nalogah bomo z  $y(t)$  označevali odvisno, s  $t$  pa neodvisno spremenljivko.

### Naloga A.21

Rešimo diferencialno enačbo:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 4t + 8, \quad y(0) = 6, \quad \dot{y}(0) = 0$$

### Rešitev

Za primerjavo poiščimo rešitev diferencialne enačbe po klasični poti in s pomočjo Laplaceove transformacije.

- **Klasična pot**

Posebno rešitev nehomogene diferencialne enačbe, ki ustreza predpisanim začetnim pogojem, izračunamo iz splošne rešitve nehomogene diferencialne enačbe, za katero velja:

$$y(t)_{sn} = y(t)_{sh} + y(t)_{pn}$$

$y(t)_{sn}$  – splošna rešitev nehomogene diferencialne enačbe

$y(t)_{sh}$  – splošna rešitev homogene diferencialne enačbe

$y(t)_{pn}$  – posebna rešitev nehomogene diferencialne enačbe

Lastni vrednosti in naravna načina diferencialne enačbe sta:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2 \Rightarrow e^{-1t}, \quad e^{-2t}$$

Splošna rešitev homogene diferencialne enačbe je:  $y(t)_{sh} = c_1 e^{-1t} + c_2 e^{-2t}$

Posebno rešitev določimo s pomočjo nastavka:  $y(t)_{pn} = At + B$

Nastavek dvakrat odvajamo, vstavimo v diferencialno enačbo in izračunamo  $A$  in  $B$ :

$$y(t)_{pn} = At + B \Rightarrow \dot{y}(t)_{pn} = A \Rightarrow \ddot{y}(t)_{pn} = 0 \Rightarrow 0 + 3(A) + 2(At + B) = 4t + 8 \Rightarrow A = 2, \quad B = 1$$

Posebna rešitev nehomogene diferencialne enačbe je:  $y(t)_{pn} = 2t + 1$

Posebno rešitev, ki ustreza podanim začetnim pogojem, določimo tako, da splošno rešitev nehomogene diferencialne enačbe odvajamo, vstavimo začetne pogoje in iz sistema enačb izračunamo koeficienta  $c_1$  in  $c_2$ :

$$y(t)_{sn} = y(t)_{sh} + y(t)_{pn} = c_1 e^{-1t} + c_2 e^{-2t} + 2t + 1 \Rightarrow \dot{y}(t)_{sn} = -c_1 e^{-1t} - 2c_2 e^{-2t} + 2$$

$$\Rightarrow 6 = c_1 + c_2 + 1, \quad 0 = -c_1 - c_2 + 2 \Rightarrow c_1 = 8, \quad c_2 = -3$$

Rešitev podane diferencialne enačbe s predpisanimi začetnimi pogoji:

$$y(t) = 8e^{-t} - 3e^{-2t} + 2t + 1$$

- **Uporaba Laplaceove transformacije**

Diferencialno enačbo z začetnimi pogoji transformiramo v  $s$ -prostor. Pri tem uporabimo tabelo B.1 in upoštevamo pravilo o odvodu originalne funkcije.

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 4t + 8, \quad y(0) = 6, \quad \dot{y}(0) = 0$$

$$\Rightarrow [s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)] + 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = 4 \frac{1}{s^2} + 8 \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow [s^2 Y(s) - 6s] + 3[sY(s) - 6] + 2Y(s) = 4 \frac{1}{s^2} + 8 \frac{1}{s}$$

Poiščemo rešitev tako dobljene algebraične enačbe:

$$Y(s) = \frac{6s^3 + 18s^2 + 8s + 4}{s^4 + 3s^3 + 2s^2}$$

Dobljeno Laplaceovo transformiranko (rešitev v Laplaceovem prostoru) razstavimo v parcialne ulomke:

$$Y(s) = \frac{6s^3 + 18s^2 + 8s + 4}{s^4 + 3s^3 + 2s^2} = \frac{6s^3 + 18s^2 + 8s + 4}{s^2(s+1)(s+2)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{8}{s+1} + \frac{-3}{s+2}$$

Inverzno Laplaceovo transformacijo opravimo s pomočjo tabel B.1:

$$y(t) = (1 + 2t + 8e^{-t} - 3e^{-2t}) \sigma(t)$$

**Naloga A.22**

Rešimo diferencialno enačbo:

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + \frac{dy(t)}{dt} = \sin t, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 1, \quad \ddot{y}(0) = 0$$

**Rešitev**

Za primerjavo poiščimo rešitev diferencialne enačbe po klasični poti in s pomočjo Laplaceove transformacije.

- **Klasična pot**

Velja:

$$y(t)_{sn} = y(t)_{sh} + y(t)_{pn}$$

Lastne vrednosti in naravni načini diferencialne enačbe so:

$$\lambda^3 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm j \Rightarrow e^{0t}, \quad e^{0t} \cos 1t$$

Splošna rešitev homogene diferencialne enačbe je:

$$y(t)_{sh} = c_1 e^{0t} + e^{0t}(c_2 \cos 1t + c_3 \sin 1t) = c_1 + c_2 \cos t + c_3 \sin t$$

Posebno rešitev določimo s pomočjo nastavka:  $y(t)_{pn} = (A \cos t + B \sin t)t$

Nastavek trikrat odvajamo, vstavimo v diferencialno enačbo in izračunamo  $A$  in  $B$ :

$$y(t)_{pn} = (A \cos t + B \sin t)t$$

$$\Rightarrow \frac{dy(t)_{pn}}{dt} = (-A \sin t + B \cos t)t + A \cos t + B \sin t$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y(t)_{pn}}{dt^2} = (-A \cos t - B \sin t)t - 2A \sin t + 2B \cos t$$

$$\Rightarrow \frac{d^3 y(t)_{pn}}{dt^3} = (A \sin t - B \cos t)t - 3A \cos t - 3B \sin t$$

$$\Rightarrow (A \sin t - B \cos t)t - 3A \cos t - 3B \sin t + (-A \sin t + B \cos t)t + A \cos t + B \sin t = \sin t$$

$$\Rightarrow A = 0, \quad B = -\frac{1}{2}$$

Posebna rešitev nehomogene diferencialne enačbe je:  $y(t)_{pn} = -\frac{t}{2} \sin t$

Posebno rešitev, ki ustreza podanim začetnim pogojem, določimo tako, da splošno rešitev nehomogene diferencialne enačbe odvajamo, vstavimo začetne pogoje in iz sistema enačb izračunamo koeficiente  $c_1$ ,  $c_2$  in  $c_3$ :

$$y(t)_{sn} = y(t)_{sh} + y(t)_{pn} = c_1 + c_2 \cos t + c_3 \sin t - \frac{t}{2} \sin t$$

$$\Rightarrow \dot{y}(t)_{sn} = -c_2 \sin t + c_3 \cos t - \frac{1}{2} \sin t - \frac{t}{2} \cos t$$

$$\Rightarrow \ddot{y}(t)_{sn} = -c_2 \cos t - c_3 \sin t - \cos t + \frac{t}{2} \sin t$$

$$\Rightarrow 1 = c_1 + c_2, \quad 1 = c_3, \quad 0 = -c_2 - 1$$

$$\Rightarrow c_1 = 2, \quad c_2 = -1, \quad c_3 = 1$$

Rešitev podane diferencialne enačbe s predpisanimi začetnimi pogoji:

$$y(t) = 2 - \cos t + \sin t - \frac{t}{2} \sin t$$

- **Uporaba Laplaceove transformacije**

Diferencialno enačbo z začetnimi pogoji transformiramo v  $s$ -prostor. Pri tem uporabimo tabelo B.1 in upoštevamo pravilo o odvodu originalne funkcije.

$$\begin{aligned} \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + \frac{dy(t)}{dt} &= \sin t, & y(0) &= 1, & \dot{y}(0) &= 1, & \ddot{y}(0) &= 0 \\ \Rightarrow [s^3 Y(s) - s^2 y(0) - s \dot{y}(0) - \ddot{y}(0)] + [s Y(s) - y(0)] &= \frac{1}{s^2 + 1} \\ \Rightarrow [s^3 Y(s) - s^2 - s] [s Y(s) - 1] &= \frac{1}{s^2 + 1} \end{aligned}$$

Poiščemo rešitev tako dobljene algebraične enačbe:

$$Y(s) = \frac{s^4 + s^3 + 2s^2 + s + 2}{s(s^2 + 1)^2}$$

Dobljeno Laplaceovo transformiranko (rešitev v Laplaceovem prostoru) razstavimo v parcialne ulomke:

$$Y(s) = \frac{s^4 + s^3 + 2s^2 + s + 2}{s(s^2 + 1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B_2 s + C_2}{(s^2 + 1)^2} + \frac{B_1 s + C_1}{s^2 + 1} = \frac{2}{s} + \frac{-1s}{(s^2 + 1)^2} + \frac{-s + 1}{s^2 + 1}$$

Inverzno Laplaceovo transformacijo opravimo s pomočjo tabel B.1:

$$y(t) = \left(2 - \frac{t}{2} \sin t - \cos t + \sin t\right) \sigma(t)$$

---

**Naloga A.23**

Rešimo diferencialno enačbo:

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \delta(t), \quad y(0) = 0$$

**Rešitev**

$$y(t) = e^{-t}\sigma(t)$$

---

**Naloga A.24**

Rešimo diferencialno enačbo:

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \sigma(t), \quad y(0) = 0$$

**Rešitev**

$$y(t) = (1 - e^{-t})\sigma(t)$$

---

**Naloga A.25**

Rešimo diferencialno enačbo:

$$\frac{dy(t)}{dt} - y(t) = \sigma(t), \quad y(0) = 0$$

**Rešitev**

$$y(t) = (-1 + e^t)\sigma(t)$$

---

**Naloga A.26**

Rešimo diferencialno enačbo:

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = (e^{-t})\sigma(t), \quad y(0) = 1$$

**Rešitev**

$$y(t) = (e^{-t} + te^{-t})\sigma(t)$$

---

**Naloga A.27**

Rešimo diferencialno enačbo:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{6dy(t)}{dt} + 5y(t) = \sigma(t), \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0$$

**Rešitev**

$$y(t) = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{20}e^{-5t} - \frac{1}{4}e^{-t}\right)\sigma(t)$$

---

**Naloga A.28**

Rešimo diferencialno enačbo:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 6 \frac{dy(t)}{dt} + 9y(t) = \sigma(t), \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0$$

**Rešitev**

$$y(t) = \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{9}e^{-3t} - \frac{1}{3}te^{-3t} \right) \sigma(t)$$

**Naloga A.29**

Rešimo diferencialno enačbo:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \sigma(t), \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0$$

**Rešitev**

$$y(t) = \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-t} \cos(\sqrt{2}t) - \frac{\sqrt{2}}{6}e^{-t} \sin(\sqrt{2}t) \right] \sigma(t)$$

**Naloga A.30**

Rešimo diferencialno enačbo:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 11 \frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = e^{-5t} \sigma(t), \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0$$

**Rešitev**

$$y(t) = \left( -\frac{1}{20}e^{-5t} + \frac{1}{36}e^{-t} + \frac{1}{45}e^{-10t} \right) \sigma(t)$$

**Naloga A.31**

Rešimo diferencialno enačbo:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 10 \frac{dy(t)}{dt} + 25y(t) = e^{-7t} \sigma(t), \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0$$

**Rešitev**

$$y(t) = \left( \frac{1}{4}e^{-7t} - \frac{1}{4}e^{-5t} + \frac{1}{2}te^{-5t} \right) \sigma(t)$$

**Naloga A.32**

Rešimo diferencialno enačbo:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 9y(t) = e^{-t} \sigma(t), \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0$$

**Rešitev**

$$y(t) = \left[ \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-2t} \cos(\sqrt{5}t) - \frac{\sqrt{5}}{30}e^{-2t} \sin(\sqrt{5}t) \right] \sigma(t)$$



**Naloga A.33**

Rešimo diferencialno enačbo:

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 6 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 11 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad \ddot{y}(0) = 0$$

**Rešitev**

$$y(t) = (e^{-3t} - 3e^{-2t} + 3e^{-t}) \sigma(t)$$

**Naloga A.34**

Rešimo diferencialno enačbo:

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 6 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 11 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \sigma(t), \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad \ddot{y}(0) = 0$$

**Rešitev**

$$y(t) = (0.167 + 0.833e^{-3t} - 2.5e^{-2t} + 2.5e^{-t}) \sigma(t)$$

**Naloga A.35**

Rešimo diferencialno enačbo:

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 6 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 11 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = (\sin 4t) \sigma(t), \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad \ddot{y}(0) = 0$$

**Rešitev**

$$y(t) = (0.00235 \cos 4t - 0.0106 \sin 4t + 1.08e^{-3t} - 3.2e^{-2t} + 3.12e^{-t}) \sigma(t)$$

**Naloga A.36**

Rešimo diferencialno enačbo:

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 6 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 11 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = (\sin 4t + 1) \sigma(t), \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad \ddot{y}(0) = 0$$

**Rešitev**

$$y(t) = (0.00235 \cos 4t - 0.0106 \sin 4t + 0.167 + 0.913e^{-3t} - 2.7e^{-2t} + 2.62e^{-t}) \sigma(t)$$

**Naloga A.37**

Rešimo diferencialno enačbo:

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 4 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = t \sigma(t), \quad y(0), \quad \dot{y}(0), \quad \ddot{y}(0)$$

**Rešitev**

$$y(t) = \left[ -\frac{5}{4} + \frac{1}{2}t + e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-2t} + te^{-t} + y(0)(e^{-2t} + 2te^{-t}) + \dot{y}(0)(-2e^{-t} + 2e^{-2t} + 3te^{-t}) + \ddot{y}(0)(-e^{-t} + e^{-2t} + te^{-t}) \right] \sigma(t)$$

---

**Naloga A.38**

Rešimo diferencialno enačbo:

$$\frac{d^4 y(t)}{dt^4} - \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = (\cos t)\sigma(t), \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = -1, \quad \ddot{y}(0) = 0, \quad y^{(3)}(0) = 0$$

**Rešitev**

$$y(t) = (0.5 \cos t - 1 - t + 0.25e^t + 0.25e^{-t})\sigma(t)$$

---

**Naloga A.39**

Rešite sistem diferencialnih enačb:

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = y_2(t), \quad \frac{dy_2(t)}{dt} = y_1(t), \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -1$$

**Rešitev**

$$y_1(t) = e^{-t}\sigma(t), \quad y_2(t) = -e^{-t}\sigma(t)$$

---

**Naloga A.40**

Rešite sistem diferencialnih enačb:

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = y_2(t), \quad \frac{dy_2(t)}{dt} = -y_1(t), \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0$$

**Rešitev**

$$y_1(t) = (\cos t)\sigma(t), \quad y_2(t) = (-\sin t)\sigma(t)$$

---

## Dodatek B

# Laplaceove in z-transformirane pogosto uporabljane funkcije

Tabela Laplaceovih transformirank (tabela B.1) je neobhodno potrebna predvsem za inverzno Laplaceovo transformacijo, zato smo v prvi stolpec tabele zapisali Laplaceove transformirane originalnih funkcij:

$F(s)$	$f(t)$
1	$\delta(t)$ (impulzna funkcija)
$\frac{1}{s}$	$\sigma(t)$ (stopnična funkcija)
$\frac{1}{s^2}$	$t$
$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{1}{n!}t^n$ ( $n =$ naravno število)
$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$
$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}$
$\frac{1}{(s+\alpha)^{n+1}}$	$\frac{1}{n!}t^n e^{-\alpha t}$ ( $n =$ naravno število)
$\frac{1}{s(s+\alpha)}$	$\frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$
$\frac{1}{s^2(s+\alpha)}$	$\frac{1}{\alpha^2}(\alpha t - 1 + e^{-\alpha t})$
$\frac{1}{s(s+\alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2}(1 - e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t})$
$\frac{1}{s^2(s+\alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2}\left[t - \frac{1}{\alpha} + \left(t + \frac{2}{\alpha}\right)e^{-\alpha t}\right]$
$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{1}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$ ( $\alpha \neq \beta$ )

$F(s)$	$f(t)$
$\frac{1}{s^2 + \omega_n^2}$	$\frac{1}{\omega_n^2} \sin \omega_n t$
$\frac{1}{s(s^2 + \omega_n^2)}$	$\frac{1}{\omega_n^2} (1 - \cos \omega_n t)$
$\frac{1}{(s + \alpha)(s^2 + \omega_n^2)}$	$\frac{1}{\alpha^2 + \omega_n^2} e^{-\alpha t} + \frac{1}{\omega_n \sqrt{\alpha^2 + \omega_n^2}} \sin(\omega_n t - \arctan \frac{\omega_n}{\alpha})$
$\frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\frac{1}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t) \quad (\zeta < 1)$
$\frac{1}{(s + \alpha)^2 + \omega_n^2}$	$\frac{1}{\omega_n} e^{-\alpha t} \sin \omega_n t$
$\frac{1}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$	$\frac{1}{\omega_n^2} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \arccos \zeta) \right] \quad (\zeta < 1)$
$\frac{1}{s^2(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$	$\frac{1}{\omega_n^2} \left\{ t - \frac{2\zeta}{\omega_n} + \frac{1}{\omega_n^2 \sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin[\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \arccos(2\zeta^2 - 1)] \right\} \quad (\zeta < 1)$
$\frac{s}{(s + \alpha)(s + \beta)}$	$\frac{1}{\beta - \alpha} (-\alpha e^{-\alpha t} + \beta e^{-\beta t}) \quad (\alpha \neq \beta)$
$\frac{s}{(s + \alpha^2)}$	$(1 - \alpha t) e^{-\alpha t}$
$\frac{s}{s^2 + \omega_n^2}$	$\cos \omega_n t$
$\frac{s + \alpha}{s^2 + \omega_n^2}$	$\frac{1}{\omega_n} \sqrt{\alpha^2 + \omega_n^2} \sin(\omega_n t + \arctan \frac{\omega_n}{\alpha})$
$\frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$-\frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t - \arccos \zeta) \quad (\zeta < 1)$
$\frac{s + \alpha}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$\frac{1}{\omega_n} \sqrt{\frac{\alpha^2 - 2\alpha\zeta\omega_n + \omega_n^2}{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \left[ \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \arctan \left( \frac{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}{\alpha - \zeta\omega_n} \right) \right] \quad (\zeta < 1)$
$\frac{s + a}{(s + \alpha)^2 + \omega_n^2}$	$e^{-\alpha t} \cos \omega_n t$
$\frac{s}{(s^2 + \omega_n^2)^2}$	$\frac{t}{2\omega_n} \sin \omega_n t$

Tabela B.1: Tabela Laplaceovih parov

Tabela z-transformirank (tabela B.2) je potrebna predvsem pri izračunu diskretne prenosne funkcije z metodo stopnične invariance. V tem primeru moramo elementarne funkcije pretvoriti v njihove z-transformiranke.

$F(t)$	$F(z)$
$\sigma(t)$	$\frac{z}{z-1}$
$t$	$\frac{T_0 z}{(z-1)^2}$
$t^2$	$\frac{T_0^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
$t^3$	$\frac{T_0^3 z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$
$e^{-at}$	$\frac{z}{z-e^{-aT_0}}$
$te^{-at}$	$\frac{T_0 z e^{-aT_0}}{(z-e^{-aT_0})^2}$
$t^2 e^{-at}$	$\frac{T_0^2 z e^{-aT_0} (z+e^{-aT_0})}{(z-e^{-aT_0})^3}$
$\sin \omega_0 t$	$\frac{z \sin \omega_0 T_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T_0 + 1}$
$\cos \omega_0 t$	$\frac{z(z - \cos \omega_0 T_0)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T_0 + 1}$
$e^{-aT_0} \sin \omega_0 t$	$\frac{z e^{-aT_0} \sin \omega_0 T_0}{z^2 - 2z e^{-aT_0} \cos \omega_0 T_0 + e^{-2aT_0}}$
$e^{-aT_0} \cos \omega_0 t$	$\frac{z^2 - z e^{-aT_0} \cos \omega_0 T_0}{z^2 - 2z e^{-aT_0} \cos \omega_0 T_0 + e^{-2aT_0}}$

Tabela B.2: Tabela z-transformirank pogosto uporabljanih funkcij







Univerza v Mariboru

---

Fakulteta za elektrotehniko,  
računalništvo in informatiko

