



# ALGEBRAIČNE METODE V DINAMIČNIH SISTEMIH

BRIGITA FERČEC

MATEJ MENCINGER



Univerzitetna založba  
Univerze v Mariboru





Univerza v Mariboru

---

Fakulteta za gradbeništvo,  
prometno inženirstvo in arhitekturo

# Algebraične metode v dinamičnih sistemih

Avtorja  
**Brigita Ferčec**  
**Matej Mencinger**

Maribor, december 2018

|  |   |
|--|---|
| <b>Naslov</b>  | Algebraične metode v dinamičnih sistemih  |
| <b>Titel</b>   | Algebraic Methods in Dynamical Systems  |
| <b>Avtorja</b><br><i>Authors</i>                     | doc. dr. Brigita Ferčec<br>(Univerza v Mariboru, Fakulteta za energetiko)   |
|  | izr. prof. dr. Matej Mencinger<br>(Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo) |
| <b>Recenzenti</b><br><i>Review</i>                   | red. prof. dr. Marko Petkovšek<br>(Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko)                             |
|  | red. prof. dr. Matjaž Perc<br>(Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko)                            |
|  | red. prof. dr. Valerij Romanovskij<br>(Univerza v Mariboru, Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko)  |
| <b>Jezikovna recenzija</b><br><i>Proofreading</i>    | Jerneja Klemenčič, prof. slov in geog.  |
| <b>Grafične priloge</b><br><i>Graphic material</i>   | Avtorja   |
| <b>Tehnična urednika</b><br><i>Technical editors</i> | doc. dr. Andrej Tibaut<br>(Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo)         |
|  | Jan Perša<br>(Univerzitetna založba Univerze v Mariboru)  |
| <b>Oblikovalce ovitka</b><br><i>Cover designer</i>   | Jan Perša (Univerzitetna založba Univerze v Mariboru)   |

#### Izdajatelj

Univerza v Mariboru  
Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo  
Smetanova ulica 17, 2000 Maribor, Slovenija  
<https://www.fgpa.um.si>, [fgpa@um.si](mailto:fgpa@um.si)

#### Založnik

Univerzitetna založba Univerze v Mariboru  
Slomškov trg 15, 2000 Maribor, Slovenija  
<http://press.um.si>, [zalozba@um.si](mailto:zalozba@um.si)

|   |   |
|---|---|
| <b>Izdaja</b><br><i>Edition</i>           | Prva izdaja.  |
| <b>Tisk</b><br><i>Printed by</i>          | Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo   |
| <b>Naklada</b><br><i>Number of copies</i> | 50 izvodov  |
| <b>Dostopno na</b><br><i>Available at</i> | <a href="http://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/380">http://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/380</a> |
| <b>Izid</b><br><i>Published</i>           | Maribor, december 2018  |

Monografija je sofinancirana iz strani Javne agencije za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije.



**ARRS**

JAVNA AGENCIJA ZA RAZISKOVALNO DEJAVNOST  
REPUBLIKE SLOVENIJE

#### © Univerza v Mariboru, Univerzitetna založba

Vse pravice pridržane. Brez pisnega dovoljenja založnika je prepovedano reproduciranje, distribuiranje, predelava ali druga uporaba tega dela ali njegovih delov v kakršnemkoli obsegu ali postopku, vključno s fotokopiranjem, tiskanjem ali shranjevanjem v elektronski obliki.

CIP - Kataložni zapis o publikaciji  
Univerzitetna knjižnica Maribor

514.74 (075.8) (0.034.2)

FERČEC, Brigita  
Algebraične metode v dinamičnih sistemih [Elektronski vir] / avtorja Brigita Ferčec, Matej Mencinger. -  
1. izd. - Maribor : Univerzitetna založba Univerze, 2018

Način dostopa (URL): <http://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/380>. - Nasl. v kolofonu: Algebraic methods in dynamical systems

ISBN 978-961-286-226-8 (PDF)

doi: 10.18690/978-961-286-224-4  
1. Dr. vzp. stv. nasl. 2. Mencinger, Matej  
COBISS.SI-ID [95814913](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:si:coibis-95814913)

|                             |   |
|-----------------------------|---|
| <b>ISBN</b>                 | 978-961-286-224-4 (PDF)<br>978-961-286-225-1 (Broš.)  |
| <b>DOI</b>                  | <a href="https://doi.org/10.18690/978-961-286-224-4">https://doi.org/10.18690/978-961-286-224-4</a> |
| <b>Cena</b><br><i>Price</i> | Brezplačni izvod  |

**Odgovorna oseba založnika**  
*For publisher* red. prof. dr. Zdravko Kačič, rektor Univerze v Mariboru

## Algebraične metode v dinamičnih sistemih

BRIGITA FERČEC IN MATEJ MENCINGER

**Povzetek** V monografiji se teorija dinamičnih sistemov prepleta s poglavji abstraktne algebre. Dinamika zveznih in diskretnih sistemov je osredotočena na problem centra in cikličnosti. Sisteme obravnavamo z uporabo teorije kolobarjev tako, da obravnavamo pripadajoče polinomske kolobarje in njihove ideale. Najprej obravnavamo Gröbnerjeve baze in zvezo med ideali in pripadajočimi raznoterostmi ter minimalno dekompozicijo raznoterosti. Podana je tudi informacija o programu Singular. V drugem poglavju obravnavamo najpomembnejše pojme iz teorije dinamičnih sistemov: singularne točke, limitne cikle, centralno raznoterost, problem centra in cikličnosti. Povezavo s prvim poglavjem predstavlja določanje fokusnih količin ter analiza ustreznih idealov. Gre za Bautinovo metodo, s katero dobimo potrebne pogoje za nastop centra. Zadostne pogoje določimo z Darbouxjevo metodo ali z nastavki za vrsto, ki predstavlja formalni prvi integral. V tretjem poglavju so prikazani in analizirani nekateri novejši rezultati v zveznih in diskretnih sistemih. V zveznih in diskretnih primerih je obravnavan problem centra in cikličnosti. Obravnavani so nekateri sistemi NDE v ravnini in v trirazsežnem prostoru. Obravnavane so perturbacije stopnje dve, tri ali štiri. Diskretni dinamični sistemi so omejeni na dinamiko realne funkcije, katere kvadrat (v smislu kompozituma funkcij) je identiteti podobna preslikava, ki izhaja iz Žolądkove enačbe. Obravnava cikličnosti poteka tudi s pomočjo posplošitve Christopherjevega izreka.

**Ključne besede:** • dinamični sistem • singularnost • problem centra in fokusa • cikličnost • polinomske kolobarje • ideali • Bautinova metoda • Darbouxjeva metoda •

**Math. Subj. Class. (2010):** 12–02, 16–02, 34–02, 37–02.

---

NASLOVA AVTORJEV: dr. Brigita Ferčec, docentka, Univerza v Mariboru, Fakulteta za energetiko, Hočevarjev trg 1, 8270 Krško, Slovenija, e-pošta: brigita.fercec@um.si. dr. Matej Mencinger, izredni profesor, Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo, Smetanova ulica 17, 2000 Maribor, Slovenija, e-pošta: matej.mencinger@um.si.

DOI <https://doi.org/10.18690/978-961-286-224-4>  
Dostopno na: <http://press.um.si>

ISBN 978-961-286-224-4

# Algebraic Methods in Dynamical Systems

BRIGITA FERČEC & MATEJ MENCINGER

**Abstract** In this monograph the theory of dynamical systems meets abstract algebra. From the dynamical point of view we are focused to center and cyclicity problems. From the ring theory point of view we consider polynomial rings and their ideals. We first consider Gröbner bases, the connection idealvariety and minimal decompositions of varieties. The basic information on Singular is included. In the second chapter the most important concepts like singularities, limit cycles, central variety, the center problem and the cyclicity from dynamical theory are considered. The computation and analysis of focus quantities and corresponding (polynomial) ideals represents the connection to chapter one. We use Bautin's (Darboux and similar) method(s) to determine necessary (sufficient) conditions for the center problem. In third chapter we present and analyze some recent results in continuous (planar and 3D systems of ODEs) and discrete systems, mostly with quadratic, cubic and quartic perturbations added. In both cases the problem of center and cyclicity is considered. Examples concerning discrete systems are limited to dynamics of a real function whose square (in sense of function composition) is a near identity function arising from Żoładek equation. The cyclicity is analyzed by a generalization of Christopher's theorem.

**Keyword:** • dynamical system • singularity • center-focus problem • cyclicity • polynomial rings • ideals • Bautin's method • Darboux method •

**Math. Subj. Class. (2010):** 12–02, 16–02, 34–02, 37–02.

---

CORRESPONDANCE ADDRESS: Brigita Ferčec, PhD, Assistant Professor, University of Maribor, Faculty of Energy Technology, Hočevarjev trg 1, 8270 Krško, Slovenia, e-mail: brigita.fercec@um.si. Matej Mencinger, PhD, Associate Professor, University of Maribor, Faculty of Civil Engineering, Transportation Engineering and Architecture, Smetanova ulica 17, 2000 Maribor, Slovenia, e-mail: matej.mencinger@um.si.

DOI <https://doi.org/10.18690/978-961-286-224-4>  
Dostopno na: <http://press.um.si>

ISBN 978-961-286-224-4

*Zaradi narave znanstveno-raziskovalnega dela pomanjkanje  
pogosto občutijo raziskovalcu/ki najbližji in ljubi.  
Zato knjigo posvečava svojim družinam.*





# Predgovor

V monografiji želiva sistematično in izčrpno predstaviti nekaj novejših rezultatov na področju, ki zvezne in diskretne polinomske dinamične sisteme obravnava predvsem s stališča teorije kolobarjev in ustreznih idealov. Glavna tema monografije je zveza med algebro (ideali v polinomskih kolobarjih) in geometrijo (raznoterostmi), ki naravno nastopa pri problemih v dinamičnih sistemih. Pri obravnavi številnih problemov, ki so prisotni v teoriji (sistemov) navadnih diferencialnih enačb in diskretnih sistemov, ki izhajajo iz preslikav  $f$ , katerih "kvadrati"  $f \circ f$  so identiteti podobne preslikave, se v monografiji omejimo zgolj na problem centra in fokusa ter na problem bifurkacije limitnih ciklov, vendar probleme obravnavamo celostno in kritično.

Občutek "laične javnosti", da je za sisteme navadnih diferencialnih enačb (NDE) v ravnini že vse raziskano, je daleč od dejanskega stanja. Kljub zmogljivostim, ki jih nudijo sodobni računalniki, in programskim orodjem, kot je na primer Mathematica ali Matlab, z numeričnimi približki ne moremo odgovoriti na vprašanja, ki so povezana s Hilbertovim 16. problemom. Glavna ideja povezave med teorijo kolobarjev (polinomskih idealov) in geometrijo (afinimi raznoterostmi) temelji na Hilbertovih rezultatih: na tako imenovanem Hilbertovem izreku o bazi, Hilbertovi teoriji eliminacije in tako imenovanem Hilbertovem izreku o ničlah ("Nullstellensatzu").

Preprosta uporaba algebre pri reševanju NDE je dobro znana že iz dodiplomske analize, na primer karakteristična enačba za linearne NDE s konstantnimi koeficienti in integralske transformacije pri linearnih diferencialnih enačbah (DE). Večji izziv je uporaba algebre pri nelinearnih DE in na splošno pri nelinearnih dinamičnih sistemih, kjer se lahko v faznih diagramih pojavijo limitni cikli ali pa "čudni" atraktorji in celo kaotična dinamika. Če nelinearna DE (oziroma sistem DE) vsebuje vsaj en parameter, lahko govorimo tudi o problemu bifurkacij. Izzivu uporabe algebrskih metod v nelinearnih dinamičnih sistemih sledi pričujoča znanstvena monografija. Seveda pri tem izzivu znatno pomaga tudi matematična analiza (predvsem teorija analitičnih funkcij).

Monografija ima krajše dodatke, v osnovi pa je razdeljena na tri poglavja. V prvem poglavju je na kratko predstavljena teorija polinomskih idealov. Pri iskanju singularnih točk (nelinearnega polinomskega) sistema NDE ali pa pri določanju centralne raznoterosti rešujemo (nelinearne polinomske) sisteme enačb. Zato so v monografiji obravnavane Gröbnerjeve baze in osnove eliminacijskih idealov ter radikalnost idealov in dekompozicija raznoterosti. Dodan je tudi kratek razdelek o uporabi programskega paketa Singular, ki je v zahtevnejših raziskavah nepogrešljivo orodje računske algebre.

Drugo poglavje je namenjeno kratkemu pregledu teorije dinamičnih sistemov. Obravnavani so osnovni pojmi tako iz teorije NDE kot tudi iz diskretnih sistemov. Večinoma se omejimo na pojme, ki jih potem sistematično obravnavamo v tretjem poglavju, kjer so obravnavani nekateri konkretni primeri. Omenimo, na primer, problem določevanja centralne raznoterosti, računanje

fokusnih količin, Bautinovega ideala, bifurkacije limitnih ciklov ter Darbouxjeva metoda iskanja prvih integralov.

V tretjem poglavju so prikazani in kritično analizirani nekateri novejši rezultati v zveznih in diskretnih sistemih. V vseh primerih uporabljamo Bautinovo metodo za reševanje bifurkacijskih problemov. Pri zveznih sistemih (sistemi NDE) je obravnavan problem centra in cikličnost za kubični sistem ter problem centra za sistem četrte stopnje. Diskretni dinamični sistemi so omejeni na dinamiko preslikave  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , za katero je  $f \circ f$  identiteti podobna preslikava, njeni parametri pa izhajajo iz Żoładek-ove enačbe  $\Psi(x, y) = x + w + \sum_{i+j=2}^n \alpha_{ij} x^i w^j = 0$ . Obravnavan je problem centra in cikličnost centra. Obravnava poteka tudi s pomočjo posplošitve Christopherjevega izreka na diskretne sisteme. Nazadnje je analizirana tudi možnost uporabe funkcije  $\Psi(x, y)$  oz. razlike  $\Psi(x, y) - \Psi(y, x)$  iz Żoładek-ove enačbe pri iskanju centralne raznoterosti.

Upava, da pričujoča monografija predstavlja kamenek v razvoju slovenske terminologije na področju, ki dinamične sisteme povezuje z algebro.

Za vse nasvete pri nastajanju te monografije se iskreno zahvaljujema profesorju Valeriju Romanovskemu iz CAMTP, FERI in FNM, Univerza v Mariboru. Najlepše se zahvaljujema tudi recenzentoma: prof. dr. Matjažu Percu iz FNM Univerze v Mariboru in prof. dr. Marku Petkovšku z IMFM in FMF Univerze v Ljubljani, ki sta s svojimi pripombami znatno pripomogla k izboljšanju kakovosti pričujoče monografije.

Maribor, Krško  
December 2018

Matej Mencinger  
Brigita Ferčec

# Kazalo

|  |           |
|--|-----------|
| Slike  | xiii      |
| Tabele   | xv        |
| <b>1 Polinomski ideali in afine raznoterosti</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1 Osnovni pojmi polinomskih idealov . . . . .  | 1         |
| 1.2 Gröbnerjeve baze . . . . .   | 4         |
| 1.2.1 Multideljenje polinomov . . . . .  | 4         |
| 1.2.2 Gröbnerjeva baza . . . . .   | 9         |
| 1.3 Osnove eliminacijskih idealov . . . . .  | 16        |
| 1.4 Korenski ideali . . . . .  | 21        |
| 1.5 Operacije na idealih in raznoterostih . . . . .  | 27        |
| 1.5.1 Vsota, produkt, presek in kvocient idealov . . . . .                                       | 27        |
| 1.5.2 Dekompozicija raznoterosti . . . . .   | 31        |
| 1.5.3 Dekompozicija raznoterosti z uporabo modularne aritmetike . . . . .                        | 34        |
| 1.5.4 Parametrizacija raznoterosti, problem implicitizacije in razsežnost raznoterosti . . . . . | 35        |
| 1.6 Sistem računske algebre <b>Singular</b> . . . . .  | 53        |
| 1.6.1 Kolobarji in Gröbnerjeve baze . . . . .  | 55        |
| 1.6.2 Eliminacija spremenljivk . . . . .   | 61        |
| 1.6.3 Korenski ideali . . . . .  | 62        |
| 1.6.4 Operacije na raznoterostih . . . . .   | 63        |
| <b>2 Nekatera poglavja iz teorije dinamičnih sistemov</b>  | <b>67</b> |
| 2.1 Uvod v teorijo dinamičnih sistemov . . . . .   | 67        |
| 2.2 Zvezni sistemi . . . . .   | 74        |
| 2.2.1 Linearizacija in fazni portreti . . . . .  | 76        |
| 2.2.2 Centralna mnogoterost . . . . .  | 84        |
| 2.2.3 Problem centra in fokusa v $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$ . . . . .                      | 87        |
| 2.2.4 Fokusne količine, Bautinov ideal in centralna raznoterost . . . . .                        | 93        |
| 2.2.5 Darbouxjevi integrali in integrirajoči množitelji v $\mathbb{C}^2$ . . . . .               | 97        |
| 2.2.6 Časovna reverzibilnost in posplošena reverzibilnost . . . . .                              | 108       |
| 2.2.7 Bifurkacije limitnih ciklov . . . . .  | 119       |
| 2.3 Diskretni sistemi . . . . .  | 121       |
| 2.3.1 Glavne definicije . . . . .  | 122       |
| 2.3.2 Limitni cikli in njihove bifurkacije za preslikave (2.130) . . . . .                       | 124       |

|                   |  |            |
|-------------------|--|------------|
| 2.3.3             | Fokusne količine preslikave (2.130)  | 127        |
| <b>3</b>          | <b>Primeri uporabe polinomskih idealov</b>   | <b>131</b> |
| 3.1               | Bautinova metoda za reševanje bifurkacijskih problemov   | 131        |
| 3.2               | Zvezni sistemi   | 133        |
| 3.2.1             | Fokusne količine in zgornja meja za cikličnost   | 134        |
| 3.2.2             | Problem centra in cikličnost kubičnega sistema   | 138        |
| 3.2.3             | Problem centra v sistemu četrte stopnje  | 146        |
| 3.2.4             | Problem centra v družini trirazsežnih sistemov NDE   | 161        |
| 3.3               | Diskretni sistemi  | 165        |
| 3.3.1             | Posplošitev izreka o cikličnosti komponent centralne raznoterosti in splošni rezultati o cikličnosti | 167        |
| 3.3.2             | Potrebni in zadostni pogoji za nastop centra   | 173        |
| 3.3.3             | Cikličnost centra  | 183        |
| <b>Dodatki</b>    |  | <b>191</b> |
| Dodatek A         |  | 191        |
| Dodatek B         |  | 196        |
| <b>Literatura</b> |  | <b>201</b> |

# Slike

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 1.1  | Presek raznoterosti $\mathbf{V}(x^2 + y^2 - z)$ in $\mathbf{V}(z - 2)$ .                        | 28  |
| 1.2  | Parametrizacija enotske krožnice v $\mathbb{R}^2$ .   | 36  |
| 1.3  | $\mathbf{V}(z - x^2 - y^2)$ .   | 43  |
| 1.4  | $\mathbf{V}(z^2 - x^2 - y^2)$ .   | 43  |
| 1.5  | $\mathbf{V}(x^2 - y^2z^2 + z^3)$ .  | 43  |
| 1.6  | $y = x^2$ .   | 44  |
| 1.7  | $z = x^3$ .   | 44  |
| 1.8  | $\mathbf{V}(y - x^2, z - x^3)$ .  | 44  |
|      |   |     |
| 2.1  | Limitni cikel.  | 72  |
| 2.2  | Sedlo in stabilni vozle.  | 81  |
| 2.3  | Nestabilni fokus in center.   | 81  |
| 2.4  | (a) stabilni limitni cikel, (b) nestabilni limitni cikel, (c)–(d) delno stabilni limitni cikel. | 82  |
| 2.5  | Homoklinična orbita $\Gamma$ , ki definira separatrični cikel.                                  | 83  |
| 2.6  | Heteroklinični orbiti $\Gamma_1$ in $\Gamma_2$ , ki definirata separatrični cikel.              | 83  |
| 2.7  | Primeri povezanih separatričnih ciklov.   | 84  |
| 2.8  | Nestabilna centralna mnogoterost na paraboloidu.  | 87  |
| 2.9  | Poincaréjeva sečna ploskev.   | 90  |
| 2.10 | Poincaréjeva sečna premica.   | 91  |
| 2.11 | Zrcalna simetrija.  | 109 |
| 2.12 | Časovna reverzibilnost.   | 109 |
| 2.13 | Fazni portret sistema (2.81).   | 110 |
| 2.14 | Fokus preslikave (2.130).   | 126 |
| 2.15 | Center preslikave (2.130).  | 126 |
|      |   |     |
| 3.1  | 4-kratna točka: tangentni primer.   | 171 |
| 3.2  | 4-kratna točka.   | 171 |



# Tabele

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 1.1 | Buchbergerjev algoritem. . . . .         | 12  |
| 2.1 | Algoritem za izračun $I_{sym}$ . . . . . | 114 |





# Poglavje 1

## Polinomski ideali in afine raznoterosti

Algebraična struktura kolobar, ki je definirana v dodatku A, ima lahko podstrukture (podkolobarje), ki so lahko tudi ideali. Ideali niso omejeni zgolj na polinomske kolobarje, zato bomo najprej pogledali nekaj splošnih definicij, preden se omejimo na polinomske kolobarje in njihove ideale ter zvezo med polinomskimi ideali in (afinimi) raznoterostmi.

V tem poglavju so na kratko razložene Gröbnerjeve baze in njihov pomen pri reševanju problemov, ki so povezani s polinomskimi ideali. Glavni problemi iz teorije dinamičnih sistemov, ki jih lahko rešujemo s teorijo polinomskih idealov, so: problem določitve singularnih točk (reševanje algebrskega sistema enačb), problem centra in fokusa v polinomskih sistemih, problem bifurkacij limitnih ciklov (iz centra ali fokusa), problem izohronosti oz. linearizabilnosti, problem  $p : -q$  resonantnega centra, problem (šibko) persistentnega centra, problem bicentra itd. Obravnavamo tudi operacije nad ideali in (njihovimi) raznoterostmi in problem ireducibilne dekompozicije raznoterosti (tudi v smislu približka - z uporabo tako imenovane modularne aritmetike). Na koncu poglavja je podan kratek pregled programskega orodja **Singular**, ki omogoča učinkovito obravnavo teh problemov.

V nadaljevanju bomo obravnavali *kolobarje polinomov*  $k[x_1, \dots, x_n]$  spremenljivk  $x_1, \dots, x_n$  nad poljem  $k$ . Elemente kolobarja  $k[x_1, \dots, x_n]$  imenujemo *polinomi*. Polinome  $p(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$  lahko razumemo tudi kot (skalarne) funkcije iz  $k^n$  v  $k$ .

### 1.1 Osnovni pojmi polinomskih idealov

V tem razdelku opišemo glavne značilnosti polinomov in njihovih raznoterosti.

*Polinom* spremenljivk  $x_1, \dots, x_n$  s *koefficienti* iz polja  $k$  je formalni izraz oblike

$$f = \sum_{\alpha \in S} a_{\alpha} x^{\alpha},$$

kjer je  $S$  končna podmnožica množice  $\mathbb{N}_0^n$ ,  $a_{\alpha} \in k$ , za  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $x^{\alpha}$  označuje *monom*  $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ . V večini primerov bo  $k$  enak  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  ali  $\mathbb{C}$ . Produkt  $a_{\alpha} x^{\alpha}$  se imenuje *člen* polinoma  $f$ . Množico vseh polinomov v spremenljivkah  $x_1, \dots, x_n$  s koefficienti iz  $k$  označimo s  $k[x_1, \dots, x_n]$ . Z običajnim seštevanjem in množenjem postane  $k[x_1, \dots, x_n]$  komutativni kolobar. Stopnja monoma  $x^{\alpha}$  je število  $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ . Stopnja člena  $a_{\alpha} x^{\alpha}$  je enaka stopnji monoma

$x^\alpha$ . Stopnjo polinoma  $f = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha x^\alpha$  označimo s  $st(f)$  in jo izračunamo kot maksimum  $|\alpha|$  po vseh monomih (z neničelnimi koeficienti  $a_\alpha$ ) polinoma  $f$ .

Če je podano polje  $k$  in naravno število  $n$ , potem množico

$$k^n = \{(a_1, \dots, a_n); a_1, \dots, a_n \in k\}$$

imenujemo  $n$ -razsežen *afini prostor*. Če je  $f = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha x^\alpha$  polinom in  $(a_1, \dots, a_n) \in k^n$ ,  $f(a_1, \dots, a_n)$  označuje element  $\sum_{\alpha} a_\alpha a_1^{\alpha_1} \cdots a_n^{\alpha_n}$  polja  $k$ . Tako je vsakemu polinomu  $f \in k[x_1, \dots, x_n]$  prirejena funkcija  $f : k^n \rightarrow k$ , definirana z

$$f : (a_1, \dots, a_n) \rightarrow f(a_1, \dots, a_n).$$

**Definicija 1.1.1** Naj bo  $k$  polje in naj bo  $f_1, \dots, f_s$  končno mnogo elementov kolobarja  $k[x_1, \dots, x_n]$ . *Afina raznoterost*, definirana s polinomi  $f_1, \dots, f_s$ , je množica

$$\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s) = \{(a_1, \dots, a_n) \in k^n : f_j(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ za } 1 \leq j \leq s\}.$$

*Afina raznoterost*  $V$  je podmnožica polja  $k^n$ , za katero obstaja končno mnogo polinomov tako, da je  $V = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)$ . *Podraznoterost* raznoterosti  $V$  je podmnožica  $V$ , ki je sama zase afina raznoterost.

Očitno je afina raznoterost  $\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s) \subset k^n$  množica rešitev sistema, ki sestoji iz končno mnogo polinomskih enačb iz  $k^n$ :

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_s(x_1, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Seveda je ta množica odvisna od  $k$  in je lahko tudi prazna; npr.  $\mathbf{V}(x^2 + y^2 + 1) = \emptyset$  za  $k = \mathbb{R}$ , vendar ne za  $k = \mathbb{C}$ , medtem ko je  $\mathbf{V}(x^2 + y^2 + 1, x, y) = \emptyset$  neodvisno od polja  $k$ .

Če sta  $V, W \subset k^n$  afine raznoterosti, sta tudi  $V \cup W$  in  $V \cap W$  afine raznoterosti (glej [27]).

Jasno je, da več različnih naborov polinomov lahko definira enako raznoterost. Da bi bolje razumeli koncept raznoterosti, potrebujemo pojem ideala.

**Definicija 1.1.2** *Ideal*  $I$  je podmnožica kolobarja  $k[x_1, \dots, x_n]$ , ki zadošča naslednjima pogojema:

- (a) če sta  $f, g \in I$ , potem je  $f + g \in I$ , in
- (b) če je  $f \in I$  in  $h \in k[x_1, \dots, x_n]$ , potem je  $h \cdot f \in I$ .

Naj bodo  $f_1, \dots, f_s$  elementi iz  $k[x_1, \dots, x_n]$ . Označimo z  $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$  množico vseh linearnih kombinacij polinomov  $f_1, \dots, f_s$  s koeficienti iz  $k[x_1, \dots, x_n]$ :

$$\langle f_1, \dots, f_s \rangle = \left\{ \sum_{j=1}^s h_j f_j : h_1, \dots, h_s \in k[x_1, \dots, x_n] \right\}.$$

Ni težko videti, da je množica  $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$  ideal kolobarja  $k[x_1, \dots, x_n]$ . Ideal  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$  imenujemo *ideal*, *generiran* s polinomi  $f_1, \dots, f_s$ , polinome  $f_1, \dots, f_s$  pa imenujemo *generatorji* ideala  $I$ . Posplošitev te ideje je sledeča: če je  $F$  katerakoli neprazna podmnožica kolobarja

$k[x_1, \dots, x_n]$  (lahko tudi neskončna) in če  $\langle F \rangle$  označuje množico vseh končnih linearnih kombinacij elementov iz  $F$  s koeficienti iz  $k[x_1, \dots, x_n]$ , je  $\langle F \rangle$  tudi ideal. Gre za ideal, generiran z elementi množice  $F$ , ki so njegovi generatorji. Hitro lahko vidimo analogijo z linearno algebro. Ideal  $\langle f_1, \dots, f_s \rangle := \langle \{f_1, \dots, f_s\} \rangle$  je podoben linearni lupini vektorjev  $v_1, \dots, v_s$  ( $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_s)$ ). Razlika med idealom in vektorskim podprostorom je v tem, da je ideal  $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$  množica vsot polinomov  $f_1, \dots, f_s$ , pomnoženih s polinomi iz kolobarja  $k[x_1, \dots, x_n]$ , linearna lupina  $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_s)$  pa je množica vsot vektorjev  $v_1, \dots, v_s$ , pomnoženih s skalarji iz polja  $k$ .

Poljuben ideal  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  je *končno generiran*, če obstajajo polinomi  $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$ , tako, da je  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ ; množica  $\{f_1, \dots, f_s\}$  se imenuje *baza* ideala  $I$ . Za dokaz naslednjega izreka glej [27].

**Izrek 1.1.3 (Hilbertov izrek o bazi)** *Vsak ideal v polinomskem kolobarju  $k[x_1, \dots, x_n]$  nad poljem  $k$  je končno generiran.*

Direktna posledica izreka 1.1.3 je, da se vsaka naraščajoča veriga idealov  $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots$  v polinomskem idealu nad  $k$  "stabilizira". To pomeni, da obstaja takšen  $m \geq 1$ , da za vsak  $j > m$  velja  $I_j = I_m$ . Kolobarjem, v katerih se vsaka strogo naraščajoča veriga stabilizira, pravimo noetherski<sup>1</sup> kolobarji.

Opazimo, da ima neki ideal lahko več baz (baza ideala ni enolično določena). V naslednjem razdelku bomo spoznali posebne baze ideala, ki jih imenujemo Gröbnerjeve baze.

V naslednji trditvi bomo videli, da je afina raznoterost  $V(f_1, \dots, f_s)$  odvisna le od ideala, ki ga generirajo polinomi  $f_1, \dots, f_s$ . Tako je ideal tisti, ki določa raznoterost, in ne določen izbor generatorjev tega ideala. Za dokaz glej [27].

**Trditev 1.1.4** *Naj bo  $\langle f_1, \dots, f_s \rangle = \langle g_1, \dots, g_m \rangle$ . Potem je  $V(f_1, \dots, f_s) = V(g_1, \dots, g_m)$ .*

Videli smo, kako končen izbor polinomov določa raznoterost. Nasprotno lahko dani raznoterosti naravno priredimo ideal, kot je razvidno iz naslednje definicije.

**Definicija 1.1.5** *Naj bo  $V \subset k^n$  afina raznoterost. Ideal raznoterosti  $V$  je množica*

$$I(V) = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] : f(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ za vse } (a_1, \dots, a_n) \in V\}.$$

Ideal, ki ga naravno povezujemo z raznoterostjo  $V$ , dopušča naslednjo relacijo v družini idealov, ki izhajajo iz polinomov v kateremkoli sistemu enačb, ki definirajo  $V$ .

**Trditev 1.1.6 ([27])** *Naj bodo  $f_1, \dots, f_s$  elementi kolobarja  $k[x_1, \dots, x_n]$ . Potem velja:*

$$\langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset I(V(f_1, \dots, f_s)).$$

Če  $V$  ni samo podmnožica  $k^n$ , ampak je raznoterost, ideal  $I(V)$ , ki je naravno definiran z  $V$ , enolično, določa  $V$ :

**Trditev 1.1.7 ([27])** *Naj bosta  $V$  in  $W$  afini raznoterosti v  $k^n$ . Tedaj veljata naslednji trditvi:*

1.  $V \subset W$  natanko tedaj, ko je  $I(W) \subset I(V)$ ;

<sup>1</sup>Poimenovani po Emmy Noether (1882-1935), nemški matematičarki, znani po rezultatih v abstraktni algebri in teoretični fiziki.

2.  $V = W$  natanko tedaj, ko je  $\mathbf{I}(W) = \mathbf{I}(V)$ .

Če je  $V = \{(0, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$ , je  $\mathbf{I}(V)$  množica vseh polinomov dveh spremenljivk brez konstantnega člana. Izrazimo  $V$  kot  $\mathbf{V}(f_1, f_2)$  na dva različna načina. Če izberemo  $f_1 = x$  in  $f_2 = y$ , potem je  $V = \mathbf{V}(f_1, f_2)$  in ideal  $I = \langle x, y \rangle$  je enak idealu  $\mathbf{I}(V)$ , če pa izberemo  $f_1 = x^2$  in  $f_2 = y$ , je  $V = \mathbf{V}(f_1, f_2)$ , toda ideal  $J = \langle x^2, y \rangle$  sestavlja množica elementov iz  $\mathbb{R}[x, y]$ , v kateri je vsak člen deljiv z  $x^2$  ali  $y$ ; zato velja:  $J \subsetneq \mathbf{I}(V)$ . Opazimo, da ima tako ideal  $I$  kot tudi ideal  $J$  lastnost, da je  $V$  natanko množica skupnih ničel vseh njunih elementov, vendar  $I \neq J$ .

Potem ko spoznamo pojem ideala in njegove lastnosti, se pojavi vprašanje: *kako ugotoviti, ali je dani polinom  $f \in k[x_1, \dots, x_n]$  element ideala  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$* . To je tako imenovani problem pripadnosti idealu, ki je eden glavnih problemov računske algebre in se glasi takole:

**Problem pripadnosti idealu:** Naj bo  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  ideal in  $f$  element iz  $k[x_1, \dots, x_n]$ . Odločiti je treba ali je  $f$  element ideala  $I$  ali ne.

Odgovor na to vprašanje dajejo Gröbnerjeve baze, s katerimi se bomo podrobneje seznanili v naslednjem razdelku. Prav tako bomo videli, da Gröbnerjeve baze precej pomagajo pri reševanju sistemov polinomskih enačb.

## 1.2 Gröbnerjeve baze

V prejšnjem razdelku smo povedali, da poiskati afino raznoterost  $\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)$ , pomeni rešiti sistem polinomskih enačb (1.1).

Kot vemo, imamo v kolobarju polinomov ene spremenljivke formule za izračun ničel polinomov prve, druge, tretje in četrte stopnje. Za polinome stopnje pet in več takšne formule ne obstajajo [55] in običajno uporabimo numerične metode za približen izračun ničel danega polinoma. Seveda pa problem postane še zahtevnejši, ko je enačb še več in so polinomi, ki nastopajo v enačbah, odvisni od več spremenljivk.

Učinkovitih metod za reševanje generičnih sistemov oblike (1.1) ni bilo, dokler ni sredi šestdesetih let prejšnjega stoletja Bruno Buchberger (glej [12]) vpeljal teorije Gröbnerjevih baz, ki je sedaj temelj moderne računske algebre. Kot bomo videli v nadaljevanju, je koncept Gröbnerjevih baz učinkovita metoda za hitrejše in enostavnejše iskanje rešitev sistema polinomskih enačb več spremenljivk. Najprej se bomo seznanili s pojmom multideljenja polinomov, ko dani polinom iz  $k[x_1, \dots, x_n]$  delimo z urejeno množico polinomov. Nato bomo spoznali pojem Gröbnerjeve baze in rešitev prej omenjenih problemov: problem pripadnosti idealu in problem iskanja rešitev polinomskega sistema (1.1).

### 1.2.1 Multideljenje polinomov

Najprej obravnavajmo kolobar polinomov, odvisnih od ene spremenljivke. Pomembna lastnost tega kolobarja je obstoj algoritma za deljenje: naj bosta dana polinoma  $f$  in  $g$  iz  $k[x]$ ,  $g \neq 0$ , potem obstajata enolična elementa  $q$  in  $r$  iz  $k[x]$ , *kvocient* in *ostanek*, tako da je  $f = qg + r$  in pri tem velja, da je bodisi  $r = 0$  ali  $st(r) < st(g)$ . Deljenje  $f$  z  $g$  pomeni, da izrazimo  $f$  kot  $f = qg + r$ . Pravimo, da  $g$  deli  $f$ , če je  $r = 0$ , in to zapišemo tudi kot  $g \mid f$ . Največji skupni delitelj dveh polinomov iz  $k[x]$  lahko preprosto določimo z uporabo Evklidovega algoritma, ki v povezavi s Hilbertovim izrekom o bazi pokaže, da je vsak ideal v  $k[x]$  generiran z enim elementom<sup>2</sup>. Problem

<sup>2</sup>Ideal, ki ga generira en element, se imenuje *glavni ideal* in kolobar, v katerem je vsak ideal glavni, je *glavni kolobar*.

pripadnosti idealu je rešen: ko sta dana ideal  $I$  in polinom  $f$ , najprej najdemo generator  $g$  ideala  $I$ , potem delimo  $f$  z  $g$  in preverimo, ali je ostanek enak nič ali ne.

V kolobarjih polinomov več spremenljivk želimo izpeljati podoben postopek, t.j. izvesti deljenje in določiti ostanek. Vendar so stvari zapletenejše, ker idealov ne generirajo le posamezni polinomi. Zato moramo oblikovati postopek za deljenje polinoma  $f$  z množico polinomov  $F$ . Algoritem deljenja je sicer možno posplošiti na elemente iz  $k[x_1, \dots, x_n]$ , vendar nastopi nova ovira, saj ostanek pri deljenju ni nujno enoličen.

Za opis algoritma deljenja v  $k[x_1, \dots, x_n]$  najprej določimo urejenost členov polinoma. V primeru ene spremenljivke je urejenost naravna glede na stopnjo. Če je spremenljivk več, lahko uporabimo različne urejenosti. Zato bomo definirali splošni pojem urejenosti členov in predstavili nekaj pogostejše uporabljenih urejenosti členov. Zaradi naravnega izomorfizma med monomi  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$  in  $n$ -tericami  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  je dovolj, da uredimo elemente množice  $\mathbb{N}_0^n$ , saj, kot v primeru ene spremenljivke, koeficienti členov v urejenosti ne igrajo nobene vloge. Spomnimo se, da je *delna urejenost*  $\succ$  na množici  $S$  dvočlena relacija, ki je refleksivna ( $a \succ a$ , za vse  $a \in S$ ), antisimetrična ( $a \succ b$  in  $b \succ a$ , samo če  $a = b$ ) in tranzitivna (iz  $a \succ b$  in  $b \succ c$  sledi  $a \succ c$ ). *Popolna urejenost*  $>$  na  $S$  je delna urejenost, v kateri sta poljubna dva elementa primerljiva: za vsaka  $a, b \in S$  velja  $a > b$  ali  $b > a$ .

**Definicija 1.2.1** *Urejenost členov v  $k[x_1, \dots, x_n]$  je popolna urejenost  $>$  v  $\mathbb{N}_0^n$  z naslednjima lastnostima:*

1. za vse  $\alpha, \beta$  in  $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$  velja: če je  $\alpha > \beta$ , je  $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ , in
2.  $\mathbb{N}_0^n$  je z urejenostjo  $>$  dobro urejena: za vsako neprazno podmnožico  $S \subseteq \mathbb{N}_0^n$  obstaja najmanjši element  $\mu \in S$  (za vse  $\alpha \in S \setminus \{\mu\}$  je  $\alpha > \mu$ ).

Monomi  $\{x^\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^n\}$  so potem urejeni po svojih eksponentih, tako da je  $x^\alpha > x^\beta$  natanko tedaj, ko je  $\alpha > \beta$ . Zavedati se moramo, da urejenost členov  $>$  v  $k[x_1, \dots, x_n]$  ne ureja vseh elementov  $k[x_1, \dots, x_n]$ , ampak samo podmnožico monomov.

Zaporedje  $\alpha_j$  v  $\mathbb{N}_0^n$  je *strogo padajoče*, če za vsak  $j$  velja  $\alpha_j > \alpha_{j+1}$  in  $\alpha_j \neq \alpha_{j+1}$ .

**Trditev 1.2.2** *Popolna urejenost  $>$  množice  $\mathbb{N}_0^n$  je dobra urejenost množice  $\mathbb{N}_0^n$  natanko tedaj, ko se vsako strogo padajoče zaporedje v  $\mathbb{N}_0^n$  konča.*

**Dokaz.** Če obstaja strogo padajoče zaporedje  $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \dots$ , ki se ne konča, potem je  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$  neprazna podmnožica množice  $\mathbb{N}_0^n$  brez minimalnega elementa in  $>$  ni dobra urejenost na  $\mathbb{N}_0^n$ . Obratno, če  $>$  ni dobra urejenost na  $\mathbb{N}_0^n$ , obstaja neprazna podmnožica  $A \subseteq \mathbb{N}_0^n$ , ki nima minimalnega elementa. Naj bo  $\alpha_1$  poljubni element množice  $A$ . Ker ni minimalen, obstaja  $\alpha_2 \in A$ ,  $\alpha_2 \neq \alpha_1$ , tako da je  $\alpha_1 > \alpha_2$ . Z nadaljevanjem procesa dobimo strogo padajoče zaporedje, ki se ne konča. ■

Zdaj definiramo tri najpogostejše uporabljene urejenosti členov v polinomskih kolobarjih.

**Definicija 1.2.3** *Naj bosta  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  in  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  elementa iz  $\mathbb{N}_0^n$ .*

1. *Leksikografska urejenost:*  $\alpha >_{lex} \beta$  natanko tedaj, ko je prva komponenta (gledano z leve proti desni)  $n$ -terice  $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$  pozitivna.

2. Stopenjsko leksikografska urejenost:  $\alpha >_{deglex} \beta$  natanko tedaj, ko je

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j > |\beta| = \sum_{j=1}^n \beta_j \text{ ali } |\alpha| = |\beta| \text{ in } \alpha >_{lex} \beta.$$

3. Stopenjsko inverzna leksikografska urejenost:  $\alpha >_{degrev} \beta$  natanko tedaj, ko je  $|\alpha| > |\beta|$  ali  $|\alpha| = |\beta|$ , in je prva neničelna (gledano z desne proti levi)  $n$ -terica  $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$  negativna.

Na primer, če je  $\alpha = (1, 4, 4, 2)$  in  $\beta = (1, 2, 6, 2)$ , je  $\alpha$  večji od  $\beta$  glede na vse tri urejenosti. Ta primer kaže tudi, da stopenjsko inverzna leksikografska urejenost ni preprosto inverz stopenjsko leksikografske urejenosti.

Za dano urejenost členov  $>$  na  $k[x_1, \dots, x_n]$  rečemo, da je  $a_\alpha x^\alpha > a_\beta x^\beta$  natanko tedaj, ko je  $\alpha > \beta$ . Poudarimo, da zgornje definicije urejenosti  $>$  temeljijo na urejenosti spremenljivk  $x_1 > \dots > x_n$ .

Ta urejenost mora biti eksplicitno določena, kadar uporabljamo neindeksirane spremenljivke. Na primer, če v  $k[x, y]$  izberemo  $y > x$ , potem  $y^5 >_{lex} x^9$  (ker  $(5, 0) >_{lex} (0, 9)$ ) in  $xy^4 >_{deglex} x^2y^3$  (ker  $4 + 1 = 3 + 2$  in  $(4, 1) >_{lex} (3, 2)$ ). Zadnja dva monoma bomo običajno zapisali kot  $y^4x$  in  $y^3x^2$ , da pokažemo izbrano urejenost spremenljivk.

Če izberemo urejenost členov  $>$  na  $k[x_1, \dots, x_n]$ , je poljuben neničelni  $f \in k[x_1, \dots, x_n]$  glede na  $>$  zapisan v standardni obliki kot

$$f = a_1 \mathbf{x}^{\delta_1} + a_2 \mathbf{x}^{\delta_2} + \dots + a_s \mathbf{x}^{\delta_s}, \quad (1.2)$$

kjer je  $\delta_j = (\delta_{j1}, \dots, \delta_{jn})$ ,  $a_j \neq 0$  za vse indekse  $j = 1, \dots, s$  in  $\delta_1 > \delta_2 > \dots > \delta_s$ .

**Definicija 1.2.4** Naj bo določena urejenost členov na  $k[x_1, \dots, x_n]$  in naj bo  $f$  neničelni element iz  $k[x_1, \dots, x_n]$ , zapisan v standardni obliki (1.2).

1. Vodilni člen  $LT(f)$  polinoma  $f$  je člen  $LT(f) = a_1 \mathbf{x}^{\delta_1}$ .
2. Vodilni monom  $LM(f)$  polinoma  $f$  je monom  $LM(f) = \mathbf{x}^{\delta_1}$ .
3. Vodilni koeficient  $LC(f)$  polinoma  $f$  je koeficient  $LC(f) = a_1$ .

Koncept deljenja polinomov z eno spremenljivko ima očitno posplošitev v primeru deljenja monomov: pravimo, da monom  $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$  deli monom  $x^\beta = x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}$ , zapisano  $\mathbf{x}^\alpha \mid \mathbf{x}^\beta$ , natanko tedaj, ko je  $\beta_j \geq \alpha_j$  za vse  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ . V takšnem primeru zapis  $\mathbf{x}^\beta / \mathbf{x}^\alpha$  določa monom  $x_1^{\beta_1 - \alpha_1} \dots x_n^{\beta_n - \alpha_n}$ . V kolobarju  $k[x_1, \dots, x_n]$  deljenje polinoma  $f$  z neničelnimi polinomi  $\{f_1, \dots, f_s\}$  pomeni zapis polinoma  $f$  v obliki

$$f = u_1 f_1 + \dots + u_s f_s + r,$$

kjer so  $u_1, \dots, u_s, r \in k[x_1, \dots, x_n]$ , in bodisi  $r = 0$  ali  $st(r) \leq st(f)$  (neenakost ni stroga). Najpomembnejši del tega izraza je ostanek  $r$  in ne uteži  $u_j$ , kajti kontekst, v katerem nameravamo uporabiti koncept deljenja, je, da so  $f_\alpha$  generatorji ideala  $I$  in želimo, da bi deljenje dalo ničelni ostanek  $r$  natanko tedaj, ko je  $f$  element ideala  $I$ .

Najprej izberemo urejenost členov kolobarja  $k[x_1, \dots, x_n]$ . Osrednja ideja algoritma za deljenje polinoma več spremenljivk z množico polinomov je enaka kot v primeru deljenja polinomov ene spremenljivke: zmanjšamo vodilni člen polinoma  $f$  (kot je določeno z izbrano urejenostjo členov) z množenjem s primernim kofaktorjem in odštevanjem.

V nadaljevanju naj bo  $F = \{f_1, \dots, f_s\}$ .

**Definicija 1.2.5** (i) Za polinome  $f, g, h \in k[x_1, \dots, x_n]$ , kjer je  $g \neq 0$ , pravimo, da se  $f$  reducira na  $h$  po modulu  $g$ :

$$f \xrightarrow{g} h,$$

natanko tedaj, ko  $LM(g)$  deli neki neničelni člen  $X$ , ki se pojavi v  $f$  in velja

$$h = f - \frac{X}{LT(g)}g. \quad (1.3)$$

(ii) Za polinome  $f, f_1, \dots, f_s, h \in k[x_1, \dots, x_n]$ , kjer je  $f_j \neq 0$  za vse  $1 \leq j \leq s$ , pravimo, da se  $f$  reducira na  $h$  po modulu  $F$ :

$$f \xrightarrow{F} h$$

natanko tedaj, ko obstaja zaporedje indeksov  $j_1, j_2, \dots, j_m \in \{1, \dots, s\}$  in zaporedje polinomov  $h_1, \dots, h_{m-1} \in k[x_1, \dots, x_n]$  tako, da je

$$f \xrightarrow{f_{j_1}} h_1 \xrightarrow{f_{j_2}} h_2 \xrightarrow{f_{j_3}} \dots \xrightarrow{f_{j_{m-1}}} h_{m-1} \xrightarrow{f_{j_m}} h.$$

**Opomba 1.2.6** Z zaporedno uporabo dela (i) definicije 1.2.5 vidimo, da iz  $f \xrightarrow{F} h$  sledi obstoj takih kofaktorjev  $u_j \in k[x_1, \dots, x_n]$ , da je  $f = u_1 f_1 + \dots + u_s f_s + h$ . Zato se po definiciji 1.1.8 iz [114]  $f$  reducira na  $h$  po modulu  $F$  samo, če je  $f \equiv h \pmod{\langle f_1, \dots, f_s \rangle}$ . Nasprotno ne velja.

**Definicija 1.2.7** Predpostavimo, da so  $f, f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$ , kjer je  $f_j \neq 0$  za vse  $1 \leq j \leq s$ . Tedaj velja:

1. Polinom  $r \in k[x_1, \dots, x_n]$  je reduciran glede na  $F$ , če je  $r = 0$  ali pa noben monom, ki se pojavi v polinomu  $r$ , ni deljiv z nobenim elementom množice  $\{LM(f_1), \dots, LM(f_s)\}$ .
2. Polinom  $r \in k[x_1, \dots, x_n]$  je ostanek pri deljenju polinoma  $f$  glede na množico  $F$ , če je  $f \xrightarrow{F} r$  in je  $r$  reduciran glede na  $F$ .

Algoritem deljenja polinomov več spremenljivk je direktna poslošitev postopka, ki se uporablja pri deljenju polinomov v kolobarju ene spremenljivke. Da bi delili  $f$  z urejeno množico  $F = \{f_1, \dots, f_s\}$ , uporabimo iterativni postopek in na vsakem koraku izvedemo deljenje polinoma z enim izmed polinomov množice  $F$ . Običajno je množica deliteljev  $F$  predstavljena v nekem posebnem zaporedju in moramo zato predhodno na neki način urediti elemente; izbrano zaporedje lahko vpliva na končni rezultat. Pri prvem koraku v dejanskem postopku deljenja je "aktivni delitelj" prvi element množice  $F$ , recimo mu  $f_j$ , katerega vodilni člen deli vodilni člen polinoma  $f$ ; v tem koraku nadomestimo  $f$  s polinomom  $h$  iz (1.3), ko je  $X = LT(f)$  in  $g = f_j$  in posledično (delno) reduciramo  $f$  glede na polinom  $f_j$ . Pri vsakem naslednjem koraku je aktivni delitelj prvi element iz  $F$ , katerega vodilni člen deli vodilni člen trenutnega polinoma  $h$ ; pri tem koraku podobno  $h$  nekoliko reduciramo z uporabo aktivnega delitelja. Če na kateri stopnji deljenje ni mogoče, dodamo vodilni člen polinoma  $h$  k ostanku in poskusimo z enakim postopkom ter nadaljujemo dokler nobeno deljenje ni več mogoče. Sedaj si oglejmo primer deljenja polinoma z urejeno množico dveh polinomov v  $k[x, y]$ .

**Primer 1.2.8** Delimo polinom  $f = x^2y + xy^2 + y^2$  z urejeno množico polinomov  $F = \{f_1, f_2\}$ , kjer je  $f_1 = xy - 1$  in  $f_2 = y^2 - 1$ . Pri tem uporabimo leksikografsko urejenost, upoštevajoč  $x > y$ .

Če  $f$  delimo z urejeno množico  $F$ , pričakujemo rezultat oblike  $f = q_1f_1 + q_2f_2 + r$ . Začetna shema deljenja je oblike:

$$\begin{array}{r} q_1 : \\ q_2 : \\ f_1 : xy - 1 \quad | \quad x^2y + xy^2 + y^2 \\ f_2 : y^2 - 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} r \\ \hline \end{array}$$

Oznaka  $\overline{f(x)}$  pomeni, da je  $f(x)$  polinom, ki ga delimo z množico polinomov.

Vodilni člen  $LT(f_1) = xy$  deli vodilni člen  $LT(f) = x^2y$ , zato delimo  $x^2y$  z  $xy$  in dobimo  $x$ , ki ga zapišemo h kvocientu  $q_1$ . Nato pomnožimo  $x$  z  $f_1$  in rezultat podpišemo pod polinom  $f$ , od katerega ta rezultat tudi odštejemo, kot prikazuje naslednja shema deljenja:

$$\begin{array}{r} q_1 : x \\ q_2 : \\ f_1 : xy - 1 \quad | \quad x^2y + xy^2 + y^2 \\ f_2 : y^2 - 1 \quad | \quad x^2y - x \\ \hline xy^2 + x + y^2 \end{array} \quad \begin{array}{r} r \\ \hline \end{array}$$

Dobimo polinom  $xy^2 + x + y^2$ , katerega vodilni člen je deljiv tako z  $LT(f_1)$  kot tudi z  $LT(f_2)$ . Ker pa je v urejeni množici  $F$ , s katero delimo, najprej naveden  $f_1$ , delimo  $xy^2$  z  $xy$  in dobimo  $y$ , ki ga ponovno pripišemo h  $q_1$ . Postopek ponovimo in dobimo polinom  $x + y^2 + y$ , katerega vodilni člen  $x$  ni deljiv niti z  $LT(f_1)$  niti z  $LT(f_2)$ , zato  $x$  pripišemo k ostanku. Sedaj dobimo  $y^2 + y$ , katerega vodilni člen delimo z  $LT(f_2) = y^2$  in dobimo kvocient 1, ki ga pripišemo h  $q_2$ . Na koncu dobimo polinom  $y + 1$ , katerega vodilni člen  $y$  spet ni deljiv niti z  $LT(f_1)$  niti z  $LT(f_2)$ , zato ga pripišemo v desni stolpec kot ostanek. Ostane polinom 1, ki ga prav tako pripišemo k ostanku. Tako je polinom  $x + y + 1$  (končni) ostanek  $r$  pri tem deljenju. Celotna shema deljenja je prikazana spodaj.

$$\begin{array}{r} q_1 : x + y \\ q_2 : 1 \\ f_1 : xy - 1 \quad | \quad x^2y + xy^2 + y^2 \\ f_2 : y^2 - 1 \quad | \quad x^2y - x \\ \hline xy^2 + x + y^2 \\ \hline xy^2 - y \\ \hline x + y^2 + y \\ \hline y^2 + y \quad \rightarrow x \\ \hline y^2 - 1 \\ \hline y + 1 \\ \hline 1 \quad \rightarrow x + y \\ 0 \quad \rightarrow x + y + 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} r \\ \hline \end{array}$$

Torej je

$$f = (x + y) \cdot f_1 + 1 \cdot f_2 + x + y + 1.$$

Po drugi strani, če zamenjamo vrstni red polinomov  $f_1$  in  $f_2$  v  $F$ , torej če delimo z urejeno množico  $\{f_2, f_1\}$  po istem postopku kot zgoraj, dobimo

$$f = xf_1 + (x + 1)f_2 + 2x + 1.$$

Za dokaz naslednjega izreka glej [114].



**Izrek 1.2.9** Naj bosta dana urejena množica  $F = \{f_1, \dots, f_s\} \subset k[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$  neničelnih polinomov in polinom  $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ . Algoritem deljenja z več spremenljivkami ustvari polinome  $u_1, \dots, u_s, r \in k[x_1, \dots, x_n]$ , tako da je

$$f = u_1 f_1 + \dots + u_s f_s + r, \quad (1.4)$$

kjer je  $r$  ostanek polinoma  $f$  glede na  $F$  in velja

$$LM(f) = \max \{LM(u_1)LM(f_1), \dots, LM(u_s)LM(f_s), LM(r)\}. \quad (1.5)$$

### 1.2.2 Gröbnerjeva baza

V prejšnjem podrazdelku smo videli (glej primer 1.2.8), da se pri spremembi vrstnega reda polinomov  $f_1$  in  $f_2$  v  $F$  kvocient in ostanek spremenita. Torej kvocient in ostanek pri multideljenju nista enolična. Odvisna sta tako od ureditve polinomov v množici deliteljev kakor tudi od izbire urejenosti členov. Vendar, kar je še slabše z vidika reševanja problema pripadnosti idealu, četudi ne spremenimo urejenosti členov, lahko obstaja element ideala, katerega ostanek je lahko nič glede na eno ureditev deliteljev in različen od nič glede na drugo ureditev deliteljev. To prikazuje naslednji primer.

**Primer 1.2.10** V kolobarju  $\mathbb{R}[x, y]$  fiksiramo leksikografsko urejenost členov, upoštevajoč  $x > y$ , in obravnavamo polinom  $f = x^2y + xy + 2x + 2$ . Ko uporabimo algoritem deljenja z več spremenljivkami za reduciranje polinoma  $f$  po modulu urejene množice  $\{f_1 = x^2 - 1, f_2 = xy + 2\}$ , dobimo

$$f = yf_1 + f_2 + (2x + y).$$

Ker je pripadajoči ostanek  $2x + y$  različen od nič, bi lahko domnevali, da  $f$  ni v idealu  $\langle f_1, f_2 \rangle$ . Toda če spremenimo zaporedje deliteljev, tako da je  $f_2$  prvi, dobimo

$$f = 0f_1 + (x + 1)f_2 + 0 = (x + 1)f_2, \quad (1.6)$$

kar pove, da je  $f \in \langle f_1, f_2 \rangle$ .

Poglejmo še primer, kjer vrstni red deliteljev ne vpliva na ostanek.

**Primer 1.2.11** V kolobarju  $\mathbb{R}[x, y]$  fiksiramo leksikografsko urejenost členov, upoštevajoč  $x > y$ . Potem je  $2y = 1(x + y) + (-1)(x - y) \in \langle x + y, x - y \rangle$ , ker pa  $LT(x + y) = LT(x - y) = x$  ne deli  $2y$ , je ostanek pri deljenju  $2y$  z  $\{x + y, x - y\}$  enoličen:  $2y$ . Tako ima za vsako ureditev deliteljev algoritem deljenja z več spremenljivkami enak neničelni ostanek.

Vidimo, da smo "izgubili orodje", ki smo ga imeli v kolobarju polinomov ene spremenljivke, za razreševanje problema pripadnosti idealu. Na srečo pa ni vse izgubljeno. Medtem ko algoritem deljenja polinomov z več spremenljivkami na splošno ne more biti izboljššan, je znano, da za ideale, podane v obliki generirajočih množic, vedno velja, da je  $f \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle$  natanko tedaj, ko je ostanek  $f$  pri deljenju z  $\{f_1, \dots, f_s\}$  enak nič. Posebna generirajoča množica, s katero lahko rešimo problem pripadnosti idealu, se imenuje Gröbnerjeva baza ali standardna baza. Je glavno orodje in osnova mnogih algoritmov računske algebre in algebraične geometrije. Da bi motivirali definicijo Gröbnerjeve baze, spet obravnavajmo primer 1.2.10. V njem smo videli, da

v kolobarju  $k[x, y]$  glede na leksikografsko urejenost, upoštevajoč  $x > y$ , za  $f = x^2y + xy + 2x + 2$ ,  $f_1 = x^2 - 1$  in  $f_2 = xy + 2$ , velja

$$f \xrightarrow{\{f_1, f_2\}} 2x + y.$$

Toda po (1.6) je  $f \in \langle f_1, f_2 \rangle$  in mora biti tudi ostanek  $r = 2x + y$  v  $\langle f_1, f_2 \rangle$ . Problem nastopi, ker vodilni člen ostanka  $r$  ni deljiv niti z  $LM(f_1)$  niti z  $LM(f_2)$ , in to ustavi postopek deljenja v algoritmu deljenja polinoma z več spremenljivkami. Problem je v tem, da ideal  $\langle f_1, f_2 \rangle$  vsebuje elemente, katerih vodilni člen ni deljiv z vodilnim členom nobenega elementa iz izbrane baze ideala.

Če bi za poljuben ideal  $I$  imeli bazo  $B$ , tako da bi bil vodilni člen vsakega polinoma v  $I$  deljiv z vodilnim členom nekega polinoma iz  $B$ , bi algoritem deljenja polinomov z več spremenljivkami po tej bazi dal rešitev za problem pripadnosti idealu. Za tako bazo  $B$  bi veljalo, da je polinom  $f$  v idealu  $I$  natanko tedaj, ko je ostanek polinoma  $f$  pri deljenju z elementi baze  $B$  glede na katerokoli urejenost enak nič. To je glavna ideja Gröbnerjeve baze.

**Definicija 1.2.12** *Gröbnerjeva baza (imenovana tudi standardna baza) ideala  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  je končna neprazna podmnožica  $G = \{g_1, \dots, g_m\}$  ideala  $I \setminus \{0\}$  z lastnostjo, da za vsak neničelni  $f \in I$  obstaja takšen  $g_j \in G$ , da  $LT(g_j) | LT(f)$ .*

V definiciji je nakazano, da pojma Gröbnerjeve baze ne obravnavamo za ničelni ideal, niti ga ne bomo potrebovali. Z Gröbnerjevo bazo ponovno pridobimo pomembno lastnost enoličnosti ostanka, ki smo jo imeli v  $k[x]$ .

**Trditev 1.2.13** *Naj bo  $G$  Gröbnerjeva baza neničelnega ideala  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  in naj bo  $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ . Potem je ostanek  $f$  glede na  $G$  enoličen.*

**Dokaz.** Recimo, da  $f \xrightarrow{G} r_1$  in  $f \xrightarrow{G} r_2$  in sta  $r_1$  in  $r_2$  reducirana glede na  $G$ . Ker sta  $f - r_1$  in  $f - r_2$  v  $I$ , je tudi razlika  $r_1 - r_2 \in I$ . Po definiciji 1.2.7 je razlika  $r_1 - r_2$  reducirana glede na  $G$ . Vendar pa je potem po definiciji 1.2.12 razlika  $r_1 - r_2 = 0$ , saj je  $r_1 - r_2 \in I$ . ■

**Definicija 1.2.14** *Naj bo  $I$  ideal in  $f$  polinom v  $k[x_1, \dots, x_n]$ . Reducirati  $f$  po modulu ideala  $I$  pomeni poiskati enolični ostanek polinoma  $f$  pri deljenju z neko Gröbnerjevo bazo  $G$  ideala  $I$ . Če je dan neničelni polinom  $g$ , redukcija  $f$  po modulu  $g$  pomeni, da  $f$  reduciramo po modulu ideala  $\langle g \rangle$ .*

Trditev 1.2.13 zagotavlja, da je proces jasno definiran, ko enkrat izberemo Gröbnerjevo bazo, čeprav je dobljeni ostanek odvisen od navedene Gröbnerjeve baze.

Naj bo sedaj  $S$  podmnožica kolobarja  $k[x_1, \dots, x_n]$  (lahko tudi ideal). Z  $LT(S)$  označimo množico vodilnih členov polinomov, ki sestavljajo  $S$ , in z  $\langle LT(S) \rangle$  ideal, ki ga ustvari množica  $LT(S)$  (t. j. množica vseh končnih linearnih kombinacij elementov iz  $LT(S)$  s koeficienti iz kolobarja  $k[x_1, \dots, x_n]$ ). Naslednji izrek podaja glavne značilnosti Gröbnerjevih baz. Omenimo, da izraz  $f \xrightarrow{F} h$  pomeni, da obstaja niz redukcij z uporabo neurejene množice deliteljev  $F$ , ki vodi od  $f$  do  $h$ , ki ni nujno ostanek polinoma  $f$  glede na  $F$ . To je v nasprotju z algoritmom deljenja polinomov v kolobarju polinomov z več spremenljivkami, kjer mora biti  $F$  urejena množica in določeno izbrano zaporedje določa vrstni red redukcij, ki pripeljejo polinom  $f$  do ostanka  $r$ .

**Izrek 1.2.15** *Naj bo  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  neničelni ideal in naj bo  $G = \{g_1, \dots, g_s\}$  končna množica neničelnih elementov iz  $I$  ter  $f$  poljuben element iz  $k[x_1, \dots, x_n]$ . Potem so naslednje trditve ekvivalentne:*

(i)  $G$  je Gröbnerjeva baza ideala  $I$ ;

(ii)  $f \in I \iff f \xrightarrow{G} 0$ ;

(iii)  $f \in I \iff f = \sum_{j=1}^s u_j g_j$  in  $LM(f) = \max_{1 \leq j \leq s} (LM(u_j)LM(g_j))$ ;

(iv)  $\langle LT(G) \rangle = \langle LT(I) \rangle$ .

**Dokaz.** (i)  $\Rightarrow$  (ii) Po izreku 1.2.9 obstaja  $r \in k[x_1, \dots, x_n]$ , tako da  $f \xrightarrow{G} r$  in  $r$  je reduciran glede na  $G$ . Če je  $f \in I$ , potem je  $r \in I$ . Zato je po definiciji Gröbnerjeve baze in dejstvu, da je  $r$  reduciran glede na  $G$ , ostanek  $r = 0$ . Nasprotno, če je  $f \xrightarrow{G} 0$ , potem je očitno  $f \in I$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Recimo, da je  $f \in I$ . Potem po (ii) obstaja niz redukcij

$$f \xrightarrow{g_1} h_1 \xrightarrow{g_2} h_2 \xrightarrow{g_3} \dots \xrightarrow{g_{m-1}} h_{m-1} \xrightarrow{g_m} 0,$$

kar pomeni, da je  $f = u_1 g_1 + \dots + u_s g_s$  za neke  $u_j \in k[x_1, \dots, x_n]$ . Kot je opisano v dokazu (glej [114]) izreka 1.2.9, velja enakost, analogna enačbi

$$\begin{aligned} \max \{LM(u_1)LM(f_1), \dots, LM(u_s)LM(f_s), LM(h)\} \\ = \max \{LM(u_1)LM(f_1), \dots, LM(u_s)LM(f_s)\} \end{aligned} \quad (1.7)$$

na vsakem koraku reduciranja in tako enakost v (iii) drži. Obratna implikacija v (iii) je očitna.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) Ker je  $G \subset I$ , inkluzija  $\langle LT(G) \rangle \subset \langle LT(I) \rangle$  vedno drži in tako moramo preveriti, da je  $\langle LT(I) \rangle \subset \langle LT(G) \rangle$  pri pogoju, da velja trditev (iii). Inkluzija  $\langle LT(I) \rangle \subset \langle LT(G) \rangle$  je nakazana z implikacijo: če je  $f \in I$ , potem je  $LT(f) \in \langle LT(G) \rangle$ . Zato domnevamo, da je  $f \in I$ . Potem iz pogoja za  $LM(f)$  v (iii) neposredno sledi, da je  $LT(f) = \sum_j LT(u_j)LT(g_j)$ , kjer vsota poteka po vseh indeksih  $j$ , tako da  $LM(f) = LM(u_j)LM(g_j)$ . Zato velja  $\langle LT(I) \rangle \subset \langle LT(G) \rangle$ .

(iv)  $\Rightarrow$  (i) Za  $f \in I \setminus \{0\}$  je  $LT(f) \in LT(I) \subset \langle LT(I) \rangle = \langle LT(G) \rangle$ . Torej obstajajo  $h_1, \dots, h_s \in k[x_1, \dots, x_n]$ , tako da je

$$LT(f) = \sum_{j=1}^s h_j LT(g_j). \quad (1.8)$$

Vodilni monom desne strani enačbe (1.8) mora biti oblike  $LM(h_j)LM(g_i)$  za neki  $j \in \{1, \dots, s\}$ , torej  $LM(g_j)|LM(f)$  in zato tudi  $LT(g_j)|LT(f)$ . Zapišimo  $LT(f) = cx_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}$  in  $LT(g_1) = a_1 x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ . Če obstaja indeks  $u$ , tak da je  $\alpha_u > \beta_u$ , potem ima vsak člen v  $h_1 LT(g_1)$  eksponent na  $x_u$ , ki presega  $\beta_u$ , in zato se mora ta indeks v vsoti (1.8) izničiti. Podobno za  $g_2$  do  $g_m$  pomeni, da zagotovo obstaja indeks  $j$ , tako da za  $LT(g_j) = a_j x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n}$  velja  $\gamma_u < \beta_u$  za  $1 \leq u \leq n$ , kar pa je natanko trditev, da  $LT(g_j)|LT(f)$ . Torej je  $G$  Gröbnerjeva baza ideala  $I$ . ■

Izbira Gröbnerjeve baze ideala  $I$  vodi k rešitvi problema pripadnosti idealu.

**Problem pripadnosti idealu - rešitev.** Če je  $G$  Gröbnerjeva baza ideala  $I$ , potem je  $f \in I$  natanko tedaj, ko  $f \xrightarrow{G} 0$ .

Iz definicije 1.2.12 ni povsem jasno, da ima vsak ideal Gröbnerjevo bazo. V nadaljevanju bomo pokazali obstoj Gröbnerjeve baze za splošen ideal in podali algoritem za njen izračun. Ključni korak v omenjenem algoritmu je izračun t. i. *S-polinoma* dveh polinomov.

**Definicija 1.2.16** Naj bosta  $f$  in  $g$  neničelna elementa kolobarja  $k[x_1, \dots, x_n]$ ,  $LM(f) = x^\alpha$  in  $LM(g) = x^\beta$ . Najmanjši skupni večkratnik monomov  $x^\alpha$  in  $x^\beta$ , ki ga označimo z  $LCM(x^\alpha, x^\beta)$ , je monom  $x^\gamma = x_1^{\gamma_1} \cdots x_n^{\gamma_n}$ , kjer je  $\gamma_j = \max(\alpha_j, \beta_j)$ ,  $1 \leq j \leq n$ . S-polinom polinomov  $f$  in  $g$  je polinom

$$S(f, g) := \frac{x^\gamma}{LT(f)}f - \frac{x^\gamma}{LT(g)}g.$$

Naslednji izrek podaja računsko metodo za določanje Gröbnerjeve baze ideala. Za dokaz izreka glej [114].

**Izrek 1.2.17 (Buchbergerjev kriterij)** Naj bo  $I$  neničelni ideal kolobarja  $k[x_1, \dots, x_n]$  in naj  $bo <$  izbrana urejenost členov v kolobarju  $k[x_1, \dots, x_n]$ . Množica  $G = \{g_1, \dots, g_s\}$  je Gröbnerjeva baza ideala  $I$  glede na  $<$  natanko tedaj, ko  $S(g_i, g_j) \xrightarrow{G} 0$  za vsak  $i \neq j$ .

|  |
|--|
| <p><b>Buchbergerjev algoritem</b></p> <p><b>Vnos:</b></p> <p>Množica polinomov <math>\{f_1, \dots, f_s\} \in k[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}</math>.</p> <p><b>Rezultat:</b></p> <p>Gröbnerjeva baza <math>G</math> ideala <math>I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle</math>.</p> <p><b>Postopek:</b></p> <p><math>G := f_1, \dots, f_s</math>.</p> <p>Korak 1: Za vsak par <math>g_i, g_j \in G</math>, <math>i \neq j</math>, izračunaj S-polinom <math>S(g_i, g_j)</math> in uporabi algoritem deljenja polinomov z več spremenljivkami za izračun ostanka <math>r_{ij}</math>:</p> <p><math>S(g_i, g_j) \xrightarrow{G} r_{ij}</math>.</p> <p>ČE so vsi <math>r_{ij}</math> enaki 0, vrni <math>G</math>,</p> <p>SICER dodaj vse neničelne <math>r_{ij}</math> k množici <math>G</math> in se vrni na korak 1.</p> |
|--|

Tabela 1.1: Buchbergerjev algoritem.

Čeprav ni težko razumeti, zakaj Buchbergerjev algoritem (glej tabelo 1.1) proizvede Gröbnerjevo bazo ideala  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ , ni povsem jasno, da se algoritem konča po končnem številu korakov. Kot bomo pokazali, je dejansko njegov zaključek posledica izreka 1.1.3.

**Izrek 1.2.18** Buchbergerjev algoritem vrne Gröbnerjevo bazo neničelnega ideala  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ .

**Dokaz.** Ker je originalna množica  $G$  generirajoča množica za  $I$  in na vsakem koraku algoritma dodajamo množici  $G$  polinome iz  $I$ , zagotovo na vsakem koraku  $G$  ostane generirajoča množica za  $I$ . Če so na neki stopnji vsi ostanki  $r_{ij}$  enaki nič, potem je po Buchbergerjevem kriteriju (izrek 1.2.17) množica  $G$  Gröbnerjeva baza ideala  $I$ . Zato moramo dokazati le, da se algoritem konča. V ta namen obravnavajmo zaporedje množic  $G_1, G_2, G_3, \dots$  (množice  $G$  iz algoritma). Če se algoritem ne konča, imamo strogo naraščajočo neskončno zaporedje  $G_j \subsetneq G_{j+1}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Vsako množico  $G_{j+1}$  dobimo iz množice  $G_j$  tako, da dodamo vsaj en polinom  $h \in I$ , kjer je  $h$  neničelni ostanek glede na  $G_j$  S-polinoma  $S(f_1, f_2)$  za neki par polinomov  $f_1, f_2 \in G_j$ . Ker je  $h$  reduciran glede na  $G_j$ , njegov vodilni člen ni deljiv z vodilnim členom nobenega elementa iz  $G_j$ , tako da velja  $LT(h) \notin \langle LT(G_j) \rangle$ . Tako dobimo neskončno strogo naraščajočo verigo idealov

$$\langle LT(G_1) \rangle \subsetneq \langle LT(G_2) \rangle \subsetneq \langle LT(G_3) \rangle \subsetneq \dots,$$

kar pa je v nasprotju s posledico Hilbertovega izreka o bazi, da se vsaka naraščajoča veriga idealov stabilizira. ■

Čeprav je urejenost členov določena, se pri izračunu Gröbnerjeve baze pojavi pomanjkljivost, saj lahko algoritem deljenja polinomov z več spremenljivkami vrne različne ostanke za različne ureditve polinomov v množici deliteljev. V tem smislu rezultat Buchbergerjevega algoritma ni enoličen. Prav tako je algoritem neučinkovit v smislu, da baza, ki jo proizvede, vsebuje več polinomov kot je potrebno. Odvečne polinome lahko iz baze odstranimo z uporabo naslednjega dejstva, ki sledi takoj iz definicije Gröbnerjeve baze.

**Trditev 1.2.19** *Naj bo  $G$  Gröbnerjeva baza ideala  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ . Če je  $g \in G$  in  $LT(g) \in \langle LT(G) \setminus \{g\} \rangle$ , potem je  $G \setminus \{g\}$  prav tako Gröbnerjeva baza ideala  $I$ .*

**Definicija 1.2.20** *Gröbnerjeva baza  $G = \{g_1, \dots, g_m\}$  se imenuje minimalna, če je za vse  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  vodilni koeficient  $LC(g_i) = 1$  in za vse  $i \neq j$  vodilni monom  $LM(g_i)$  ne deli  $LM(g_j)$ .*

**Izrek 1.2.21** *Vsak neničelni polinomski ideal ima minimalno Gröbnerjevo bazo.*

**Dokaz.** Po Hilbertovem izreku o bazi (izrek 1.1.3) obstaja končna baza  $\{f_1, \dots, f_s\}$  ideala  $I$ . Iz Gröbnerjeve baze  $G$ , dobljene iz  $\{f_1, \dots, f_s\}$  po Buchbergerjevem algoritmu (izrek 1.2.18), odstranimo vse tiste polinome  $g$ , za katere velja, da  $LT(g) \in \langle LT(G) \setminus \{g\} \rangle$ . Potem delimo preostale polinome z njihovimi vodilnimi koeficienti tako, da njihovi vodilni koeficienti postanejo 1. Po trditvi 1.2.19 je dobljena množica minimalna Gröbnerjeva baza. ■

Za dokaz naslednje trditve glej [27, 114].

**Trditev 1.2.22** *Katerikoli dve minimalni Gröbnerjevi bazi  $G$  in  $G'$  ideala  $I \in k[x_1, \dots, x_n]$  imata enako množico vodilnih členov:  $LT(G) = LT(G')$ . Zato imata tudi enako število elementov.*

Čeprav je v dokazu izreka 1.2.21 z opisanim postopkom dobljena minimalna baza lahko veliko manjša kot originalna Gröbnerjeva baza, ki jo dobimo z Buchbergerjevim algoritmom, pa leta ni nujno enolična. Lahko pa enoličnost dosežemo z dodatnim pogojem, ki se navezuje na Gröbnerjevo bazo.

**Definicija 1.2.23** *Gröbnerjeva baza  $G = \{g_1, \dots, g_m\}$  se imenuje reducirana, če za vse  $i, 1 \leq i \leq m$ , velja  $LC(g_i) = 1$  in noben člen polinoma  $g_i$  ni deljiv z nobenim  $LT(g_j)$  za  $j \neq i$ .*

To pomeni, da je Gröbnerjeva baza reducirana, če je vsak izmed njenih elementov  $g$  moničen (t.j. njegov vodilni koeficient je enak 1) in je reduciran glede na  $G \setminus \{g\}$  (definicija 1.2.7). Če pogledamo definicijo 1.2.20, vidimo, da je vsaka reducirana Gröbnerjeva baza minimalna.

**Izrek 1.2.24 ([27])** *Vsak neničelni ideal  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  ima enolično reducirano Gröbnerjevo bazo glede na izbrano urejenost členov.*

Spomnimo se, da po izreku 1.2.15 z Gröbnerjevo bazo  $G$  ideala  $I$  rešimo problem pripadnosti idealu:  $f \in I$  natanko tedaj, ko  $f \xrightarrow{G} 0$ . Podoben problem je določitev, ali sta dva ideala  $I, J \subset k[x_1, \dots, x_n]$ , (vsak podan s končno množico generatorjev) enaka ali ne. V izreku 1.2.24 podamo rešitev tega problema.

**Enakost idealov-rešitev.** Neničelna ideala  $I$  in  $J$  iz  $k[x_1, \dots, x_n]$  sta enaka natanko tedaj, ko imata enako reducirano Gröbnerjevo bazo glede na izbrano urejenost členov.

Buchbergerjev algoritem je daleč od najučinkovitejše poti za izračun Gröbnerjeve baze. Za praktično uporabo obstaja veliko različic in izboljšav. Pomembno je, da so takšni algoritmi omogočili računanje posebnih generirajočih množic za velike ideale. Skoraj vsak računalniški algebrski sistem, kot je **Mathematica**, **Maple** ali **Reduce**, ima vgrajene postopke za računanje Gröbnerjeve baze glede na različne urejenosti členov. V zadnjem razdelku tega poglavja se bomo seznanili z uporabo prostodostopnega sistema računske algebre **Singular** in med drugim navedli tudi primer izračuna Gröbnerjeve baze ideala.

Na koncu tega razdelka si oglejmo še uporabo Gröbnerjevih baz pri reševanju sistemov polinomskih enačb. Izračunamo najprej Gröbnerjevo bazo ideala, ki ga generirajo trije polinomi, in s pomočjo le-te potem poiščemo rešitev sistema treh polinomskih enačb, ki je določen z generatorji ideala. Za izračun Gröbnerjeve baze bomo uporabili Buchbergerjev algoritem (glej tabelo 1.1).

**Primer 1.2.25** Poiščimo vse (realne) rešitve sistema  $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ , kjer je

$$\begin{aligned} f_1 &= x^2 + y, \\ f_2 &= 2x^2y + x^4, \\ f_3 &= xz + x^4 + xy + x^2y^2. \end{aligned}$$

Z uporabo Buchbergerjevega algoritma izračunamo Gröbnerjevo bazo ideala  $\langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ . Izberemo leksikografsko urejenost, upoštevajoč  $z > y > x$ , in zapišemo polinome  $f_1, f_2, f_3$  glede na to ureditev:

$$\begin{aligned} f_1 &= y + x^2, \\ f_2 &= 2yx^2 + x^4, \\ f_3 &= zx + y^2x^2 + yx + x^4. \end{aligned}$$

Potem izračunamo posamezne  $S$ -polinome:

$$\begin{aligned} S(f_1, f_2) &= \frac{yx^2}{y}(y + x^2) - \frac{yx^2}{2yx^2}(2yx^2 + x^4) = \frac{1}{2}x^4, \\ S(f_1, f_3) &= \frac{zyx}{y}(y + x^2) - \frac{zyx}{zx}(zx + y^2x^2 + yx + x^4) = zx^3 - y^3x^2 - y^2x - yx^4, \\ S(f_2, f_3) &= \frac{zyx^2}{2yx^2}(2yx^2 + x^4) - \frac{zyx^2}{zx}(zx + y^2x^2 + yx + x^4) = \frac{1}{2}zx^4 - y^3x^3 - y^2x^2 - yx^5. \end{aligned}$$

Nato delimo  $S(f_1, f_2) = \frac{1}{2}x^4$  z urejeno množico polinomov  $\{f_1, f_2, f_3\}$  in dobimo ostanek  $\frac{1}{2}x^4$  in ker je le-ta neničelni, ga pripišemo k začetni množici polinomov in dobimo urejeno množico  $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ , kjer je  $f_4 = \frac{1}{2}x^4$ . Če delimo polinoma  $S(f_1, f_3)$  in  $S(f_2, f_3)$  z množico polinomov  $G$ , dobimo v obeh primerih ostanek 0. Prav tako, ko delimo polinome  $S(f_1, f_4) = x^6$ ,  $S(f_2, f_4) = \frac{1}{2}x^6$  in  $S(f_3, f_4) = y^2x^5 + yx^4 + x^7$  z množico polinomov  $G$ , dobimo v vseh primerih ostanek 0. Tako je Gröbnerjeva baza ideala  $\langle f_1, f_2, f_3 \rangle$  enaka  $G_B = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ . Bazo reduciramo tako, da najprej vse vodilne koeficiente polinomov  $f_1, f_2, f_3$  in  $f_4$  postavimo na 1. Opazimo tudi, da če polinom  $f_2$  delimo z množico  $\{f_1, f_4\}$ , dobimo ostanek 0. Zato lahko  $f_2$  odstranimo iz Gröbnerjeve baze. Če polinom  $f_3$  delimo z množico  $\{f_1, f_4\}$ , dobimo ostanek

$zx - x^3$ , ki ga v Gröbnerjevi bazi zapišemo namesto  $f_3$ . Tako je reducirana Gröbnerjeva baza ideala  $\langle f_1, f_2, f_3 \rangle$  enaka

$$G_R = \{y + x^2, x^4, zx - x^3\}.$$

Sedaj lahko sistem  $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 0$  rešimo zelo preprosto. Ker je drugi polinom v  $G_R$  odvisen samo od spremenljivke  $x$ , je očitno  $x = 0$ . Prvi polinom v Gröbnerjevi bazi vsebuje samo  $x$  in  $y$ , od koder sledi  $y = 0$ . Zadnji polinom vsebuje spremenljivki  $x$  in  $z$  in  $x = 0$  očitno reši enačbo  $zx - x^3 = 0$  za vsak  $z$ , torej je  $z$  poljuben in sistem ima neskončno rešitev, ki jih zapišemo kot

$$\{(0, 0, z); z \in \mathbb{R}\}.$$

Teorija Gröbnerjevih baz nam v splošnem omogoča najti rešitev sistema (1.1) v primeru, da ima sistem končno mnogo rešitev. V takšnem primeru je Gröbnerjeva baza glede na leksikografsko urejenost členov vedno v "trikotni obliki" (če uporabimo jezik Gaussove eliminacije), kot lahko vidimo v naslednjem primeru.

**Primer 1.2.26** *Obravnavajmo polinome*

$$\begin{aligned} f_1 &= z^2y + z^2, \\ f_2 &= x^3y + x + y + 1, \\ f_3 &= z + x^2 + y^3 \end{aligned} \tag{1.9}$$

in poiščimo rešitve sistema  $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ .

Glede na leksikografsko urejenost upoštevajoč  $x > y > z$  je reducirana Gröbnerjeva baza ideala generiranega s polinomi  $f_1, f_2, f_3$  v  $\mathbb{Q}[x, y, z]$  enaka (glej razdelek 1.6)  $\{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\}$ , kjer je

$$\begin{aligned} g_1 &= z^4 - z^3, \\ g_2 &= y^{11} + 3y^8z - 2y^7 - 4y^4z + y^3 + y^2 + 2y + z^3 - z^2 + z + 1, \\ g_3 &= x^2 + y^3 + z, \\ g_4 &= yz^2 + z^2, \\ g_5 &= xy + x + y^7 + 2y^4z - y^3 - z^2 - z, \\ g_6 &= xz + y^{10} - y^9 + y^8 + 3y^7z - y^7 - 2y^6z - y^6 + 2y^5z + y^5 - 2y^4z - y^4 \\ &\quad - 2y^3z + y^3 + y^2z - yz + y - z^3 + 5z^2 + z + 1. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Tako je realni sistem  $f_1 = f_2 = f_3 = 0$  ekvivalenten sistemu

$$g_1 = 0, g_2 = 0, g_3 = 0, g_4 = 0, g_5 = 0, g_6 = 0.$$

Vidimo, da je polinom  $g_1$  odvisen samo od spremenljivke  $z$ . Nadalje je polinom  $g_2$  odvisen od  $y$  in  $z$  in je njegov vodilni člen potenca spremenljivke  $y$ , t. j.  $LT(g_2) = y^{11}$ . Potem imamo še polinom  $g_3$ , ki je odvisen od  $x, y$  in  $z$  ter je njegov vodilni člen potenca spremenljivke  $x$ , t. j.  $LT(g_3) = x^2$ . Za rešitev sistema  $f_1 = f_2 = f_3 = 0$  tako najprej rešimo  $g_1 = 0$  in dobimo rešitvi  $z = 0$  in  $z = 1$ . Nato rešimo dve enačbi stopnje 11:  $g_2(y, 0) = 0$  in  $g_2(y, 1) = 0$ . Realni rešitvi enačbe  $g_2(y, 0) = y^{11} - 2y^7 + y^3 + y^2 + 2y + 1 = 0$  sta  $y = -1$  in  $y \approx -0.59720$ , realne rešitve enačbe  $g_2(y, 1) = y^{11} + 3y^8 - 2y^7 - 4y^4 + y^3 + y^2 + 2y + 2 = 0$  so  $y = 0$ ,  $y = -0.72497$  in  $y = -1.5157$ . Za  $z = 0, y = -1$  sta realni rešitvi preostalih enačb  $x = 1$  in  $x = -1$ . Za  $z = 0, y \approx -0.59720$

je edina realna rešitev preostalih enačb  $x \approx -0.46150$ . Za  $z = 1, y = -1$  je edina realna rešitev preostalih enačb  $x = 0$ . Za  $z = 1$  in  $y = -0.72497$  ter  $z = 1$  in  $y = -1.5157$  za  $x$  ne dobimo nobene realne rešitve. Tako smo v  $\mathbb{R}^3$  dobili štiri rešitve sistema  $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ , kjer so  $f_i$  polinomi iz (1.9):

$$\{(1, -1, 0), (-1, -1, 0), (-0.46150, -0.59720, 0), (0, -1, 1)\}.$$

V primeru generičnega sistema ima Gröbnerjeva baza veliko bolj zapleteno strukturo. Kakorkoli, če ima sistem samo končno mnogo rešitev (t. j. ideal je 0-razsežen), mora vsaka reducirana Gröbnerjeva baza  $\{g_1, \dots, g_t\}$  glede na leksikografsko urejenost vsebovati polinom, ki je odvisen od ene spremenljivke, recimo  $g_1(x_1)$ . Nadalje je potem skupina polinomov, ki so odvisni od te spremenljivke in še ene dodatne, recimo  $g_2(x_1, x_2), \dots, g_m(x_1, x_2)$ , itd. Tako najprej rešimo (morda le numerično) enačbo  $g_1(x_1) = 0$ . Potem za vsako rešitev  $x_1^*$  enačbe  $g_1(x_1) = 0$  najdemo rešitve sistema polinomskih enačb  $g_2(x_1^*, x_2) = \dots = g_m(x_1^*, x_2) = 0$ , z neznanko  $x_2$ . Če nadaljujemo ta proces, dobimo vse rešitve sistema (1.1). Tako v primeru končnega števila rešitev Gröbnerjeva baza poskrbi za celotno rešitev problema in lahko zapišemo naslednji rezultat, katerega dokaz najdemo v [1].

**Izrek 1.2.27** *Naj bo  $I$  0-razsežen ideal in  $G = \{g_1, \dots, g_t\}$  njegova Gröbnerjeva baza glede na leksikografsko urejenost, upoštevajoč  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . Potem lahko  $g_1, \dots, g_t$  uredimo tako, da za  $i = 1, 2, \dots, t$  velja  $g_i \in K[x_1, \dots, x_i]$  in  $LT(g_i) \in K[x_i]$ .*

Ponovno se bomo k polinomskim sistemom oblike (1.1) in njihovim rešitvam vrnili v razdelku 1.4, kjer se bomo seznanili z enim najpomembnejših matematičnih rezultatov 19. stoletja - šibkim Hilbertovim izrekom o ničlah, ki nam bo odgovoril na vprašanje o obstoju rešitve sistema (1.1).

Situacija, v kateri raznoterost polinomskega ideala sestoji iz končno mnogo točk, nastopi zelo redko. V generičnem primeru raznoterost sestoji iz neskončno mnogo točk in rešiti polinomski sistem enačb pomeni najti dekompozicijo raznoterosti ideala na ireducibilne komponente, kar si bomo ogledali v razdelku 1.5.

### 1.3 Osnove eliminacijskih idealov

Sistem linearnih enačb običajno reduciramo na ekvivalentni sistem trikotne oblike, v katerem v nekaterih enačbah manjka nekaj začetnih neznank. V tem razdelku se bomo seznanili s teorijo, ki podobno reducira sistem nelinearnih enačb. Ta teorija prav tako priskrbi metodo, s katero poiščemo vse rešitve polinomskega sistema v primeru, ko je množica rešitev končna ali z drugimi besedami priskrbi metodo, s katero najdemo raznoterost polinomskega ideala, ko je le-ta 0-razsežna. Glavna rezultata eliminacijske teorije sta eliminacijski in razširitveni izrek. Pogledali si bomo tudi geometrijsko interpretacijo teh izrekov in njihovih posledic.

Da bi dobili občutek, kako poteka eliminacija spremenljivk, se spomnimo primera 1.2.26, kjer smo poiskali vse realne rešitve sistema enačb

$$\begin{aligned} z^2y + z^2 &= 0, \\ x^3y + x + y + 1 &= 0, \\ z + x^2 + y^3 &= 0. \end{aligned} \tag{1.11}$$



Naj bo  $I$  ideal, ki ga generirajo polinomi sistema (1.11):

$$I = \langle z^2y + z^2, x^3y + x + y + 1, z + x^2 + y^3 \rangle. \quad (1.12)$$

Njegova Gröbnerjeva baza je sestavljena iz polinomov  $g_1, \dots, g_6$ , podanih v (1.10). Vemo, da imata sistema (1.11) in  $g_1 = \dots = g_6 = 0$  enake rešitve. Ker je polinom  $g_1 = z^4 - z^3$  odvisen samo od spremenljivke  $z$ , lahko rešimo enačbo  $g_1 = 0$  in dobimo  $z_1 = 0$  in  $z_2 = 1$ . Nato ti vrednosti vstavimo v  $g_2$  in dobimo polinom spremenljivke  $y$ , od koder izračunamo rešitve za  $y$ , ki pa jih skupaj z  $z_1$  oz.  $z_2$  vstavimo v  $g_3$  in izračunamo še rešitve za spremenljivko  $x$ , kot je opisano v primeru 1.2.26. Na ta način dobimo vse realne rešitve sistema (1.11). Toda kaj nam omogoča, da lahko najdemo te rešitve? Odgovor na to vprašanje sta naslednja dva koraka:

- **Eliminacijski korak.** Najprej smo rešili enačbo  $g_1 = z^4 - z^3 = 0$ , ki vsebuje samo spremenljivko  $z$ , kar pomeni, da smo eliminirali  $x$  in  $y$  iz sistema enačb.
- **Razširitveni korak.** Ko smo določili rešitve enačbe  $g_1 = z^4 - z^3 = 0$ , smo razširili te rešitve do rešitev originalnega sistema.

Zgoraj omenjena koraka sta ključna pri teoriji eliminacijskih idealov. Opazimo, da lahko izjavo, ki smo jo navedli pri eliminacijskem koraku zapišemo kot

$$g_1 = I \cap \mathbb{C}[z],$$

kjer je  $I$  ideal iz (1.12). V bistvu  $I \cap \mathbb{C}[z]$  sestoji iz vseh takšnih polinomov Gröbnerjeve baze ideala  $I$ , ki eliminirajo  $x$  in  $y$ . Ta ideja privede do naslednje definicije.

**Definicija 1.3.1** Naj bo  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  ideal (z implicitno urejenostjo spremenljivk  $x_1 > \dots > x_n$ ) in fiksirajmo  $\ell \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ .  $\ell$ -ti eliminacijski ideal ideala  $I$  je ideal v  $k[x_{\ell+1}, \dots, x_n]$ , definiran z

$$I_\ell = I \cap k[x_{\ell+1}, \dots, x_n].$$

Ideal  $I_\ell$  sestoji iz vseh takih polinomov Gröbnerjeve baze ideala  $I$ , iz katerih so eliminirane spremenljivke  $x_1, \dots, x_\ell$ . Opazimo, da različne urejenosti spremenljivk dajo različne eliminacijske ideale. Vidimo, da eliminacija spremenljivk  $x_1, \dots, x_\ell$  pomeni najti neničelne polinome  $\ell$ -tega eliminacijskega ideala  $I_\ell$ . Naslednji izrek nam poda rešitev eliminacijskega koraka, torej sistematični postopek za iskanje generatorjev ideala  $I_\ell$ .

**Izrek 1.3.2 (Eliminacijski izrek)** Naj bo  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  ideal in  $G$  Gröbnerjeva baza ideala  $I$  pridobljena z leksikografsko urejenostjo, upoštevajoč  $x_1 > \dots > x_n$ . Potem je

$$G_\ell = G \cap k[x_{\ell+1}, \dots, x_n]$$

Gröbnerjeva baza  $\ell$ -tega eliminacijskega ideala  $I_\ell$  za vsak  $0 \leq \ell \leq n-1$ .

**Dokaz.** Fiksiramo  $\ell \in \{0, \dots, n-1\}$ . Ker je  $G_\ell \subset I_\ell$ , je po izreku 1.2.15 množica  $G_\ell$  Gröbnerjeva baza ideala  $I_\ell$  natanko tedaj, ko je  $\langle LT(G_\ell) \rangle = \langle LT(I_\ell) \rangle$ . Inkluzija  $\langle LT(G_\ell) \rangle \subset \langle LT(I_\ell) \rangle$  je očitna, za dokaz obratne inkluzije,  $\langle LT(I_\ell) \rangle \subset \langle LT(G_\ell) \rangle$ , pa moramo pokazati, da iz  $f \in I_\ell$  sledi, da je  $LT(f)$  linearna kombinacija vodilnih členov polinomov iz  $G_\ell$ . Ker delamo z monomi, bo to veljalo natanko tedaj, ko bo  $LT(f)$  deljiv z  $LT(g)$  za neki  $g \in G_\ell$ . Najprej opazimo, da tudi  $f$  prav tako leži v  $I$ , kar pomeni, da je  $LT(f)$  deljiv z  $LT(g)$  za neki  $g \in G$ , saj je  $G$

Gröbnerjeva baza ideala  $I$ . Ker je  $f \in I_\ell$ ,  $LT(g)$  vsebuje samo spremenljivke  $x_{\ell+1}, \dots, x_n$ . Ker uporabljamo leksikografsko urejenost z ureditvijo spremenljivk  $x_1 > \dots > x_n$ , je vsak monom, ki vsebuje  $x_1, \dots, x_\ell$ , večji od monomov v  $k[x_{\ell+1}, \dots, x_n]$ . To pomeni, da je  $g \in G_\ell$  in dokaz je zaključen. ■

Nadalje obravnavajmo razširitveni korak. Recimo, da imamo ideal  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset k[x_1, \dots, x_n]$  in njegovo afino raznoterost  $\mathbf{V}(I)$ . Da bi opisali točke raznoterosti  $\mathbf{V}(I)$ , zgradimo rešitve postopoma koordinato za koordinato. Fiksiramo  $\ell \in \{0, \dots, n-1\}$  in naj bo  $I_\ell$   $\ell$ -ti eliminacijski ideal ideala  $I$ . Rešitev  $(a_{\ell+1}, \dots, a_n) \in \mathbf{V}(I_\ell)$  se imenuje *delna rešitev* sistema enačb  $f_1 = \dots = f_s = 0$ . Da bi delno rešitev  $(a_{\ell+1}, \dots, a_n)$  razširili do celotne rešitve v raznoterosti  $\mathbf{V}(I)$ , ji moramo najprej dodati eno koordinato. To pomeni, da moramo najti tak  $a_\ell$ , da bo  $(a_\ell, a_{\ell+1}, \dots, a_n) \in \mathbf{V}(I_{\ell-1})$ . Natančneje, recimo, da je  $I_{\ell-1} = \langle g_1, \dots, g_t \rangle \subset k[x_\ell, x_{\ell+1}, \dots, x_n]$ , potem želimo najti rešitev  $x_\ell = a_\ell$  enačb

$$g_1(x_\ell, a_{\ell+1}, \dots, a_n) = \dots = g_t(x_\ell, a_{\ell+1}, \dots, a_n) = 0.$$

Zadnje enačbe pomenijo, da imamo polinome ene spremenljivke in sledi, da so rešitve  $a_\ell$  samo ničle največjega skupnega delitelja polinomov  $g_1, \dots, g_t$ . Problem pa lahko nastopi, če ti polinomi nimajo skupnih ničel, t. j. lahko imamo delne rešitve, ki jih ne moremo razširiti do rešitev originalnega sistema. Kot preprost primer obravnavajmo enačbe

$$xy = 1, \quad xz = 2, \quad xw = 3. \quad (1.13)$$

Iščemo rešitve oblike  $(x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4$ . Če tvorimo ideal  $I = \langle xy-1, xz-2, xw-3 \rangle$  in eliminiramo  $x$ , dobimo polinoma  $3z-2w$  in  $3y-w$ , ki sta generatorja prvega eliminacijskega ideala  $I_1$ . Delne rešitve so tako podane z vektorjem  $(a, 2a, 3a)$  in vse, razen  $(0, 0, 0)$ , lahko razširimo do celotne rešitve  $(1/a, a, 2a, 3a)$ . Želimo vedeti, katere delne rešitve lahko razširimo do celotne rešitve sistema.

Osredotočimo se najprej na primer, kjer eliminiramo samo prvo spremenljivko  $x_1$ . Naslednji izrek odgovori na vprašanje, ali delno rešitev  $(a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{V}(I_1)$  lahko razširimo do celotne rešitve  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{V}(I)$ .

**Izrek 1.3.3 (Razširitveni izrek)** *Naj bo  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  in  $I_1$  prvi eliminacijski ideal ideala  $I$ . Za vsak  $1 \leq i \leq s$  zapišimo  $f_i$  v obliki*

$$f_i = g_i(x_2, \dots, x_n)x_1^{N_i} + \text{členi, kjer ima } x_1 \text{ stopnjo } < N_i,$$

*kjer je  $N_i \in \mathbb{N}_0$  in  $g_i \in \mathbb{C}[x_2, \dots, x_n] \setminus \{0\}$ . Recimo, da imamo delno rešitev  $(a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{V}(I_1)$ . Če  $(a_2, \dots, a_n) \notin \mathbf{V}(g_1, \dots, g_s)$ , obstaja tak  $a_1 \in \mathbb{C}$ , da je  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{V}(I)$ .*

Dokaz tega izreka poteka z uporabo rezultatov in ga tukaj izpustimo. Za več informacij glej [27].

V nadaljevanju pogledjmo še nekaj posledic razširitvenega izreka.

Opazimo, da izrek velja samo za polje  $k = \mathbb{C}$ . Da bi videli, zakaj je to pomembno, predpostavimo, da je  $k = \mathbb{R}$  in obravnavajmo sistem enačb

$$x^2 = 3y, \quad x^2 = 2z, \quad x^2 = w. \quad (1.14)$$

Če eliminiramo spremenljivko  $x$ , dobimo  $3y = 2z = w$ , kar nam da delno rešitev  $(2a, 3a, 6a)$  za vsak  $a \in \mathbb{R}$ . Ker so vsi vodilni koeficienti v polinomih  $x^2 - 3y$ ,  $x^2 - 2z$ ,  $x^2 - w$  enaki  $1 \neq 0$ , nam razširitveni izrek zagotovi, da lahko vsako delno rešitev  $(2a, 3a, 6a)$  razširimo, če delamo

nad  $\mathbb{C}$ . V  $\mathbb{R}$  je situacija drugačna, saj enačbe  $x^2 = 3a$ ,  $x^2 = 2a$ ,  $x^2 = a$  nimajo realnih rešitev, če je  $a$  negativen in tako se do celotne rešitve sistema (1.14) razširijo samo tiste delne rešitve  $(2a, 3a, 6a)$ , kjer je  $a \geq 0$ . S tem smo pokazali, da razširitveni izrek ne velja za  $k = \mathbb{R}$ .

Če pogledamo zadnji del razširitvenega izreka:  $(a_2, \dots, a_n) \notin \mathbf{V}(g_1, \dots, g_s)$ , vidimo, da so  $g_i$  vodilni koeficienti glede na  $x_1$  polinomov  $f_i$ . Tako bi  $(a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{V}(g_1, \dots, g_s)$  pomenilo, da v delni rešitvi vsi vodilni koeficienti niso ničelni. Da bi videli, zakaj je to pomembno, si pogledjmo enačbe (1.13). Te enačbe imajo delne rešitve  $(y, z, w) = (a, 2a, 3a)$ . Edina rešitev, ki se ne razširi do celotne rešitve sistema (1.14), je  $(0, 0, 0)$  in ta je tista delna rešitev, v kateri so vsi vodilni koeficienti  $(y, z$  in  $w)$  polinomov tega sistema enaki nič. Razširitveni izrek pove, da se razširitev lahko zgodi samo, če vsi vodilni koeficienti niso hkrati enaki nič.

Čeprav razširitveni izrek navaaja samo primer, ko eliminiramo prvo spremenljivko  $x_1$ , ga lahko uporabimo (induktivno) tudi, ko eliminiramo poljubno število spremenljivk. Na primer, obravnavajmo enačbi

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\xyz &= 1.\end{aligned}\tag{1.15}$$

Gröbnerjeva baza ideala  $I = \langle x^2 + y^2 + z^2 - 1, xyz - 1 \rangle$  glede na leksikografsko urejenost je

$$\begin{aligned}g_1 &= y^4 z^2 + y^2 z^4 - y^2 z^2 + 1 \\g_2 &= x + y^3 z + y z^3 - yz.\end{aligned}$$

Po eliminacijskem izreku je

$$\begin{aligned}I_1 &= I \cap \mathbb{C}[y, z] = \langle g_1 \rangle \\I_2 &= I \cap \mathbb{C}[z] = \langle 0 \rangle.\end{aligned}$$

Ker je  $I_2 = \langle 0 \rangle$ , je  $\mathbf{V}(I_2) = \mathbb{C}$  in zato je vsak  $c \in \mathbb{C}$  delna rešitev. Ideja je razširiti  $c$  postopoma, koordinato za koordinato, do rešitve sistema (1.15): najprej do  $(b, c)$  in nato do  $(a, b, c)$ . Tako lahko s pomočjo razširitvenega izreka na vsakem koraku nadziramo, katere delne rešitve se dajo razširiti. Glavna ideja pa je, da je  $I_2$  prvi eliminacijski ideal ideala  $I_1$  in zato bomo s pomočjo razširitvenega izreka prešli iz  $c \in \mathbf{V}(I_2)$  do  $(b, c) \in \mathbf{V}(I_1)$  in od tod do  $(a, b, c) \in \mathbf{V}(I)$ . Da bi prišli od  $I_2$  do  $I_1$ , opazimo, da je vodilni koeficient pred  $y^4$  v  $g_1$  enak  $z^2$  in zato lahko delno rešitev  $c \in \mathbb{C}$  razširimo do  $(b, c)$ , če  $c \neq 0$ . Prav tako vidimo, da enačba  $g_1 = 0$  nima rešitve, če je  $c = 0$ . Naslednji korak je od  $I_1$  do  $I$ , kar pomeni, da najdemo tak  $a \in \mathbb{C}$ , da je  $(a, b, c) \in \mathbf{V}(I)$ . Če vstavimo  $(y, z) = (b, c)$  v (1.15), dobimo dve enačbi, odvisni od spremenljivke  $x$  in ni očitno, da imata skupno rešitev  $x = a$ . Prav tukaj razširitveni izrek pokaže svojo moč. Vodilni koeficient v prvi enačbi je 1 in v drugi enačbi  $yz$ . Ker je  $1 \neq 0$ , nam razširitveni izrek zagotovi, da tak  $a$  vedno obstaja in smo tako dokazali, da lahko vse delne rešitve  $c \neq 0$  razširimo do  $\mathbf{V}(I)$ .

Posebni primer razširitvenega izreka je, ko je vodilni koeficient vsaj enega polinoma  $f_i \in I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$  konstanten. Takrat razširitveni izrek postane enostavnejši in ga lahko zapišemo na naslednji način.

**Posledica 1.3.4** Naj bo  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  in  $I_1$  njegov prvi eliminacijski ideal. Recimo, da je za neki  $i \in \{1, \dots, s\}$  polinom  $f_i$  oblike

$$f_i = Cx_1^N + \text{členi, kjer ima } x_1 \text{ stopnjo } < N,$$

kjer je  $C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  in  $N \in \mathbb{N}$ . Potem za vsako delno rešitev  $(a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{V}(I_1)$  obstaja tak  $a_1 \in \mathbb{C}$ , da velja:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{V}(I).$$

**Dokaz.** To sledi neposredno iz razširitvenega izreka: ker je  $g_i = C \neq 0$ , je  $\mathbf{V}(g_1, \dots, g_s) = \emptyset$  in zato za vse delne rešitve velja  $(a_2, \dots, a_n) \notin \mathbf{V}(g_1, \dots, g_s)$ . ■

Sedaj pogledajmo še geometrijsko interpretacijo zgoraj navedenih rezultatov. Še naprej bo polje obravnave  $k = \mathbb{C}$ . Najprej si pogledajmo pojem projekcije. Preslikava

$$\pi_k : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n-k} : (a_1, \dots, a_n) \mapsto (a_{k+1}, \dots, a_n)$$

se imenuje *projekcija* prostora  $\mathbb{C}^n$  na  $\mathbb{C}^{n-k}$ .

Glavna ideja je, da eliminacija ustreza projekciji raznoterosti na nižje razsežen podprostor. Če imamo raznoterost  $V = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s) \subset \mathbb{C}^n$  in eliminiramo prvih  $\ell$  spremenljivk  $x_1, \dots, x_\ell$ , lahko definiramo projekcijo

$$\pi_\ell : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n-\ell} : (a_1, \dots, a_n) \mapsto (a_{\ell+1}, \dots, a_n)$$

in jo povežemo z  $\ell$ -tim eliminacijskim idealom na naslednji način. Vzemimo polinom  $f \in I_\ell$ . Če je  $(a_1, \dots, a_n) \in V$ , je  $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ , saj je  $f \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ . Toda  $f$  je odvisen samo od spremenljivk  $x_{\ell+1}, \dots, x_n$  in zato je

$$f(a_{\ell+1}, \dots, a_n) = f(\pi_\ell(a_1, \dots, a_n)) = 0.$$

To dokazuje, da je  $f = 0$  za vse točke  $\pi_\ell(V)$ . S tem smo pokazali, da v prostoru  $\mathbb{C}^{n-\ell}$  velja inkluzija

$$\pi_\ell(V) \subset \mathbf{V}(I_\ell).$$

S pomočjo te inkluzije lahko  $\pi_\ell(V)$  zapišemo kot

$$\pi_\ell(V) = \{(a_{\ell+1}, \dots, a_n) \in \mathbf{V}(I_\ell) : \exists a_1, \dots, a_\ell \in \mathbb{C} \text{ in } (a_1, \dots, a_\ell, a_{\ell+1}, \dots, a_n) \in V\}.$$

Tako  $\pi_\ell(V)$  sestoji iz natanko tistih delnih rešitev, ki jih lahko razširimo do celotne rešitve. Recimo, da obravnavamo raznoterost, definirano z enačbami (1.13). Opazimo, da je  $\mathbf{V}(I_1)$  presek ravnin  $3y - w = 0$  in  $3z - 2w = 0$  v 3-razsežnem prostoru s koordinatami  $(y, z, w)$  in, da je

$$\pi_1(V) = \{(a, 2a, 3a) \in \mathbb{C}^3 : a \neq 0\}.$$

Ker  $(0, 0, 0) \notin \pi_1(V)$ ,  $\pi_1(V)$  ni afina raznoterost. Ta primer dobro ilustrira kaj se dejansko zgodi pri eliminaciji ene spremenljivke. Z geometrijskega vidika razširitveni izrek pove naslednje. Podana je raznoterost  $V = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s) \subset \mathbb{C}^n$  in naj bodo  $g_i$  kot v razširitvenem izreku. Če je  $I_1$  prvi eliminacijski ideal ideala  $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ , potem v  $\mathbb{C}^{n-1}$  velja enakost

$$\mathbf{V}(I_1) = \pi_1(V) \cup (\mathbf{V}(g_1, \dots, g_s) \cap \mathbf{V}(I_1)),$$

kjer je  $\pi_1 : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$  projekcija na zadnjih  $n - 1$  komponent.

To pomeni, da  $\pi_1(V)$  napolni celotno afino raznoterost  $\mathbf{V}(I_1)$  razen mogoče za tisti del, ki leži v  $\mathbf{V}(g_1, \dots, g_s)$ .

Na žalost v splošnem ne vemo, kako velik del raznoterosti leži v  $\mathbf{V}(g_1, \dots, g_s)$ , in včasih je lahko zelo velik. Naslednji izrek natančneje opiše zvezo med  $\pi_\ell(V)$  in  $\mathbf{V}(I_\ell)$ . Dokaz glej v [27, Pog. 2, §2].

**Izrek 1.3.5 (Izrek zaprtja)** Naj bo  $V = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)$  afina raznoterost v  $\mathbb{C}^n$  in  $I_\ell$   $\ell$ -ti eliminacijski ideal ideala  $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ . Potem veljata naslednji trditvi:

(i)  $\mathbf{V}(I_\ell)$  je najmanjša afina raznoterost, ki vsebuje  $\pi_\ell(V) \subset \mathbb{C}^{n-\ell}$ .

(ii) Če je  $V \neq \emptyset$ , obstaja afina raznoterost  $W \subsetneq \mathbf{V}(I_\ell)$ , za katero velja:  $\mathbf{V}(I_\ell) \setminus W \subset \pi_\ell(V)$ .

Zgoraj smo videli (posledica 1.3.4), da je razširitveni izrek preprostejši, ko je vsaj eden od vodilnih koeficientov polinomov  $g_i$  neničelna konstanta. Takrat polinomi  $g_i$  niso vsi ničelni v točki  $(a_2, \dots, a_n)$  in posledično lahko vse delne rešitve razširimo do rešitve originalnega sistema. Tako imamo geometrijsko različico posledice 1.3.4.

**Posledica 1.3.6** Naj bo  $V = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s) \subset \mathbb{C}^n$  in predpostavimo, da je za neki  $i \in \{1, \dots, s\}$  polinom  $f_i$  oblike

$$f_i = Cx_1^N + c_{(\alpha)}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n},$$

kjer je  $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  in  $\alpha_1 < N$  in  $C \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $c_{(\alpha)} \in \mathbb{C}$  in  $N \in \mathbb{N}$ . Če je  $I_1$  prvi eliminacijski ideal ideala  $I$ , potem v  $\mathbb{C}^{n-1}$  velja:

$$\pi_1(V) = \mathbf{V}(I_1),$$

kjer je  $\pi_1$  projekcija na zadnjih  $n - 1$  komponent.

Razširitveni izrek in izrek zaprtja ter vsi rezultati povezani z njima so bili navedeni za polje kompleksnih števil  $\mathbb{C}$ . V bistvu pa vsi ti rezultati veljajo za katerokoli algebraično zaprto polje  $k$  (glej [27, Pog. 4 in 5]).

## 1.4 Korenski ideali

V tem razdelku se seznanimo s pomembnim rezultatom, ki natančno določa, kateri ideali ustrezajo raznoterostim, kar omogoča razumevanje zveze med geometrijo in algebro, da bo katerakoli izjava o raznoterostih lahko prevedena v izjavo o idealih in obratno. S pomočjo opisane teorije bomo v naslednjem razdelku definirali nekaj algebraičnih operacij na idealih in razložili njihove geometrijske analogije ter se seznanili z najpomembnejšimi algebraičnimi in geometrijskimi koncepti, ki izhajajo iz Hilbertovega izreka o bazi (izrek 1.1.3): zlasti o možnosti dekompozicije raznoterosti na unijo preprostejših raznoterosti in o ustreznem algebraičnem pojmovanju ideala kot preseka preprostejših idealov.

V razdelku 1.1 (definicija 1.1.5) smo videli, da lahko raznoterost  $V \subset k^n$  obravnavamo s pomočjo ideala

$$\mathbf{I}(V) = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] : f(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ za vse } (a_1, \dots, a_n) \in V\},$$

polinomov  $f$ , ki imajo ničelno vrednost na  $V$ . Torej imamo preslikavo:

$$\begin{array}{ccc} \text{afine raznoterosti} & \longrightarrow & \text{ideali} \\ V & & \mathbf{I}(V) \end{array}$$

Obratno, če imamo podan ideal  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ , lahko definiramo množico

$$\mathbf{V}(I) = \{(a_1, \dots, a_n) \in k^n : f(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ za vse } f \in I\}.$$

Hilbertov izrek o bazi zagotavlja, da je  $\mathbf{V}(I)$  dejansko afina raznoterost, saj obstaja končna množica polinomov  $f_1, \dots, f_s \in I$ , da je  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$  in je  $\mathbf{V}(I)$  množica skupnih ničel omenjenih polinomov. Tako imamo preslikavo:

$$\begin{array}{ccc} \text{ideali} & \longrightarrow & \text{afine raznoterosti} \\ I & & \mathbf{V}(I) \end{array}$$

Ti dve preslikavi podata zvezo med ideali in raznoterostmi, katere naravo bomo raziskali v tem in naslednjem razdelku.

Najprej opazimo, da preslikava  $\mathbf{V}$  ni bijektivna, saj lahko različni ideali definirajo enako raznoterost. Na primer,  $\langle x \rangle$  in  $\langle x^2 \rangle$  sta različna ideala v  $k[x]$  z enako raznoterostjo  $\mathbf{V}(x) = \mathbf{V}(x^2) = \{0\}$ . Resnejši problem nastopi tudi, če polje  $k$  ni algebraično zaprto. Polinoma  $1 + x^2 + y^2$  in  $1 + x^4 + y^4$  iz  $\mathbb{R}[x, y]$  generirata različna ideala,

$$I_1 = \langle 1 + x^2 + y^2 \rangle, \quad I_2 = \langle 1 + x^4 + y^4 \rangle,$$

in noben od njiju nima realnih ničel, zato sta ustrezni raznoterosti prazni množici:

$$\mathbf{V}(I_1) = \mathbf{V}(I_2) = \emptyset.$$

Porodi se vprašanje, če je problem različnih idealov z enako prazno raznoterostjo vedno povezan z algebraično zaprtostjo polja  $k$ ? Odgovor je pritrdilen, če smo v kolobarju polinomov ene spremenljivke  $k[x]$ . Vzrok je v tem, ker je vsak ideal  $I \subset k[x]$  generiran z enim polinomom (glej razdelek 1.1). Torej lahko vsak ideal  $I \in k[x]$  zapišemo kot  $I = \langle f \rangle$  za neki polinom  $f \in k[x]$  in je zato  $\mathbf{V}(I)$  množica ničel polinoma  $f$ , t. j. množica takšnih točk  $a \in k$ , kjer je  $f(a) = 0$ . Ampak, ker je  $k$  algebraično zaprto polje, ima vsak nekonstantni polinom iz  $k[x]$  ničlo v  $k$ . Zato je  $\mathbf{V}(I) = \emptyset$  samo, če je  $f$  neničelni konstantni polinom. V tem primeru pa je  $1/f \in k$  in je zato  $1 = (1/f) \cdot f \in I$ , kar pa pomeni, da je  $I = k[x]$  za vsak  $I \subset k[x]$ . S tem smo pokazali, da je  $I = k[x]$  edini ideal v  $k[x]$ , ki porodi prazno raznoterost, če je polje  $k$  algebraično zaprto.

Toda enaka lastnost velja v kolobarju polinomov več spremenljivk. V kateremkoli polinomskem kolobarju je algebraična zaprtost polja dovolj, da je edini ideal, ki definira prazno raznoterost, cel polinomski kolobar. Ta rezultat predstavlja enega največjih dosežkov poznega 19. stoletja in se imenuje šibki Hilbertov izrek o ničlah.<sup>3</sup>

**Izrek 1.4.1 (Šibki Hilbertov izrek o ničlah)** *Naj bo  $k$  algebraično zaprto polje in  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  ideal, ki zadošča  $\mathbf{V}(I) = \emptyset$ . Potem je  $I = k[x_1, \dots, x_n]$ .*

**Dokaz.** S podobnim razmislekom, kot zgoraj iz  $1 \in I$  sledi  $I = k[x_1, \dots, x_n]$ . Dokaz zgradimo induktivno. Osnova indukcije je zgornji rezultat v  $k[x]$ . Sedaj predpostavimo, da enakost velja za  $n - 1$  spremenljivk  $x_2, \dots, x_n$ . Vzemimo katerikoli ideal  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset k[x_1, \dots, x_n]$ , za katerega velja  $\mathbf{V}(I) = \emptyset$ . Predpostavimo, da  $f_1$  ni konstanten polinom, sicer nimamo ničesar za dokazovati. Recimo, da je stopnja polinoma  $f_1$  enaka  $N$ . Sedaj izvedemo spremembo koordinat na naslednji način:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_2 &= y_2 + \alpha_2 y_1 \\ &\vdots \\ x_n &= y_n + \alpha_n y_1, \end{aligned} \tag{1.16}$$

<sup>3</sup>Še danes običajno (tudi v angleški literaturi) za Hilbertove izreke o ničlah uporabljamo originalno nemško ime Hilbertov Nullstellensatz.

kjer so  $\alpha_i$  konstante iz  $k$ . Če vstavimo te nove spremenljivke v  $f_1$ , dobi le-ta obliko

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= f_1(y_1, y_2 + \alpha_2 y_1, \dots, y_n + \alpha_n y_1) \\ &= p(\alpha_2, \dots, \alpha_n) y_1^N + \text{členi, kjer ima } y_1 \text{ stopnjo } < N. \end{aligned}$$

Ker je  $p(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$  neničelni polinom in ker vemo, da je vsako algebraično zaprto polje neskončno (glej [27]), lahko izberemo  $\alpha_2, \dots, \alpha_n$  tako, da je  $p(\alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq 0$  [27, Pog. 1, §1]. S takšno izbiro  $\alpha_2, \dots, \alpha_n$  in spremembo koordinat (1.16) vsak polinom  $f \in k[x_1, \dots, x_n]$  postane polinom  $g \in k[y_1, \dots, y_n]$ . Hitro lahko preverimo, da je množica  $J = \{g : f \in I\}$  ideal v  $k[y_1, \dots, y_n]$ . Opazimo tudi, da je  $\mathbf{V}(J) = \emptyset$ , sicer bi transformirane enačbe imele rešitev in posledično bi jo imele tudi originalne. Še več, če lahko pokažemo, da je  $1 \in J$ , potem bo  $1 \in I$ , saj sprememba koordinat (1.16) ne vpliva na konstante. Zato je dovolj pokazati, da je  $1 \in J$ . V prejšnjem odstavku smo navedli, da se  $f_1 \in I$  spremeni v  $g_1 \in J$  z lastnostjo

$$g_1(y_1, \dots, y_n) = p(\alpha_2, \dots, \alpha_n) y_1^N + \text{členi, kjer ima } y_1 \text{ stopnjo } < N,$$

kjer je  $p(\alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq 0$ . To nam omogoča, da uporabimo posledico 1.3.6, ki poveže  $\mathbf{V}(J)$  z njeno projekcijo na podprostor prostora  $k^n$  s koordinatami  $y_2, \dots, y_n$ . Razširitveni izrek (izrek 1.3.3) in njegove posledice veljajo nad poljubnim algebraično zaprtim poljem. Naj bo

$$\Pi : k^n \rightarrow k^{n-1}$$

projekcija na zadnjih  $n - 1$  komponent. Če označimo z  $J_1$ , kot običajno, prvi eliminacijski ideal ideala  $J$ , t. j.  $J_1 = J \cap k[y_2, \dots, y_n]$ , posledica pravi, da lahko delne rešitve razširimo, t. j.  $\mathbf{V}(J_1) = \Pi(\mathbf{V}(J))$ . To pa pomeni, da je  $\mathbf{V}(J_1) = \Pi(\mathbf{V}(J)) = \Pi(\emptyset) = \emptyset$ . Po indukcijski predpostavki potem velja, da je  $J_1 = k[y_2, \dots, y_n]$ . Zato je  $1 \in J_1 \subset J$  in dokaz je končan. ■

Šibki Hilbertov izrek o ničlah poskrbi za metodo, s katero preverimo ali ima dan polinomski sistem oblike (1.1) rešitev nad poljem  $k$ . Dovolj je izračunati reducirano Gröbnerjevo bazo  $G$  ideala  $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ , glede na katerokoli urejenost členov, in polinomski sistem (1.1) nima rešitve nad  $k$  natanko tedaj, ko je  $G = \{1\}$ .

Če nas zanima rešitev sistema (1.1) nad poljem  $k$ , ki ni algebraično zaprto, velja naslednje: če je  $\{1\}$  reducirana Gröbnerjeva baza ideala  $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ , sistem (1.1) nima rešitve. Obrat ni nujno resničen. Na primer, če ni rešitve v  $\mathbb{R}^n$ , ni nujno, da tudi v  $\mathbb{C}^n$  ni rešitve.

V posebnem primeru, ko je  $k = \mathbb{C}$ , je lahko šibki Hilbertov izrek o ničlah mišljen kot "fundamentalni izrek algebre za polinome več spremenljivk": vsak sistem polinomov, ki generira netrivialen ideal  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ , ima skupno ničlo v  $\mathbb{C}^n$ .

Če sedaj sklepamo po šibkem Hilbertovem izreku o ničlah, bi lahko pričakovali, da je za bijektivnost preslikav med ideali in raznoterostmi potrebna samo algebraična zaprtost polja  $k$ . Da to ne drži, vidimo iz preprostega primera. Ideala  $\langle x^2, y \rangle$  in  $\langle x, y^3 \rangle$  sta različna, vendar definirata isto raznoterost: točko  $\{(0, 0)\} \subset k^2$ . Vidimo, da preslikava  $\mathbf{V}$  ni bijektivna, glavni razlog za to pa je, da ima potenca polinoma,  $f^m$ , enako množico ničel kot polinom  $f$  sam. Hilbertov izrek o ničlah pove, da je to edina možnost, ko imajo različni ideali nad algebraično zaprtimi polji lahko iste raznoterosti: če je  $f$  polinom, ki je enak nič za vse točke neke raznoterosti  $\mathbf{V}(I)$ , mora neka potenca tega polinoma pripadati idealu  $I$ .

**Izrek 1.4.2 (Hilbertov izrek o ničlah)** *Naj bo  $k$  algebraično zaprto polje. Če so polinomi  $f, f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$  takšni, da je  $f \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s))$ , obstaja tašen  $m \in \mathbb{N}$ , da velja:*

$$f^m \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle$$

(in obratno).

**Dokaz.** Za dan polinom  $f$ , ki ima ničle v vsaki skupni ničli polinomov  $f_1, \dots, f_s$ , moramo pokazati, da obstaja tak  $m \in \mathbb{N}$  in polinomi  $g_1, \dots, g_s \in k[x_1, \dots, x_n]$ , da velja:

$$f^m = \sum_{i=1}^s g_i f_i.$$

Najbolj direkten dokaz temelji na naslednjem "triku". Obravnavajmo ideal

$$J = \langle f_1, \dots, f_s, 1 - wf \rangle \subset k[x_1, \dots, x_n, w].$$

Trdimo, da je  $\mathbf{V}(J) = \emptyset$ . Naj bo  $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \in k^{n+1}$ . Imamo dve možnosti:

- bodisi je  $(a_1, \dots, a_n)$  skupna ničla polinomov  $f_1, \dots, f_s$
- bodisi  $(a_1, \dots, a_n)$  ni skupna ničla polinomov  $f_1, \dots, f_s$ .

V prvem primeru je  $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ , ker je skupna ničla polinomov  $f_1, \dots, f_s$  tudi ničla polinoma  $f$ . Zato polinom  $1 - wf$  zavzame vrednost  $1 - a_{n+1}f(a_1, \dots, a_n) = 1 \neq 0$  v točki  $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$  in zato  $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \notin \mathbf{V}(J)$ . V drugem primeru mora obstajati najmanj en tak  $i$ , za katerega je  $f_i(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ . Če gledamo na  $f_i$  kot na funkcijo  $n+1$  spremenljivk, ki ni odvisna od zadnje spremenljivke, je  $f_i(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \neq 0$  in ponovno zaključimo, da  $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \notin \mathbf{V}(J)$ . Ker je  $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$  poljubna točka prostora  $k^{n+1}$ , sledi, da je  $\mathbf{V}(J) = \emptyset$ . Iz šibkega Hilbertovega izrek o ničlah sledi, da je  $1 \in J$ . Tako velja:

$$1 = \sum_{i=1}^s p_i(x_1, \dots, x_n, w) \cdot f_i + q(x_1, \dots, x_n, w)(1 - wf), \quad (1.17)$$

kjer so  $p_i, q$  polinomi kolobarja  $k[x_1, \dots, x_n, w]$ . Naj bo (neodvisna) spremenljivka  $w$  enaka  $w = 1/f(x_1, \dots, x_n)$ . Potem enačba (3.38) postane

$$1 = \sum_{i=1}^s p_i(x_1, \dots, x_n, 1/f) \cdot f_i. \quad (1.18)$$

Če obe strani enačbe (3.39) množimo s  $f^m$ , kjer je  $m$  dovolj veliko naravno število, se znebimo imenovalcev na desni strani enačbe in dobimo

$$f^m = \sum_{i=1}^s g_i(x_1, \dots, x_n) \cdot f_i, \quad (1.19)$$

kjer je  $g_i \in k[x_1, \dots, x_n]$ . ■

Nadalje se vprašamo, če lahko opišemo ideale, ki se lahko pojavijo kot ideali nekih raznoterosti oz. z drugimi besedami, če lahko določimo tiste ideale, ki sestojijo iz vseh polinomov, ki so ničelni na neki raznoterosti  $V$ . V ta namen si najprej pogledjmo naslednjo lemo.

**Lema 1.4.3** *Naj bo  $V$  raznoterost. Če je  $f^m \in \mathbf{I}(V)$ , je tudi  $f \in \mathbf{I}(V)$ .*



**Dokaz.** Naj bo  $(a_1, \dots, a_n) \in V$ . Če je  $f^m \in \mathbf{I}(V)$ , je  $[f(a_1, \dots, a_n)]^m = 0$ . Potem je tudi  $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ . Ker je  $(a_1, \dots, a_n)$  poljuben element raznoterosti  $V$ , je tudi  $f \in \mathbf{I}(V)$ . ■

Zato ima ideal, ki sestoji iz vseh polinomov, ki so ničelni na vseh točkah iz raznoterosti  $V$ , lastnost, da če neka potenca polinoma pripada idealu, tudi sam polinom pripada istemu idealu. To nas pripelje do naslednje definicije.

**Definicija 1.4.4** Ideal  $I$  je korenski (ali tudi radikalni), če iz  $f^m \in I$  za neki  $m \in \mathbb{N}$  sledi, da je  $f \in I$ .

Opazimo, da je zaradi leme 1.4.3 ideal  $\mathbf{I}(V)$  vedno korenski.

V smislu zgornje definicije vidimo, da Hilbertov izrek o ničlah pove, da je edini način, da neki ideal vsebuje polinome, ki so ničelni na vseh točkah raznoterosti  $\mathbf{V}(I)$ , da  $I$  vsebuje potence polinomov, ki sami niso v  $I$  ali drugače, da  $I$  ni korenski ideal. Preden nadaljujemo, se seznanimo s pojmom korena ideala.

**Definicija 1.4.5** Naj bo  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  ideal. Koren (ali tudi radikal) ideala  $I$ , ki ga označimo s  $\sqrt{I}$ , je množica

$$\sqrt{I} = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] : \text{obstaja takšen } m \in \mathbb{N}, \text{ da je } f^m \in I\}.$$

Opazimo, da vedno velja  $I \subset \sqrt{I}$ , saj  $f \in I$  pomeni, da  $f^1 \in I$  in zato po definiciji  $f \in \sqrt{I}$ . Prav tako ni težko pokazati, da je ideal  $I$  korenski natanko tedaj, ko je  $I = \sqrt{I}$ . Vzemimo sedaj poljuben ideal  $I$  in njegov koren  $\sqrt{I}$ . Recimo, da sta  $f, g \in \sqrt{I}$ . Potem obstajata naravni števili  $m$  in  $p$ , za kateri je  $f^m, g^p \in I$ . V binomski razširitvi izraza  $(f + g)^{m+p-1}$  ima vsak člen faktor  $f^i g^j$  z  $i + j = m + p - 1$ . Ker je bodisi  $i \geq m$  ali  $j \geq p$ , je bodisi  $f^i \in I$  ali  $g^j \in I$  in zato je  $f^i g^j \in I$ . Posledično je vsak člen binomske razširitve v  $I$ . Zato je  $(f + g)^{m+p-1} \in I$  in sledi, da je  $f + g \in \sqrt{I}$ . Sedaj predpostavimo, da je  $f \in \sqrt{I}$  in  $h \in k[x_1, \dots, x_n]$ . Potem je  $f^m \in I$  za neki  $m \in \mathbb{N}$ . Ker je  $I$  ideal, velja  $(h \cdot f)^m = h^m \cdot f^m \in I$  in zato je  $h \cdot f \in \sqrt{I}$ . Tako smo pokazali, če je  $I$  ideal, je tudi njegov koren  $\sqrt{I}$  ideal. Hitro lahko pokažemo tudi, da je  $\sqrt{I}$  korenski ideal in, da ideala  $I$  in  $\sqrt{I}$  definirata isto raznoterost:

$$\mathbf{V}(I) = \mathbf{V}(\sqrt{I}). \quad (1.20)$$

S pomočjo zgoraj opisanega lahko Hilbertov izrek o ničlah zapišemo v nekoliko drugačni obliki, ki pove, da če je poljuben polinom ničelen na vseh točkah raznoterosti  $\mathbf{V}(I) \subset k^n$  in je  $k$  algebraično zaprto polje, je  $f \in \sqrt{I}$ .

**Izrek 1.4.6 (Krepki Hilbertov izrek o ničlah)** Naj bo  $k$  algebraično zaprto polje in  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  ideal. Potem velja:

$$\sqrt{I} = \mathbf{I}(\mathbf{V}(I)).$$

**Dokaz.** Zagotovo je  $\sqrt{I} \subset \mathbf{I}(\mathbf{V}(I))$ , saj  $f \in \sqrt{I}$  implicira  $f^m \in I$  za neki  $m \in \mathbb{N}$ . Ker je  $f^m$  ničelen na  $\mathbf{V}(I)$ , je tudi  $f$  enak nič na  $\mathbf{V}(I)$ . Zato je  $f \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(I))$ .

Da bi dokazali obratno inkluzijo, predpostavimo, da je  $f \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(I))$ . Od tod sledi, da je  $f = 0$  na  $\mathbf{V}(I)$  in po Hilbertovem izreku o ničlah obstaja tak  $m \in \mathbb{N}$ , da je  $f^m \in I$ . To pa pomeni, da je  $f \in \sqrt{I}$  in ker je polinom  $f$  poljuben, velja  $\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) \subset \sqrt{I}$ . ■

Glavna posledica Hilbertovega izreka o ničlah je dopolnitev zveze med geometrijo in algebro oz. med raznoterostmi in ideali.

**Trditev 1.4.7** Naj bo  $k$  poljubno polje. Potem velja:

1. Za preslikavi

$$\mathbf{I}: \text{afine raznoterosti} \longrightarrow \text{ideali}$$

in

$$\mathbf{V}: \text{ideali} \longrightarrow \text{afine raznoterosti}$$

velja:

- če sta  $I$  in  $J$  ideala, za katera velja  $I \subset J$ , je  $\mathbf{V}(J) \subset \mathbf{V}(I)$ ,
- če sta  $V$  in  $W$  raznoterosti z lastnostjo  $V \subset W$ , je  $\mathbf{I}(W) \subset \mathbf{I}(V)$ ,
- za poljubno raznoterost  $V$  je

$$\mathbf{V}(\mathbf{I}(V)) = V,$$

kar pomeni, da je  $\mathbf{I}$  vedno bijektivna preslikava.

2. Če je  $k$  algebraično zaprto polje in če se osredotočimo samo na korenske ideale, sta preslikavi

$$\mathbf{I}: \text{afine raznoterosti} \longrightarrow \text{korenski ideali}$$

in

$$\mathbf{V}: \text{korenski ideali} \longrightarrow \text{afine raznoterosti}$$

bijekciji in sta druga drugi inverzni. V tem primeru velja enakost

$$\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = I.$$

Za dokaz zgornje trditve glej [27].

Zgornja trditev torej pove, da je preslikava  $\mathbf{V}$  med ideali in afnimi raznoterostmi bijektivna samo, če so domena preslikave korenski ideali. Zato je koncept korena pomemben, saj v primeru, ko je  $k = \mathbb{C}$ , popolnoma opiše, kdaj ideala določata enako afino raznoterost.

**Trditev 1.4.8** Ideala  $I, J \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  določata enako afino raznoterost natanko tedaj, ko sta pripadajoča korena enaka:

$$\mathbf{V}(I) = \mathbf{V}(J) \Leftrightarrow \sqrt{I} = \sqrt{J}.$$

**Dokaz.** Če je  $\mathbf{V}(I) = \mathbf{V}(J)$ , iz (1.20) sledi  $\mathbf{V}(\sqrt{I}) = \mathbf{V}(\sqrt{J})$  in po trditvi 1.4.7 je  $\sqrt{I} = \sqrt{J}$ .

Obratno, če je  $\sqrt{I} = \sqrt{J}$ , je  $\mathbf{V}(\sqrt{I}) = \mathbf{V}(\sqrt{J})$  in iz (1.20) sledi  $\mathbf{V}(I) = \mathbf{V}(J)$ . ■

V smislu krepkega Hilbertovega izreka o ničlah se naravno pojavi vprašanje, ali je neki polinom element korena nekega ideala. To je t. i. problem pripadnosti korenu, ki ga formuliramo na naslednji način.

**Problem pripadnosti korenu.** Naj bo  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  ideal,  $\sqrt{I}$  njegov koren in  $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ . Odločiti želimo, ali je  $f$  element korena  $\sqrt{I}$ .

Ena možnost, kako preveriti, ali je  $f \in \sqrt{I}$ , je uporaba algoritma za problem pripadnosti idealu (glej razdelek 1.2), s katerim preverimo, če je neka potenca tega polinoma ( $f^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ) v idealu  $I$ . Vendar pa je ta način zelo zamuden, saj je število  $m$  lahko zelo veliko in v primeru, da  $f \notin \sqrt{I}$  takega naravnega števila  $m$  ne najdemo (čeprav ga lahko dolgo iščemo). Na srečo smo že v dokazu Hilbertovega izreka o ničlah (izrek 1.4.2) podali algoritem, ki pove ali je  $f \in \sqrt{I}$ , kjer je  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ . Iz enačb (3.38), (3.39) in (3.40) sledi: če je  $1 \in J = \langle 1 - wf, f_1, \dots, f_s \rangle$ , je  $f^m \in I$  za neki  $m \in \mathbb{N}$ , kar pomeni, da je  $f \in \sqrt{I}$ . Poglejmo z druge strani: če je  $f \in \sqrt{I}$ , je za neki  $m \in \mathbb{N}$  polinom  $f^m \in I \subset J$ . Velja pa tudi, da je  $1 - wf \in J$  in zato

$$1 = w^m f^m + (1 - w^m f^m) = w^m f^m + (1 - wf)(1 + wf + \dots + w^{m-1} f^{m-1}) \in J.$$

Tako smo dobili rešitev problema pripadnosti korenu.

**Problem pripadnosti korenu - rešitev.** Za poljuben polinom  $f \in k[x_1, \dots, x_n]$  in ideal  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset k[x_1, \dots, x_n]$  je  $f \in \sqrt{I}$  natanko tedaj, ko  $1 \in J = \langle 1 - wf, f_1, \dots, f_s \rangle$  oz. z drugimi besedami:  $J = k[x_1, \dots, x_n, w]$ .

S tem smo dobili algoritem za preverjanje, ali je dan polinom  $f$  v korenu ideala  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ . Najprej tvorimo ideal  $J = \langle 1 - wf, f_1, \dots, f_s \rangle$ , kjer je  $w$  nova spremenljivka, nato izračunamo reducirano Gröbnerjevo bazo tega ideala in če je le-ta enaka  $\{1\}$ , je  $f \in \sqrt{I}$ , sicer  $f \notin \sqrt{I}$ .

Geometrijski pomen tega, da je polinom  $f \in \sqrt{I}$ , je, da je polinom  $f$  ničelen na raznoterosti  $\mathbf{V}(I)$ .

V zvezi z koreni se pojavita še dve vprašanji:

- Kako izračunati množico generatorjev korena  $\sqrt{I}$ , t.j. množico  $\{g_1, \dots, g_t\}$ , da bo  $\sqrt{I} = \langle g_1, \dots, g_t \rangle$ ?
- Kako odločiti, ali je  $I$  korenski ideal?

Pri obeh vprašanjih odgovor najlažje dobimo s pomočjo računalnika. V razdelku 1.6 bomo v sistemu računske algebre `Singular` spoznali rutino<sup>4</sup>, ki izračuna koren ideala in rutino, ki nam omogoči, da preverimo enakost dveh idealov in v posebnem primeru enakost ideala in njegovega korena.

## 1.5 Operacije na idealih in raznoterostih

V tem razdelku bomo najprej spoznali dve binarni operaciji na idealih - vsota in produkt idealov. Nadaljevali bomo s presekom in kvocientom dveh idealov. Hkrati se bomo seznanili tudi z zvezo med algebro in geometrijo, ki izhaja iz lastnosti idealov in raznoterosti. Nato si bomo v nadaljnjih podrazdelkih pogledali še teorijo, ki se nanaša na raznoterosti: dekompozicijo raznoterosti, parametrizacijo raznoterosti in z njo povezan problem implicitizacije ter razsežnost raznoterosti.

### 1.5.1 Vsota, produkt, presek in kvocient idealov

Vsota,  $I + J$ , idealov  $I$  in  $J$  je ideal, definiran z vsemi možnimi vsotami elementov iz obeh idealov:

$$I + J := \{f + g : f \in I, g \in J\},$$

<sup>4</sup>Rutina je podprogram (funkcija), ki ima točno določene vhodne in izhodne podatke. V programu `Singular` je to npr. `minAssGTZ`.

produkt,  $I \cdot J$ , idealov  $I$  in  $J$  je ideal, definiran z (vsemi) vsotami produktov, kjer nastopajo faktorji iz obeh idealov:

$$I \cdot J := \{f_1g_1 + \cdots + f_rg_r : f_1, \dots, f_r \in I, g_1, \dots, g_r \in J, r \in \mathbb{N}\}.$$

Da se dokazati (glej npr. [27]), da sta v primeru, ko je  $I = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$  in  $J = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ , vsota  $I + J$  in  $I \cdot J$  generirana tako

$$\begin{aligned} I + J &= \langle f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_s \rangle \text{ in} \\ I \cdot J &= \langle f_i g_j : 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq s \rangle, \end{aligned}$$

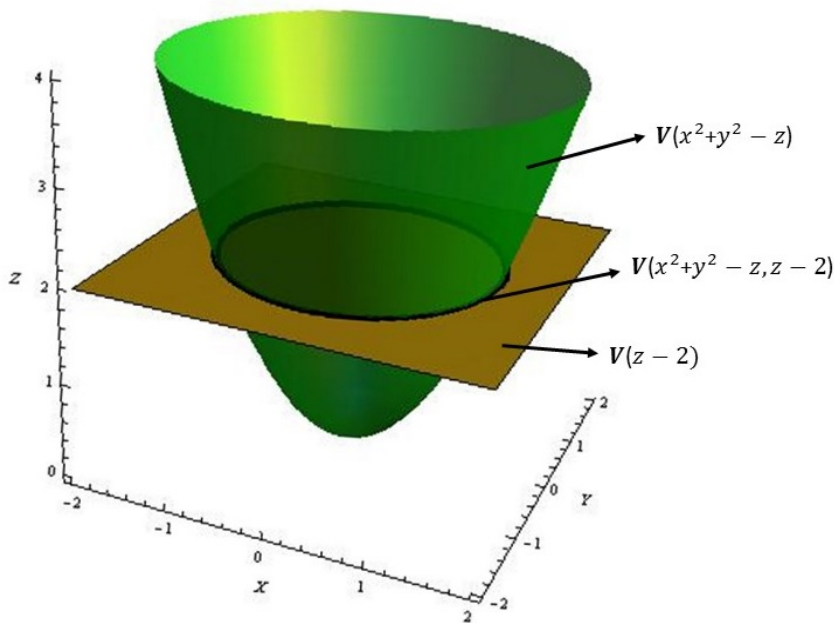
torej je  $\langle f_1 \rangle + \cdots + \langle f_k \rangle = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$ .

Vsota  $I + J$  je najmanjši ideal, ki vsebuje  $I$  in  $J$ , in geometrijsko ustreza preseku raznoterosti:

$$\mathbf{V}(I + J) = \mathbf{V}(I) \cap \mathbf{V}(J). \quad (1.21)$$

Geometrijski pomen enačbe (1.21) si oglejmo na enostavnem primeru.

Naj bosta  $I = \langle x^2 + y^2 - z \rangle$  in  $J = \langle z - 2 \rangle$  ideala v  $\mathbb{R}^3$ . Potem  $I + J = \langle x^2 + y^2 - z, z - 2 \rangle$  vsebuje oba polinoma  $x^2 + y^2 - z$  in  $z - 2$ . Zato raznoterost  $\mathbf{V}(I + J) = \mathbf{V}(x^2 + y^2 - z, z - 2)$  sestoji iz tistih točk, kjer sta oba polinoma ničelna in to so ravno tiste točke, ki so v preseku  $\mathbf{V}(I) \cap \mathbf{V}(J)$ .



Slika 1.1: Presek raznoterosti  $\mathbf{V}(x^2 + y^2 - z)$  in  $\mathbf{V}(z - 2)$ .

V primeru produkta idealov velja naslednja zveza med algebro in geometrijo idealov:

$$\mathbf{V}(I \cdot J) = \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J). \quad (1.22)$$

Spoznavajmo še binarno operacijo preseka idealov. Presek idealov  $I$  in  $J$  je množica

$$I \cap J = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] : f \in I \text{ in } f \in J\}.$$

Tako kot v primeru vsote in produkta idealov je tudi presek idealov  $I \cap J$  ideal.

Opazimo, da je produkt idealov vedno vsebovan v preseku idealov ( $I \cdot J \subset I \cap J$ ), saj so elementi  $I \cdot J$  vsote polinomov oblike  $f \cdot g$ , kjer je  $f \in I$  in  $g \in J$ . Produkt  $f \cdot g$  pa pripada tako idealu  $I$  ( $f \in I$ ) kot tudi idealu  $J$  ( $g \in J$ ). Če obravnavamo ideala  $I = J = \langle x, y \rangle$ , je  $I \cdot J = \langle x^2, xy, y^2 \rangle$  in  $I \cap J = I = J = \langle x, y \rangle$ . Vidimo, da je  $I \cdot J$  lahko strogo vsebovan v  $I \cap J$  (t. j.  $x \in I \cap J$  ampak  $x \notin I \cdot J$ ).

Če imamo podana ideala  $I$  in  $J$ , nas zanima, kako izračunati množico generatorjev preseka podanih idealov. Ta problem je veliko težji kot izračun generatorjev za vsoto in produkt idealov. Vzemimo kot primer ideal  $I$ , generiran s polinomom  $p = (x - y)^2(x^2 + y)^4(2x - 5y)$  in ideal  $J$ , generiran s polinomom  $q = (x - y)^3(x^2 + y)^3(x + 7y)$ . Presek teh dveh idealov je

$$I \cap J = \langle (x - y)^3(x^2 + y)^4(2x - 5y)(x + 7y) \rangle.$$

Ta izračun je preprost, saj imamo podano faktorizacijo polinomov  $p$  in  $q$  na ireducibilne polinome. V splošnem ta faktorizacija ni nujno podana, zato bi katerikoli algoritem, ki omogoča izračun preseka dveh idealov, moral imeti zmožnost, da se izogne tej omejitvi. Na srečo obstaja trik, ki zreducira izračun preseka dveh idealov na izračun eliminacijskega ideala. Preden navedemo rezultat, katerega dokaz najdete v [27], vpeljimo nekaj novih oznak. Če je  $I$  ideal iz  $k[x_1, \dots, x_n]$  in  $f(t) \in k[t]$  polinom ene spremenljivke  $t$ , potem  $fI$  označuje ideal iz  $k[x_1, \dots, x_n, t]$ , generiran s polinomi iz množice  $\{f \cdot h : h \in I\}$ . Definicija produkta  $fI$  se razlikuje od definicije produkta idealov  $I \cdot J$ , saj sta pri slednjem oba  $I$  in  $J$  ideala kolobarja  $k[x_1, \dots, x_n]$  pri produktu  $fI$  pa je polinom  $f$  element kolobarja  $k[t]$  in  $I \in k[x_1, \dots, x_n]$ . V bistvu tudi ideal  $I$  ni ideal kolobarja  $k[x_1, \dots, x_n, t]$ , saj ni zaprt za množenje s  $t$ . Če želimo poudariti, da je neki polinom  $f \in k[t]$  odvisen od ene spremenljivke  $t$ , pišemo  $f = f(t)$ , in če želimo poudariti, da je neki polinom  $h \in k[x_1, \dots, x_n]$  odvisen od spremenljivk  $x_1, \dots, x_n$ , pišemo  $h = h(\mathbf{x})$ , kjer je  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ . Podobno, če želimo poudariti, da je polinom  $g$  odvisen od spremenljivk  $x_1, \dots, x_n, t$ , pišemo  $g = g(\mathbf{x}, t)$ . V smislu omenjenih označb je  $fI = f(t)I = \langle f(t)h(\mathbf{x}) : h(\mathbf{x}) \in I \rangle$ . Za primer vzemimo ideal  $I = \langle x, y \rangle$  in polinom  $f(t) = t^2$ . Potem ideal  $f(t)I \subset k[x, y, t]$  vsebuje  $t^2x$  in  $t^2y$  in ni težko videti, da sta zadnja polinoma tudi generatorja ideala  $f(t)I$ . To je poseben primer naslednje trditve.

**Lema 1.5.1 ([27]) (i)** Če je  $I = \langle p_1(\mathbf{x}), \dots, p_r(\mathbf{x}) \rangle \subset k[x_1, \dots, x_n]$ , je

$$f(t)I = \langle f(t)p_1(\mathbf{x}), \dots, f(t)p_r(\mathbf{x}) \rangle \subset k[x_1, \dots, x_n, t].$$

**(ii)** Če je  $g(\mathbf{x}, t) \in f(t)I$  in je  $a$  katerikoli element polja  $k$ , potem je  $g(\mathbf{x}, a) \in I$ .

S pomočjo zgornje leme lahko navedemo naslednji izrek, katerega dokaz lahko najdete v [27].

Naj bosta  $I$  in  $J$  ideala v  $k[x_1, \dots, x_n]$ . Potem je

$$I \cap J = (tI + (1 - t)J) \cap k[x_1, \dots, x_n].$$

Zgornji rezultat skupaj z eliminacijskim izrekom (izrek 1.3.2) poskrbi za učinkovit algoritem za izračun preseka dveh idealov, ki ga zapišemo v obliki naslednje trditve.

**Trditev 1.5.2** Naj bosta  $I = \langle f_1, \dots, f_u \rangle$  in  $J = \langle g_1, \dots, g_v \rangle$  ideala kolobarja  $k[x_1, \dots, x_n]$ . Tvorimo ideal  $G' = \langle tf_1(\mathbf{x}), \dots, tf_u(\mathbf{x}), (1-t)g_1(\mathbf{x}), \dots, (1-t)g_v(\mathbf{x}) \rangle \subset k[t, x_1, \dots, x_n]$  in izračunajmo Gröbnerjevo bazo  $G$  ideala  $G'$  glede na leksikografsko urejenost, upoštevajoč  $t > x_1 > \dots > x_n$ . Potem je  $G \cap k[x_1, \dots, x_n]$  Gröbnerjeva baza ideala  $I \cap J$ .

Kot preprosto ponazoritev zgornjega algoritma vzemimo primer, kjer izračunamo presek idealov  $I = \langle x, y \rangle$  in  $J = \langle y^2 \rangle$  v  $\mathbb{Q}[x, y]$ . Najprej tvorimo ideal

$$tI + (1-t)J = \langle tx, ty, (1-t)y^2 \rangle$$

v  $\mathbb{Q}[x, y, t]$ . Če izračunamo Gröbnerjevo bazo tega ideala glede na leksikografsko urejenost, upoštevajoč  $t > x > y$ , dobimo množico  $\{y^2, tx, ty\}$ , in po eliminacijskem izreku je Gröbnerjeva baza ideala  $(tI + (1-t)J) \cap \mathbb{Q}[x, y]$  enaka  $\{y^2\}$  in zato je

$$I \cap J = \langle y^2 \rangle.$$

Sedaj se vprašamo, katera operacija na raznoterostih ustreza operaciji preseka idealov. Naj bo  $x \in \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$ . Potem je  $x \in \mathbf{V}(I)$  ali  $x \in \mathbf{V}(J)$ . To pomeni, da bodisi  $f(x) = 0$  za vse  $f \in I$  ali  $f(x) = 0$  za vse  $f \in J$ . Zato je tudi  $f(x) = 0$  za vse  $f \in I \cap J$  in posledično je  $x \in \mathbf{V}(I \cap J)$ . Tako je  $\mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J) \subset \mathbf{V}(I \cap J)$ . Po drugi strani pa zaradi inkluzije  $I \cdot J \subset I \cap J$  velja  $\mathbf{V}(I \cap J) \subset \mathbf{V}(I \cdot J)$ , in ker je  $\mathbf{V}(I \cdot J) = \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$ , dobimo po formuli (1.21) še inkluzijo  $\mathbf{V}(I \cap J) \subset \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J)$ . S tem smo pokazali, da je unija raznoterosti enaka raznoterosti preseka idealov:

$$\mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J) = \mathbf{V}(I \cap J). \quad (1.23)$$

Vidimo, da ima presek idealov enako raznoterost kot produkt istih idealov. V duhu tega in dejstva, da je presek veliko težje izračunati kot produkt, se vprašamo, zakaj bi se sploh ukvarjali z izračunom preseka idealov. Razlog je, da se presek obnaša veliko bolje v operacijah na korenskih idealih: produkt korenskih idealov ni nujno korenski ideal, medtem ko je presek korenskih idealov vedno korenski ideal in velja [27]:

$$\sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{I \cap J}.$$

Naslednja operacija, ki jo obravnavamo na idealih, je kvocient idealov. To operacijo bomo povezali z operacijo razlike raznoterosti.

Če sta  $I$  in  $J$  ideala kolobarja  $k[x_1, \dots, x_n]$ , je njun kvocient ideal

$$I : J = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] : fg \in I \text{ za vsak } g \in J\}.$$

V definiciji naslednje množice množica  $S$  ni nujno afina raznoterost:

$$\mathbf{I}(S) = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] : f(a) = 0 \text{ za vsak } a \in S\}.$$

Množica  $\mathbf{I}(S)$  je ideal kolobarja  $k[x_1, \dots, x_n]$  in ni težko videti, da gre za korenski ideal.

**Definicija 1.5.3** Zaprtje Zariskega podmnožice  $S$  afinega prostora  $k^n$  je najmanjša afina algebraična raznoterost, ki vsebuje  $S$ .

Če je  $S \in k^n$ , potem zaprtje Zariskega množice  $S$  označimo z  $\bar{S}$  in velja  $\mathbf{V}(\mathbf{I}(S)) = \bar{S}$ . Naslednji izrek pokaže, kako je kvocient idealov povezan z razliko raznoterosti.

**Izrek 1.5.4** ([27]) *Naj bosta  $I$  in  $J$  ideala v  $k[x_1, \dots, x_n]$ . Potem velja:*

$$\mathbf{V}(I : J) \supset \overline{\mathbf{V}(I) \setminus \mathbf{V}(J)}.$$

*Če je  $k$  algebraično zaprto polje in je  $I$  korenski ideal, potem velja*

$$\mathbf{V}(I : J) = \overline{\mathbf{V}(I) \setminus \mathbf{V}(J)}. \quad (1.24)$$

V naslednji trditvi, katere dokaz najdete v [27], je podan algoritem za izračun kvocienta dveh idealov.

**Trditev 1.5.5** *Naj bodo  $I$  in  $J_1, \dots, J_m$  ideali v  $k[x_1, \dots, x_n]$  in  $g$  neničelni element kolobarja  $k[x_1, \dots, x_n]$ . Če je  $\{h_1, \dots, h_s\}$  baza ideala  $I \cap \langle g \rangle$ , je  $\{h_1/g, \dots, h_s/g\}$  baza ideala  $I : \langle g \rangle$  in velja:*

$$I : \left( \sum_{s=1}^m J_s \right) = \bigcap_{s=1}^m (I : J_s).$$

## 1.5.2 Dekompozicija raznoterosti

Videli smo že, da je unija raznoterosti tudi sama raznoterost. Če na primer obravnavamo raznoterost  $\mathbf{V}(xz, yz)$ , je le-ta unija premice  $\mathbf{V}(x, y)$  in ravnine  $\mathbf{V}(z)$ . V tem primeru je intuitivno bolj naravno razmišljati o premici in ravnini kot o  $\mathbf{V}(xz, yz)$ . Premica in ravnina sta v tem primeru tudi "ireducibilni" v smislu, da ju ne moremo zapisati kot unijo preprostejših raznoterosti. V naslednji definiciji si pogledimo pojem ireducibilnosti raznoterosti.

**Definicija 1.5.6** *Afina raznoterost  $V \subset k^n$  je ireducibilna, če za poljubni raznoterosti  $V_1$  in  $V_2$  iz  $V = V_1 \cup V_2$  sledi bodisi  $V = V_1$  ali  $V = V_2$ .*

Tako opazimo, da  $\mathbf{V}(xz, yz)$  ni ireducibilna raznoterost. Po drugi strani pa ni popolnoma jasno, kdaj je raznoterost ireducibilna. Ideal  $I = \langle xz, yz \rangle$  definira isto raznoterost kot katerikoli ideal  $\langle x^n z^m, y^p z^q \rangle$  ( $n, m, p, q \in \mathbb{N}$ ) in vendar ima ideal  $I$  najpreprostejšo obliko. Hkrati je  $I$  tudi enak svojemu korenu,  $\sqrt{I} = I = \langle xz, yz \rangle$ , in ga lahko zapišemo kot presek korenskih idealov  $\langle z \rangle$  in  $\langle x, y \rangle$ , ki ustrezata ireducibilnim komponentam raznoterosti  $V(I)$ . Od tod se naravno pojavi vprašanje, ali lahko opišemo ideale, ki ustrezajo ireducibilnim raznoterostim? Odgovor tiči v praidealih.

**Definicija 1.5.7** *Ideal  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  je praideal, če za poljubna polinoma  $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$  velja, da iz  $f \cdot g \in I$  sledi bodisi  $f \in I$  ali  $g \in I$ .*

Iz definicij 1.4.4 in 1.5.7 sledi naslednja trditev.

**Trditev 1.5.8** *Vsak praideal je korenski ideal.*

V naslednji trditvi (za dokaz glej [27]) je opisana zveza med preseki praidealov in korenjenjem.

**Trditev 1.5.9** *Naj bodo  $P_1, \dots, P_s$  praideali iz  $k[x_1, \dots, x_n]$ . Tedaj je  $I = \bigcap_{j=1}^s P_j$  korenski ideal.*

V trditvi 1.4.7 smo videli, da je preslikava  $\mathbf{I}$ , ki afini raznoterosti priredi korenski ideal, bijektivna. Naslednji izrek pove, da je tudi preslikava  $\mathbf{I}$ , ki slika iz množice afinih raznoterosti v množico praidealov, bijektivna.

**Izrek 1.5.10** Naj bo  $V \subset k^n$  afina raznoterost.  $V$  je ireducibilna natanko tedaj, ko je  $\mathbf{I}(V)$  praideal.

**Dokaz.** Naj bo  $V$  ireducibilna raznoterost in  $f \cdot g \in \mathbf{I}(V)$ . Recimo, da je  $V_1 = V \cap \mathbf{V}(f)$  in  $V_2 = V \cap \mathbf{V}(g)$ .  $V_1$  in  $V_2$  sta afini raznoterosti, saj je presek afinih raznoterosti afina raznoterost. Iz  $f \cdot g \in \mathbf{I}(V)$  sledi, da je  $V = V_1 \cup V_2$ . Ker je  $V$  ireducibilna, je bodisi  $V = V_1$  ali  $V = V_2$ . Recimo, da je  $V = V_1 = V \cap \mathbf{V}(f)$ . Tedaj je polinom  $f$  ničelen na raznoterosti  $V$  in zato je  $f \in \mathbf{I}(V)$ . Tako je  $\mathbf{I}(V)$  praideal.

Predpostavimo še, da je  $\mathbf{I}(V)$  praideal in naj bo  $V = V_1 \cup V_2$ . Recimo, da  $V \neq V_1$ . Trdimo, da je  $\mathbf{I}(V) = \mathbf{I}(V_2)$ . Opazimo, da je  $\mathbf{I}(V) \subset \mathbf{I}(V_2)$ , saj je  $V_2 \subset V$ . Za dokaz obratne inkluzije vidimo, da  $\mathbf{I}(V) \subsetneq \mathbf{I}(V_1)$ , saj  $V_1 \subsetneq V$ . Zato lahko izberemo  $f \in \mathbf{I}(V_1) \setminus \mathbf{I}(V)$ . Vzemimo poljuben  $g \in \mathbf{I}(V_2)$ . Ker je  $V = V_1 \cup V_2$ , je  $f \cdot g$  ničelen na raznoterosti  $V$  in zato je  $f \cdot g \in \mathbf{I}(V)$ .  $\mathbf{I}(V)$  je praideal in zato je bodisi  $f \in \mathbf{I}(V)$  ali  $g \in \mathbf{I}(V)$ . Ker  $f \notin \mathbf{I}(V)$ , je  $g \in \mathbf{I}(V)$ . Zato je  $\mathbf{I}(V) = \mathbf{I}(V_2)$ , od koder sledi  $V = V_2$ , saj je  $\mathbf{I}$  bijektivna preslikava. Tako smo dokazali, da je  $V$  ireducibilna raznoterost. ■

Zgoraj smo videli, da je raznoterost ideala  $\langle x^n z^m, y^p z^q \rangle \subset k[x, y, z]$  za vsak  $n, m, p, q \in \mathbb{N}$  unija premice  $x = y = 0$  in ravnine  $z = 0$ . Naravno se pojavlja vprašanje, ali je možno zapisati raznoterost ideala kot končno unijo ireducibilnih raznoterosti. Naj bo  $I$  ideal in  $V = \mathbf{V}(I)$  njegova raznoterost. Tedaj velja naslednji izrek (glej [27] za dokaz).

**Izrek 1.5.11** Vsako afino raznoterost  $V \subset k^n$  lahko zapišemo kot unijo

$$V = V_1 \cup \dots \cup V_m,$$

kjer so  $V_i$  ireducibilne raznoterosti.

Dekompozicija

$$V = V_1 \cup \dots \cup V_m,$$

v kateri je vsaka raznoterost  $V_i$  ireducibilna, se imenuje minimalna, če za vse  $i \neq j$  velja  $V_i \not\subseteq V_j$ . Za minimalne dekompozicije velja naslednji izrek.

**Izrek 1.5.12 ([27])** Za vsako afino raznoterost  $V \subset k^n$  obstaja enolična minimalna dekompozicija  $V = V_1 \cup \dots \cup V_m$ .

Videli smo že (trditev 1.5.9), da je presek praidealov korenski ideal. Kot direktno posledico izrekov 1.4.7, 1.5.10 in 1.5.13 dobimo v primeru, ko je  $k = \mathbb{C}$ , naslednji rezultat.

**Izrek 1.5.13** Vsak korenski ideal  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  lahko enolično zapišemo kot presek praidealov:

$$\sqrt{I} = \bigcap_{j=1}^s P_j,$$

kjer za  $i \neq j$  velja  $P_i \not\subseteq P_j$ .

Podobno kot v primeru raznoterosti, tej predstavitvi pogosto rečemo minimalna dekompozicija korenskega ideala.

Za kasnejšo uporabo te teorije je naš cilj razumeti množico rešitev sistema (1.1), ki je odvisna od ideala  $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ . Množica rešitev sistema (1.1) je raznoterost  $V = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)$ . Če je  $V$  končna množica, jo, kot je ilustrirano v primeru 1.2.26, lahko pridobimo z izračunom Gröbnerjeve baze ideala  $I$ , glede na izbrano urejenost členov. Če  $V$  ni končna množica, po



izreku 1.5.13 obstaja enolična minimalna dekompozicija raznoterosti in zato je najboljši način za opis raznoterosti  $V$ , da najdemo njeno minimalno dekompozicijo. Pri tem se skličemo na trditev 1.4.8 in izrek 1.5.12. Upoštevamo še, da je koren ideala korenski ideal in ga zato lahko na enoličen način zapišemo kot presek praidealov:  $\sqrt{I} = \bigcap_{j=1}^s P_j$ . Če uporabimo preslikavo  $\mathbf{V}$ , potem velja:

$$V = \mathbf{V}(I) = \mathbf{V}(\sqrt{I}) = \mathbf{V}(\bigcap_{j=1}^s P_j) = \bigcup_{j=1}^s \mathbf{V}(P_j). \quad (1.25)$$

Vsak člen  $\mathbf{V}(P_j)$  unije zgoraj določa ireducibilno podraznoterost  $V_j$  raznoterosti  $V$ . Torej je prvi korak v izračunu minimalne dekompozicije raznoterosti ideala  $I$  izračun minimalne dekompozicije njegovega korena, nato pa vsaka njegova komponenta  $P_j$  določa ireducibilno podraznoterost raznoterosti  $V$ . V razdelku 1.6 bomo spoznali rutini `minAssGTZ` in `minAssChar` v `Singular`ju, ki izračunata minimalno dekompozicijo korena ideala oz. minimalno dekompozicijo raznoterosti ideala.

Pogosto je bolj priročno delati z idealom  $I$  kot pa z njegovim korenem. Kot je znano, lahko vsako naravno število zapišemo kot produkt praštevil. To pomeni, da je vsak ideal kolobarja  $\mathbb{Z}$  presek praidealov. Na žalost pa ta lastnost ne velja za ideale kolobarja  $k[x_1, \dots, x_n]$ : poljubnega ideala  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  ne moremo zapisati kot presek praidealov. Vseeno se pa naravno pojavi vprašanje, če lahko poljubni ideal predstavimo kot presek preprostejših idealov, zato se najprej seznanimo s pojmom primarnega ideala.

**Definicija 1.5.14** *Ideal  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  je primarni, če iz  $f \cdot g \in I$  sledi, da je bodisi  $f \in I$  ali pa je neka potenca polinoma  $g$  ( $g^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ) v idealu  $I$ .*

Hitro opazimo, da so praideali tudi primarni ideali. Prav tako vidimo, da če je  $I$  primarni ideal, je  $\sqrt{I}$  praideal, in sicer najmanjši praideal, ki vsebuje  $I$ . V tem primeru idealu  $\sqrt{I}$  pravimo pridruženi praideal ideala  $I$ .

Medtem ko vsak korenski ideal lahko zapišemo kot presek praidealov, lahko poljubni ideal  $I$  zapišemo kot končni presek primarnih idealov (glej [27, izrek 4, Pog.4, §7]).

**Definicija 1.5.15** *Primarna dekompozicija ideala  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  je zapis ideala  $I$  v obliki končnega preseka primarnih idealov  $Q_j$ :*

$$I = \bigcap_{j=1}^s Q_j. \quad (1.26)$$

*Primarna dekompozicija se imenuje minimalna, če so vsi pridruženi praideali  $\sqrt{Q_j}$  različni in za vsak  $j$  velja  $\bigcap_{i \neq j} Q_i \not\subseteq Q_j$ .*

Minimalna primarna dekompozicija polinomskega ideala vedno obstaja, vendar ni nujno enolična, kar pove Lasker-Noetherjev izrek, katerega dokaz najdete v [27].

**Izrek 1.5.16 (Lasker-Noether)** *Vsak ideal  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  ima minimalno primarno dekompozicijo (1.26). Vse takšne dekompozicije imajo enako število primarnih idealov in enako množico pridruženih praidealov.*

V razdelku 1.6 bomo poleg že omenjenih rutin za izračun minimalne dekompozicije korena ideala navedli tudi rutini za izračun primarne dekompozicije ideala.

### 1.5.3 Dekompozicija raznoterosti z uporabo modularne aritmetike

V praksi se pri izračunu Gröbnerjevih baz, še posebej, ko uporabimo leksikografsko urejenost, pogosto soočamo z ogromnimi računskimi težavami, saj lahko med izvedbo algoritma velikost koeficientov  $S$ -polinomov eksponentno naraste. Celo za zelo preprost primer polinomov

$$\begin{aligned} f_1 &= 8x^2y^2 + 5xy^3 + 3x^3z + x^2yz, \\ f_2 &= x^5 + 2y^3z^2 + 13y^2z^3 + 5yz^4, \\ f_3 &= 8x^3 + 12y^3 + xz^2 + 3, \\ f_4 &= 7x^2y^4 + 18xy^3z^2 + y^3z^3. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Z reducirano Gröbnerjevo bazo  $G = \{g_1, g_2, g_3\}$  ideala  $\langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle$ , kjer so

$$g_1 = x, \quad g_2 = y^3 + \frac{1}{4}, \quad g_3 = z^2,$$

nastopi v vmesnih izračunih Gröbnerjeve baze naslednji polinom:

$$y^3 - 1735906504290451290764747182 \dots \tag{1.28}$$

Število v drugem členu zgornjega polinoma vsebuje približno 80.000 števk [2]. To je števec racionalnega števila s približno enakim številom števk v imenovalcu.

Ta računaska težava v izračunu Gröbnerjeve baze v polju racionalnih števil je bistvena ovira za uporabo Gröbnerjevih baz. Sedaj bomo opisali pristop, ki sloni na modularni aritmetiki in ki zelo poenostavi iskanje množice rešitev polinomskega sistema.

Da izpeljemo modularne izračune, na začetku izberemo praštevilo  $p$  in vse računamo po modulu  $p$ , t. j. v končnem polju karakteristike  $p$  (polje  $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p$ ). Izkaže se, da modularni izračuni ohranijo bistvene informacije originalnega sistema in pogosto je možno s tako imenovano racionalno rekonstrukcijo razširiti oz. rekonstruirati te informacije iz rezultata izračunav v  $\mathbb{Z}_p$  in dobiti natančno rešitev v polju racionalnih števil.

Za racionalno rekonstrukcijo, t. j. za rekonstrukcijo števila  $r/s \in \mathbb{Q}$ , pri čemer je podana njegova slika  $t \in \mathbb{Z}_p$ , uporabimo naslednji algoritem [124] (v algoritmu oznaka  $[\cdot]$  pomeni funkcijo spodnji del).

#### Algoritem racionalne rekonstrukcije

**Korak 1.**  $u = (u_1, u_2, u_3) := (1, 0, p)$ ,  $v = (v_1, v_2, v_3) := (0, 1, c)$

**Korak 2.** DOKLER  $\sqrt{p/2} \leq v_3$  NAREDI

$\{q := \lfloor u_3/v_3 \rfloor, r := u - qv, u := v, v := r\}$

**Korak 3.** Če  $|v_2| \geq \sqrt{m/2}$  POTEM error()

**Korak 4.** VRNI  $v_3, v_2$

Če sta podani celo število  $c$  in praštevilo  $p$ , algoritem proizvede takšni celi števili  $v_3$  in  $v_2$ , da velja:  $v_3/v_2 \equiv c \pmod{p}$  oz.  $v_3 = v_2c + pt$  za neki  $t$  in  $|v_2|, |v_3| \leq \sqrt{p/2}$ . Če takšno število  $v_3/v_2$  ne obstaja, potem algoritem vrne "error()". Za izvedbo algoritma racionalne rekonstrukcije v programu Mathematica lahko uporabimo naslednjo kodo.

```
RATCONVERT[c_, p_] := Block[{u = {1, 0, p}, v = {0, 1, c}, r},
While[Sqrt[p/2] <= v[[3]], r = u - Quotient[u[[3]], v[[3]]] v;
u = v; v = r]; If[Abs[v[[2]]] >= Sqrt[p/2], err, v[[3]]/v[[2]]]
```

Na primer, če izračunamo Gröbnerjevo bazo ideala  $\langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle$  v polju s karakteristiko  $p = 32003$ , kjer so  $f_1, f_2, f_3, f_4$  polinomi iz (1.27), dobimo  $G = \{x, y^3 + 8001, z^2\}$ . Racionalna rekonstrukcija nam (v smislu zgornjih oznak) da  $1/4 \equiv 8001 \pmod{32003}$  (torej  $c = 8001$ ,  $p = 32003$ ,  $v_3 = 1$ ,  $v_2 = 4$  in  $t = -1$ ). Zato je rekonstruirana Gröbnerjeva baza enaka  $G = \{x, y^3 + 1/4, z^2\}$ . Sedaj v polinomih vmesnih izračunov ne nastopi več nobeno ekstremno veliko število; vsa števila imajo največ 5 cifer. Tudi hitrost izračunav se bistveno poveča in poraba pomnilnika se drastično zmanjša.

Sedaj opišimo pristop za reševanje dolgih polinomskih sistemov (1.1), ki je bil predlagan v [109]. Imenuje se dekompozicijski algoritem z modularno aritmetiko in sestoji iz petih korakov:

**Korak 1.** Izberemo praštevilo  $p$  in izračunamo minimalne pridružene praideale  $\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_s$  ideala  $I$  v  $\mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_n]$ .

**Korak 2.** Z uporabo algoritma za racionalno rekonstrukcijo spremenimo ideale  $\tilde{Q}_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ) v ideale  $Q_i \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$  (t. j., zamenjamo vse koeficiente v  $\tilde{Q}_i$  z racionalnimi števili z algoritmom racionalne rekonstrukcije).

**Korak 3.** Za vsak  $i = 1, \dots, s$  preverimo z uporabo testa pripadnosti idealu, če so polinomi  $f_1, \dots, f_s$  v korenskih idealov  $Q_i$ , t. j., če je reducirana Gröbnerjeva baza ideala  $\langle 1 - wf, Q_i \rangle$  enaka  $\{1\}$ . Če je to izpolnjeno, gremo naprej na korak 4, sicer izberemo drugo praštevilo  $p$  in se vrnemo na korak 1.

**Korak 4.** Izračunamo  $Q = \bigcap_{i=1}^s Q_i \subset \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ .

**Korak 5.** Preverimo, če je  $\sqrt{Q} = \sqrt{I}$  oz., če je za vsak  $g \in Q$  reducirana Gröbnerjeva baza ideala  $\langle 1 - wg, I \rangle$  enaka  $\{1\}$  in če je za vsak  $f \in I$  reducirana Gröbnerjeva baza ideala  $\langle 1 - wf, Q \rangle$  enaka  $\{1\}$ . Če sta oba pogoja izpolnjena, je  $\mathbf{V}(I) = \bigcup_{i=1}^s \mathbf{V}(Q_i)$ . Sicer izberemo drugo praštevilo  $p$  in se vrnemo na korak 1.

V poglavju 3 bomo zgornji algoritem uporabili pri reševanju velikih polinomskih sistemov, ki nastopijo pri študiju problema centra.

#### 1.5.4 Parametrizacija raznoterosti, problem implicitizacije in razsežnost raznoterosti

Raznoterost  $V = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)$  lahko včasih opišemo v parametrični obliki. To je drugi način, kako opisati rešitve sistema (1.1), če jih je neskončno mnogo. Običajni zapis raznoterosti v obliki  $\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)$  oz. v obliki sistema enačb  $f_1 = 0, \dots, f_s = 0$  imenujemo *implicitna* oblika raznoterosti.

Začnimo s preprostim primerom iz linearne algebre. V  $\mathbb{R}^3$  obravnavamo sistem enačb

$$\begin{aligned} x + y - z &= 4 \\ x - y + 3z &= 2. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Geometrijsko sistem (1.29) v  $\mathbb{R}^3$  predstavlja premico, ki je presek ravnin  $x + y - z = 4$  in  $x - y + 3z = 2$ , torej ima obravnavani sistem neskončno rešitev. Najlažje rešitve sistema (1.29) opišemo, če v ekvivalentnem sistemu

$$\begin{aligned} x + z &= 3 \\ y - 2z &= 1 \end{aligned} \tag{1.30}$$

vpeljemo tako imenovan *parameter*  $t$  in postavimo  $z = t$ , da dobimo

$$\begin{aligned}x &= 3 - t \\y &= 1 + 2t \quad , \quad t \in \mathbb{R}. \\z &= t.\end{aligned}\tag{1.31}$$

Rešitev (1.31) imenujemo *parametrizacija* sistema (1.29). Geometrijsko je (1.31) parametrizacija premice, ki je presek obeh ravnin iz (1.29) (in (1.30)).

Sedaj si pogledajmo parametrizacijo enotske krožnice v  $\mathbb{R}^2$ :

$$x^2 + y^2 = 1.\tag{1.32}$$

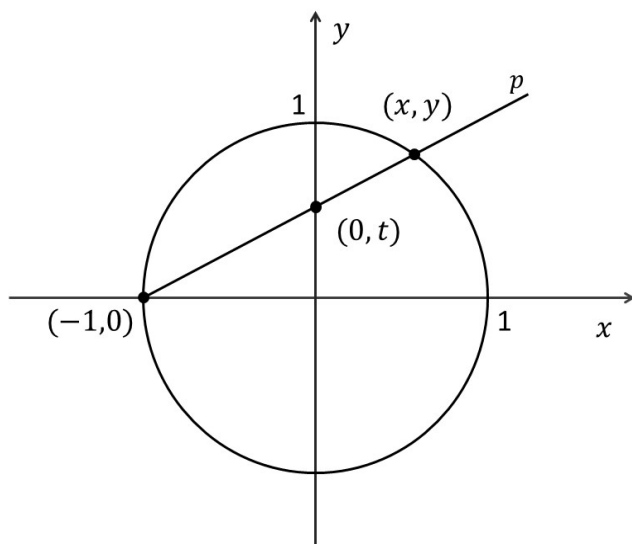
Pogosto jo parametriziramo s trigonometričnima funkcijama kosinus in sinus:

$$\begin{aligned}x(t) &= \cos t \\y(t) &= \sin t \quad ,\end{aligned}$$

vendar obstaja tudi algebraičen način parametrizacije enotske krožnice:

$$\begin{aligned}x &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\y &= \frac{2t}{1 + t^2}.\end{aligned}\tag{1.33}$$

Zanimivo je, da ta parametrizacija opiše vse točke na krožnici (2.64), razen točke  $(-1, 0)$ . Na sliki 1.2 vidimo, kako dobimo parametrizacijo (1.33).



Slika 1.2: Parametrizacija enotske krožnice v  $\mathbb{R}^2$ .

Opazujemo premice  $p$ , ki potekajo skozi točko  $(-1, 0)$ . Če  $p$  ni vzporedna z osjo  $y$ , preseka enotsko krožnico v neki točki  $(x, y)$ , os  $y$  pa seka v točki  $(0, t)$ . Očitno za zelo navpične premice

$p$  vrednost parametra  $t$  teži proti  $\infty$  (oz.  $-\infty$ ). Npr. za  $t = 0$  premica  $p$  preseka krožnico (2.64) v točki  $(1, 0)$ , za  $t = 1$  v točki  $(0, 1)$ , itd. Torej za  $t \in (-\infty, \infty)$  s tem postopkom opišemo vse točke, razen točke  $(-1, 0)$ . Preostane najti eksplicitni formuli za  $x$  in  $y$  v odvisnosti od  $t$ . Očitno je enačba premice  $p$  enaka  $y = tx + t = t(x + 1)$ . Ker je točka  $(x, y)$  presečišče premice  $p$  in krožnice  $x^2 + y^2 = 1$ , sledi

$$x^2 + t^2(x + 1)^2 = 1,$$

ki predstavlja kvadratno enačbo

$$(1 + t^2)x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 = 0. \quad (1.34)$$

Rešitvi enačbe (1.34) sta  $x$ -koordinati presečišča premice s krožnico. Ena rešitev je  $x = -1$  in druga je

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Iz enačbe premice  $p$  sledi

$$y = t(x + 1) = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Opazimo, da parametrizacija krožnice vsebuje kvociente polinomov, kar pomeni, da smo krožnico predstavili z racionalnimi funkcijami.

Recimo, da je podana raznoterost  $V = \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s) \subset k^n$ . *Racionalna parametrična predstavitev (racionalna parametrizacija)* raznoterosti  $V$  sestoji iz takšnih racionalnih funkcij  $r_1, \dots, r_n$  spremenljivk  $t_1, \dots, t_m$ , da podane točke

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1(t_1, \dots, t_m) \\ x_2 &= r_2(t_1, \dots, t_m) \\ &\vdots \\ x_n &= r_n(t_1, \dots, t_m) \end{aligned}$$

ležijo na raznoterosti  $V$ . Včasih uspemo raznoterost  $V$  parametrizirati s polinomi  $p_1, \dots, p_n$ . Tedaj parametrizacijo raznoterosti imenujemo *polinomska parametrična predstavitev (polinomska parametrizacija)*. Originalna predstavitev raznoterosti  $V$  kot  $f_1 = \dots = f_s = 0$  se imenuje *implicitna predstavitev* raznoterosti  $V$ , kot smo že zgoraj omenili. (1.29), (1.30) in (2.64) so implicitne predstavitve, (1.31) je polinomska parametrična in (1.33) je racionalna parametrična predstavitev.

Pri obeh predstavitev raznoterosti (implicitna in parametrična) se porajata vprašanji:

- **Parametrizacija:** Ali je lahko vsaka afina raznoterost opisana z racionalno parametrizacijo?
- **Implicitizacija:** Ali lahko najdemo implicitno predstavitev raznoterosti, če je podana racionalna parametrizacija afine raznoterosti?

Odgovor na prvo vprašanje je negativen. V bistvu večine afinih raznoterosti ne moremo predstaviti z racionalno parametrizacijo.

Poglejmo, kaj se zgodi pri vprašanju implicitizacije. Če je raznoterost opisana s parametričnimi enačbami, lahko nastopi težava, če parametrizacija ne opiše vseh točk raznoterosti.

Tako imenovan *problem implicitizacije* se nanaša na iskanje enačb, ki definirajo *najmanjšo raznoterost*  $V$ , ki vsebuje dano parametrizacijo. Ko enkrat najdemo najmanjšo raznoterost  $V$ , se pojavita novi vprašanji: ali parametrizacija zavzame vse točke raznoterosti  $V$  in, če so kakšne manjkajoče točke, kako jih najdemo? Pri odgovoru na ti vprašanji si pomagamo z Gröbnerjevimi bazami in teorijo eliminacijskih idealov iz razdelka 1.3.

Rešitev problema implicitizacije začnimo s polinomsko parametrizacijo, ki je podana kot

$$\begin{aligned} x_1 &= P_1(t_1, \dots, t_m) \\ x_2 &= P_2(t_1, \dots, t_m) \\ &\vdots \\ x_n &= P_n(t_1, \dots, t_m), \end{aligned} \tag{1.35}$$

kjer so  $P_1, \dots, P_n$  polinomi iz  $k[t_1, \dots, t_m]$ .

Geometrijsko lahko gledamo na to kot na funkcijo

$$F : k^m \rightarrow k^n, \tag{1.36}$$

ki je definirana kot

$$F(t_1, \dots, t_m) = (P_1(t_1, \dots, t_m), \dots, P_n(t_1, \dots, t_m)).$$

Slika funkcije  $F$ ,  $F(k^m)$ , je podmnožica množice  $k^n$  in je parametrizirana z enačbami (1.35). Ker  $F(k^m)$  ni nujno afina raznoterost, problem implicitizacije pomeni najti najmanjšo afino raznoterost, ki vsebuje  $F(k^m)$ . Implicitizacijo in eliminacijo lahko povežemo na naslednji način. Enačbe (1.35) definirajo raznoterost  $V = \mathbf{V}(x_1 - P_1, \dots, x_n - P_n) \subset k^{n+m}$  in zato točke raznoterosti  $V$  lahko zapišemo kot

$$(t_1, \dots, t_m, P_1(t_1, \dots, t_m), \dots, P_n(t_1, \dots, t_m)),$$

kar kaže na to, da na  $V$  lahko gledamo kot na graf funkcije  $F$ . Poleg funkcije  $F$  imamo še dve funkciji:

$$\begin{aligned} h &: k^m \rightarrow k^{n+m} \\ \pi_m &: k^{n+m} \rightarrow k^n, \end{aligned}$$

ki sta definirani kot

$$\begin{aligned} h(t_1, \dots, t_m) &= (t_1, \dots, t_m, P_1(t_1, \dots, t_m), \dots, P_n(t_1, \dots, t_m)) \\ \pi_m(t_1, \dots, t_m, x_1, \dots, x_n) &= (x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Opazimo, da je funkcija  $F$  kompozitum funkcij  $h$  in  $\pi_m$ :  $F = \pi_m \circ h$ , in ni težko pokazati, da je  $h(k^m) = V$ . Tako dobimo

$$F(k^m) = \pi_m(h(k^m)) = \pi_m(V),$$

kar pomeni, da je slika parametrizacije projekcija svojega grafa. Da poiščemo najmanjšo raznoterost, ki vsebuje  $F(k^m)$ , lahko uporabimo eliminacijsko teorijo, kot opisuje naslednji izrek.

**Izrek 1.5.17 (Polinomska implicitizacija)** *Naj bo  $k$  neskončno polje in  $F : k^m \rightarrow k^n$  funkcija, določena s polinomsko parametrizacijo (1.35). Naj bo  $I = \langle x_1 - P_1, \dots, x_n - P_n \rangle \subset k[t_1, \dots, t_m, x_1, \dots, x_n]$  ideal in  $I_m = I \cap k[x_1, \dots, x_n]$   $m$ -ti eliminacijski ideal ideala  $I$ . Tedaj je  $\mathbf{V}(I_m)$  najmanjša raznoterost v  $k^n$ , ki vsebuje  $F(k^m)$ .*

Za dokaz tega izreka glej [27, Pog.3,§3].

Izrek 1.5.17 poda naslednji algoritem za implicitizacijo polinomskih parametrizacij: če so podane enačbe (1.35), tvorimo ideal  $I = \langle x_1 - P_1, \dots, x_n - P_n \rangle$  in izračunamo njegovo Gröbnerjevo bazo glede na leksikografsko urejenost, kjer je vsak  $t_i$  večji od vsakega  $x_i$ . Po eliminacijskem izreku (izrek 1.3.2) elementi Gröbnerjeve baze, ki ne vsebujejo spremenljivk  $t_1, \dots, t_m$ , tvorijo bazo ideala  $I_m$  in po izreku 1.5.17 določajo najmanjšo raznoterost v  $k^n$ , ki vsebuje dano parametrizacijo.

Kot primer za ponazoritev zgornjega algoritma vzemimo primer iz začetka tega razdelka, kjer smo premico (preseka ravnin), opisano z enačbama (1.29) oz. ekvivalentnima enačbama (1.30), predstavili s polinomskimi parametričnimi enačbami (1.31). Obravnavajmo ideal

$$I = \langle x - 3 + t, y - 1 - 2t, z - t \rangle \subset \mathbb{R}[t, x, y, z].$$

Izračunamo Gröbnerjevo bazo ideala  $I$  glede na leksikografsko urejenost, upoštevajoč  $t > x > y > z$  in dobimo

$$\begin{aligned} g_1 &= -1 + y - 2z \\ g_2 &= -3 + x + z \\ g_3 &= t - z. \end{aligned}$$

Po eliminacijskem izreku je  $I_1 = I \cap \mathbb{R}[x, y, z] = \langle g_1, g_2 \rangle$  in po izreku 1.5.17 je raznoterost  $\mathbf{V}(g_1, g_2)$  rešitev problema implicitizacije za to parametrizacijo. Enačbi  $g_1 = 0$  in  $g_2 = 0$  sta natanko enačbi (1.30) in sedaj vemo, da definirata najmanjšo raznoterost v  $\mathbb{R}^3$ , ki vsebuje parametrizacijo (1.31).

Še vedno ne vemo, če parametrizacija zavzame vse točke raznoterosti  $\mathbf{V}(g_1, g_2) \subset \mathbb{R}^3$ . Za ta odgovor moramo videti, če lahko vse delne rešitve  $(x, y, z) \in \mathbf{V}(g_1, g_2) = \mathbf{V}(I_1)$  razširimo do rešitev  $(t, x, y, z) \in \mathbf{V}(I)$ . Da bi lahko uporabili razširitveni izrek, bomo delali najprej nad poljem  $\mathbb{C}$ . Posledica 1.3.4 pove, da lahko vsako delno rešitev  $(x, y, z) \in \mathbf{V}(I_1)$  razširimo do rešitve  $(t, x, y, z) \in \mathbf{V}(I)$ , če je vodilni koeficient polinoma  $g_3$  konstanten. Ker je to izpolnjeno, lahko razširimo vse delne rešitve. Preostane pogledati, kaj se zgodi nad poljem  $\mathbb{R}$ . Če pogledamo realne rešitve  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  enačb  $g_1 = g_2 = 0$ , vidimo, da se razširijo do rešitev  $(t, x, y, z) \in \mathbf{V}(I) \subset \mathbb{C}^4$ . Vprašamo pa se, če je parameter  $t$  vedno realen. Iz Gröbnerjeve baze  $\{g_1, g_2, g_3\}$  vidimo, da je  $t$  realen, ko je  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Tako smo pokazali, da parametrizacija (1.31) zavzame vse točke raznoterosti  $\mathbf{V}(I)$ .

V splošnem ni lahko ugotoviti, če parametrizacija zavzame vse točke raznoterosti. Vsak primer moramo obravnavati posebej, ampak kot smo videli na primeru zgoraj, nam Gröbnerjeva baza in razširitveni izrek pomagata pri razumevanju odgovora.

Naslednja trditev poda zvezo med polinomsko parametrizacijo raznoterosti in njeno ireducibilnostjo. Za dokaz glej [27, Pog.4,§5].

**Trditev 1.5.18** *Naj bo  $k$  neskončno polje in raznoterost  $V \subset k^n$  definirana parametrično z enačbami (1.35). Tedaj je raznoterost  $V$  ireducibilna.*

V nadaljevanju se posvetimo predstavitvi raznoterosti z racionalnimi funkcijami. Racionalna

parametrizacija je podana z

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{P_1(t_1, \dots, t_m)}{Q_1(t_1, \dots, t_m)} \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{P_n(t_1, \dots, t_m)}{Q_n(t_1, \dots, t_m)}, \end{aligned} \quad (1.37)$$

kjer so  $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n \in k[t_1, \dots, t_m]$ . Preslikava  $F$  iz  $k^m$  v  $k^n$ , podana z (1.37), ni nujno definirana za vse točke prostora  $k^m$  zaradi zahteve po neničelnosti imenovalcev v racionalnih funkcijah. Naj bo  $Q$  produkt  $Q = Q_1 \cdot Q_2 \cdots Q_n$ . Če rečemo, da je  $W = \mathbf{V}(Q)$ , potem

$$F(t_1, \dots, t_m) = \left( \frac{P_1(t_1, \dots, t_m)}{Q_1(t_1, \dots, t_m)}, \dots, \frac{P_n(t_1, \dots, t_m)}{Q_n(t_1, \dots, t_m)} \right) \quad (1.38)$$

zagotovo definira preslikavo

$$F: k^m \setminus W \rightarrow k^n.$$

Za rešitev problema implicitizacije moramo najti najmanjšo raznoterost v  $k^n$ , ki vsebuje  $F(k^m \setminus W)$ . Kot pri polinomski parametrizaciji, lahko tudi tukaj definiramo še dve preslikavi

$$\begin{aligned} h &: k^m \setminus W \rightarrow k^{n+m} \\ \pi_m &: k^{n+m} \rightarrow k^n. \end{aligned}$$

Ni težko preveriti, da je  $h(k^m \setminus W) \subset \mathbf{V}(I)$ , kjer je  $I = \langle Q_1x_1 - P_1, \dots, Q_nx_n - P_n \rangle$ . Problem nastane, ker  $\mathbf{V}(I)$  ni nujno najmanjša raznoterost, ki vsebuje  $h(k^m \setminus W)$ . Da bi se izognili tej težavi, spremenimo ideal  $I$  tako, da uporabimo dodatno razsežnost in s tem nadzorujemo imenovalce  $Q_i$ . Obravnavamo polinomski kolobar  $k[w, t_1, \dots, t_m, x_1, \dots, x_n]$  v  $k^{n+m+1}$ . Nadalje obravnavamo ideal

$$J = \langle Q_1x_1 - P_1, \dots, Q_nx_n - P_n, 1 - wQ \rangle \subset k[w, t_1, \dots, t_m, x_1, \dots, x_n].$$

Enačba  $1 - wq = 0$  zagotovi, da noben imenovalac  $q_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) ni ničelen na raznoterosti  $\mathbf{V}(J)$ . Obravnavajmo preslikavi

$$\begin{aligned} g &: k^m \setminus W \rightarrow k^{n+m+1} \\ \pi_{m+1} &: k^{n+m+1} \rightarrow k^n, \end{aligned}$$

definirani kot

$$\begin{aligned} g(t_1, \dots, t_m) &= \left( \frac{1}{Q(t_1, \dots, t_m)}, t_1, \dots, t_m, \frac{P_1(t_1, \dots, t_m)}{Q_1(t_1, \dots, t_m)}, \dots, \frac{P_n(t_1, \dots, t_m)}{Q_n(t_1, \dots, t_m)} \right) \\ \pi_{m+1}(w, t_1, \dots, t_m, x_1, \dots, x_n) &= (x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Tudi tukaj je  $F = \pi_{m+1} \circ g$ . Presenetljivo je  $g(k^m \setminus W) = \mathbf{V}(J)$  v  $k^{n+m+1}$ . Inkluzija  $g(k^m \setminus W) \subset \mathbf{V}(J)$  sledi hitro iz definicije preslikave  $g$  in ideala  $J$ . Za obrat inkluzije najprej opazimo, če  $(w, t_1, \dots, t_m, x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{V}(J)$ , enačba  $q(t_1, \dots, t_m)w = 1$  pomeni, da noben izmed imenovalcev  $Q_i$  ni ničelni v točki  $(t_1, \dots, t_m)$  in zato je enačba  $Q_i(t_1, \dots, t_m)x_i = P_i(t_1, \dots, t_m)$  rešljiva za  $x_i = P_i(t_1, \dots, t_m)/Q_i(t_1, \dots, t_m)$ . Ker je  $w = 1/Q(t_1, \dots, t_m)$ , sledi, da točka  $(w, t_1, \dots, t_m, x_1, \dots, x_n)$  leži v  $g(k^m \setminus W)$  in zato je  $\mathbf{V}(J) \subset g(k^m \setminus W)$ .



Iz  $F = \pi_{m+1} \circ g$  in  $g(k^m \setminus W) = \mathbf{V}(J)$  v  $k^{n+m+1}$  dobimo

$$F(k^m \setminus W) = \pi_{m+1}(g(k^m \setminus W)) = \pi_{m+1}(\mathbf{V}(J)).$$

Tako je slika parametrizacije projekcija raznoterosti  $\mathbf{V}(J)$  in naslednji izrek poda rešitev problema racionalne implicitizacije. Za dokaz glej [27, Pog.3, §3].

**Izrek 1.5.19 (Racionalna implicitizacija)** *Naj bo  $k$  neskončno polje in  $F : k^m \setminus W \rightarrow k^n$  funkcija, določena z racionalno parametrizacijo (1.37). Naj bo  $J = \langle Q_1 x_1 - P_1, \dots, Q_n x_n - P_n, 1 - wQ \rangle \subset k[w, t_1, \dots, t_m, x_1, \dots, x_n]$  ideal, kjer je  $Q = Q_1 \cdot Q_2 \cdots Q_n$ , in naj bo  $J_{m+1} = J \cap k[x_1, \dots, x_n]$   $(m+1)$ -ti eliminacijski ideal ideala  $J$ . Tedaj je  $\mathbf{V}(J_{m+1})$  najmanjša raznoterost v  $k^n$ , ki vsebuje  $F(k^m \setminus W)$ .*

Izrek 1.5.19 poda naslednji algoritem za implicitizacijo polinomskih parametrizacij: če so podane enačbe (1.37), obravnavamo novo spremenljivko  $w$  in tvorimo ideal  $J = \langle Q_1 x_1 - P_1, \dots, Q_n x_n - P_n, 1 - wQ \rangle$ , kjer je  $Q = Q_1 \cdot Q_2 \cdots Q_n$ . Izračunamo Gröbnerjevo bazo ideala  $J$  glede na leksikografsko urejenost, kjer so  $w$  in vsi  $t_i$  večji od vseh  $x_i$ . Elementi Gröbnerjeve baze, ki ne vsebujejo spremenljivk  $t_1, \dots, t_m, w$ , tvorijo bazo ideala  $J_{m+1}$  in po izreku 1.5.19 določajo najmanjšo raznoterost v  $k^n$ , ki vsebuje dano parametrizacijo.

Kot primer ponazoritve zgornjega algoritma si ponovno pogledajmo krožnico (2.64) in njeno racionalno parametrizacijo z enačbami (1.33), s katerimi tvorimo najprej ideal

$$J = \langle (1+t^2)x - 1 + t^2, (1+t^2)y - 2t, 1 - w(1+t^2) \rangle.$$

Izračunamo Gröbnerjevo bazo ideala  $J$  glede na leksikografsko urejenost, upoštevajoč  $w > t > x > y$ . Izračun Gröbnerjeve baze lahko izvedemo v kateremkoli sistemu računske algebre. Ker bomo v razdelku 1.6 pokazali, kako izračunamo Gröbnerjevo bazo v Singularju, podamo tukaj izračun v Mathematici. Vhodna koda je

```
GroebnerBasis[{(1 + t^2) x - (1 - t^2), (1 + t^2) y - 2 t, 1 - w (1 + t^2)},
{w, t, x, y}]
```

kot rezultat pa dobimo

```
{-1 + x^2 + y^2, -1 + x + t y, t + t x - y, -1 + 2 w - x}
```

Torej Gröbnerjeva baza ideala  $J$  sestoji iz štirih polinomov:

$$\begin{aligned} g_1 &= x^2 + y^2 - 1 \\ g_2 &= ty + x - 1 \\ g_3 &= tx + t - y \\ g_4 &= 2w - x - 1. \end{aligned}$$

Vidimo, da je  $J_2 = J \cap \mathbb{R}[x, y] = \langle g_1 \rangle$  in po izreku 1.5.19 je najmanjša raznoterost, ki vsebuje parametrizacijo, enaka  $\mathbf{V}(J_2) = \mathbf{V}(g_1)$ , torej krožnica, s katero smo začeli. Sedaj s pomočjo dobljene Gröbnerjeve baze in razširitvenega izreka preverimo, če so na tej krožnici kakšne točke, ki jih parametrizacija ne opiše. V ta namen pogledajmo, če lahko vse delne rešitve  $(x, y) \in \mathbf{V}(J_2)$

raširimo do delne rešitve  $(t, x, y) \in \mathbf{V}(J_1)$ . Pri tem si pomagamo z razširitvenim izrekom, ki pove, da rešitve, kjer je vsaj en vodilni koeficient polinomov  $g_2$  in  $g_3$  neničelen, lahko razširimo. Problem najprej obravnavajmo nad poljem  $\mathbb{C}$ , za katerega velja razširitveni izrek. Ker je  $LC(g_2) = y$  in  $LC(g_3) = 1 + x$ , so lahko razširjene vse delne rešitve  $(x, y) \in \mathbf{V}(J_2) \subset \mathbb{C}^2$ , za katere je hkrati  $y \neq 0$  in  $x \neq -1$ . Ker pa je polje obravnave tukaj  $\mathbb{R}$ , opazimo, da če je delna rešitev  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , je tudi  $(t, x, y) \in \mathbb{R}^3$ . Torej je edina točka na enotski krožnici v  $\mathbb{R}^2$ , ki jo parametrizacija (1.33) ne opiše, točka  $(-1, 0)$ , kot smo videli že iz geometrijske definicije parametra  $t$ .

Podobno kot pri polinomski parametrizaciji, lahko tudi raznoterost z racionalno parametrizacijo povežemo z njeno ireducibilnostjo. Za dokaz naslednje trditve glej [27, Pog.4,§5].

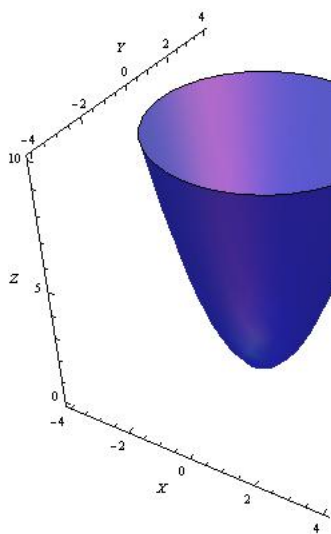
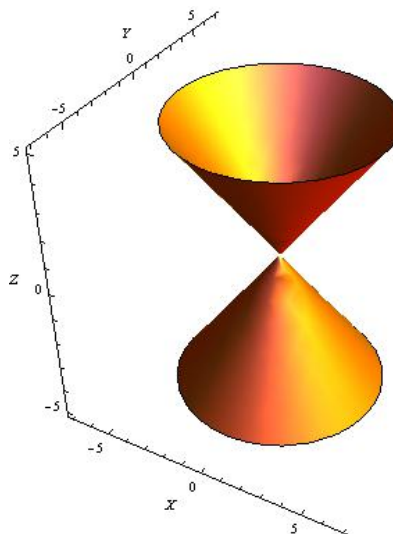
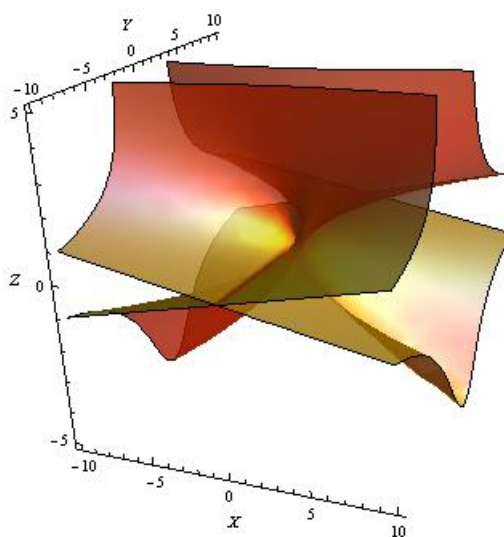
**Trditev 1.5.20** *Naj bo  $k$  neskončno polje in  $V \subset k^n$  raznoterost z racionalno parametrizacijo (1.37). Tedaj je raznoterost  $V$  ireducibilna.*

V nadaljevanju se posvetimo še enemu pojmu, povezanim z afino raznoterostjo  $V$  - *razsežnost raznoterosti* (ali *dimenzija raznoterosti*), ki jo bomo označevali z  $\dim V$ . Razsežnost kompleksne raznoterosti  $V$  lahko izračunamo s pomočjo algoritmov računske algebre, saj je enaka stopnji afinega Hilbertovega poljubnega ideala  $I$ , ki je določen z raznoterostjo  $V$ :  $I = \mathbf{I}(V) \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  (glej [27] za več podrobnosti). Toda afin Hilbertov polinom še zdaleč ne poda celotne zgodbe. Če računamo razsežnost realne raznoterosti, ta metoda odpade, saj polje realnih števil ni algebraično zaprto. V algebraični geometriji je veliko načinov, kako pridobiti razsežnost raznoterosti. Najprej si pogledjmo rezultat, ki se nanaša na raznoterosti razsežnosti nič (glej [27] za dokaz).

**Trditev 1.5.21** *Naj bo  $V$  neprazna afina raznoterost. Tedaj  $V$  sestoji iz končno mnogo točk natanko tedaj, ko je  $\dim V = 0$ .*

Sedaj si pogledjmo, kaj se dogaja z raznoterostmi, ki niso končne. Začnimo v ravnini  $\mathbb{R}^2$  z raznoterostjo  $\mathbf{V}(x^2 + y^2 - 1)$ , ki predstavlja krožnico s središčem v izhodišču  $(0, 0)$  in s polmerom  $r = 1$ . Očitno je, da je razsežnost te krožnice enaka ena. Če se premaknemo v prostor  $\mathbb{R}^3$  in obravnavamo enačbi (1.29) (ali (1.30)), smo zgoraj videli, da je njun presek premica, katere razsežnost je ena. Zanimiva raznoterost v  $\mathbb{R}^3$  je podana s paraboloidom  $\mathbf{V}(z - x^2 - y^2)$ , ki ga dobimo tako, da zavrtimo parabolo  $z = x^2$  okrog osi  $z$  (to preverimo z vpeljavo cilindričnih koordinat  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z = z$ ). Graf te raznoterosti je prikazan na sliki 1.3. Zanimiva je tudi raznoterost  $\mathbf{V}(z^2 - x^2 - y^2) \subset \mathbb{R}^3$ , ki, kot je razvidno iz slike 1.4, predstavlja stožec.

Veliko bolj zapletena ploskev v  $\mathbb{R}^3$  je podana z  $\mathbf{V}(x^2 - y^2z^2 + z^3)$ , ki jo lahko vidimo na sliki 1.5. Zadnji trije primeri predstavljajo v  $\mathbb{R}^3$  ploskev razsežnosti dve. Zanimiv primer krivulje v  $\mathbb{R}^3$  podaja raznoterost  $\mathbf{V}(y - x^2, z - x^3)$ . Za enostavnost obravnavajmo samo tisti del, ki je v prvem oktantu prostora  $\mathbb{R}^3$ . Najprej narišimo ploskvi  $y = x^2$  in  $z = x^3$  (glej sliki 1.6 in 1.7). Kot presek zgornjih dveh ploskev dobimo krivuljo  $\mathbf{V}(y - x^2, z - x^3) \subset \mathbb{R}^3$  razsežnosti ena, ki jo lahko vidimo na sliki 1.8. Opazimo, da je v  $\mathbb{R}^2$  ena enačba predstavljala enorazsežno krivuljo (krožnica  $\mathbf{V}(x^2 + y^2 - 1)$ ). Podobno se zgodi v  $\mathbb{R}^3$ : ena enačba običajno poda ploskev razsežnosti dve ( $\mathbf{V}(z - x^2 - y^2)$ ,  $\mathbf{V}(z^2 - x^2 - y^2)$ ,  $\mathbf{V}(x^2 - y^2z^2 + z^3)$ ), dve enačbi zmanjšata razsežnost za dve, t. j. njun presek predstavlja krivuljo razsežnosti ena. Glede na zgornje primere in ker vsaka enačba poda dodatno omejitev, bi intuitivno predlagali, da vsaka enačba zmanjša razsežnost celotnega afinega prostora za ena. Tako bi v  $\mathbb{R}^4$  pričakovali, da bo afina raznoterost, definirana z dvema enačbama, predstavljala ploskev razsežnosti dve. Na žalost je pojem razsežnosti raznoterosti bolj občutljiv kot pa nakazujejo zgornji primeri. Pogledjmo raznoterost  $\mathbf{V}(xz, yz)$ . Hitro vidimo,

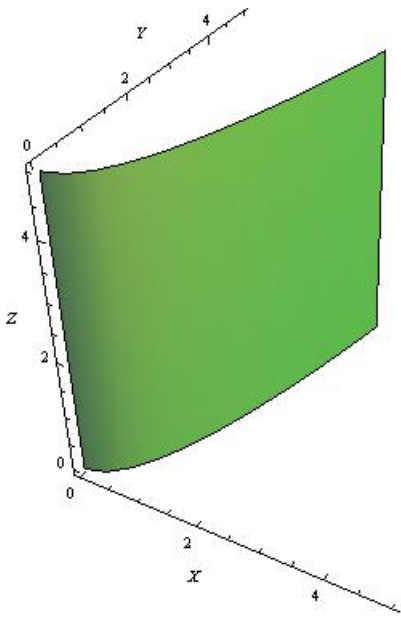
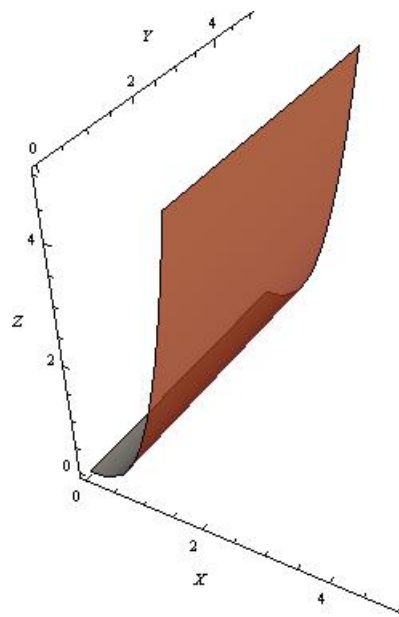
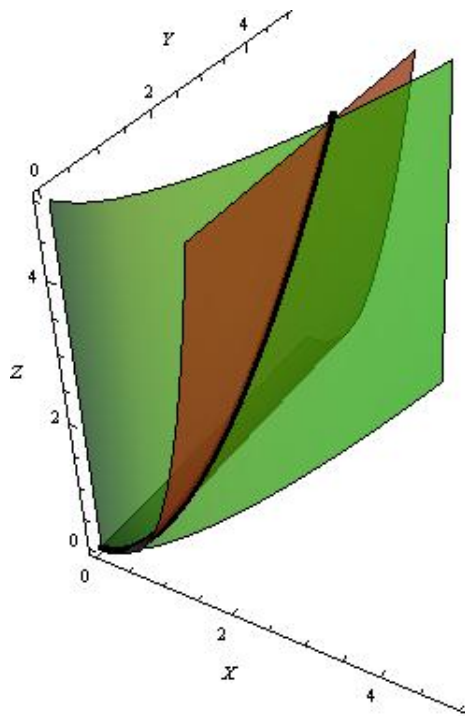
Slika 1.3:  $\mathbf{V}(z - x^2 - y^2)$ .Slika 1.4:  $\mathbf{V}(z^2 - x^2 - y^2)$ .Slika 1.5:  $\mathbf{V}(x^2 - y^2z^2 + z^3)$ .

da enačbi  $xz = yz = 0$  definirata unijo ravnine  $z = 0$  in premice  $x = y = 0$  ( $z$ -os). Zato ta raznoterost sestoji iz dveh delov, ki imata različni razsežnosti, in je  $\dim(\mathbf{V}(xz, yz)) = 2$ : eden od delov (ravnina) ima “napačno” razsežnost glede na zgornjo intuicijo. Podobno velja tudi za splošne raznoterosti.

**Trditev 1.5.22 ([27])** Naj bosta  $V$  in  $W$  raznoterosti v  $k^n$ . Tedaj je

$$\dim(V + W) = \max(\dim V, \dim W).$$

Iz trditve 1.5.22 sledi naslednji rezultat, ki reducira izračun razsežnosti raznoterosti na izračun razsežnosti njenih ireducibilnih komponent.

Slika 1.6:  $y = x^2$ .Slika 1.7:  $z = x^3$ .Slika 1.8:  $V(y - x^2, z - x^3)$ .

**Posledica 1.5.23** *Razsežnost raznoterosti je maksimum med razsežnostmi njenih ireducibilnih komponent.*

V nadaljevanju podamo znan primer raznoterosti višjih razsežnostih, ki izhaja iz linearne

algebre. Fiksiramo polje  $k$  in obravnavamo sistem  $m$  linearnih enačb z  $n$  neznankami  $x_1, \dots, x_n$  s koeficienti iz  $k$ :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Rešitev zgornjih enačb tvori afino raznoterost v  $k^n$ , ki jo imenujemo *linearna raznoterost* (ali *hiperravnina*). Tako sta ravnina in premica linearni raznoterosti. Iz linearne algebre poznamo metodo za redukcijo vrstic sistema (1.39), t. i. Gaussovo eliminacijo, ki poda učinkovit algoritem za iskanje rešitev sistema (1.39). Linearne raznoterosti lahko zelo dobro povežemo z našo razpravo o razsežnosti raznoterosti. Namreč, če je  $V \subset k^n$  linearna raznoterost, definirana z (1.39),  $V$  nima nujno razsežnosti  $n - m$ , četudi je  $V$  definirana z  $m$  enačbami. V bistvu, če je  $V$  neprazna, nam linearna algebra pove, da ima  $V$  razsežnost  $n - r$ , kjer je  $r$  rang matrike  $[a_{ij}]$ . Tako je za linearne raznoterosti razsežnost določena s številom *neodvisnih enačb*. To intuicijo lahko uporabimo tudi za bolj splošne afine raznoterosti, vendar je pojem neodvisnosti tam občutljivejši.

Posledica 1.5.23 nam omogoča določitev razsežnosti raznoterosti s pomočjo njenih ireducibilnih komponent. V trditvah 1.5.18 in 1.5.20 smo videli, da je afina raznoterost, ki ima polinomsko ali racionalno parametrizacijo, ireducibilna. Obrat ne velja vedno. Se pa porodi naslednje vprašanje: če je afina raznoterost ireducibilna in lahko najdemo njeno polinomsko ali racionalno parametrizacijo, ali lahko s pomočjo nje določimo razsežnost raznoterosti? Zgoraj smo videli, da lahko premico (1.29) parametriziramo s polinomskimi enačbami (1.31), ter da lahko krožnico (2.64) parametriziramo z racionalnimi enačbami (1.33). Vidimo, da je parametrizacija tako premice kot tudi krožnice odvisna od enega parametra in obe v ustreznem prostoru predstavljata raznoterost razsežnosti ena.

Nadalje pogledimo v  $\mathbb{R}^3$  raznoterosti  $\mathbf{V}(y - x^2, z - x^3)$  in  $\mathbf{V}(x^2 - y^2z^2 + z^3)$ . Za prvo smo zgoraj videli, da predstavlja krivuljo razsežnosti ena in druga ploskev razsežnosti dve. Hitro lahko najdemo parametrizacijo krivulje  $\mathbf{V}(y - x^2, z - x^3)$ :

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= t^2 \\ z &= t^3, \end{aligned}$$

kjer je  $t \in \mathbb{R}$ . Vidimo, da v tej parametrizaciji nastopa samo parameter  $t$ . Parametrizacijo ploskve  $\mathbf{V}(x^2 - y^2z^2 + z^3)$  je težje ugotoviti, vendar lahko bralec sam preveri, da enačbe

$$\begin{aligned} x &= t(u^2 - t^2) \\ y &= u \\ z &= u^2 - t^2, \end{aligned} \tag{1.40}$$

kjer je  $-1 \leq t, u \leq 1$ , predstavljajo polinomsko parametrizacijo raznoterosti  $\mathbf{V}(x^2 - y^2z^2 + z^3)$ , ki je odvisna od dveh parametrov. Glede na zgornje primere in na izrek 1.5.19 (ali izrek 1.5.17), ki pravi, da ideal  $J_{m+1}$  (ali  $J_m$ ) tvori najmanjšo raznoterost v  $k^n$ , ki vsebuje dano parametrizacijo, bi sedaj pričakovali, da je razsežnost ireducibilne raznoterosti, parametrizirane z enačbami (1.37) (ali (1.35)) lahko največ  $m$ , kar je število parametrov parametrizacije.

Da bi razumeli nekatere matematične objekte, včasih študiramo tudi preslikave med njimi, še posebej tiste, ki ohranijo določene lastnosti. Na primer, ko v linearni algebri obravnavamo vektorske prostore, študiramo še lastnosti linearnih preslikav med vektorskimi prostori (glej dodatek A). Da bi bolje razumeli parametrizacijo in kako je število parametrov le-te povezano z razsežnostjo, obravnavamo preslikave med raznoterostmi, t. i. *polinomske preslikave*. Algebraične lastnosti polinomskih preslikav na raznoterostih omogočijo mnoge vpoglede v geometrijske lastnosti raznoterosti. Z njihovo pomočjo bomo prav tako na kratko spoznali idejo kvocientnega kolobarja.

Našo obravnavo polinomskih preslikav med raznoterostmi bomo začeli s primerom ploskve, ki smo jo obravnavali zgoraj:  $\mathbf{V}(x^2 - y^2z^2 + z^3)$  in smo jo parametrično opisali z enačbami (1.40). V jeziku preslikav (1.36) podati parametrično predstavitev (1.40) pomeni definirati preslikavo  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  z

$$F(t, u) = (t(u^2 - t^2), u, u^2 - t^2).$$

Domena preslikave  $F$  je afina raznoterost  $V = \{(t, u) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq t, u \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$  in slika preslikave  $F$  je ploskev  $W = \mathbf{V}(x^2 - y^2z^2 + z^3)$ , ki je prikazana na sliki 1.5. Torej naša parametrizacija poda nekaj, kar bi lahko imenovali polinomska<sup>5</sup> preslikava med raznoterostima  $V$  in  $W$ .

Drugi primer najdemo v geometriji eliminacije spremenljivk iz sistema enačb (1.1), kjer smo obravnavali projekcije  $\pi_k: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n-k}$ , definirane s

$$\pi_k(a_1, \dots, a_n) = (a_{k+1}, \dots, a_n).$$

Za podano raznoterost  $V = \mathbf{V}(I) \subset \mathbb{C}^n$  lahko  $\pi_k$  zožimo na  $V$  in vemo, da je  $\pi_k(V)$  vsebovana v afini raznoterosti  $W = \mathbf{V}(I_k)$ , kjer je  $I_k = I \cap \mathbb{C}[x_{k+1}, \dots, x_n]$   $k$ -ti eliminacijski ideal ideala  $I$ . Zato lahko  $\pi_k: V \rightarrow W$  obravnavamo kot preslikavo raznoterosti. Prav tako vidimo, da so komponente funkcije  $\pi_k$  polinomi v koordinatah domene.

**Definicija 1.5.24** *Naj bosta  $V \subset k^m$  in  $W \subset k^n$  afini raznoterosti. Funkcija  $\zeta: V \rightarrow W$  se imenuje polinomska preslikava, če obstajajo polinomi  $f_1, \dots, f_n \in k[x_1, \dots, x_n]$ , da velja*

$$\zeta(a_1, \dots, a_m) = (f_1(a_1, \dots, a_m), \dots, f_n(a_1, \dots, a_m))$$

za vse  $(a_1, \dots, a_m) \in V$ . Pravimo, da vektor polinomov

$$(f_1, \dots, f_n) \in (k[x_1, \dots, x_n])^n$$

predstavlja funkcijo  $\zeta$ .

Ko rečemo, da je  $\zeta$  polinomska preslikava iz  $V \subset k^m$  v  $W \subset k^n$ , predstavljena z vektorjem funkcij  $(f_1, \dots, f_n)$ , pomeni, da mora  $(f_1(a_1, \dots, a_m), \dots, f_n(a_1, \dots, a_m))$  zadoščati enačbam, ki definirajo  $W$  za vsak  $(a_1, \dots, a_m) \in V$ . Kot primer si pogledjmo  $V = \mathbf{V}(y - x^2, z - x^3) \subset k^3$  in  $W = \mathbf{V}(y^3 - z^2) \subset k^2$ . Projekcija  $\pi_1: k^3 \rightarrow k^2$ , predstavljena z  $(y, z)$  poda polinomsko preslikavo  $\pi_1: V \rightarrow W$ . To je res, saj vsaka točka v  $\pi_1(V) = \{(x^2, x^3) : x \in k\}$  zadošča enačbi  $y^3 - z^2 = 0$ , ki določa  $W$ .

<sup>5</sup>pridevnik "polinomska" se nanaša na dejstvo, da so funkcije v komponentah preslikave  $F$  polinomi spremenljivk  $t$  in  $u$ .

Če je  $W = k$ , postane  $\zeta$  skalarna polinomska funkcija, definirana na raznoterosti  $V$ . Razlog, zakaj obravnavamo polinomske funkcije iz  $V$  v  $k$ , je ta, da je splošna polinomska preslikava  $\zeta : V \rightarrow k^n$  konstruirana z uporabo poljubnih polinomskih funkcij  $\zeta_i : V \rightarrow k$  kot komponent. Če razumemo funkcije  $\zeta_i : V \rightarrow k$ , razumemo tudi, kako konstruiramo preslikavo  $\zeta : V \rightarrow k^n$ . Tako definicija 1.5.24 pove, da je funkcija  $\zeta_i : V \rightarrow k$  polinomska funkcija, če obstaja polinom  $f \in k[x_1, \dots, x_m]$ , ki predstavlja  $\zeta_i$ . Običajno podamo polinomsko funkcijo eksplicitno in zato najti tak polinom, ki predstavlja  $\zeta_i$ , ni velik problem. Je pa situacija, ko je ta polinomski predstavnik enolično določen, zelo redka. Kot primer obravnavajmo raznoterost  $V = \mathbf{V}(y - x^2) \subset \mathbb{R}^2$ . Polinom  $f = x^3 + y^3$  predstavlja polinomsko funkcijo iz  $V$  v  $\mathbb{R}$ . Polinomi  $g = x^3 + y^3 + (y - x^2)$ ,  $h = x^3 + y^3 + (x^4 y - x^6)$  in  $F = x^3 + y^3 + q(x, y)(y - x^2)$  predstavljajo enako polinomsko funkcijo na raznoterosti  $V$ . Ker je  $\mathbf{I}(V)$  množica polinomov, ki so ničelni v vsaki točki raznoterosti  $V$ , dodajanje poljubnega polinoma iz  $\mathbf{I}(V)$  k polinomu  $f$  ne spremeni vrednosti polinoma v točkah raznoterosti  $V$ . V splošnem torej velja, da če je  $V \subset k^m$  afina raznoterost, potem  $f$  in  $g$  predstavljata isto polinomsko funkcijo na  $V$  natanko tedaj, ko je  $f - g \in \mathbf{I}(V)$ . Podobno velja tudi za vektorske funkcije:  $(f_1, \dots, f_n)$  in  $(g_1, \dots, g_n)$  predstavljata enaki polinomski preslikavi iz  $V$  v  $k^n$  natanko tedaj, ko za vsak  $1 \leq i \leq n$  velja  $f_i - g_i \in \mathbf{I}(V)$  (glej [27]). Tako je zveza med polinomi v  $k[x_1, \dots, x_m]$  in polinomskimi funkcijami bijektivna samo, če je  $\mathbf{I}(V) = \{0\}$ , kar je natanko takrat, ko je  $k$  neskončno polje in je  $V = k^m$ .

**Definicija 1.5.25**  $S k[V]$  označimo množico vseh polinomskih funkcij  $\zeta : V \rightarrow k$  s seštevanjem in množenjem s skalarjem, ki sta podedovana iz  $k$ :

$$\zeta_1(x_0) + \zeta_2(x_0) = (\zeta_1 + \zeta_2)(x_0)$$

in

$$\alpha \cdot \zeta(x_0) = (\alpha\zeta)(x_0)$$

za vse  $x_0 \in V$ .

Hitro vidimo, da je množica  $k[V]$  komutativni kolobar, saj zanjo veljajo vse običajne lastnosti vsote in produkta, ki veljajo za polinome iz  $k[x_1, \dots, x_n]$ .

V izreku 1.5.10 smo videli, da je raznoterost  $V$  ireducibilna natanko tedaj, ko je  $\mathbf{I}(V)$  praideal. Kolobar  $k[V]$  nam poda še eno karakterizacijo ireducibilnosti raznoterosti  $V$ . V dodatku A smo povedali, kdaj je komutativni kolobar *cel*. Če obravnavamo raznoterost  $V = \mathbf{V}(x^3 + xy^2 - xz, yx^2 + y^3 - yz)$ , vidimo, da ni ireducibilna, saj jo lahko zapišemo kot unijo  $V = \mathbf{V}(x^2 + y^2 - z) \cup \mathbf{V}(x, y)$ . Naj bosta polinoma  $f = x^2 + y^2 - z$  in  $g = 2x^2 - 3y^4z$  elementa kolobarja  $k[x, y, z]$  ter  $\zeta_1 = f$  in  $\zeta_2 = g$  elementa kolobarja  $k[V]$ . Opazimo, da niti  $\zeta_1$  niti  $\zeta_2$  ni identično enak nič na raznoterosti  $V$ . Na primer v točki  $(0, 0, 5) \in V$  je  $\zeta_1(0, 0, 5) = f(0, 0, 5) = -5 \neq 0$ . Podobno v točki  $(1, 1, 2) \in V$  je  $\zeta_2(1, 1, 2) = g(1, 1, 2) = -4 \neq 0$ . Vseeno pa je produkt funkcij  $\zeta_1 \cdot \zeta_2$  ničelen v vsaki točki raznoterosti  $V$ . Razlog je, da je

$$\begin{aligned} f \cdot g &= (x^2 + y^2 - z)(2x^2 - 3y^4z) \\ &= 2x(x^3 + xy^2 - xz) - 3y^3z(x^2y + y^3 - yz) \\ &\in \langle x^3 + xy^2 - xz, x^2y + y^3 - yz \rangle. \end{aligned}$$

Zato je  $f \cdot g \in \mathbf{I}(V)$  in ustrezna polinomska funkcija  $\zeta_1 \cdot \zeta_2$  je ničelna na raznoterosti  $V$ .

Produkt dveh neničelnih elementov polja  $k$  ali dveh neničelnih elementov iz  $k[x_1, \dots, x_n]$  ni nikoli enak nič. Za kolobar  $k[V]$  pa smo v zgornjem primeru videli, da to ne drži, kar pomeni,

da ta kolobar ni cel. Obstoj takšnih  $\zeta_1 \neq 0$  in  $\zeta_2 \neq 0$ , da je  $\zeta_1 \cdot \zeta_2 = 0$ , je direktna posledica dejstva, da  $V$  ni ireducibilna raznoterost. Polinom  $f = x^2 + y^2 - z$  je ničelni na raznoterosti  $V_1 = \mathbf{V}(x^2 + y^2 - z)$ , vendar ne tudi na  $V_2 = \mathbf{V}(x, y)$ , in podobno, polinom  $g = 2x^2 - 3y^4z$  je ničelni na raznoterosti  $V_2$ , vendar ne na  $V_1$ . To je razlog, da je polinom  $f \cdot g$  ničelen v vsaki točki raznoterosti  $V = V_1 \cup V_2$ . V naslednji trditvi vidimo zvezo med geometrijskimi lastnostmi raznoterosti  $V$  in algebraičnimi lastnostmi kolobarja  $k[V]$ .

**Trditev 1.5.26** *Naj bo  $V \subset k^n$  afina raznoterost. Tedaj je  $V$  ireducibilna natanko tedaj, ko je  $k[V]$  cel kolobar.*

**Dokaz.** Predpostavimo, da je  $V$  ireducibilna raznoterost. Recimo, da  $k[V]$  ni cel kolobar. Tedaj obstajata takšna polinoma  $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ , da noben ni ničelni na raznoterosti  $V$ , njun produkt pa je ničelen na  $V$ . Hitro lahko pokažemo, da se da  $V$  zapisati kot

$$V = (V \cap \mathbf{V}(f)) \cup (V \cap \mathbf{V}(g))$$

in da tedaj velja  $V \cap \mathbf{V}(f) \neq V$  in  $V \cap \mathbf{V}(g) \neq V$ . To pa je v protislovju s predpostavko, da je  $V$  ireducibilna raznoterost.

Za dokaz obratne implikacije predpostavimo, da je  $k[V]$  cel kolobar in da  $V$  ni ireducibilna raznoterost. Po definiciji 1.5.6 lahko  $V$  zapišemo kot  $V = V_1 \cup V_2$ , kjer sta  $V_1$  in  $V_2$  podraznoterosti raznoterosti  $V$  in  $V_1 \neq V$  in  $V_2 \neq V$ . Naj bo  $f \in k[x_1, \dots, x_n]$  polinom, ki je ničelni na  $V_1$ , vendar ne na  $V_2$ , in podobno,  $g \in k[x_1, \dots, x_n]$  polinom, ki je ničelni na  $V_2$ , vendar ne na  $V_1$ . Obstoj takšnih polinomov  $f$  in  $g$  je zagotovljen, saj sta  $V_1$  in  $V_2$  raznoterosti in nobena ni vsebovana v drugi. Zato noben od polinomov  $f$  in  $g$  ne predstavlja ničelne funkcije v  $k[V]$ . Vseeno pa je produkt  $f \cdot g$  ničelni v vseh točkah raznoterosti  $V = V_1 \cup V_2$ . Zato je produkt ustreznih funkcij v  $k[V]$  ničelni. To pa je v protislovju s predpostavko, da je  $k[V]$  cel kolobar in zato je  $V$  ireducibilna raznoterost. ■

Kolobar  $k[V]$  je poseben primer t. i. kvocientnega kolobarja  $k[x_1, \dots, x_n]$  po modulu ideala  $I$ . Zaradi besede kvocientni bi pričakovali, da bomo definirali operacijo deljenja, ampak to ni res. Konstrukcija kvocienta je temeljno orodje v komutativni algebri in algebraični geometriji. Za začetek si pogledjmo naslednjo definicijo.

**Definicija 1.5.27** *Naj bo  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  ideal in polinoma  $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ . Pravimo, da sta  $f$  in  $g$  kongruentna po modulu  $I$ , kar zapišemo kot*

$$f \equiv g \pmod{I},$$

če je  $f - g \in I$ .

Na primer, če je  $I = \langle x^2 - y^2, x + y^3 + 1 \rangle \subset k[x, y]$ , potem sta polinoma  $f = x^4 - y^4 + x$  in  $g = x + x^5 + x^4y^3 + x^4$  kongruentna po modulu  $I$ , saj je

$$\begin{aligned} f - g &= x^4 - y^4 - x^5 - x^4y^3 - x^4 \\ &= (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) - x^4(x + y^3 + 1) \in I. \end{aligned}$$

Najpomembnejša lastnost kongruence je, da je ekvivalenčna relacija, ki razdeli množico  $S$  na disjunktne podmnožice, t. i. ekvivalenčne razrede. Za poljuben polinom  $f \in k[x_1, \dots, x_n]$  je razred  $[f]$  definiran kot množica

$$[f] = \{g \in k[x_1, \dots, x_n] : g \equiv f \pmod{I}\}.$$



**Definicija 1.5.28** Kvocient kolobarja  $k[x_1, \dots, x_n]$  po modulu  $I$ ,

$$k[x_1, \dots, x_n]/I,$$

je množica ekvivalenčnih razredov za kongruenco po modulu  $I$ :

$$k[x_1, \dots, x_n]/I = \{[f] : f \in k[x_1, \dots, x_n]\}.$$

Na primer naj bo  $k = \mathbb{R}$ ,  $n = 1$  in  $I = \langle x^2 - 3 \rangle$ . Vprašamo se, če obstaja kak način za opis vseh ekvivalenčnih razredov za kongruenco po modulu  $I$ . Zaradi algoritma deljenja lahko vsak polinom  $f \in \mathbb{R}[x]$  zapišemo kot  $f = q(x^2 - 3) + r$ , kjer je  $r = ax + b$  za neka  $a, b \in \mathbb{R}$ . Po definiciji je  $f \equiv r \pmod{I}$ , saj je  $f - r = q(x^2 - 3) \in I$ . Zato vsak element kolobarja  $\mathbb{R}[x]$  pripada enemu izmed ekvivalenčnih razredov  $[ax + b]$  in  $\mathbb{R}[x]/I = \{[ax + b] : a, b \in \mathbb{R}\}$ . Za izračun generatorjev množice  $k[x_1, \dots, x_n]/I$  v splošnem glej [27, Pog. 5, §3].

Ker je  $k[x_1, \dots, x_n]$  kolobar, lahko za dana ekvivalenčna razreda  $[f], [g] \in k[x_1, \dots, x_n]/I$  definiramo operaciji vsote in produkta z uporabo ustreznih operacij na elementih kolobarja  $k[x_1, \dots, x_n]$ :

$$\begin{aligned} [f] + [g] &= [f + g] \\ [f] \cdot [g] &= [f \cdot g]. \end{aligned} \tag{1.41}$$

Operaciji (1.41) sta dobro definirani na  $k[x_1, \dots, x_n]/I$  [27].

Kot primer vzemimo kvocientni kolobar  $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 - 3 \rangle$ . Kot smo videli prej, razredi  $[ax + b]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , tvorijo popoln seznam elementov kolobarja  $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 - 3 \rangle$ . Operacija vsote je definirana kot

$$[ax + b] + [cx + d] = (a + c)x + (b + d)$$

in produkt je definiran kot

$$[ax + b] \cdot [cx + d] = (ad + bc)x + (bd + 2ac).$$

Ko enkrat vemo, da sta operaciji v (1.41) dobro definirani, takoj sledi, da je  $k[x_1, \dots, x_n]/I$  komutativni kolobar.

Sedaj želimo za dano raznoterost  $V$  opisati zvezo med kvocientnim kolobarjem  $k[x_1, \dots, x_n]/\mathbf{I}(V)$  in kolobarjem polinomskih funkcij  $k[V]$ . Za dokaz naslednjega izreka glej [27, Pog. 5, §2].

**Izrek 1.5.29** Zveza med polinomskimi funkcijami  $\phi : V \rightarrow k$  in ekvivalenčnimi razredi polinomov v smislu kongruence po modulu  $\mathbf{I}(V)$  je bijektivna oz. kolobarja  $k[x_1, \dots, x_n]/\mathbf{I}(V)$  in  $k[V]$  sta izomorfna:

$$k[V] \cong k[x_1, \dots, x_n]/\mathbf{I}(V).$$

V nadaljevanju se seznanimo s pojmom koordinatnega kolobarja afine raznoterosti. Vsaka spremenljivka  $x_i$  poda polinomsko funkcijo  $[x_i] : V \rightarrow k$ , katere vrednost v točki  $p \in V$  je  $i$ -ta koordinata točke  $p$ . Pravimo, da je  $[x_i] \in k[V]$   $i$ -ta koordinatna funkcija na  $V$ . Tedaj iz izomorfizma  $k[V] \cong k[x_1, \dots, x_n]/\mathbf{I}(V)$  sledi, da koordinatne funkcije generirajo  $k[V]$  v smislu, da je poljubna polinomsko funkcija na raznoterosti  $V$   $k$ -linearna kombinacija produktov  $[x_i]$ .

**Definicija 1.5.30** Koordinatni kolobar afine raznoterosti  $V \subset k^n$  je kolobar  $k[V]$ .

Da bi videli, kaj ima  $k[V]$  opraviti z razsežnostjo, si najprej pogledimo pojem algebraične neodvisnosti elementov.

**Definicija 1.5.31** *Pravimo, da so elementi  $\eta_1, \dots, \eta_r \in k[V]$  algebraično neodvisni nad  $k$ , če obstaja neničelni polinom  $p$  od  $r$  spremenljivk s koeficienti iz  $k$ , da je  $p(\eta_1, \dots, \eta_r) = 0$ .*

Opazimo, če so  $\eta_1, \dots, \eta_r \in k[V]$  algebraično neodvisni nad  $k$ , so vsi  $\eta_i$  različni in neničelni. Prav tako ni težko videti, da je poljubna podmnožica množice  $\{\eta_1, \dots, \eta_r\}$  tudi sama algebraično neodvisna nad  $k$ .

Najpreprostejši primer algebraično neodvisnih elementov nastopi, ko je  $V = k^n$ . Če je  $k$  neskončno polje, je  $\mathbf{I}(V) = \{0\}$  in zato je  $k[V] = k[x_1, \dots, x_n]$ . Tukaj so elementi  $x_1, \dots, x_n$  algebraično neodvisni nad  $k$ , saj iz  $p(x_1, \dots, x_n) = 0$  sledi, da je  $p$  ničelni polinom.

Kot naslednji primer obravnavajmo krivuljo v  $\mathbb{R}^3$ , ki smo jo že spoznali in je podana z  $\mathbf{V}(y - x^2, z - x^3)$ . Sledi, da je  $\mathbf{I}(V) = \langle y - x^2, z - x^3 \rangle$ . Pokažimo, da je  $[x] \in \mathbb{R}[V]$  algebraično neodvisen element nad  $\mathbb{R}$ . Recimo, da je  $p$  tak polinom s koeficienti iz  $\mathbb{R}$ , da zanj velja  $p([x]) = 0$  v  $\mathbb{R}[V]$ . Zaradi definicije operacij v  $\mathbb{R}[V]$  (glej (1.41)) velja, da je  $[p(x)] = [0]$  in tako je  $p(x) \in \mathbf{I}(V)$ . Vendar lahko hitro pokažemo, da je  $\mathbb{R}[x] \cap \langle y - x^2, z - x^3 \rangle = \{0\}$ , kar dokazuje, da je  $p$  ničelni polinom. Po drugi strani pa hitro vidimo, da  $[x], [y] \in \mathbb{R}[V]$  nista algebraično neodvisna nad  $\mathbb{R}$ , saj je  $[y] - [x]^2 = [0]$  v  $\mathbb{R}[V]$ , kar sledi iz  $\mathbb{R}[x, y] \cap \langle y - x^2, z - x^3 \rangle = \langle y - x^2 \rangle \neq \{0\}$ .

V naslednjem izreku povežemo razsežnost raznoterosti  $V$  s številom algebraično neodvisnih elementov koordinatnega kolobarja  $k[V]$  (glej [27, Pog. 5, §5] za dokaz).

**Izrek 1.5.32** *Naj bo  $V \subset k^n$  afina raznoterost. Tedaj je razsežnost raznoterosti  $V$  enaka maksimalnemu številu elementov koordinatnega kolobarja  $k[V]$ , ki so algebraično neodvisni nad  $k$ .*

Vidimo torej, da  $d$  ( $d = \dim V$ ) algebraično neodvisnih elementov, ki jih najdemo v  $k[V]$ , izhaja iz koordinat. Zato lahko uporabimo to za drugo formulacijo razsežnosti.

**Posledica 1.5.33** *Naj bo  $V \subset k^n$  afina raznoterost. Tedaj je razsežnost raznoterosti  $V$  enaka največjemu številu  $r \in \mathbb{N}$ , za katerega obstaja  $r$  spremenljivk  $x_{i1}, \dots, x_{ir}$ , da velja  $\mathbf{I}(V) \cap k[x_{i1}, \dots, x_{ir}] = \{0\}$  (t. j.  $\mathbf{I}(V)$  ne vsebuje neničelnega polinoma v spremenljivkah  $x_{i1}, \dots, x_{ir}$ ).*

Če je  $k$  algebraično zaprto polje, lahko dokažemo (glej [27]), da posledica 1.5.33 velja tudi, če ideal  $\mathbf{I}(V)$  zamenjamo s katerikoli idealom  $I$ , ki definira  $V$ . Ker znamo izračunati  $I \cap k[x_{i1}, \dots, x_{ir}]$  (glej teorijo eliminacijskih idealov v razdelku 1.3), posledica 1.5.33 poda alternativo metodo (žal ne najbolj učinkovito) za izračun razsežnosti raznoterosti.

Prav tako lahko posledico 1.5.33 interpretiramo v smislu projekcij. Če izberemo  $r$  spremenljivk  $x_{i1}, \dots, x_{ir}$ , dobimo projekcijsko preslikavo  $\pi : k^n \rightarrow k^r$ , definirano s  $\pi(a_1, \dots, a_n) = (a_{i1}, \dots, a_{ir})$ . Naj bo  $I = \mathbf{I}(V) \cap k[x_{i1}, \dots, x_{ir}]$  ustrezen eliminacijski ideal. Če je  $k$  algebraično zaprto polje, izrek zaprtja (izrek 1.3.5) pove, da je  $\mathbf{V}(I) \cap k^r$  najmanjša raznoterost, ki vsebuje projekcijo  $\pi(V)$ . Sledi, da je

$$\begin{aligned} I = \{0\} &\Leftrightarrow \mathbf{V}(I) = k^r \\ &\Leftrightarrow \text{najmanjša raznoterost, ki vsebuje } \pi(V), \text{ je } k^r. \end{aligned}$$

V nadaljevanju obravnavamo zvezo med parametrizacijo raznoterosti in razsežnostjo raznoterosti in v ta namen najprej definiramo naslednji pojem.

**Definicija 1.5.34** *Podmnožica od  $k^n$  je gosta v Zariskijevi topologiji, če je najmanjša raznoterost, ki vsebuje to podmnožico, množica  $k^n$ .*

Posledica 1.5.33 pove, da je razsežnost raznoterosti  $V$  največja razsežnost koordinatnega podprostoru, za katerega je projekcija od  $V$  gosta v ustreznem podprostoru v Zariskijevi topologiji.

Navedimo še en pojem, s katerim opišemo razsežnost raznoterosti. Naj bo  $\zeta : V \rightarrow W$  polinomska preslikava med afinima raznoterostima  $V$  in  $W$ . Preslikava  $\zeta$  inducira homomorfizem kolobarjev  $\zeta^* : k[W] \rightarrow k[V]$  (glej [27, Pog. 5, §4]), ki je identiteta na  $k$ . Iz  $\zeta$  vidimo, da je  $\zeta(V) \subset W$ . Pravimo, da je  $\zeta$  *dominantna preslikava*, če je najmanjša raznoterost v  $W$ , ki vsebuje  $\zeta(V)$ , raznoterost  $W$ . Vidimo, da je  $\zeta$  dominantna, če je njena slika gosta v  $W$  glede na Zariskijevo topologijo. Ker velja, da je  $W'$  prava podraznoterost od  $W$  natanko tedaj, ko obstaja neničelni element  $[f] \in k[W]$ , da je  $W' \subset W \cap \mathbf{V}(f)$  (glej [27]), hitro izpeljemo, da je  $\zeta$  dominantna preslikava natanko tedaj, ko je homomorfizem  $\zeta^* : k[W] \rightarrow k[V]$  bijektiven. Od tod in iz izreka 1.5.32 sledi, da če je  $\zeta$  dominantna, je  $\dim V \geq \dim W$ .

Predpostavimo, da je  $k$  neskončno polje in da je  $F : k^m \rightarrow V$  polinomska parametrizacija raznoterosti  $V$ , dana z (1.35). Tako je  $m$  število parametrov in po izreku 1.5.17 je  $V$  najmanjša raznoterost, ki vsebuje  $F(k^m)$ , od koder sledi, da  $F$  poda dominantno preslikavo. Sledi, da je  $\dim(k^m) \geq \dim V$  in ker je  $\dim(k^m) = m$ , je  $\dim V \leq m$ .

Podoben razmislek velja tudi za racionalno parametrizacijo: če je  $F : k^m \setminus W \rightarrow V$  racionalna parametrizacija raznoterosti  $V$ , dana z (1.37), je  $\dim V \leq m$ .

Sedaj pogledjmo, kako je razsežnost povezana z geometrijskimi lastnostmi raznoterosti  $V$ . Ko gledamo ploskev  $V \in \mathbb{R}^3$ , je eden izmed razlogov, da rečemo, da je dvorazsežna, to, da v točki  $p \in V$  majhen del ploskve izgleda kot majhen del ravnine. To se odraža v tem, da tangentna ravnina aproksimira  $V$  v točki  $p$ . Moramo pa biti previdni, kajti ploskev lahko vsebuje točke, kjer ni tangentne ravnine. Na primer, če pogledamo stožec  $\mathbf{V}(x^2 + y^2 - z^2)$ , ima tangentno ravnino povsod razen v izhodišču. Da bomo to bolje razumeli, vpeljemo koncept gladke točke.

**Definicija 1.5.35** Naj bo  $V \subset k^n$  afina raznoterost in  $p = (p_1, \dots, p_n) \in V$  neka točka iz  $V$ .

- Če je  $f \in k[x_1, \dots, x_n]$  polinom, je linearni del od  $f$  v točki  $p$ , ki ga označimo z  $d_p(f)$ , definiran kot

$$d_p(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)(x_1 - p_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)(x_n - p_n).$$

Stopnja  $d_p(f)$  je kvečjemu ena.

- Tangentni prostor od  $V$  v točki  $p$ , ki ga označimo s  $T_p(V)$ , je raznoterost

$$T_p(V) = \mathbf{V}(d_p(f) : f \in \mathbf{I}(V)).$$

Če je  $p \in V \subset k^n$  in  $\mathbf{I}(V) = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ , je  $T_p(V) = \mathbf{V}(d_p(f_1), \dots, d_p(f_s))$  (glej [27, Pog. 9, §6]).

Najlepše točke raznoterosti  $V$  so tiste, kjer ima  $T_p(V)$  enako razsežnost kot  $V$ . To načeloma ne velja, kadar  $V$  sestoji iz ireducibilnih komponent različnih razsežnosti. Na primer, naj bo  $V = \mathbf{V}(xz, yz) \subset \mathbb{R}^3$ , ki je razsežnosti 2, kot smo že zgoraj videli. Ta raznoterost je unija  $(x, y)$ -ravnine in  $z$ -osi. Hitro lahko preverimo, da je

$$\dim T_p(V) = \begin{cases} 2 & p \text{ je na } (x, y)\text{-ravnini brez izhodišča} \\ 1 & p \text{ je na } z\text{-osi brez izhodišča} \\ 3 & p \text{ je izhodišče} \end{cases}.$$

Vidimo, da je za točke na  $z$ -osi  $\dim T_p(V) < \dim V$  in ta problem nastopi, ker smo na komponenti "napačne" dimenzije. Zato v nadaljevanju definiramo razsežnost raznoterosti v točki in gladke točke.

**Definicija 1.5.36** Naj bo  $V$  afina raznoterost. Za  $p \in V$  je razsežnost od  $V$  v točki  $p$ , ki jo označimo z  $\dim_p V$ , enaka maksimalni razsežnosti vseh ireducibilnih komponent razsežnosti  $V$ , ki vsebujejo  $p$ .

**Definicija 1.5.37** Naj bo  $p$  točka afine raznoterosti  $V$ . Tedaj je  $p$  gladka (ali nesingularna), če je  $\dim T_p(V) = \dim_p V$ . Če to ne velja, je  $p$  singularna točka raznoterosti  $V$ .

Če je  $V \subset k^n$  afina raznoterost, se množica

$$\Sigma = \{p \in V : p \text{ je singularna točka raznoterosti } V\}$$

imenuje singularni lokus raznoterosti  $V$ . V splošnem imajo singularne točke raznoterosti naslednje lastnosti (glej [27] za dokaz).

**Izrek 1.5.38** Za množico  $\Sigma$  velja:

- $\Sigma$  je afina raznoterost, vsebovana v  $V$ ;
- če je  $p \in \Sigma$ , je  $\dim_p V < \dim T_p(V)$ ;
- $\Sigma$  ne vsebuje ireducibilnih komponent od  $V$ ;
- če sta  $V_i$  in  $V_j$  različni ireducibilni komponenti raznoterosti  $V$ , je  $V_i \cap V_j \subset \Sigma$ .

Pri določanju singularnih (in gladkih) točk raznoterosti si lahko pomagamo z naslednjim rezultatom [27]. Še prej vpeljemo nekaj oznak. Za podane  $f_1, \dots, f_r \in k[x_1, \dots, x_n]$  naj bo  $J(f_1, \dots, f_r)$  Jacobijeva matrika (matrika delnih odvodov) razsežnosti  $r \times n$ ,

$$J(f_1, \dots, f_r) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Z  $J_p(f_1, \dots, f_r)$  označimo matriko števil  $J(f_1, \dots, f_r)$ , ovrednoteno v točki  $p$ .

**Izrek 1.5.39** Naj bo  $\mathbf{V}(f_1, \dots, f_r)$  poljubna raznoterost in  $p \in V$  točka, kjer ima  $J_p(f_1, \dots, f_r)$  rang enak  $r$ . Tedaj je  $p$  gladka točka raznoterosti  $V$  in leži na enolični ireducibilni komponenti raznoterosti  $V$ , ki je razsežnosti  $n - r$ .

Izrek 1.5.39 nam omogoči, da določimo gladke (in singularne) točke raznoterosti  $V$ . S tem si bomo v poglavju 3 pomagali pri določanju cikličnosti generičnih točk na komponentah centralne raznoterosti. Določili bomo cikličnost gladkih točk z izračunom t. i. minorjev Jacobijeve matrike.

Vrnimo se nekoliko nazaj, kjer smo izpeljali, da je  $\dim V \leq m$ , če je  $V$  določena s polinomsko ali racionalno parametrizacijo z  $m$  neodvisnimi parametri. Če zelimo preveriti, da je razsežnost natanko  $m$ , lahko uporabimo izrek 1.5.39 na naslednji način:

- Recimo, da je parametrizacija raznoterosti  $V$  podana z

$$F(t_1, \dots, t_m) = (f_1(t_1, \dots, t_m), \dots, f_r(t_1, \dots, t_m)),$$

torej  $V$  leži v  $r$ -razsežnem prostoru.

- Izračunamo Jacobijevo matriko  $J(f_1, \dots, f_r)$ , katere  $i$ -ta vrstica vsebuje delne odvode funkcij  $f_i$  glede na spremenljivke  $t_1, \dots, t_m$ . Torej je  $J(f_1, \dots, f_r)$  matrika razsežnosti  $r \times m$ .
- Izračunamo rang matrike  $J(f_1, \dots, f_r)$  v poljubni točki  $(t_1, \dots, t_m)$ . Če je rang enak  $m$ , ima raznoterost razsežnost natanko  $m$ .

## 1.6 Sistem računske algebre *Singular*

V tem razdelku na kratko opišemo sistem računske algebre *Singular*, ki je prosto dostopen sistem računske algebre in ga pogosto uporabljamo pri analizi polinomskih sistemov. Najdemo ga na <http://www.singular.uni-kl.de>. Ena izmed prednosti *Singular*ja je, da omogoča eno najhitrejših implementacij Buchbergerjevega algoritma za izračun Gröbnerjevih baz. Prav tako omogoča faktorizacijo polinomov več spremenljivk, izračun rezultant, izračun primarne dekompozicije, resolucijo singularnosti in še veliko podobnih operacij. Mi se v tej monografiji osredotočimo predvsem na uporabo *Singular*ja za operacije nad ideali, ki smo jih opisali v tem poglavju in jih bomo uporabili v poglavju 3 pri reševanju nekaterih problemov.

*Singular* lahko zaženemo bodisi v načinu "Shell" z vnosom besede *Singular* na terminalu ali z besedo *ESingular*, ki zažene *Singular* znotraj Emacs-a. *Singular* vsebuje programski jezik C, ki uporabniku omogoča pisanje svojih knjižnic in postopkov za razširitev *Singular*jevih zmogljivosti.

Ko je *Singular* zagnan, vnesemo podatke za ukaz (rutino) za znakom `>`. Vsak ukaz se konča s podpičjem `;`. Za znakom `//` izpišemo rezultat izračuna.

```
2+1;
//3
```

Vsak objekt ima lastnost oz. "tip objekta", na primer celoštevilске spremenljivke so tipa `int`. Naloga je podana s simbolom `=`, enakost s simboloma `==` in `!=` (ali `<>`), Boolovi spremenljivki (0 ali 1) pa vrneta pravilnost zapisa.

```
int i = 2;
i == 1;
//0
i != 2;
//1
```

Vrednost objekta je prikazana z njegovim imenom.

```
i;
//2
```

Zadnji prikazan rezultat je vedno na voljo s simbolom podčrtaj `_`. To je še posebej uporabno, če delamo z dolgimi interaktivnimi izračuni in pozabimo shraniti rezultat v spremenljivko.

```
LIB"general.lib";
factorial(37);"";
ring r1=0,x,dp;
factorial (37,0);
number p= _;
p;
// 13763753091226345046315979581580902400000000
```

Prejšnji primer kaže mnoge funkcije v Singularju, ki jih moramo opisati. V prvi vrstici kličeemo knjižnico `general.lib`. Mnogi ukazi v Singularju so shranjeni v knjižnicah, ki jih moramo naložiti, da jih potem lahko uporabljamo. Ukaz `factorial(37)` vrne  $37!$  tipa niz, če je le ta naveden z enim argumentom. Vendar, ko je enkrat kolobar (`ring`) definiran, vrne število (`number`), če je opisan z dvema argumentoma. Število je tedaj element polja (v tem primeru je to  $\mathbb{Q}$ ). Ta primer kaže, da ima lahko procedura različno število vnosnih podatkov in prav tako različno število izhodnih podatkov. Nadalje tudi ponazori, da mora biti večina objektov v Singularju definiranih znotraj konteksta kolobarja.

Najboljši način, da se naučimo porabljeni Singular, je uporaba spletne dokumentacije bodisi preko prej navedene spletne strani ali preko "pomoči", ki je vključena v namestitvi. Do pomoči dostopamo z ukazom `help`. Na primer, če zelimo dobiti informacije o `intmat`, ki definira matriko celih števil, vtipkamo

```
help intmat;
```

Cela števila (`int`), celoštevilske matrike (`intmat`), celoštevilski vektorji (`intvec`) in nizi (`string`) so lahko definirani brez predhodne aktivacije kolobarja (`ring`). Celoštevilsko matriko z elementi 1,2,3,4,5,6,7,8,9, definiramo na naslednji način:

```
intmat m[3][3]=1,2,3,4,5,6,7,8,9;
//1,2,3,
//4,5,6,
//7,8,9
```

To definira  $3 \times 3$  matriko z elementi, ki so cela števila, in jo inicializira z nekimi vrednostmi. Vsak element matrike lahko spremenimo in/ali izberemo z uporabo oglatih oklepajev [...]. V spodnjem primeru postavimo element v prvi vrstici in tretjem stolpcu matrike `m` na nič. Ukaz `print` poda lepši izpis rezultata.

```
m[1,3]=0;
m;
//1,2,0,
//4,5,6,
//7,8,9
print(m);
//  1  2  0
//  4  5  6
//  7  8  9
```

Za izračun sledi matrike uporabimo `for` zanko. Zavita oklepaja `{}` označujeta začetek in konec bloka. Če definiramo spremenljivko brez podane začetne vrednosti (kot spremenljivko `tr` kot v primeru spodaj), ji Singular dodeli privzeto vrednost specifičnega tipa. Privzeta vrednost za cela števila je 0. Za izračun sledi matrike `m` uporabimo spodnji ukaz:

```
int tr;
for ( int j=1; j<=3; j++){ tr=tr + m[j,j]; }
tr;
//15
```

Nizi so razmejeni s simbolom " (dvojni narekovaj). Lahko so uporabljeni za komentiranje podatkov, ki jih dobimo kot rezultat izračunov. Če niz vsebuje pravilne ukaze *Singularja*, je to lahko izvršeno s pomočjo funkcije `execute`. Rezultat je enak, kot če bi ukazi bili zapisani v ukazni vrstici. Ta lastnost je še posebej uporabna pri definiciji novih kolobarjev znotraj procedur.

```
"primer za nize:";
//primer za nize:
string s="Element matrike m";
s=s+"na položaju [2,3] je:"; // združevanje nizov s +
s , m[2,3] , ".";
//Element matrike m na položaju [2,3] je: 6.
s="m[3,1]=0; m;";
execute(s);
// 1,2,0,
// 4,5,6,
// 0,8,9
```

Ta primer kaže, da so izrazi lahko ločeni z vejico, če podamo seznam izrazov. *Singular* ovrednoti vsak izraz tega seznama in jih loči s presledkom. Znak + v tretji vrstici uporabimo za združevanje nizov.

### 1.6.1 Kolobarji in Gröbnerjeve baze

Za uporabo objektov, kot so ideali, matrike, moduli in polinomski vektorji, moramo najprej definirati kolobar.

```
ring r = 0, (x,y,z), dp;
```

Definicija kolobarja sestoji iz treh delov: prvi del določa polje, drugi del predstavlja imena spremenljivk v kolobarju, tretji del pa določa urejenost členov, ki jo želimo uporabiti. Zgornji primer predstavlja polinomski ideal, označen z  $r$ , nad poljem karakteristike 0 (t. j. racionalna števila) in spremenljivkami  $x$ ,  $y$  in  $z$ . Kratica `dp` na koncu vrstice pomeni, da uporabimo stopenjsko inverzno leksikografsko urejenost. Ostale lastnosti, ki jih lahko priredimo kolobarju, so lahko:

```
ring r1=32003, (x,y,z), dp;
ring r2=32003, (a,b,c,d); lp;
```

Kolobar  $r1$  v prvi vrstici je definiran nad karakteristiko 32003 v spremenljivkah  $x$ ,  $y$ ,  $z$  in urejenostjo `dp` in podobno je kolobar  $r2$  v drugi vrstici definiran nad karakteristiko 32003 v spremenljivkah  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  in urejenostjo `lp` (leksikografska urejenost). Leksikografska urejenost in stopenjsko inverzna leksikografska urejenost sta le dve izmed urejenosti, ki jih lahko uporabimo v *Singularju*, za ostale glej [http://www.singular.uni-kl.de/Manual/2-0-5/sing\\_364.htm](http://www.singular.uni-kl.de/Manual/2-0-5/sing_364.htm).

Če zapišemo ime kolobarja, potem se izpišejo njegove lastnosti. Spodnji primer kaže, da je privzet kolobar v *Singularju*  $\mathbb{Z}/32003[x, y, z]$  s stopenjsko inverzno leksikografsko urejenostjo.

```
ring r3;
r3;
```

```
// characteristic : 32003
// number of vars : 3
//      block   1 : ordering dp
//              : names x y z
//      block   2 : ordering C
```

Ko definiramo kolobar, je le-ta trenutni aktivni kolobar (`Singular` mu dodeli spremenljivko `basing`). Aktivni kolobar (`basing`) je zdaj `r3` in če želimo spremeniti aktivni kolobar, uporabimo funkcijo `setring`:

```
setring r;
```

Ko je kolobar aktiviran, lahko definiramo polinome. Monom, recimo  $x^3$ , lahko zapišemo na dva načina: bodisi kot `x^3` ali krajše kot `x3`. Opomnimo, da krajša oznaka ni primerna, če ime kolobarja sestoji iz več kot enega znaka. Prav tako `Singular` vedno razširi oklepaje in samodejno razvrsti člene glede na urejenost členov aktivnega kolobarja.

```
poly f = x3+y3+(x-y)*x2y2+z2;
f;
// x3y2-x2y3+x3+y3+z2
```

Ukaz `size` v splošnem določa število posameznih vnosov v objektu. Za polinome `size` določa število monomov.

```
size(f);
//5
```

Naravno vprašanje, ki se pojavi je, če neka točka, recimo  $(x, y, z) = (1, 2, 0)$  leži na raznoterosti, definirani s polinomoma  $f$  in  $g$ . Najprej definiramo ideal, generiran z obema polinomoma, vstavimo koordinate točke v spremenljivke kolobarja in preverimo, če je rezultat nič.

```
poly g = f^2*(2x-y);
ideal I = f,g;
ideal J = subst(I,var(1),1);
J = subst(J,var(2),2);
J = subst(J,var(3),0);
J;
// J[1]=5
// J[2]=0
```

Ukaz `var(n)` izpiše  $n$ -to spremenljivko glede na vrstni red spremenljivk v definiciji kolobarja, npr. v zgornjem primeru `var(1)` izpiše  $x$ , `var(2)` izpiše  $y$  in `var(3)` izpiše  $z$ . Ukaz `subst` lahko med drugim nadomesti spremenljivko kolobarja v polinomu (ali večih polinomih) z njeno vrednostjo, npr. v zgornjem primeru ukaz `subst(J,var(2),2)` pomeni, da v vse polinome ideala  $J$  vstavimo vrednost spremenljivke  $y$ , ki je 2. Rezultata  $J[1]=5$  in  $J[2]=0$  pomenita, da ko vstavimo v elementa ideala  $J$  točko  $(1, 2, 0)$ , je vrednost polinoma  $f$  enaka 5 in vrednost polinoma  $g$  je 0. Ker rezultat ni enak nič v obeh primerih, točka  $(1, 2, 0)$  ne leži na raznoterosti  $V(f, g)$ .

Naslednje vprašanje, ki se lahko pojavi je, če je neka funkcija ničelna na raznoterosti oz. na algebraični način povedano, če je polinom element ideala. V ta namen izračunamo Gröbnerjevo



bazo z uporabo ukaza `groebner` in nato reduciramo polinom glede na izračunano Gröbnerjevo bazo.

```
ideal GI = groebner(f);
reduce(g,GI);
//0
```

Funkcija `groebner` tako kot mnoge druge funkcije v *Singular*ju lahko izpiše potek izračunov. Ukaz `option(prot)` omogoča izpis poteka izračunov, medtem ko ga ukaz `option(noprot)` onemogoči. Druga uporabna možnost za *Singular*jev ukaz `groebner` je `option(redSB)`, ki vrne reducirano Gröbnerjevo bazo. Za izračun Gröbnerjeve baze pa lahko uporabimo tudi ukaz `std` (standardna baza).

Ukaz `reduce` izračuna ostanek polinoma pri deljenju s polinomom ali množico polinomov. V razdelku 1.2 smo s pomočjo Gröbnerjevih baz podali rešitev k problemu pripadnosti idealu. Videli smo, da je neki polinom v idealu  $I$  natanko tedaj, ko je ostanek pri deljenju tega polinoma z elementi Gröbnerjeve baze ideala enak 0. Zgornji primer je pokazal, da polinom  $g$  pripada idealu, definiranim s polinomom  $f$ , saj je ostanek enak nič. Poglejmo še en primer. S pomočjo *Singular*ja preverimo, ali polinom  $f = x^2yz + xy^2z^2 + x^4 + z^2 + x^2y^2 + 4$  pripada idealu  $I = \langle 2x^2, xy + 2z, x + z \rangle$ . To v *Singular*ju izračunamo na naslednji način.

```
ring r=0,(x,y,z),lp;
poly f=x2yz+xy2z2+x4+z2+x2y2+4;
ideal I=2x2,xy+2z,x+z;
ideal GI=groebner(I);
reduce(f,GI);
//4
```

Ker je rezultat 4, polinom  $f$  ni element ideala  $I$ , če pa bi rezultat bil ničlen, bi veljalo  $f \in I$ .

V razdelku 1.2 smo prav tako obravnavali problema enakosti idealov, kjer smo navedli, da sta neničelna ideala enaka natanko tedaj, ko imata enako reducirano Gröbnerjevo bazo glede na izbrano urejenost členov. Ukaz `reduce` nam prav tako pomaga pri preverjanju enakosti idealov. Vzemimo ideal  $I$  iz prejšnjega primera in ideal  $J = \langle x, x^2 + xz \rangle$  ter preverimo, če sta enaka. Uporabimo leksikografsko urejenost.

```
ring r=0,(x,y,z),lp;
ideal I=2x2,xy+2z,x+z;
ideal J=x,x2+xz;
ideal GI=groebner(I);
ideal GJ=groebner(J);
reduce(GI,GJ);
reduce(GJ,GI);
// [1]=z2
// [2]=yz-2z
// [3]=z
// [1]=-z
```

Funkcija `reduce(GI,GJ)` vzame vsak generator ideala  $GI$  in izračuna njegov ostanek pri deljenju z množico generatorjev ideala  $GJ$  in podobno funkcija `reduce(GJ,GI)`. Če so vsi ostanki enaki

nič, sta Gröbnerjevi bazi enaki in posledično sta ideala enaka. V zgornjem primeru ostanki niso ničelni in zato ideala  $I$  in  $J$  nista enaka.

V razdelku 1.2 smo omenili, da se Gröbnerjeve baze uporabljajo večinoma za reševanje sistemov enačb. Singular uporablja simbolno-numerične metode za izračun rešitev polinomskih enačb. Četudi je zahtevnost omenjenih metod večja kot zahtevnost čistih numeričnih metod, je zaželena njihova uporaba, saj se na primer izognemo težavam blizu singularnosti ali rešimo sisteme, ki vsebujejo parametre in s tem poskrbimo za simultano rešitev za vse vrednosti parametrov. Najprej pogledajmo primer 1.2.25 in izračunajmo reducirano Gröbnerjevo bazo ideala  $I = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$  glede na leksikografsko urejenost  $z > y > x$ .

```
ring r=0,(z,y,x),lp;
option(redSB);
poly f1=x2+y;
poly f2=2x2y+x4;
poly f3=xz+x4+xy+x2y2;
ideal I=f1,f2,f3;
ideal GI=groebner(I);
GI;
// GI[1]=x4
// GI[2]=y+x2
// GI[3]=zx-x3
```

Vidimo, da dobimo enako rešitev, kot smo jo izračunali v primeru 1.2.25, t. j. Gröbnerjeva baza ideala  $I$  je  $G = \{x^4, y + x^2, zx - x^3\}$ .

Sedaj pogledajmo primer 1.2.26 in pokažimo, da Gröbnerjeva baza ideala  $I = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ , kjer so  $f_1, f_2$  in  $f_3$  polinomi (1.9), sestoji iz iz polinomov  $g_1, \dots, g_6$ , ki so navedeni v (1.10).

```
ring r=0,(x,y,z),lp;
option(redSB);
poly f1=z2y+z2;
poly f2=x3y+x+y+1;
poly f3=z+x2+y3;
ideal I=f1,f2,f3;
ideal GI=groebner(I);
GI;
//GI[1]=z4-z3
//GI[2]=yz2+z2
//GI[3]=y11+3y8z-2y7-4y4z+y3+y2+2y+z3-z2+z+1
//GI[4]=xz+y10-y9+y8+3y7z-y7-2y6z-y6+2y5z+y5-2y4z-y4-2y3z+y3+y2z-yz+y-z3+5z2+z+1
//GI[5]=xy+x+y7+2y4z-y3-z2-z
//GI[6]=x2+y3+z
```

Poglejmo še, kako lahko rešimo sistem, ki vsebuje proste parametre. Poiščimo rešitev linearnega sistema enačb

$$\begin{aligned} 3x + y + z - u &= a \\ 13x + 8y + 6z - 7u &= b \\ 14x + 10y + 6z - 7u &= c \\ 7x + 4y + 3z - 3u &= d, \end{aligned} \tag{1.42}$$

kjer so  $a$ ,  $b$ ,  $c$  in  $d$  prosti parametri in  $x$ ,  $y$ ,  $z$  in  $u$  spremenljivke sistema.

```
// definiramo kolobar s 4 parametri in 4 spremenljivkami
ring r = (0,a,b,c,d),(x,y,z,u),dp;
ideal I= 3x+y+z-u-a,
        13x+8y+6z-7u-b,
        14x+10y+6z-7u-c,
        7x+4y+3z-3u-d;
option(redSB);
ideal G = groebner(I);
simplify(G,1);
// _[1]=u+(6/5a+4/5b+1/5c-12/5d)
// _[2]=z+(16/5a-1/5b+6/5c-17/5d)
// _[3]=y+(3/5a+2/5b-2/5c-1/5d)
// _[4]=x+(-6/5a+1/5b-1/5c+2/5d)
```

Ukaz `simplify(G,1)` izpiše generatorje od  $G$  kot monične polinome. Rezultat `_[1]=` pomeni, da je  $u + 6/5a + 1/5b + 1/5c - 2/5d = 0$  in podobno rezultati `_[2]=`, `_[3]=` in `_[4]=`. Torej je enolična rešitev sistema (1.42) enaka

$$\begin{aligned} x &= 6/5a - 1/5b + 1/5c - 2/5d, \\ y &= -3/5a - 2/5b + 2/5c + 1/5d, \\ z &= -16/5a + 1/5b - 6/5c + 17/5d, \\ u &= -6/5a - 4/5b - 1/5c + 12/5d. \end{aligned}$$

Izvedba Buchbergerjevega algoritma za izračun Gröbnerjeve baze temelji v veliki meri na izbrani urejenosti členov. V splošnem je izračun Gröbnerjeve baze najtežji z leksikografsko urejenostjo. Vendar, če je ideal 0-razsežen, t. j. sistem ima končno število rešitev, lahko uporabimo FGLM algoritem, ki Gröbnerjevo bazo vedno poda z leksikografsko urejenostjo (tudi, če je bila urejenost v idealu v osnovi drugače definirana).

```
LIB "ring.lib";
timer=0;
//
ring R = 0,(x,y,z),dp;
ideal I=x7+y7, y7+z7, x7+z7+2, x6y+y6z+z6+x;
//
// izracun reducirane GB glede na dp
//
option(redSB);
```

```

ideal J=std(I); // ali groebner(I)
timer;
//4
timer=0;
//
//definiramo nov kolobar S, porojen z enakimi polinomi kot R,
//ampak s spremenjeno urejenostjo clenov
def S=changeord("lp");
setring S;
ideal J=fglm(R,J);
timer;
//0
timer=0;
//
// ukaz groebner odloci najboljšo metodo za izracun GB
// najprej moramo kopirati originalni ideal v kolobar S
ideal I=imap(R,I);
ideal K=groebner(I);
timer;
//4
timer=0;
//
// direktno izracunamo reducirano GB z leksikografsko urejenostjo
//
K=std(I);
//.....

```

Zadnji izračun porabi veliko procesorskega časa, zato ga lahko tudi zaustavimo, kar v Singularju naredimo z ukazom  $\sim C-\sim C$ .

Na koncu tega razdelka pokažimo še uporabo šibkega Hilbertovega izreka o ničlah (izrek 1.4.1). Izrek pravi, da sistem polinomskih enačb  $f_1 = 0, \dots, f_s = 0$  nima rešitve nad poljem  $k$  natanko tedaj, ko je reducirana Gröbnerjeva baza ideala  $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$  enaka  $\{1\}$ . Vzemimo preprost primer

$$\begin{aligned}
 x + 2y - z &= 2 \\
 3x - 8y + 3z &= 5 \\
 -2x - 4y + 2z &= 6.
 \end{aligned}
 \tag{1.43}$$

Hitro se lahko prepričamo, da ta sistem nima rešitve, kar pa lahko pokažemo tudi s preprostim izračunom v Singularju.

```

LIB "standard.lib";
ring r=0,(x,y,z),dp;
option(redSB);
ideal I= x+2y-z-2, 3x-8y+3z-5,-2x-4y+2z-6;
ideal GI=groebner(I);
GI;
//GI[1]=1

```

Ker je Gröbnerjeva baza ideala enaka  $\{1\}$ , po izreku 1.4.1 sistem (1.43) nima rešitve.

### 1.6.2 Eliminacija spremenljivk

Eliminacija spremenljivk je eden izmed načinov za iskanje rešitev polinomskega sistema. V *Singular*ju lahko bodisi izberemo primerno urejenost (na primer produktno urejenost) ali uporabimo ukaz `eliminate`, ki računa v trenutni urejenosti z dodatnim obteženim vektorjem.

Določimo vse vrednosti spremenljivke  $z$  v rešitvah spodnjega polinomskega sistema enačb:

$$\begin{aligned}4z^8y - 5z^3x - 3x^2y + xy^2 &= 8 \\z^9 - 3z^5xy + z^3x - (7x^2 + 1)y - 2xy^2 &= 1 \\z^9x(5 + 2y) + 5z^8y + 5z - x^2y - 4xy^2 &= -1.\end{aligned}$$

```
// Najprej definiramo kolobar s produktno urejenostjo
// da eliminiramo prvi dve spremenljivki
ring R = 0, (x,y,z), (dp(2),lp);
ideal I=4z8y-5z3x-3x2y+xy2-8,
      z9-3z5xy+z3x-(7x2+1)*y-2xy2-1,
      z9x*(5+2y)+5z8y+5z-x2y-4xy2+1;
option(redSB);
ideal J=groebner(I);
// najdemo univarianten polinom v spremenljivki z
simplify(lead(J),1);
// _[1]=z85
// _[2]=y
// _[3]=x
poly g=J[1];
```

Nadalje izračunamo vse ničle univariantnega polinoma  $g$ . Uporabimo Laguerrev algoritem, ki je v *Singular*ju izveden v knjižnici `solve.lib`.

```
LIB "solve.lib";
// definiramo kolobar s kompleksnimi koeficienti, da shranimo nicle
ring Rfloat = (complex,10,I), (x,y,z),lp;
poly g=imap(R,g);
list L = laguerre_solve(g,100,100);
size(L);
//85
//
// da izberemo realne nicle, naredimo zanko na L
//in z ukazom {L[i];} izpiemo vse nile
for (int i=1; i<=size(L); i++)
{
  if (impart(L[i]==0) {L[i];}
}
// -1.8135284651
// -1.559997662
```

```
// -0.2679041558
// 0.9657875564
// 1.1035140081
// 1.2770264747
// 2.7768083
```

Sedaj pogledajmo primer uporabe ukaza `eliminate`. Obravnavajmo  $I$ , ki je generiran s pripadajočima polinomoma sistema (1.15). Izračunajmo Gröbnerjevi bazi idealov  $I_1 = I \cup \mathbb{C}[y, z]$  in  $I_2 = I \cup \mathbb{C}[z]$ . Po izreku 1.3.2 najprej izračunamo Gröbnerjevo bazo  $G$  ideala  $I$  in potem iz nje izločimo polinome s spremenljivko  $x$ , da dobimo  $I_1$  oz. s spremenljivkama  $x$  in  $y$ , da dobimo  $I_2$ .

```
LIB "elim.lib";
ring r=0,(x,y,z),lp;
option(redSB);
ideal I= x2+y2+z2-1,xyz-1;
ideal G=groebner(I);
G;
// G[1]=y4z2+y2z4-y2z2+1
// G[2]=x+y3z+yz3-yz
eliminate(G,x);
// _[1]=y4z2+y2z4-y2z2+1
eliminate(G,x*y);
// _[1]=0
```

Prav tako lahko eliminiramo spremenljivke s pomočjo ukaza `elim`, ki upošteva vrstni red spremenljivk, naveden pri definiciji kolobarja.

```
elim(G,1); //eliminiramo 1. spremenljivko (x)
// _[1]=y4z2+y2z4-y2z2+1
elim(G,1..2); //eliminiramo 1. in 2. spremenljivko (x in y)
// _[1]=0
```

Če bi želeli npr. v idealu, kjer nastopajo več kot tri spremenljivke, eliminirati prvo, drugo in tretjo spremenljivko, bi to zapisali z ukazom `elim(G,1..3)`.

### 1.6.3 Korenski ideali

Na koncu razdelka 1.4 smo navedli dve vprašanji, ki se nanašata na korenske ideale. Prvo je bilo, kako izračunati množico generatorjev korena  $\sqrt{I}$ . V `Singular`ju obstaja ukaz `radical` iz knjižnice `primdec.lib` [31], ki izračuna generatorje korena ideala. Najprej kot primer prikažimo izračun korena ideala  $I = \langle xy^2 - y^3 - xy + y^2, x^2y - x^3, x^3 - y^3 - x^2 + y^2 \rangle$ .

```
LIB "primdec.lib";
ring r=0,(x,y),dp;
ideal I= xy2-y3-xy+y2,x2y-x3,x3-y3-x2+y2;
ideal J=radical(I);
J;
// _[1]=xy-y2-x+y
// _[2]=x2-xy
```

Koren ideala  $I$  je torej ideal  $\sqrt{I} = \langle xy - y^2 - x + y, x^2 - xy \rangle$ . S tem smo odgovorili na vprašanje o izračunu generatorjev korena ideala. Drugo vprašanje, ki smo ga zapisali na koncu razdelka 1.4, je, kako odločiti ali je ideal  $I$  korenski ideal. Spomnimo se, da je ideal  $I$  korenski natanko tedaj, ko je  $I = \sqrt{I}$ . Prav tako se spomnimo rešitve problema enakosti idealov, ki pravi, da sta dva ideala enaka natanko tedaj, ko imata enako Gröbnerjevo bazo, kar pa lahko podobno kot zgoraj preverimo z ukazom `reduce`, ki vrne ostanke multideljenja. Vse to preverimo na zgornjem primeru.

```
ideal GI=groebner(I);
ideal GJ=groebner(J);
reduce(GI,GJ);
// _[1]=0
// _[2]=0
// _[3]=0
reduce(GJ,GI);
// _[1]=xy-y2-x+y
// _[2]=x2-y2-x+y
```

Ker ukaz `reduce(GJ,GI)` vrne neničelne ostanke, sta ideala različna ( $I \neq \sqrt{I}$ ) in zato ideal  $I$  ni korenski ideal. Opazimo pa, da ko reduciramo Gröbnerjevo bazo ideala  $I$  z Gröbnerjevo bazo ideala  $\sqrt{I}$ , so vsi ostanke 0. To pomeni, da če je  $f \in I$ , je tudi  $f \in \sqrt{I}$ , od koder seveda sledi, da je  $I \subset \sqrt{I}$ , kar je vedno res, kot smo že ugotovili v razdelku 1.4. V naslednjem podrazdelku bomo spoznali dve rutini za izračun primarne dekompozicije ideala. Pri tem bomo videli, da *Singular* vrne rezultat iz katerega je prav tako mogoče razbrati ali je ideal korenski.

Na koncu se spomnimo še rešitve enega izmed problemov, ki smo jih obravnavali v tem poglavju, t. j. problem članstva v korenu, ki sprašuje, kdaj je neki polinom  $f$  element ideala  $\sqrt{I}$ . Pokazali smo, da je to natanko tedaj, ko je  $1 \in \langle 1 - wf, f_1, \dots, f_s \rangle$ , kjer je  $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ . Če zelimo to pokazati v *Singular*ju, moramo v definiciji kolobarja definirati še eno dodatno spremenljivko  $w$ . Poglejmo, če je polinom  $f = x^2 + y$  element korena ideala  $I$  zgoraj.

```
LIB "primdec.lib";
ring r=0,(w,x,y,z),dp;
ideal I= xy2-y3-xy+y2,x2y-x3,x3-y3-x2+y2;
poly f= x2+y;
option(redSB);
ideal J=1-w*f,I;
groebner(J);
// _[1]=xy-y2-x+y
// _[2]=wx-wy-x+y
// _[3]=wy2+x2+wy-y2-1
// _[4]=x3-y3-x2+y2
```

Vidimo, da Gröbnerjeva baza ni enaka  $\{1\}$ , zato  $f \notin \sqrt{I}$ .

#### 1.6.4 Operacije na raznoterostih

V tem podrazdelku se osredotočimo na operacije na raznoterostih oz. posledično tudi na idealih, ki smo jih obravnavali v razdelku 1.5. Če želimo izračunati unijo dveh raznoterosti  $V_1 = \mathbf{V}(I_1)$

in  $V_2 = \mathbf{V}(I_2)$ , kjer sta  $I_1$  in  $I_2$  ideala, lahko v Singularju izračunamo presek idealov  $I_1$  in  $I_2$  in nato polinomi preseka tvorijo komponente unije  $V_1 \cup V_2$  (glej (1.23)). Presek idealov lahko izračunamo s funkcijo `intersect`. Poglejmo to na primeru preseka, ki smo ga že izračunali v razdelku 1.5, t. j. izračunajmo presek idealov  $I_1 = \langle x, y \rangle$  in  $I_2 = \langle y^2 \rangle$ .

```
LIB "general.lib";
ring r=0,(x,y),lp;
ideal I1=x,y;
ideal I2=y2;
intersect(I1,I2);
// _[1]=y2
```

Torej je  $I_1 \cap I_2 = \langle y^2 \rangle$  in zato je  $V_1 \cup V_2 = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$ . Na podoben način izračunamo presek več kot dveh idealov. Recimo presek idealov  $I, J$  in  $L$  izračunamo z ukazom

```
intersect(I,J,L);
```

Nadalje si pogledjmo, kako s Singularjem izračunamo razliko raznoterosti, ki je po izreku 1.5.4 povezana z operacijo kvocienta idealov. Kvocient dveh idealov izračunamo s funkcijo `quotient`. Vzemimo ideala  $I_1$  in  $I_2$  iz zgornjega primera in izračunajmo  $I_1 : I_2$ .

```
LIB "general.lib";
ring r=0,(x,y),lp;
ideal I1=x,y;
ideal I2=y2;
quotient(I1,I2);
// _[1]=1
```

Ker je  $1 \in I_1 : I_2$ , je  $I_1 : I_2 = k[x_1, \dots, x_n]$  in  $\overline{\mathbf{V}(I_1) \setminus \mathbf{V}(I_2)} = \emptyset$ .

Na koncu si pogledjmo še ukaze, ki so povezani z dekompozicijo raznoterosti oz. ideala. Ko rešujemo sistem enačb, je pomembno razumevanje geometrije raznoterosti, ki je definirana s polinomi sistema. Pomemben korak k temu je izračun primarne dekompozicije ideala. Singular poskrbi za različne metode za izračun primarne dekompozicije ideala. V knjižnici `primdec.lib` lahko uporabimo dva različna algoritma za izračun le-te: `primdecGTZ`, ki temelji na Gianni-Trager-Zacharias algoritmu (glej [49]) in `primdecSY`, ki temelji na Shimoyama-Yokoyama algoritmu (glej [119]). Spodaj je preprost primer primarne dekompozicije ideala  $I = \langle xy^2 - y^3 - xy + y^2, x^2y - x^3, x^3 - y^3 - x^2 + y^2 \rangle$ .

```
LIB "primdec.lib";
ring r=0,(x,y),dp;
ideal I= xy2-y3-xy+y2,x2y-x3,x3-y3-x2+y2;
primdecGTZ(I);
// [1]:
//   [1]:
//   _[1]=x-y
//   [2]:
//     _[1]=x-y
// [2]:
//   [1]:
```



```
//      _[1]=y-1
//      _[2]=x2
//      [2]:
//      _[1]=y-1
//      _[2]=x
//      [3]:
//      [1]:
//      _[1]=y
//      _[2]=x2
//      [2]:
//      _[1]=y
//      _[2]=x
```

Vidimo, da je rezultat podan kot seznam parov idealov, kjer je vsak ideal določen z generatorji. Prvi ideal  $Q_j$  v vsakem paru je primarni ideal v primarni dekompoziciji ideala  $I$ ; drugi ideal  $P_j$  v vsakem paru je pridružen praideal, t. j. koren prvega ideala:  $P_j = \sqrt{Q_j}$ . Če je drugi ideal v vsakem paru enak kot prvi, kar pomeni, da je  $Q_j = \sqrt{Q_j} = P_j$  za vsak  $j$ , potem je vsak ideal  $Q_j$  praideal. To pa pomeni, da smo ideal  $I$  zapisali kot presek praidealov in zato je po izreku 1.5.13  $I$  korenski ideal. V zgornjem primeru vidimo, da je  $Q_1 = P_1 = \langle x - y \rangle$ , vendar pa je  $Q_2 = \langle y - 1, x^2 \rangle \neq P_1 = \langle y - 1, x \rangle$  in  $Q_3 = \langle y, x^2 \rangle \neq P_3 = \langle y, x \rangle$ . Na ta način smo še enkrat dokazali, da ideal  $I$  ni korenski, kar smo naredili že zgoraj s pomočjo rutine `radical`. Tako nam izračun primarne dekompozicije ideala s pomočjo rutine `primdecGTZ` (ali `primdecSY`) omogoča preveriti, ali je dan ideal korenski.

Če nas zanima dekompozicija raznoterosti ideala, je dovolj izračunati minimalno dekompozicijo korena ideala na praideale, saj kot smo videli v (1.25), na ta način dobimo ireducibilne podraznoterosti  $V_j$  raznoterosti  $V$ . V *Singular*ju to naredimo z rutinama `minAssGTZ` (temelji na Gianni-Trager-Zacharias algoritmu) in `minAssChar` (temelji na metodi karakterističnih množic [123]). Izračunajmo minimalno dekompozicijo korenskega ideala od  $I$  iz prejšnjega primera.

```
LIB "primdec.lib";
ring r=0,(x,y),dp;
ideal I= xy2-y3-xy+y2,x2y-x3,x3-y3-x2+y2;
minAssChar(I);
// [1]:
//      _[1]=x-y
// [2]:
//      _[1]=y-1
//      _[2]=x
```

Vidimo, da je rezultat preprostejši kot zgoraj pri izračunu primarne dekompozicije. Seveda pa se v primeru, da je ideal korenski, dobljeni ideali ujemajo s pridruženimi ideali v primarni dekompoziciji. V obravnavanem primeru vidimo, da lahko raznoterost  $\mathbf{V}(I)$  zapišemo kot unijo dveh ireducibilnih raznoterosti:

$$\mathbf{V}(I) = \mathbf{V}(x - y) \cup \mathbf{V}(y - 1, x).$$

Včasih, ko izračunamo minimalno dekompozicijo korena ideala, izgledajo dobljeni praideali zelo zapleteno. V takem primeru lahko izračunamo Gröbnerjevo bazo vsakega praideala in na ta način poenostavimo zapis. To naredimo na naslednji način:

```

LIB "primdec.lib";
ring r=0,(x,y),dp;
ideal I= xy2-y3-xy+y2,x2y-x3,x3-y3-x2+y2;
list L=minAssGTZ(I);
int k;
for(k=1;k<=size(L);k++)
{L[k]=std(L[k]);
};
L;

```

Opazimo, da enkrat uporabimo rutino `minAssChar`, drugič pa `minAssGTZ`. Za računanje minimalne dekompozicije korena ideala oz. minimalne dekompozicije raznoterosti je popolnoma vseeno, katero izmed obeh rutin uporabimo. Podobno velja pri izračunu primarne dekompozicije za rutini `primdecGTZ` in `primdecSY`.

Na koncu dodajmo še primer izračuna minimalne dekompozicije raznoterosti s pomočjo modularne aritmetike iz podrazdelka 1.5.3.

```

LIB "primdec.lib";
ring r=32003,(x,y,z),dp;
ideal I= 8x2y2+5xy3+3x3z+x2yz,x5+2y3z2+13y2z3+5yz4,8x3+12y3+xz2+3,7x2y4+18xy3z2+y3z3;
groebner(I);
// _[1]=x
// _[2]=z2
// _[3]=y3+8001
minAssGTZ(I);
// [1]:
//   _[1]=z
//   _[2]=y-12054
//   _[3]=x
// [2]:
//   _[1]=z
//   _[2]=y2+12054y+5296
//   _[3]=x

```

Ko računamo z modularno aritmetiko, lahko kot karakteristiko kolobarja uporabimo tudi kakšno drugo praštevilo, recimo 104729, 4236233, 179595127.

## Poglavje 2

# Nekatera poglavja iz teorije dinamičnih sistemov

V tem poglavju so obravnavani predvsem tisti pojmi iz teorije dinamičnih sistemov, ki nastopajo v poglavju 3. S fizikalnega stališča dinamični sistemi izvirajo iz Newtonove mehanike in so primarno opisovali nihanja in druga gibanja v prostoru  $\mathbb{R}^n$  predvsem za  $n = 2, 3, 4$  ter  $n = 2k$ . Opis gibanja je podan bodisi z diferencialno oz. diferenčno enačbo ali pa kot iteracija nekih (lahko tudi različnih in slučajnih) funkcij. Kot del matematike so dinamični sistemi “zaživel” leta 1881 z objavo Poincaréja [100] in potem še z delom Ljapunova [80] enajst let kasneje. Prvič se pojem “dinamični sistem” pojavi v knjigi Birkhoffa [9].

Poincaréjeve sečne ploskve in Poincaré-Ljapunov izrek (glej str. 95) spadajo med najosnovnejše rezultate teorije, ki jo danes imenujemo “teorija dinamičnih sistemov”. Z razvojem računalništva se je krog raziskovalcev eksponentno širil tudi na obravnavo nelinearnih sistemov, vse do obravnave kaosa v zveznih in diskretnih sistemih.

### 2.1 Uvod v teorijo dinamičnih sistemov

Naj bo  $\mathcal{M}$  fazni prostor (običajno lokalno homeomorfen  $\mathbb{R}^n$  ali  $\mathbb{C}^n$  - mnogoterost) oziroma prostor stanj (dinamičnega sistema). Prostor  $\mathcal{M}$  skupaj s funkcijo  $F^t : \mathbb{T} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , ki vsaki točki  $\vec{x} \in \mathcal{M}$  priredi stanje - sliko po “času”  $t \in \mathbb{T}$ , imenujemo (deterministični) dinamični sistem:

$$(\mathcal{M}, F^t) \quad \text{dinamični sistem.} \quad (2.1)$$

Formalno je dinamični sistem trojica  $(\mathcal{M}, \mathbb{T}, F^t)$ , kjer je  $\mathcal{M}$  fazni prostor (stanj),  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  ali  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$  predstavlja čas (ki določa spremembo stanja v faznem prostoru),  $F^t$  pa je enoparametrična grupa transformacij prostora  $\mathcal{M}$ , ki je določena z neko vektorsko funkcijo  $\mathbf{f}$ . Če gre za sistem NDE, je vektorsko polje  $\mathbf{f}$  s transformacijo  $F^t$  določeno z enačbo  $\mathbf{f}(\vec{x}) := \left( \frac{dF^t(\vec{x})}{dt} \right)_{t=0}$  in pripadajoči sistem NDE ima obliko  $\vec{x}' = \mathbf{f}(\vec{x})$ . V splošnem na osnovi podanega polja  $\mathbf{f}(\vec{x})$  za poljuben dinamični sistem oblike  $\vec{x}' = \mathbf{f}(\vec{x})$  oz.  $\vec{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\vec{x}_n)$  ni enostavno (pri)dobiti grupe transformacij  $F^t$ , ki nam predstavlja rešitve (tok) sistema (2.1). Postopek pridobivanja rešitev  $F^t$  na osnovi znanega polja  $\mathbf{f}(\vec{x})$  je “enostaven” samo za vektorska polja  $\mathbf{f}(\vec{x})$ , ki so homogena stopnje ena:  $\mathbf{f}(\alpha\vec{x}) = \alpha\mathbf{f}(\vec{x})$  za vsak  $\alpha \in \mathbb{R}$ , oz. linearna. Obravnavali bomo samo tako imenovane deterministične sisteme (2.1), pri katerih je funkcija  $\mathbf{f}$  vnaprej (jasno) določena (t. j. ni

odvisna od nekaj slučajnih dogodkov). Rešitev dinamičnega sistema (2.1) pri danem (začetnem) pogoju  $\vec{x}_0 \in \mathcal{M}$  imenujemo trajektorija (orbita v faznem prostoru  $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ). *Fazni portret* je geometrijska predstavitev trajektorij v faznem prostoru. Vsak začetni pogoj v prostoru predstavlja neko krivuljo ali pa (singularno) točko. Pri kvalitativni analizi sistema je lahko fazni portret v veliko pomoč. Pozicijo na trajektoriji z začetnim pogojem  $\vec{x}_0 \in \mathcal{M}$  po času  $t$  označimo s  $F^t(\vec{x}_0)$  ali z  $\vec{x}(t; \vec{x}_0)$ . Formalno je trajektorija z začetnim pogojem  $\vec{x}_0 \in \mathcal{M}$  ob času  $t_0 \in \mathbb{T}$  množica točk  $\gamma_{\vec{x}_0} := \{F^t(\vec{x}_0); t \in \mathbb{T}, t \geq t_0\}$ . Pogosto pa jo označimo v poenostavljeni obliki:

$$\vec{x} = \vec{x}(t; \vec{x}_0) = F^t(\vec{x}_0).$$

Danes je splošno znano, da so lahko trajektorije (orbite)  $F^t(\vec{x}_0)$  v dinamičnem sistemu NDE v  $\mathbb{R}^3$  tudi za vektorska polja, ki na prvi pogled izgledajo dokaj preprosto; kot npr.

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = (-x_2 - x_3, x_1 + 0.2x_2, 0.2 + x_1x_3 - 5.7x_3),$$

zelo kompleksne. Kompleksnost lahko pomeni tudi kaotičnost [73]. Za diskretne sisteme vemo (glej npr. [94], [10], [62], [53], [61]), da se tako imenovana kaotična dinamika pojavi že pri preslikavah iz  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  oziroma iz  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . Najbolj znan primer je tako imenovana "šotorska" preslikava. V tej monografiji se bomo omejili na dinamične sisteme  $\vec{x}' = \mathbf{f}(\vec{x})$  oz.  $\vec{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\vec{x}_n)$ , kjer je  $\mathbf{f}$  gladka funkcija ( $\mathbf{f} \in C^\infty$ : poljubnokrat zvezno odvedljiva v vsaki komponenti), v razdelku 3.3 pa se omejimo na analitične funkcije.

Zvezni in diskretni sistemi se v osnovi razlikujejo glede na 'naravo časa'  $t \in \mathbb{T}$ . Če je  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  (oz. interval  $[\alpha, \omega] \subseteq \mathbb{R}$ ), je čas zvezen in govorimo o zveznem dinamičnem sistemu, če je  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$  (oz.  $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{N}_0$ ), govorimo o diskretnem dinamičnem sistemu. Pri pojmu zvezni sistem se bomo v tej monografiji omejili na sisteme diferencialnih enačb prvega reda,

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{f}(t, \vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.2)$$

Diskretni dinamični sistem je sistem oblike

$$\vec{x}_{k+1} = \mathbf{f}(k, \vec{x}_k), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

V tej monografiji bo  $n$  v večini primerov manjši ali enak dve. Zvezne in diskretne sisteme, kjer funkcija  $\mathbf{f}$  ni odvisna od časa, imenujemo avtonomni dinamični sistemi:

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{f}(\vec{x}) \quad \text{zvezni avtonomni dinamični sistem,} \quad (2.3)$$

$$\vec{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\vec{x}_k) \quad \text{diskretni avtonomni dinamični sistem.} \quad (2.4)$$

Če je funkcija  $\mathbf{f}$  gladka in veljajo Lipschitzovi pogoji (glej izrek 2.2.2 ali [61, str. 399]), so rešitve zveznega dinamičnega sistema enolično določene, kar nam zagotavlja izrek o obstoju in enoličnosti rešitve sistema NDE (izreka 2.2.1 in 2.2.2); glej tudi [61, str. 142]. To pomeni, da za vsak začetni pogoj  $\vec{x}_0 \in \mathcal{M}$  obstaja rešitev in je ena sama, oz. nobeni dve različni orbiti se ne sekata.

Pomemben tip dinamičnih sistemov (2.1) so linearni sistemi, kjer je funkcija  $\mathbf{f}$  linearna (glej npr. [61, Pogl. 5 in 6]). To so eni redkih dinamičnih sistemov, za katere lahko pridobimo eksplisitne rešitve (angl. closed form solutions) pri poljubnem začetnem pogojem. Ostali dinamični sistemi so nelinearni. Za nelinearne sisteme si lahko rešitveno krivuljo: trajektorijo - orbito

$\vec{x}(t; \vec{x}_0) = F^t(\vec{x}_0)$ , za katero vemo, da obstaja in je ena sama (glej izreka 2.2.1 in 2.2.2), pridobimo v obliki (numeričnega) približka in le redko v ekzaktni obliki, zato je v rešitvi vedno prisotna napaka.

Razlika v naravi časa prinese nekatere razlike med zveznimi in diskretnimi dinamičnimi sistemi. Ena od bistvenih razlik je enačba singularne točke, kar definiramo kasneje. Druga bistvena razlika pa je "pridobivanje rešitve" (enačbe trajektorije) pri danem začetnem pogoju  $t = t_0 \in \mathbb{R}$  ( $k = k_0 \in \mathbb{Z}$ ) oz. natančneje pridobivanje numeričnih približkov rešitev. Pri sistemih NDE večina raziskovalcev uporabi metodo Runge-Kutta [28]. Za diskretni sistem  $\vec{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\vec{x}_k)$  ni problem pridobiti natančne vrednosti za  $\vec{x}_{k+1}$ , če poznamo  $\vec{x}_k$ , vendar je (v razsežnostih  $n \geq 2$  in za nelinearne funkcije  $\mathbf{f}$ ) prav tako nemogoče dobiti eksplicitne rešitve (glej na primer [70, 71]).

Zato se pri analizi faznih portretov nelinearnih (zveznih in diskretnih) dinamičnih sistemov zadovoljimo s kvalitativno analizo sistema. V to rubriko spadajo različni pojavi, ki jih v grobem razdelimo na lokalne in globalne. Tako lahko govorimo na primer o lokalni in globalni stabilnosti in bifurkacijah (glej str. 123 in poglavje 3 ter [53, Pogl. 8-9 in 12]), itd.

V poljubnem dinamičnem sistemu (2.1) moramo najprej raziskati *singularne točke* (glej definiciji 2.2.4 in 2.3.5) in njihovo stabilnost (glej definicijo 2.2.6), v vseh drugih točkah je po izreku 2.2.5 dinamika lokalno "zelo monotona". V osnovi je singularna točka za vse dinamične sisteme (2.1) definirana v smislu negibne ali fiksne točke, vendar zaradi različne narave (zveznih in diskretnih) sistemov enačbe singularnih točk v zveznih in diskretnih sistemih ne sovpadajo.

V zvezi s singularnimi točkami je v ravninskem zveznem sistemu najpomembnejša analiza stabilnosti singularnih točk (glej definicijo 2.2.6) in bifurkacije limitnih ciklov (glej str. 131). V diskretnih sistemih so pomembne perturbacije singularnih točk in v splošnem periodičnih orbit v smislu definicije 2.3.7. Med kvalitativno analizo spadajo lokalne tehnike linearizacije, ki so smiselne (oz. zanesljive) samo v hiperboličnih singularnih točkah, kar opisuje Hartman-Grobmanov izrek (izrek 2.2.13). Vzporedno s tem se je razvila stabilnost sistema v širšem smislu, ki jo imenujemo strukturna stabilnost (glej npr. [53, str. 90]).

Strukturna stabilnost je ena od najlepših lastnosti, ki si jo za dinamični sistem lahko zamislimo. Poenostavljeno povedano pomeni, da se kvalitativne lastnosti rešitev (trajektorij oz. orbit) sistema ne spremenijo, če sistemu  $\dot{\vec{x}} = \mathbf{f}(\vec{x})$  dodajamo "dovolj majhne" funkcije  $\mathbf{g}(\vec{x})$ ; torej, če (za 'dovolj majhne'  $\varepsilon$ )  $\mathbf{f}(\vec{x})$  nadomestimo z  $\mathbf{f}(\vec{x}) + \varepsilon \cdot \mathbf{g}(\vec{x})$ . Strukturna nestabilnost pomeni bifurkacijo (glej tudi definicijo 2.3.7); grobo rečeno bistveno spremembo v stabilnosti oz. (topološki) strukturi trajektorij. Pri tem je seveda zelo pomembna (topološka) ekvivalenca vektorskih polj  $\mathbf{f}$ .

**Definicija 2.1.1 (Ohranjanje rešitev [53])** *Gladki vektorski polji  $\mathbf{f}$  in  $\mathbf{g}$  sta ekvivalentni glede toka  $F^t$  in  $G^t$  (t. j. glede množice parametrično podanih rešitev v faznem prostoru), če obstaja homeomorfizem  $\mathbf{h}$ , ki slika parametrično podane trajektorije sistema  $\dot{\vec{x}} = \mathbf{f}(\vec{x})$  v parametrično podane trajektorije sistema  $\dot{\vec{x}} = \mathbf{g}(\vec{x})$  in pri tem ohrani smisel parametra v obeh parametrizacijah. Če za vsak  $\vec{x}$  in za vsak  $t_1$  obstaja neki  $t_2$ , za katerega je*

$$\mathbf{h}(F^{t_1}(\vec{x})) = G^{t_2}(\mathbf{h}(\vec{x})),$$

*pravimo, da preslikava  $\mathbf{h}$  ohranja rešitve iz sistema  $\dot{\vec{x}} = \mathbf{f}(\vec{x})$  v sistem  $\dot{\vec{x}} = \mathbf{g}(\vec{x})$  in da sta ustrezna sistema ekvivalentna (oz. da sta vektorski polji topološko ekvivalentni).*

V smislu zgornje definicije je natančnejša opredelitev strukturne stabilnosti takšna.

**Definicija 2.1.2 (Strukturna stabilnost)** Vektorsko polje  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je strukturno stabilno, če za vsa dvakrat odvedljiva vektorska polja  $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  obstaja  $\varepsilon_0 > 0$ , pri katerem sta vektorski polji  $\mathbf{f}$  in  $\mathbf{f} + \varepsilon \cdot \mathbf{g}$  ekvivalentni za vse  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ .

Ideja o strukturni stabilnosti je postala zanimiva v 60. in 70. letih prejšnjega stoletja, ko so upali, da bo prostor sistemov NDE oz. vektorskih polj

$$\mathcal{F} = \{\mathbf{f} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}; \mathbf{f} \text{ je gladko polje}\}$$

mogoče enostavno razdeliti na območja, kjer je tok  $F^t(\vec{x})$  strukturno stabilen in na območja, kjer je tok strukturno nestabilen; pri čemer bi obe območji ločile hiperploskve sorazsežnosti 1, kar je za razsežnost 2 s popolnim opisom strukturno stabilnih vektorskih polj na kompaktnih mnogoterostih razsežnosti 2 (glej Peixotov izrek 2.1.3) tudi uspelo - ni pa prenosa v višje razsežnosti. Dokaz spodnjega izreka glej npr. v [53, str. 92]. Hiperbolična singularnost je definirana na strani 77, definicijo hiperboličnosti periodične orbite najdete npr. v [53, str. 91].

**Izrek 2.1.3 (Peixoto)** Naj bo  $D$  kompaktna dvorazsežna mnogoterost, ki je omejena s kompaktno enorazsežno mnogoterostjo  $\partial D$ , katere zunanja normala je  $\vec{n}$ , in naj bo  $\mathbf{f} : D \rightarrow D$  dvakrat odvedljivo vektorsko polje. Če je  $\mathbf{f} \cdot \vec{n} \neq 0$  na  $\partial D$ , je polje  $\mathbf{f}$  strukturno stabilno na  $D$  natanko tedaj, ko velja

1. vse singularne točke polja  $\mathbf{f}$  so hiperbolične,
2. vse periodične orbite (limitni cikli) so hiperbolične,
3. če sta  $\vec{x}$  in  $\vec{y}$  hiperbolični sedli (tudi za  $\vec{x} = \vec{y}$ ), je  $W^s(\vec{x}) \cap W^u(\vec{y}) = \emptyset$ .

V kontekstu kvalitativne obravnave ravninskega sistema (2.3) sta pomembna predvsem dva pristopa: prehod na polarne koordinate, ko v sistem vpeljemo

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (2.5)$$

in pa kompleksifikacija

$$z = x + iy, \quad (2.6)$$

ko ravninski sistem s koordinatami  $\vec{x} = (x, y)$  vložimo v kompleksno ravnino  $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$ ; glej enačbo (2.42). S stališča uporabe teorije polinomskih idealov sta pomembna oba pristopa (glej npr. [45, 50, 51, 52, 74, 106, 93, 92, 26] in predvsem monografijo [114] ter reference v njej). Dejansko vsak iz narave izhaja oč sistem vsebuje parametre in začetne pogoje, ki jih z nobenim merilnim inštrumentom ne moremo povsem natančno izmeriti, zato je obravnavani sistem NDE vedno le približek, oziroma idealizacija, ki bolj ali manj dobro opisuje obravnavano situacijo. Tako, da je poleg izbranega sistema  $\dot{\vec{x}} = \mathbf{f}(\vec{x})$  vedno dobro opazovati tudi "bližnje" sisteme

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{f}(\vec{x}) + \varepsilon \cdot \mathbf{g}(\vec{x}), \quad (2.7)$$

kjer je funkcija  $\mathbf{f}(\vec{x})$  dvakrat odvedljiva in  $\varepsilon > 0$ . Sistem (2.7) imenujemo *perturbacija* sistema (2.3). V fiziki je zelo pomembna družina hamiltonskih sistemov

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}}, \quad \dot{\mathbf{y}} = -\frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}}. \quad (2.8)$$

Perturbacija sistema (2.8) je sistem oblike

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} + \varepsilon \mathbf{g}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \dot{\mathbf{y}} &= -\frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}} + \varepsilon \mathbf{g}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}),\end{aligned}\quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (2.9)$$

Funkcijo  $H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  v sistemu (2.8) imenujemo Hamiltonova funkcija.

**Opomba 2.1.4** Fizikalno  $\mathbf{x}$  predstavlja vektor odmikov,  $\mathbf{y}$  pa vektor momentov in splošno je lahko  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ . Tako je fazni prostor sistema (2.8)  $2m$ -razsežen.

V spodnjem primeru obravnavamo kompleksifikacijo najpreprostejšega sistema (2.8).

**Primer 2.1.5** Sistem

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x$$

je hamiltonski s Hamiltonovo funkcijo  $H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ , saj očitno velja  $\dot{x} = \frac{\partial H(x, y)}{\partial y}$  in  $\dot{y} = -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x}$ . Kompleksifikacija tega sistema, upoštevajoč (2.6), je

$$\dot{z} = -iz. \quad (2.10)$$

Natančneje bo kompleksifikacija obravnavana na str. 93. Hitro opazimo, da lahko sistem (2.10) rešimo kot NDE v eni (kompleksni) spremenljivki (kjer tudi čas  $t$  obravnavamo kot kompleksno spremenljivko)

$$\frac{dz}{z} = -idt \Rightarrow z(t) = z_0 e^{-it} \Rightarrow \begin{aligned}x(t) &= x_0 \cos t + y_0 \sin t \\ y(t) &= -x_0 \sin t + y_0 \cos t.\end{aligned}$$

Splošnih ravninskih sistemov ne moremo tako preprosto rešiti, saj namesto (2.10) dobimo enačbo  $\frac{dz}{dt} = F(z, z^*)$  (glej tudi [7, 72, 94]) in moramo posledično skupaj z njo obravnavati še enačbo  $\frac{dz^*}{dt} = F^*(z, z^*)$  (glej [114, Pogl. 3.2]), a kompleksifikacija sistema je kljub temu zelo uporabna, saj je pogosto sisteme (in njim pripadajoče raznoterosti ter ideale) lažje obravnavati nad poljem  $\mathbb{C}$  (namesto nad  $\mathbb{R}$ ).

Posebej pomembni so dvorazsežni (torej ravninski) sistemi. Splošni ravninski avtonomni sistem NDE je oblike

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y).\end{aligned}\quad (2.11)$$

Periodična trajektorija (orbita) dinamičnega sistema (2.1) je vsaka sklenjena rešitev  $F^{t+T}(\vec{x}_0) = F^t(\vec{x}_0)$  za neki  $\vec{x}_0 \in \mathcal{M}$  in neki  $T \in \mathbb{T}$ .

**Definicija 2.1.6** ( $\omega$ -limitna množica[53]) *Množico*

$$\Omega(\vec{x}) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n; \exists(t_n), \text{ da } t_n \rightarrow \infty \text{ in } F^{t_n}(\vec{x}) \rightarrow \vec{y} \text{ ko } t \rightarrow \infty\}$$

imenujemo  $\omega$ -limitna množica trajektorije  $\vec{x}(t)$ .

**Definicija 2.1.7** ( $\alpha$ -limitna množica[53]) *Množico*

$$A(\vec{x}) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n; \exists(t_n), \text{ da } t_n \rightarrow -\infty \text{ in } F^{t_n}(\vec{x}) \rightarrow \vec{y} \text{ ko } t \rightarrow \infty\}$$

imenujemo  $\alpha$ -limitna množica trajektorije  $\vec{x}(t)$ .

**Definicija 2.1.8** (Limitni cikel[53]) *Vsaki nekonstantni izolirani periodični trejektoriji zveznega ravninskega sistema v fazni ravnini pripada cikel. Cikel, ki je limitna množica kake druge trajektorije, imenujemo limitni cikel*

Definicija limitnega cikla v diskretnem sistemu je podana na str. 125. Oglejmo si preprost primer limitnega cikla za sistem (2.11).

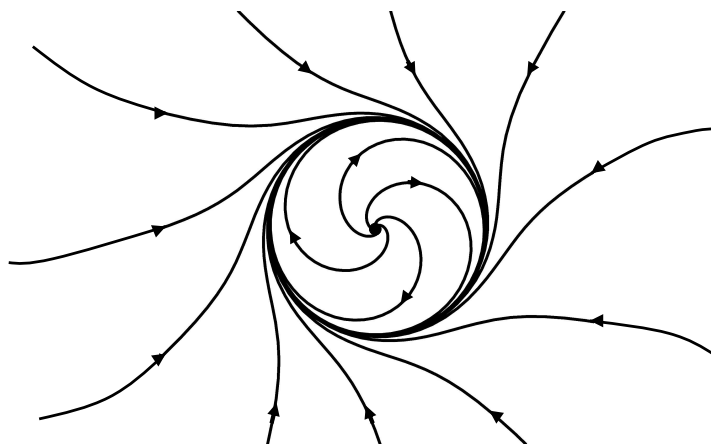
**Primer 2.1.9** (Limitni cikel) *Obravnavajmo ravninski sistem*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (1 - \sqrt{x^2 + y^2})x + y, \\ \dot{y} &= (1 - \sqrt{x^2 + y^2})y - x. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Očitno je točka  $x = 0, y = 0$  posebna v smislu, da začetni pogoj  $x(0) = 0, y(0) = 0$  implicira rešitev  $x(t) = 0, y(t) = 0$ . V nadaljevanju bomo tako (posebno) rešitev zveznega sistema imenovali singularna točka (glej definicijo 2.2.4 na str. 75). Trajektorija  $x^2 + y^2 = 1$  (v parametrični obliki  $x(t) = \sin t, y(t) = \cos t$ ) je limitni cikel v sistemu (2.12). To najlažje vidimo, če v zgornji sistem vpeljemo polarne koordinate (2.5), da sistem dobi obliko

$$\dot{r} = (1 - r)r, \quad \dot{\phi} = -1,$$

iz katere je razvidno, da je koordinatno izhodišče  $(0, 0)$  (oz.  $r = 0$ ) mirovna točka (singularnost), vse orbite v kolobarju  $0 < x^2 + y^2 < 1$  se v smeri urinega kazalca oddaljujejo od izhodišča in se spiralno bližajo edini (netrivialni) sklenjeni orbiti  $x^2 + y^2 = 1$  (limitnemu ciklu). Tudi ostale orbite so spiralne in se bližajo limitnemu ciklu, kar pomeni, da gre v tem primeru za privlačni limitni cikel. Fazni portret vidimo na sliki 2.1.



Slika 2.1: Limitni cikel.



V poglavju 3 bomo obravnavali bifurkacije limitnih ciklov (zveznih in diskretnih dinamičnih sistemov). Pripomnimo, da se bifurkacija lahko zgodi, če sistem (na neki način) perturbiramo. Torej je bifurkacija posebni (kritični) moment perturbacije. Najslavnejši primer bifurkacij v diskretnih sistemih opisuje (Feigenbaumov) bifurkacijski diagram za logistično preslikavo (glej [32]). Diskretna dinamika je lahko zelo zanimiva in kaotična tudi za preslikave iz  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  oz.  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , kar dokazujejo danes dobro znane Juliajeve množice (glej npr. [97]).

Pri zveznih sistemih je v kontekstu uporabe polinomskih idealov najpomembnejša Hopfova bifurkacija, ko (majhna) sprememba parametra(ov) povzroči nastanek limitnega cikla okrog singularne točke.

Limitni cikli in singularne točke so primeri tako imenovanih limitnih množic. Poincaré-Bendixonov izrek opiše limitne množice ravninskih sistemov.

**Izrek 2.1.10 (Poincaré-Bendixon)** *Neprazna, kompaktna limitna množica ravninskega sistema (2.11), ki ne vsebuje singularne točke, je limitni cikel.*

Poleg singularnih točk in limitnih ciklov lahko v zveznih ravninskih sistemih nastanejo še homoklinične orbite (ki potekajo od singularne točke do iste singularne točke) in pa heteroklinične orbite (ki potekajo med dvema singularnima točkama). Primera sistemov z omenjenimi orbitami bomo spoznali na koncu podrazdelka 2.2.1. V naslednjem primeru je obravnavana Hopfova bifurkacija, ki nastopi, če okoli kake singularne točke nastane ali izgine periodična orbita ali limitni cikel, ko spreminjamo vrednost nekega parametra. V ravninskem sistemu je to bifurkacija v okolici nehiperbolične singularne točke, katere linearizacijska matrika ima lastni vrednosti popolnoma imaginarni (t. j.  $\pm i\beta$ ). V  $n$ -razsežnem sistemu/prostoru govorimo o Hopfovi bifurkaciji; za primer, ko se to zgodi na dvorazsežni centralni mnogoterosti, glej podrazdelek 2.2.2.

**Primer 2.1.11 (Hopfova bifurkacija)** *Če v sistem (2.12) vpeljemo parameter  $\mu$  na naslednji način*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left( \mu - \sqrt{x^2 + y^2} \right) x + y, \\ \dot{y} &= \left( \mu - \sqrt{x^2 + y^2} \right) y - x \end{aligned} \quad (2.13)$$

*oziroma v polarnih koordinatah*

$$\dot{r} = (\mu - r)r, \quad \dot{\phi} = -1, \quad (2.14)$$

*dobimo sistem s parametrom, kar je potrební pogoj za nastanek bifurkacij. Iz (2.14) je razvidno, da je točka  $(0, 0)$  za nepozitivne vrednosti parametra  $\mu$  edina limitna množica (singularna točka). Za pozitivne vrednosti parametra  $\mu$  pa poleg singularne točke  $(0, 0)$  nastane še ena limitna množica. To je krožnica  $r = \mu = \sqrt{x^2 + y^2}$ .*

Za spremembe (bifurkacije) v faznem portretu, kot se zgodijo pri Hopfovi bifurkaciji, so dovolj že zelo majhne (minimalne) spremembe v vrednostih parametrov sistema. Bifurkacije limitnih ciklov obravnavamo v poglavju 3. V monografiji [87] so obdelane izključno bifurkacije limitnih ciklov.

Čeprav ravninski sistemi izgledajo zelo preprosto, smo (polarnemu pristopu navkljub) daleč od tega, da bi bilo na tem področju vse raziskano. Najbolj znan problem v dinamiki sistemov (2.11) je šestnajsti Hilbertov problem [63, 77]. Del problema sprašuje po tem, koliko limitnih ciklov (izoliranih periodičnih rešitev) lahko nastane (govorimo o bifurkacijah) iz centra ali fokusa,

če koeficiente sistema malo spreminjamo (kot v primeru 2.1.11), pri čemer mora sistem ohraniti obliko. V problemih, ki jih obravnavamo v poglavju 3, zahtevamo, da se sistemu ne spremeni maksimalna stopnja, kar imenujemo problem cikličnosti. Problem cikličnosti za polinomske sisteme še ni razrešen, čeprav so raziskave na tem področju zelo aktivne. Osnova za obravnavo cikličnosti je Bautinova teorija [6], ki je opisana na str. 131. Bistvo Bautinove teorije je, da lahko problem cikličnosti prevedemo na raziskovanje (sistemu) pripadajočega polinomskega ideala. Med pomembnejšimi referencami, kjer lahko najdete obsežno zbirko problemov in člankov, ki raziskujejo probleme povezane z dinamiko v 2D zveznih sistemih, omenimo monografijo [114]. Za osnovne namene je ravninska dinamika v zveznih sistemih nazorno opisana v večini knjig, ki obravnavajo dinamične sisteme (glej npr. [53, Pogl. 5], [61, Pogl. 2]).

## 2.2 Zvezni sistemi

Na strani 67 so definirani splošni dinamični sistemi (2.1) in splošni sistemi NDE (2.2)

$$\dot{\vec{x}}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \vec{x}(t)),$$

kjer je  $\mathbf{f}(t, \vec{x})$  vektorska funkcija (polje) spremenljivk  $t$  in  $\vec{x}$ , ki sta definirani na območju  $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  (ali  $D \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ ). Sistem (2.2) pogosto imenujemo kar enačba (v ustreznem vektorskem prostoru), saj je

$$\mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$$

vektorska funkcija:

$$\mathbf{f}(t, \vec{x}) = (f_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(t, x_1, \dots, x_n))^T,$$

in

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \text{ ter } \vec{x}' = \left( \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right)^T.$$

Naj bo  $I \subseteq \mathbb{R}$  odprt interval in naj bo funkcija  $\vec{x}(t)$  definirana za vse  $t \in I$ . Če (vektorska) funkcija  $\vec{x}(t)$  zadošča enačbi (2.2), jo imenujemo rešitev diferencialne enačbe (2.2). Potreben pogoj, da je  $\vec{x}(t)$  rešitev enačbe (2.2) je, da je za vsak  $t \in I$  točka  $(t, \vec{x}(t))$  vsebovana v  $D$ . Če je  $\vec{x}(t)$  rešitev enačbe (2.2), je njena restrikcija na poljuben interval  $J \subset I$  tudi rešitev enačbe (2.2). Če je  $I$  največji interval, na katerem  $\vec{x}(t)$  zadošča enačbi (2.2), rešitev  $\vec{x}(t)$  imenujemo *maksimalna* rešitev.

Obstoj rešitve enačbe (2.2) je odvisen od lastnosti vektorskega polja  $\mathbf{f}(t, \vec{x})$ . Dokaze naslednjih trditev lahko najdete npr. v [3] ali [61, str. 142].

**Trditev 2.2.1 (Obstoj rešitve)** Če so funkcije  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , zvezne na odprtem območju  $D' \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$  (oz.  $\mathbb{C}^n$ ) za vsako točko  $(t_0, \vec{x}_0) \in D'$ , obstaja rešitev  $\vec{x}(t)$ ,  $t \in I$ , enačbe (2.2), za katero za  $t_0 \in I$  velja  $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ .

Lahko se zgodi, da ima sistem/enačba (2.2) z začetnim pogojem  $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$  več kot eno rešitev. V spodnji trditvi so podani zadostni pogoji, da se to ne zgodi (t. j. da so rešitve enolične).

**Trditev 2.2.2 (Enoličnost rešitve)** Če so vektorska funkcija  $\mathbf{f}$  in njeni parcialni odvodi  $\partial \mathbf{f} / \partial x_i$  zvezno odvedljivi na nekem odprtem območju  $D' \subseteq D$  za vsak začetni pogoj  $(t_0, \vec{x}_0) \in D'$ , obstaja rešitev  $\vec{x}(t)$  sistema/enačbe (2.2), ki je z začetnim pogojem  $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$  enolično določena (je ena sama).

Kot že omenjeno, je geometrijski pomen rešitve (trajektorije / orbite)  $\vec{x} = \vec{x}(t, \vec{x}_0)$  sistema (2.2) v prostoru  $\mathcal{M} = D \subseteq \mathbb{R}^n$  (oz.  $\mathbb{C}^n$ ) graf funkcije  $\vec{x}(t) = F^t(\vec{x}_0)$ , ki predstavlja rešitveno krivuljo v faznem prostoru. Če je polje  $\mathbf{f}$  na območju  $D$  zvezno, rešitve sistema (2.2) po trditvi 2.2.1 napolnijo območje  $D$ , saj mora vsaka točka iz  $D$  ležati na vsaj eni rešitveni krivulji/trajektoriji. Rešitve sistema (2.2) torej prikažemo na območju  $D$  z družino trajektorij, kar smo v uvodu imenovali fazni portret. Pri predpostavkah trditve 2.2.2 se nobeni dve različni trajektoriji v faznem portretu ne sekata in trajektorije napolnijo prostor  $D$ . Rešitve sistema pri različnih začetnih pogojih  $\vec{x}_0$  sestavljajo tok sistema (angl. flow).

**Definicija 2.2.3 (Tok)** Z rešitvami sistema diferencialnih enačb (2.3) je definiran tok  $F^t(\vec{x}_0)$ . Funkcija  $F^t(\vec{x}_0)$  slika iz  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  v  $\mathbb{R}^n$ ; urejenemu paru  $(t, \vec{x}_0)$  priredi rešitev sistema  $\vec{x}' = \mathbf{f}(\vec{x})$  z začetnim pogojem  $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ . Torej velja:

$$\frac{d}{dt} F^t(\vec{x}_0) = \mathbf{f}(F^t(\vec{x}_0))$$

za vse čase  $t \in I_\omega$ , kjer  $I_\omega$  predstavlja interval, na katerem rešitev z začetnim pogojem v točki  $\vec{x}_0$  obstaja. Za vsak  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  in za vse čase  $t_1, t_2 \in I_\omega$  velja:

$$\begin{aligned} F^0(\vec{x}_0) &= \vec{x}_0, \\ F^{t_1+t_2}(\vec{x}_0) &= F^{t_2}(F^{t_1}(\vec{x}_0)). \end{aligned}$$

**Definicija 2.2.4 (Singularna točka)** Če za neko točko velja  $F^t(\vec{x}_0) = \vec{x}_0$  za vse  $t \in I_\omega$ , jo imenujemo singularna ali kritična točka. Očitno je singularna točka sistema  $\vec{x}' = \mathbf{f}(\vec{x})$  določena s sistemom enačb

$$\mathbf{f}(\vec{x}) = \vec{0}.$$

Točke, ki niso singularne, imenujemo regularne.

Na slikah 2.2 in 2.3 vidimo, da je lahko v okolici singularne točke v ravnini dinamika zelo različna. Kot vidimo v naslednjem izreku, je v regularnih točkah dinamika bolj monotona.

**Izrek 2.2.5 (Flow-Box)** Na dovolj majhni okolici regularne točke ravninskega sistema (2.11) obstaja odvedljiva funkcija  $\mathbf{h} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (glej definicijo 2.1.1), ki ohranja rešitve iz sistema (2.11) v sistem  $\dot{y}_1 = 0, \dot{y}_2 = 1$ .

**Definicija 2.2.6 (Stabilnost po Ljapunovu)** Singularna točka  $\vec{x}_0 = \vec{0}$  sistema  $\vec{x}' = \mathbf{f}(\vec{x})$  je stabilna natanko tedaj, ko za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja  $\delta > 0$  tako, da za vsak  $\vec{x}$  z normo manjšo od  $\delta$ , in za vsak  $t \in [t_0, \infty)$  velja

$$\|F^t(\vec{x})\| < \varepsilon.$$

**Definicija 2.2.7 (Privlačnost singularne točke)** Singularna točka  $\vec{x} = \vec{0}$  sistema  $\vec{x}' = \mathbf{f}(\vec{x})$  je privlačna natanko tedaj, ko obstaja  $\delta > 0$  tako, da za vsak  $\vec{x}_0$  z normo manjšo od  $\delta$  velja

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|F^t(\vec{x}_0)\| = 0.$$

**Definicija 2.2.8** Singularna točka  $\vec{x} = \vec{0}$  sistema  $\vec{x}' = f(\vec{x})$  je asimptotično stabilna, če je hkrati stabilna in privlačna.

Splošnih (neavtonomnih) sistemov (2.2) s teorijo polinomskih raznoterosti ne bomo obravnavali. Navkljub procesom, kot so avtonomizacija, homogenizacija in celo kvadratizacija (glej [90]) se bomo omejili na (nehomogene avtonomne) polinomske sisteme NDE - torej na enačbe (2.3), kjer čas  $t$  ne nastopa eksplicitno.

### 2.2.1 Linearizacija in fazni portreti

Linearizacijo običajno povezujemo s postopkom, ko nelinearnemu sistemu NDE (2.3) v okolici singularne točke priredimo njegov linearni približek s pomočjo Jacobijeve ali linearizacijske matrike in dobimo sistem (2.16). Tega ne smemo zamenjevati s pojmom linearizabilnosti (glej [33], [114, Pogl. 2 in 4], [112]). Kot bomo videli v tem razdelku, so z linearizacijo povezani Hartman-Grobmanov izrek ter izrek o stabilni/nestabilni mnogoterosti in izrek o centralni mnogoterosti. Linearizabilnost pa je povezana s Poincaréjevim linearizacijskim izrekom (glej npr. [53, Pogl. 4.1], [114, Pogl. 4]).

Homogen linearni sistem  $m$  navadnih diferencialnih enačb prvega reda lahko zapišemo v matrični obliki

$$\vec{x}' = A\vec{x}, \quad (2.15)$$

kjer je  $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$  in  $A \in \mathbb{R}^{(m,m)}$ . Sistemi oblike (2.15) so vedno rešljivi (njihovo rešitev pogosto označimo z  $\vec{x}(t, \vec{x}_0) = e^{tA}\vec{x}_0$ ). Njihova splošna rešitev je odvisna od Jordanove normalne oblike matrike  $A$ , kar je v tesni zvezi z obliko matrike  $e^{tA}$  (podrobnosti glej npr. v [53, Pogl. 3] ali [61, Pogl. 5]). V grobem lahko rečemo, da vsaki lastni vrednosti,  $\lambda$ , matrike  $A$  pripada neki vektorski podprostor,  $E_\lambda$ , vektorskega prostora  $\mathbb{R}^m$ , ki je za sistem (2.15) *invarianten*. To pomeni: če je  $\vec{x}_0 \in E_\lambda$ , je tok  $F_A^t(\vec{x}_0)$  v celoti (t. j. za vsak  $t \in I_\omega$ ) vsebovan v vektorskem podprostoru  $E_\lambda$ . Direktna vsota vseh invariantnih podprostorov  $E_{\lambda_i}$  (po vseh lastnih vrednostih  $\lambda_i$ ) sestavlja celoten prostor  $\mathbb{R}^m$ . Glede na različno lego lastnih vrednosti  $\lambda_i$  v kompleksni ravnini lahko invariantne podprostore  $E_{\lambda_i}$  ločimo v tri skupine. V ta namen razdelimo kompleksno ravnino  $\mathbb{C}$  na tri disjunktna dela

$$\begin{aligned} \Pi_- &= \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) < 0\}, \\ \Pi_0 &= \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) = 0\}, \\ \Pi_+ &= \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) > 0\}. \end{aligned}$$

Naj bo  $s + n + c = m$  in  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \in \Pi_-$  ter  $\lambda_{s+1}, \lambda_{s+2}, \dots, \lambda_{s+n} \in \Pi_+$  in  $\lambda_{s+n+1}, \lambda_{s+n+2}, \dots, \lambda_{s+n+c} \in \Pi_0$ . Zdaj lahko definiramo:

1. *stabilni invariantni podprostor* linearnega sistema (2.15) kot direktno vsoto

$$E^S = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_s},$$

2. *nestabilni invariantni podprostor* linearnega sistema (2.15) kot direktno vsoto

$$E^U = E_{\lambda_{s+1}} \oplus E_{\lambda_{s+2}} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_{s+n}}$$

in

3. *centralni invariantni podprostor* linearnega sistema (2.15) kot direktno vsoto

$$E^C = E_{\lambda_{n+1}} \oplus E_{\lambda_{n+2}} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_{n+c}}.$$

Vsaka rešitev  $F_A^t(\vec{x})$ , z začetnim pogojem  $\vec{x} \in E^S$ , se bo končala v izhodišču

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|F^t(\vec{x})\| = 0.$$

Vsaka rešitev  $F_A^t(\vec{x})$ , z začetnim pogojem  $\vec{x} \in E^U$  teži proti neskončnosti

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|F^t(\vec{x})\| = \infty.$$

Vsaka rešitev  $F_A^t(\vec{x})$ , z začetnim pogojem  $\vec{x} \in E^C$  je periodična. Torej obstaja (najmanjša) perioda  $T > 0$ , da je

$$F^{t+T}(\vec{x}) = F^t(\vec{x}) \text{ za vsak } t \geq 0.$$

Poleg tega pa velja

$$0 < \min_{t \in [0, T]} \|F^t(\vec{x})\| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \|F^t(\vec{x})\| \leq \max_{t \in [0, T]} \|F^t(\vec{x})\| < \infty.$$

**Definicija 2.2.9 (Linearizacija)** Linearizacija *nelinearnega avtonomnega sistema navadnih diferencialnih enačb (2.3) v okolici točke  $\vec{x}_0$*  je sistem linearnih diferencialnih enačb oblike

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{f}(\vec{x}_0) + J_{\mathbf{f}}(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0), \quad (2.16)$$

kjer je  $J_{\mathbf{f}}(\vec{x}_0)$  Jacobijeva matrika, ki je sestavljena iz parcialnih odvodov vektorske funkcije  $\mathbf{f}$ :

$$[J_{\mathbf{f}}(\vec{x}_0)]_{ij} = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}_i(\vec{x}_0)}{\partial x_j} \right].$$

Če je  $\vec{x}_0 = \vec{0}$  kritična točka sistema (2.3), je  $\mathbf{f}(\vec{x}_0) = \vec{0}$  in linearizacija (2.16) dobi obliko

$$\dot{\vec{x}} = J_{\mathbf{f}}(\vec{x}_0)\vec{x}. \quad (2.17)$$

Znano je, da v primeru, ko ima Jacobijeva matrika  $J_{\mathbf{f}}(\vec{x}_0)$  kako lastno vrednost s pozitivnim realnim delom, nelinearni sistem (2.3) v obravnavani kritični točki ni stabilen. Če ima Jacobijeva matrika  $J_{\mathbf{f}}(\vec{x}_0)$  iz (2.16) spekter v celoti vsebovan na negativni polravnini  $\Pi_-$ , je kritična točka  $\vec{x}_0$  stabilna. Zgornja dva primera opisujeta tako imenovan *izvor* oziroma *ponor* hiperbolične ali nedegenerirane kritične točke.

**Definicija 2.2.10 (Hiperbolična singularnost)** Kritična točka  $\vec{x}_0$  je hiperbolična, če Jacobijeva matrika  $J_{\mathbf{f}}(\vec{x}_0)$  lineariziranega sistema ne premore nobene lastne vrednosti z ničelnim realnim delom (niti nobene ničelne lastne vrednosti).

V splošnem ima lahko linearizacijska matrika  $J_{\mathbf{f}}(\vec{x}_0)$  iz (2.16), ki izhaja iz realnega sistema, v hiperbolični kritični točki pozitivne in negativne ter konjugirano kompleksne pare lastnih vrednosti (z neničelnim realnim delom).

**Definicija 2.2.11 (Sedlo)** Singularno (kritično) točko ravninskega linearnega sistema, ki ji pripadata različno predznačni (realni) lastni vrednosti, imenujemo sedlo.

**Definicija 2.2.12 (Vozel)** *Kritično točko ravninskega linearnega sistema, ki ji pripadata negativni (pozitivni) lastni vrednosti, imenujemo (ne)stabilni vozeli.*

V hiperboličnih kritičnih točkah obstaja obrnljiva preslikava, ki v bližini kritične točke tok nelinearnega sistema preslika v tok linearnega sistema. O tem govori naslednji izrek.

**Izrek 2.2.13 (Hartman-Grobman)** *Če je  $\vec{x} = \vec{0}$  hiperbolična kritična točka sistema (2.3), obstaja zvezna obrnljiva preslikava  $\mathbf{h}$ , definirana na neki okolici točke  $\vec{x} = \vec{0}$ , ki rešitve nelinearnega sistema  $\vec{x} = \mathbf{f}(\vec{x})$  slika v rešitve linearnega sistema (2.17). Preslikavo  $\mathbf{h}$  lahko izberemo tako, da sta parametrizaciji trajektorij v obeh sistemih usklajeni (koherentni).*

Dokaz Hartman-Grobman-ovega izreka najdete npr. v [14, 58, 65].

Posledica zgornjega izreka je, da lahko stabilnost nelinearnih sistemov v hiperboličnih kritičnih točkah  $\vec{x}_0$  obravnavamo preko spektra matrike  $J_{\mathbf{f}}(\vec{x}_0)$ . O stabilnih in nestabilnih invariantnih podprostorih v hiperboličnih kritičnih točkah lahko povemo še več. Če je  $\mathcal{U}$  neka okolica kritične točke  $\vec{x}_0$ , lahko definiramo analoga stabilnemu ( $W_{loc}^S(\vec{x}_0)$ ) in nestabilnemu ( $W_{loc}^U(\vec{x}_0)$ ) invariantnemu podprostoru v nelinearnih sistemih:

$$W_{loc}^S(\vec{x}_0) = \left\{ \vec{y} \in \mathcal{U}; F^t(\vec{y}) \subset \mathcal{U} \text{ in } \lim_{t \rightarrow \infty} F^t(\vec{y}) = \vec{x}_0 \right\},$$

$$W_{loc}^U(\vec{x}_0) = \left\{ \vec{y} \in \mathcal{U}; F^{-t}(\vec{y}) \subset \mathcal{U} \text{ in } \lim_{t \rightarrow -\infty} F^t(\vec{y}) = \vec{x}_0 \right\},$$

ki ju imenujemo lokalna stabilna in lokalna nestabilna mnogoterost v točki  $\vec{x}_0$ ,  $W_{loc}^S(\vec{x}_0)$  in  $W_{loc}^U(\vec{x}_0)$ . Zanju velja izrek o stabilni mnogoterosti (glej npr. [53, 14, 58, 65]). Nerešen problem ostajajo singularne točke, v katerih ima Jacobijeva matrika,  $J_{\mathbf{f}}(\vec{x}_0)$  v svojem spektru  $\sigma_{J_{\mathbf{f}}(\vec{x}_0)}$  kako lastno vrednost  $\lambda$ , za katero velja  $\text{Re}(\lambda) = 0$  (tudi  $\lambda = 0$ ). Takšne kritične točke imenujemo *nehiperbolične* ali *degenerirane*.

Naj bo (2.3) realni ravninski analitični sistem NDE in naj bo  $\mathbf{f}(\vec{0}) = \vec{0}$ . Torej (2.3) je oblike (2.11). Tedaj velja

**Definicija 2.2.14 (Center)** *Singularna točka  $\vec{0} = (0, 0)$  je center (ali središče), če obstaja taka okolica  $\mathcal{N}(\vec{0})$  točke  $\vec{0}$ , za katero je za vsak začetni pogoj  $\vec{x}_0 \in \mathcal{N}(\vec{0}) \setminus \vec{0}$  trajektorija  $\gamma_{\vec{x}_0}$  sklenjena krivulja, ki v svoji notranjosti vsebuje točko  $\vec{0}$ . Gre za neizolirane periodične orbite okrog singularnosti.*

**Primer 2.2.15** *Asimptotično stabilna singularna točka  $\vec{y}$  je  $\omega$ -limitna množica vsake točke na neki (dovolj majhni) okolici (bazenu privlačnosti)  $\mathcal{N}(\vec{y})$  in asimptotično nestabilna singularna točka  $\vec{y}^*$  je  $\alpha$ -limitna množica vsake točke na neki (dovolj majhni) okolici  $\mathcal{N}(\vec{y})$ . Za vsako singularno točko  $\vec{y}$  velja  $\vec{y} = \omega(\vec{y}) = \alpha(\vec{y})$ .*

Spomnimo se še primera 2.1.9, kjer je enotska krožnica

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$$

(stabilni) limitni cikel in vse rešive z neničelno začetno vrednostjo limitirajo proti (poljubni točki iz)  $\mathcal{C}$ . Zato je  $\omega$ -limitna množica poljubne neničelne točke  $(x, y) \neq (0, 0)$  enaka enotski krožnici  $\mathcal{C}$ .

**Definicija 2.2.16 (Fokus)** *Singularna točka  $\vec{0} = (0, 0)$  je stabilni fokus (ali gorišče), če obstaja taka okolica  $\mathcal{N}(\vec{0})$  točke  $\vec{0}$ , za katero je koordinatno izhodišče  $\omega$ -limitna množica vsake točke  $\vec{x}_0 \in \mathcal{N}(\vec{0})$  in za vsako trajektorijo  $\gamma_{\vec{x}_0}$ , z neničelnim začetnim pogojem za polarni kot  $\varphi = \varphi(t)$  velja  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \infty$  ali  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = -\infty$ . Singularna točka  $\vec{0} = (0, 0)$  je nestabilni fokus, če je stabilni fokus za sistem  $\dot{\vec{x}} = -\mathbf{f}(\vec{x})$  z "obrnjenim" časom. Singularna točka je fokus, če je bodisi stabilni fokus, bodisi nestabilni fokus.*

Pri dvorazsežnih (ravninskih) sistemih (2.11) s singularnostjo  $\vec{0} = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$  je za  $\mathbf{f} = (f, g)$  linearizacijska matrika

$$J_{\mathbf{f}}((0, 0)) = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

realna matrika razsežnosti  $2 \times 2$ , ki ji pripada natanko ena od spodnjih Jordanovih oblik  $J = P^{-1}AP$ . Glede na različne možnosti lastnih vrednosti matrike  $A$  in glede na lastne (in korenske) vektorje (ki določijo prehodno matriko  $P$ ) v grobem ločimo možnosti, ko sta lastni vrednosti  $\lambda_1$  in  $\lambda_2$  (različni) realni števili, ter ko sta lastni vrednosti kompleksni  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ . Posebej obravnavamo primera, ko je realna lastna vrednost dvojna ničla karakterističnega polinoma in (ne) obstaja korenski vektor:

$$(a) \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \lambda_1 > \lambda_2 \in \mathbb{R};$$

$$(b) \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}, \lambda_0 \in \mathbb{R};$$

$$(c) \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}, \lambda_0 \in \mathbb{R};$$

$$(d) \begin{bmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{bmatrix}, \beta > 0.$$

V primeru (d) obstaja tudi (prehodna) matrika  $M$ , s pomočjo katere lahko matriko  $A$  zapišemo v (realni toda ne diagonalni) obliki

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \tilde{J} = M^{-1}AM.$$

Glede na zgornje definicije lahko povzamemo kvalitativno obliko faznega portreta ravninskega sistema. V primeru, da je sistem linearen, t. j. oblike

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y, \quad \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y, \quad (2.19)$$

ima le-ta v izhodišču singularno točko in fazni portret je ekvivalenten enemu izmed naslednjih kvalitativnih tipov:

- (a) gre za sedlo, če je  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ ,
- (a,b,c) gre za vozle, če je  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$  (oz.  $\lambda_0 > 0$ ),

- (d) gre za fokus, če je  $\alpha \neq 0$ ,
- (d) gre za center, če je  $\alpha = 0$ ,

kjer sta  $\lambda_1$  in  $\lambda_2$  lastni vrednosti matrike koeficientov sistema (2.19).

Sedaj povzemimo nekaj lastnosti nelinearnih ravninskih sistemov. V primeru hiperbolične singularne točke je fazni portret nelinearnega sistema lokalno topološko ekvivalenten (homeomorfen) faznemu portretu svoje linearizacije (v obravnavani hiperbolični singularni točki). To nam zagotavlja Hartman-Grobmanov izrek. Za razliko od linearnih sistemov, so fazni portreti teh nelinearnih sistemov redko določeni z naravo singularne točke, saj je dinamika v vsaki nehiperbolični singularni točki odvisna od dodanih nelinearnih členov. Del faznega portreta nelinearnega sistema v okolici  $\mathcal{N}$  točke  $x_0$  se imenuje *restrikcija* faznega portreta na  $\mathcal{N}$ . Ko analiziramo nelinearne sisteme, pogosto obravnavamo restrikcijo *globalnega* faznega portreta na okolico točke  $x_0$ . Takšna restrikcija se imenuje *lokalni fazni portret* v  $x_0$ . Za enostavne linearne sisteme <sup>1</sup> je lokalni fazni portret kvalitativno ekvivalenten globalnemu faznemu portretu sistema. Nelinearni sistemi lahko imajo več kot eno singularno točko in pogosto lahko dobimo lokalne fazne portrete v vseh singularnih točkah. Kot smo že omenili, lokalni fazni portreti ne določajo vedno globalni fazni portret.

Če pogledamo obnašanje trajektorij nelinearnega ravninskega sistema v okolici singularne točke, opazimo, da lahko vsako singularno točko  $(a, b)$ , ki ni v izhodišču, premaknemo v izhodišče koordinatnega sistema z linearno transformacijo  $x \rightarrow x - a$ ,  $y \rightarrow y - b$ . Tako lahko brez izgube za splošnost obravnavamo nelinearni sistem s singularno točko v izhodišču, ki ga lahko zapišemo kot

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y + g_1(x, y), \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y + g_2(x, y),\end{aligned}\tag{2.20}$$

kjer  $[g_i(x, y)/r] \rightarrow 0$ , ko gre  $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ .

Hartman-Grobmanov izrek opiše lokalni fazni portret sistema (2.20) v okolici hiperboličnih singularnih točk in pove, da imata sistem (2.20) in njemu pripadajoči lineariziran sistem (2.19) hiperbolično singularno točko enakega tipa. Za *enostavne* <sup>2</sup> singularne točke lahko zapišemo izrek, ki je podoben Hartman-Grobmanovemu izreku in poveže fazni portret nelinearnega sistema v okolici elementarne singularne točke v  $(0, 0)$  s faznim portretom njegovega linearizacijskega sistema (glej. npr. [3, 35]).

**Izrek 2.2.17 (Linearizacijski izrek)** *Če je  $(0, 0)$  enostavna singularna točka sistema (2.20), sta v okolici izhodišča fazna portreta sistema (2.20) in njegovega linearizacijskega sistema enakega tipa, če ta singularna točka ni center.*

Bistvo linearizacijskega izreka je, da je center edini primer, pri katerem kvalitativna ekvivalenca nelinearnega sistema in njegovega pripadajočega lineariziranega sistema ne more biti določena iz lineariziranega sistema. V naslednjem podrazdelku bomo videli, da gre v tem primeru za tako imenovan problem centra in fokusa. Torej, če ima ravninski linearni sistem center v izhodišču, tedaj lahko ima ta sistem z dodanimi nelinearnimi členi bodisi center ali fokus v izhodišču.

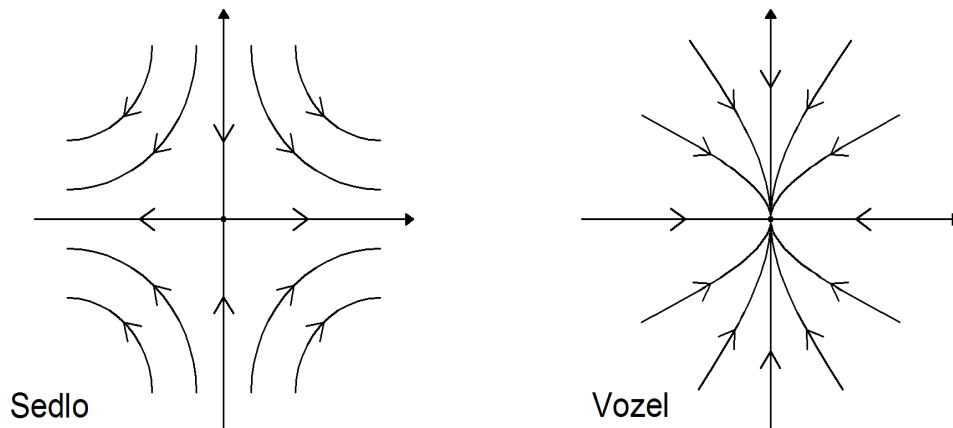
Na slikah 2.2 in 2.3 so prikazani fazni portreti nelinearnih sistemov, kjer v izhodišču nastopijo sedlo, nestabilni vozle, nestabilni fokus in center. Posebej je vozle (angl. node) lahko nestabilen

<sup>1</sup>Linearni sistem je enostaven, če je determinanta matrike koeficientov sistema različna od nič.

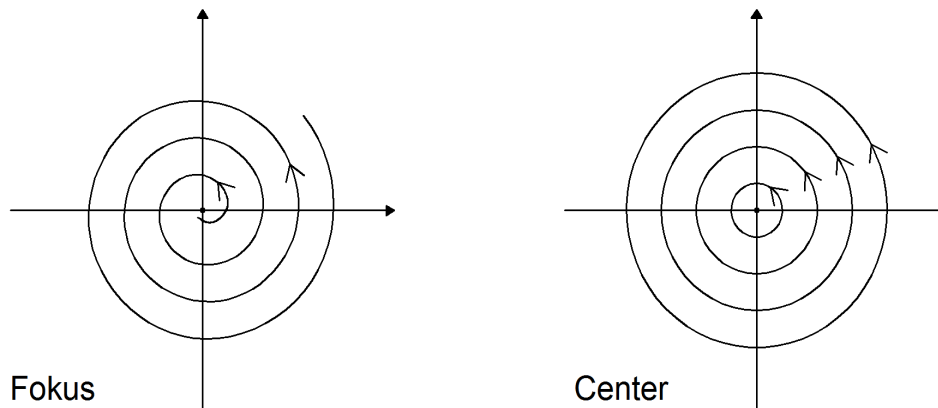
<sup>2</sup>Singularna točka sistema (2.20) je enostavna, če je linearizacija sistema (2.20) v okolici te singularne točke enostaven sistem. Sledi, da so poleg hiperboličnih singularnih točk enostavne še točke tipa center.



(izvor), če je (a)  $\lambda_2 > 0$  oz. (b,c)  $\lambda_0 > 0$ , stabilen (ponor), če je (a)  $\lambda_1 < 0$  oz. (b,c)  $\lambda_0 < 0$ . Tudi fokus (d) je lahko stabilen, če je  $\alpha < 0$  oz. nestabilen, če je  $\alpha > 0$ .

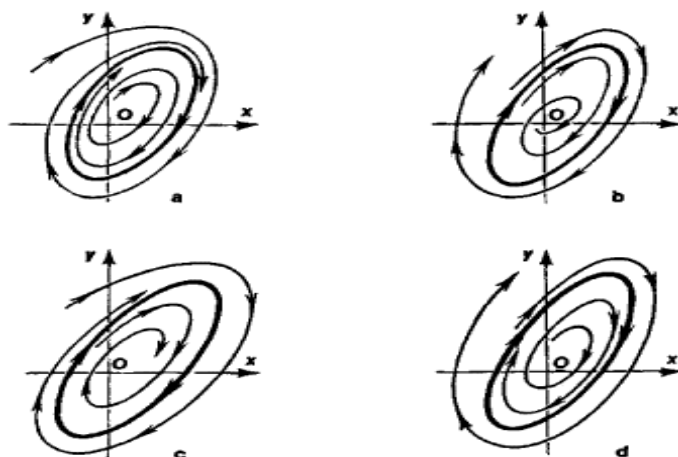


Slika 2.2: Sedlo in stabilni vozlel.



Slika 2.3: Nestabilni fokus in center.

Poleg singularnih točk so naslednji pomemben element za karakterizacijo faznih portretov avtonomnih sistemov navadnih diferencialnih enačb limitni cikli. Pojem limitnega cikla smo spoznali v definiciji 2.1.8. Limitni cikli različnih tipov so predstavljeni na sliki 2.4.



Slika 2.4: (a) stabilni limitni cikel, (b) nestabilni limitni cikel, (c)–(d) delno stabilni limitni cikel.

V splošnem med limitne množice uvrščamo singularne točke in zaprte orbite. Poincare - Bendixsonov izrek (izrek 2.1.10) nam poda odgovor na vprašanje, katere možnosti se lahko še pojavijo. Iz izreka 2.1.10 sledi, da če je zaprta trajektorija  $\mathcal{C}$  podmnožica  $\alpha$ - ( $A(\vec{x})$ ) ali  $\omega$ -limitne množice ( $\Omega(\vec{x})$ ) za neki  $\vec{x}$ , ki ne leži na  $\mathcal{C}$ , je  $\mathcal{C}$  limitni cikel.

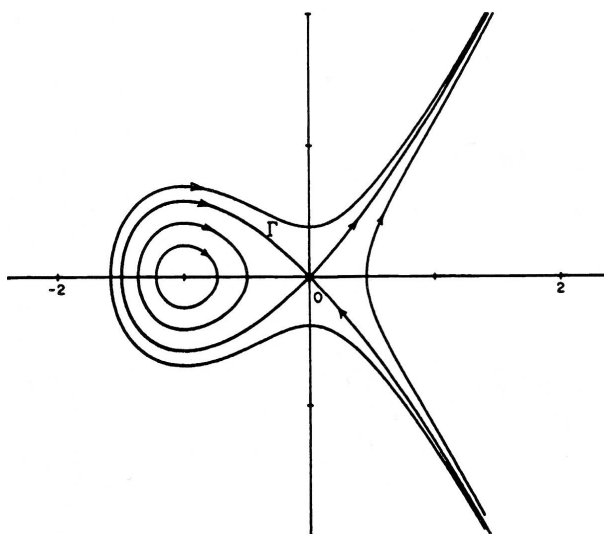
Že zgoraj smo omenili, da imajo lahko sistemi tudi homoklinične orbite (zanke) in heteroklinične orbite. Te orbite podajo primere *separatričnih ciklov* in t. i. *povezanih separatričnih ciklov* ravninskega dinamičnega sistema. Separatrični cikli so zaprte orbite, ki izhajajo iz povezave sedlo-sedlo. Na naslednjih dveh primerih (glej [98]) opišemo dve vrsti trajektorij. Sistem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x + x^2\end{aligned}$$

s prvim integralom  $H(x, y) = y^2/2 - x^2/2 - x^3/3$  ima trajektorije, ki ležijo na krivuljah, definiranih z

$$y^2 - x^2 - \frac{2}{3}x^3 = C.$$

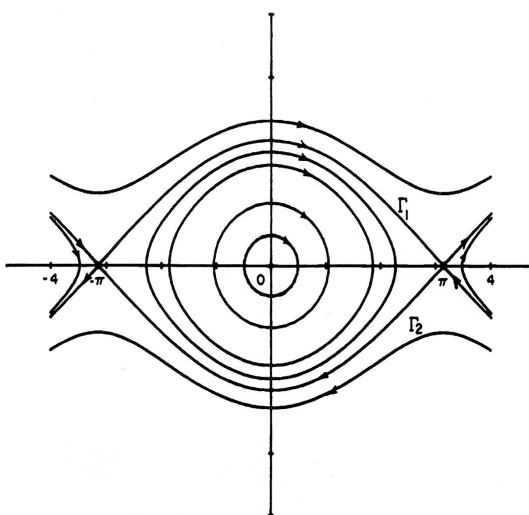
Fazni portret za ta sistem je prikazan na sliki 2.5. Krivulja  $y^2 - x^2 - 2x^3/3 = 0$  poteka skozi točko  $(-3/2, 0)$  in ima sedlo v izhodišču kot svojo  $\alpha$ - in  $\omega$ -limitno množico. Krivulja  $\Gamma$  se imenuje *homoklinična orbita* in tok na enostavni zaprti krivulji, določeni z unijo te homoklinične orbite in singularne točke se imenuje separatrični cikel.

Slika 2.5: Homoklinična orbita  $\Gamma$ , ki definira separatrični cikel.

Sedaj konstruirajmo fazni portret za nedušeno nihanje, ki je opisano s sistemom diferencialnih enačb

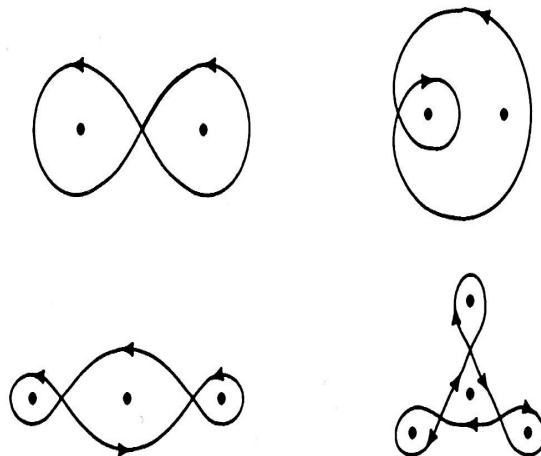
$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\sin x.\end{aligned}\tag{2.21}$$

Fazni portret sistema (2.21) je prikazan na sliki 2.6. Trajektorija  $\Gamma_1$ , ki ima v točki  $(-\pi, 0)$  sedlo kot svojo  $\alpha$ -limitno množico in prav tako sedlo v  $(\pi, 0)$  kot svojo  $\omega$ -limitno množico, se imenuje *heteroklinična orbita*. Trajektorija  $\Gamma_2$  je prav tako heteroklinična orbita. Tok na zaprti krivulji  $S = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{(\pi, 0)\} \cup \{(-\pi, 0)\}$  definira separatrični cikel in vsaka od krivulj  $\Gamma_1$  in  $\Gamma_2$  poda primer separatrične povezave.

Slika 2.6: Heteroklinični orbiti  $\Gamma_1$  in  $\Gamma_2$ , ki definirata separatrični cikel.

Končna unija kompatibilno orientiranih separatričnih ciklov se imenuje povezani separatrični

cikel. Nekaj primerov povezanih separatričnih ciklov je prikazanih na sliki 2.7. Znano je, da je za ravninske polinomske sisteme poljubna  $\omega$ - limitna množica bodisi singularna točka, bodisi limitni cikel ali pa separatrični cikel. Da določimo fazni portret nelinearnega sistema v ravnini, moramo določiti tip singularnih točk, najti limitne cikle, separatrične cikle in trajektorije, ki povezujejo singularne točke.



Slika 2.7: Primeri povezanih separatričnih ciklov.

### 2.2.2 Centralna mnogoterost

Centralna mnogoterost je invariantna mnogoterost, ki je lokalno (v obravnavani singularni točki) tangenta na linearni centralni invariantni podprostor. V primeru, ko obravnavana singularna točka ni hiperbolična, o stabilnosti odloča tok na centralni mnogoterosti, ki je odvisen od nelinearnih členov. O tem govori naslednji izrek.

**Izrek 2.2.18 (Centralna mnogoterost)** Naj bo koordinatno izhodišče kritična točka sistema (2.3) in  $E^S$ ,  $E^U$  ter  $E^C$  stabilni, nestabilni oziroma centralni invariantni podprostor linear(izira)nega sistema (2.17). Naj bo  $\mathbf{f} \in C^r$ . Tedaj obstajata  $C^r$  stabilna in nestabilna mnogoterost  $W^S(\vec{0})$  in  $W^U(\vec{0})$ , ki sta v točki  $\vec{x} = \vec{0}$  tangentni na  $E^S$  oziroma  $E^U$  in sta enakih razsežnosti kot  $E^S$  oziroma  $E^U$ . Obstaja tudi  $C^{r-1}$  centralna mnogoterost  $W^C(\vec{0})$ . Vse tri mnogoterosti  $W_{loc}^S(\vec{0})$ ,  $W_{loc}^U(\vec{0})$  in  $W_{loc}^C(\vec{0})$  so invariantne, toda slednja ni nujno enolično določena.

Ogejmo si tehniko eksplcitnega določanja enačbe centralne mnogoterosti, ki po izreku o centralni mnogoterosti vedno obstaja.

Sistem (2.3), kjer je  $\mathbf{f}$  vsaj  $C^1$  funkcija in  $\mathbf{f}(\vec{0}) = \vec{0}$ , lahko zapišemo v obliki

$$\dot{\vec{w}} = \mathbf{J}\vec{w} + \mathbf{F}(\vec{w}),$$

kjer je  $\mathbf{F}(\vec{w})$  zvezno odvedljiva vektorska funkcija ( $\mathbf{F} \in C^1$ ) in  $\mathbf{J}$  Jordanova forma matrike  $D\mathbf{f}(\vec{0})$ . Velja  $\mathbf{J} = \text{diag}[\mathbf{C}, \mathbf{S}, \mathbf{U}]$ , kjer so matrike  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{U}$  kvadratne diagonalne matrike v invariantnih podprostorih  $E^C$ ,  $E^S$  ter  $E^U$  (torej matrika  $\mathbf{C}$  ima  $c$  lastnih vrednosti z ničelnim realnim delom, matrika  $\mathbf{S}$  ima  $s$  lastnih vrednosti s pozitivnim realnim delom in matrika  $\mathbf{U}$  ima

$u$  lastnih vrednosti z negativnim realnim delom). Sistem (2.3) lahko torej zapišemo v (bločni diagonalni) obliki:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}} &= \mathbf{C}\vec{x} + \mathbf{F}_1(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}), \\ \dot{\vec{y}} &= \mathbf{S}\vec{y} + \mathbf{F}_2(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}), \\ \dot{\vec{z}} &= \mathbf{U}\vec{z} + \mathbf{F}_3(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}).\end{aligned}\tag{2.22}$$

Tok na  $W^S$  ( $W^U$ ) je očitno usmerjen proti (od) kritični(e) točki(e), tako da o lokalnem obnašanju odloča (pod)sistem  $\dot{\vec{x}} = \mathbf{C}\vec{x} + \mathbf{F}_1(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ . Zanimivo je obravnavati primere, ko je  $W^U = \emptyset$ , kjer lahko enačbe (2.22) zapišemo v koordinatah  $\vec{x} \in E^C$ ,  $\vec{y} \in E^S$ :

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}} &= \mathbf{C}\vec{x} + \mathbf{F}_1(\vec{x}, \vec{y}), \\ \dot{\vec{y}} &= \mathbf{S}\vec{y} + \mathbf{F}_2(\vec{x}, \vec{y})\end{aligned}\tag{2.23}$$

in imajo vse lastne vrednosti matrike  $\mathbf{C}$  ničelni realni del, vse lastne vrednosti matrike  $\mathbf{S}$  so negativne, funkciji  $\mathbf{F}_1$  in  $\mathbf{F}_2$  pa predstavljata (strogo) nelinearne člene (reda 2 in višje člene v sistemu). To pomeni, da sta v točki  $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{0}, \vec{0})$  obe funkciji  $\mathbf{F}_1$  in  $\mathbf{F}_2$  in vsi njuni prvi parcialni odvodi ničelni.

Ker je mnogoterost  $W^C$  tangentna na  $E^C = \{(\vec{x}, \vec{y}); \vec{y} = \vec{0}\}$ , jo lahko lokalno predstavimo kot graf v odvisnosti od spremenljivke  $\vec{x}$ :

$$W^C = \left\{ (\vec{x}, \vec{y}); \vec{y} = \mathbf{h}(\vec{x}), \mathbf{h}(\vec{0}) = \vec{0} \text{ in } D\mathbf{h}(\vec{0}) = \vec{0} \right\},$$

kjer je  $\mathbf{h} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{\dim(E^S)}$  definirana na neki okolici  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{\dim(E^C)}$  točke  $\vec{0}$ ,  $D\mathbf{h}$  pa je Jacobijeva matrika preslikave  $\mathbf{h}$

$$[D\mathbf{h}]_{ij} = \left[ \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right].$$

Torej je na  $W^C$  aproksimacija toka (projicirana v podprostor  $E^C$ ) določena z enačbo

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{C}\vec{x} + \mathbf{F}_1(\vec{x}, \mathbf{h}(\vec{x})).$$

Sedaj moramo poiskati  $\mathbf{h}(\vec{x})$ . Privzemimo, da lahko  $\mathbf{h}(\vec{x})$  v okolici kritične točke  $\vec{x} = \vec{0}$  razvijemo v Taylorjevo vrsto. Tedaj moramo upoštevati pogoja

$$\mathbf{h}(\vec{0}) = D\mathbf{h}(\vec{0}) = \vec{0},$$

ki zagotavljata, da je  $W^C$  v točki  $\vec{x} = \vec{0}$  tangenten na  $E^C$  (t. j.  $\vec{y} = \vec{0}$ ). Zaporedne člene v razvoju funkcije  $\mathbf{h}$  dobimo, če časovni odvod funkcije  $\vec{y} = \mathbf{h}(\vec{x})$  enačimo s časovnim odvodom iz enačbe (2.23):

$$\begin{aligned}\dot{\vec{y}} &= D\mathbf{h}(\vec{x}) \cdot \dot{\vec{x}} = D\mathbf{h}(\vec{x}) \cdot [\mathbf{C}\vec{x} + \mathbf{F}_1(\vec{x}, \mathbf{h}(\vec{x}))], \\ \dot{\vec{y}} &= \mathbf{S}\mathbf{h}(\vec{x}) + \mathbf{F}_2(\vec{x}, \mathbf{h}(\vec{x})).\end{aligned}$$

Od tod sledi enačba

$$\begin{aligned}D\mathbf{h}(\vec{x}) \cdot [\mathbf{C}\vec{x} + \mathbf{F}_1(\vec{x}, \mathbf{h}(\vec{x}))] &= \mathbf{S}\mathbf{h}(\vec{x}) + \mathbf{F}_2(\vec{x}, \mathbf{h}(\vec{x})), \\ \mathbf{h}(\vec{0}) = D\mathbf{h}(\vec{0}) &= \vec{0},\end{aligned}\tag{2.24}$$

ki jo imenujemo enačba centralne mnogoterosti, iz katere je koeficiente funkcije  $\vec{y} = \mathbf{h}(\vec{x})$  pri razvoju v Taylorjevo vrsto okrog točke  $\vec{x} = \vec{0}$  mogoče določiti do natančnosti, ki je navzgor omejena z gladkostjo funkcije  $\mathbf{f}$ .

**Primer 2.2.19** Primer sistema (2.23) za  $c = 2$  in  $s = 1$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 y - x_1 x_2^2, \\ \dot{x}_2 &= x_2 y - x_2 x_1^2, \\ \dot{y} &= -y + x_1^2 + x_2^2,\end{aligned}\tag{2.25}$$

kjer je  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{S} = [-1]$  in  $\mathbf{F}_1(\vec{x}, y) = \begin{pmatrix} x_1 y - x_1 x_2^2 \\ x_2 y - x_2 x_1^2 \end{pmatrix}$  ter  $\mathbf{F}_2(\vec{x}, y) = -y + x_1^2 + x_2^2$ . Če postavimo

$$\mathbf{h}(\vec{x}) = ax_1^2 + bx_1 x_2 + cx_2^2 + O(|\vec{x}|^3),$$

je

$$D\mathbf{h}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 2ax_1^2 + bx_2 \\ bx_1 + 2cx_2 \end{bmatrix} + O(|\vec{x}|^2).$$

Ko zgornja izraza vstavimo v (2.24), sledi

$$\begin{aligned}0 &= (2ax_1^2 + bx_2) [x_1 (ax_1^2 + bx_1 x_2 + cx_2^2) - x_1 x_2^2] + \\ &+ (bx_1 + 2cx_2) [x_2 (ax_1^2 + bx_1 x_2 + cx_2^2) - x_2 x_1^2] + \\ &+ (ax_1^2 + bx_1 x_2 + cx_2^2) - (x_1^2 + x_2^2) + O(|\vec{x}|^3)\end{aligned}$$

Po enačenju istoležnih koeficientov sledi  $a = 1$ ,  $b = 0$  in  $c = 1$ , zato je

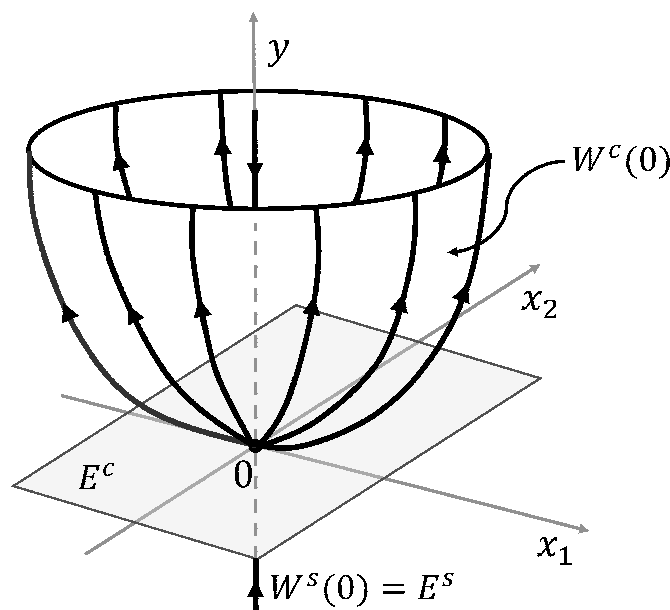
$$\mathbf{h}(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + O(|\vec{x}|^3).$$

Ko ta rezultat upoštevamo v (2.25), dobimo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 (x_1^2 + x_2^2) - x_1 x_2^2 + O(|\vec{x}|^4) = x_1^3 + O(|\vec{x}|^4), \\ \dot{x}_2 &= x_2 (x_1^2 + x_2^2) - x_2 x_1^2 + O(|\vec{x}|^4) = x_2^3 + O(|\vec{x}|^4).\end{aligned}$$

Lokalni fazni portret na (lokalni) centralni mnogoterosti je prikazan na sliki 2.8.

Kot smo že omenili, centralna mnogoterost ni enolična, vendar je za zgornji primer na vseh centralnih mnogoterostih, ki so določene z enačbo (2.24), tok ekvivalenten toku, ki je prikazan na sliki 2.3. Centralna mnogoterost torej omogoča redukcijo stabilnostne analize originalnega sistema NDE, ki nastopa v višji razsežnosti, na stabilnostno analizo sistema NDE v nižji razsežnosti. Klasični problem stabilnosti z redukcijo na centralno mnogoterost je prvi obravnaval Ljapunov [80]. Pliss [99] je leta 1964 nadgradil znanje o (ne)stabilni mnogoterosti in centralni mnogoterosti in obravnaval sistem (2.23), kjer je  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  in  $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ . Normi vektorjev  $\|\mathbf{F}_1\|$  in  $\|\mathbf{F}_2\|$  pa sta v primerjavi z  $\|\vec{x}\|$  in  $\|\vec{y}\|$  zelo majhni. Pliss [103] je dokazal, da za tak sistem invariantna mnogoterost  $\vec{y} = \mathbf{h}(\vec{x})$  obstaja in da se obravnava stabilnosti sistema (2.23) lahko zreducira na obravnavo sistema (2.24), kar imenujemo Plissov redukcijski princip. Plissov redukcijski princip je na neavtonomne sisteme NDE posplošil Aulbach [4], na neskončnorazsežne sisteme Likova [85], na diferencialne enačbe pa Janglajewa [66].



Slika 2.8: Nestabilna centralna mnogoterost na paraboloidu.

V naslednjem razdelku med drugim na kratko opišemo problem centra v  $\mathbb{R}^3$ . V tretjem poglavju pa obravnavamo družino kvadratnih trirazsežnih sistemov navadnih diferencialnih enačb in zanj podamo pogoje za nastop centra na centralni mnogoterosti. Za sisteme, ki imajo center na centralni mnogoterosti, podamo eksplicitno enačbo centralne mnogoterosti in z njeno pomočjo reduciramo tok trirazsežnega sistema na njegovo centralno mnogoterost ter s tem dobimo ustrezen dvorazsežni sistem.

### 2.2.3 Problem centra in fokusa v $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$

Problem centra in fokusa v  $\mathbb{R}^3$  spada med pomembnejše probleme (zveznih) dinamičnih sistemov. Zaradi Plisovega redukcijskega principa se problem lokalno prevede na dvorazsežno mnogoterost. V fiziki in tehniki nastopa veliko sistemov v  $\mathbb{R}^3$  (npr. Rikitake sistem [104] za magnetno polje ali Hide-Acheson dinamo [60], Moon-Rand sistem [95] za kontrolo prilagodljivih prostorskih struktur), ki imajo singularno točko, v kateri ima linearni del eno negativno in dve čisti imaginarni lastni vrednosti ter so zato oblike

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -v + P(u, v, w) = \tilde{P}(u, v, w), \\ \dot{v} &= u + Q(u, v, w) = \tilde{Q}(u, v, w), \\ \dot{w} &= -\lambda w + R(u, v, w) = \tilde{R}(u, v, w),\end{aligned}\tag{2.26}$$

kjer je  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  pa so analitične funkcije brez konstantnih in linearnih členov. Po izreku 2.2.18 ima sistem (2.26) centralno mnogoterost oblike

$$w = h(u, v).$$

Ker je sistem (2.26) analitičen za vsak naravni  $r \in \mathbb{N}$ , obstaja  $C^r$  invariantna mnogoterost  $W^C$ , ki je v izhodišču tangentna na ravnino  $(u, v)$ . Sistemi (2.26) imajo centralno mnogoterost

$W^C(\vec{0})$ . Ker je  $\lambda > 0$ , se rešitve blizu singularne točke  $\vec{0} \in W^C(\vec{0})$  z naraščanjem časa bližajo centralni mnogoterosti  $W^C(\vec{0})$ . Neznano je samo, kaj se dogaja na sami centralni mnogoterosti, saj je v okolici izhodišča stabilnost (in s tem fazni portret) sistema (2.26) odvisna od “dodanih” nelinearnih členov  $P, Q, R$  in lahko nastopi bodisi center bodisi fokus, kar imenujemo *problem centra in fokusa*. Naštejmo le nekaj člankov, ki se ukvarjajo s problemom centra in fokusa v  $\mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{R}^2$  [16, 17, 18, 24, 29, 112, 118, 46, 108]. Če nas torej zanima obnašanje trajektorij na centralni mnogoterosti sistema (2.26), lahko najdemo prvih nekaj členov Taylorjeve vrste mnogoterosti, ki jo iščemo v obliki  $w = a_1u + a_2v + \dots$ . Nato jo vstavimo v prvi dve enačbi sistema (2.26) in študiramo problem centra in fokusa za dobljen dvorazsežni sistem. Kakorkoli, za računsko bolj učinkovit način poskrbi naslednji izrek, katerega dokaz najdemo v [8, § 13]. Preden ga zapišemo, potrebujemo pomembno definicijo, ki je motivirana z geometrijsko obravnavo v tem poglavju.

Kot običajno naj  $\mathbb{C}[\mathbf{x}] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  označuje kolobar polinomov s kompleksnimi koeficienti v spremenljivkah  $x_1, \dots, x_n$ . Podan je sistem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}(\mathbf{x}), \quad (2.27)$$

kjer je  $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = (P_1(\mathbf{x}), \dots, P_n(\mathbf{x}))$ ;  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  (ali  $\mathbb{C}^n$ ),  $n$ -razsežen sistem navadnih diferencialnih enačb.

Polinomsko vektorsko polje v  $\mathbb{C}^n$ , ki ustreza sistemu (2.27), je definirano kot

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^n P_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (2.28)$$

kjer polinomi  $P_i(x) \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$  nimajo nobenega skupnega faktorja za  $i = 1, \dots, n$ . Celó število  $m = \max\{\text{st}(P_1), \dots, \text{st}(P_n)\}$  je stopnja vektorskega polja  $\mathcal{X}$ .

**Definicija 2.2.20** Naj bo  $\Omega$  odprta podmnožica množice  $\mathbb{R}^n$  (ali  $\mathbb{C}^n$ ). Prvi integral gladkega in analitičnega sistema diferencialnih enačb (2.27) je nekonstantna odvedljiva funkcija  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , ki je konstantna na trajektorijah, t. j.  $\Phi(\mathbf{x}(t))$  je konstantna za vse vrednosti  $t$ , za katere je rešitev  $\mathbf{x}(t)$  definirana in vsebovana v podmnožici  $\Omega$ . Formalni prvi integral je formalna potenčna vrsta v  $\mathbf{x}$ , katere koeficienti niso vsi ničelni in ki, če jo členoma odvajamo, zadošča  $\frac{d}{dt}[\Phi(\mathbf{x}(t))] \equiv 0$  na  $\Omega$ .

Opazimo, da je nekonstantna odvedljiva funkcija (ali formalna potenčna vrsta)  $\Phi$  prvi integral (ali formalni prvi integral) sistema natanko tedaj, ko je

$$\mathcal{X}\Phi = P_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \dots + P_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \equiv 0 \quad \text{na } \Omega.$$

Poglejmo sedaj, kako je geometrijska slika trajektorij v okolici singularne točke tipa center v prostoru  $\mathbb{R}^3$  povezana z obstojem analitičnega prvega integrala.

**Izrek 2.2.21 (Ljapunov izrek o centru)** Koordinatno izhodišče sistema (2.26) z vektorskim poljem

$$\mathcal{X} := \tilde{P} \frac{\partial}{\partial u} + \tilde{Q} \frac{\partial}{\partial v} + \tilde{R} \frac{\partial}{\partial w} \quad (2.29)$$

je center na mnogoterosti  $\mathcal{X}|W^C$  natanko tedaj, ko vektorsko polje  $\mathcal{X}$  v okolici izhodišča  $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$  premore realni lokalni analitični prvi integral oblike

$$\Phi(u, v, w) = u^2 + v^2 + \sum_{j+k+l \geq 3} \varphi_{jkl} \cdot u^j v^k w^l. \quad (2.30)$$



V primeru, ko na centralni mnogoterosti obstaja center, je lokalna centralna mnogoterost  $W^C$  analitična in enolična.

Če uporabimo zgornji izrek, iščemo pogoje za obstoj funkcije  $\Phi = \Phi(u, v, w)$  z neznanimi koeficienti  $\varphi_{jkl}$ , za katero velja

$$\tilde{P} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \tilde{Q} \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \tilde{R} \frac{\partial \Phi}{\partial w} \equiv 0. \quad (2.31)$$

Iz zgornje (parcialne diferencialne) enačbe sledijo polinomski pogoji, ki za dani sistem (2.26) odločajo o potrebnih pogojih za nastop centra na centralni mnogoterosti  $\mathcal{X}|W^C$ . Na ta način bomo v tretjem poglavju poiskali pogoje za center na centralni raznoterosti trirazsežnega sistema oblike (2.26), kjer so  $P$ ,  $Q$  in  $R$  kvadratni polinomi.

Seveda, če v (2.26) postavimo  $w = 0$  (in  $\tilde{R} = 0$ ), imamo problem centra in fokusa v  $\mathbb{R}^2$ , ki je že sam po sebi zelo pomemben problem (glej npr. [36, 46, 108]). V osnovi je bil ravninski problem centra in fokusa obravnavan za sisteme oblike

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \alpha u - \beta v + \sum_{i+j=2}^{\infty} \alpha_{ij} u^i v^j = \alpha u - \beta v + \hat{P}(u, v), \\ \dot{v} &= \beta u + \alpha v + \sum_{i+j=2}^{\infty} \beta_{ij} u^i v^j = \beta u + \alpha v + \hat{Q}(u, v), \end{aligned} \quad (2.32)$$

kjer so  $\alpha, \beta, \alpha_{ij}, \beta_{ij}$  realni parametri sistema. Sistem (2.32) premore center v izhodišču natanko tedaj, ko je  $\alpha = 0$  in obstaja prvi integral oblike

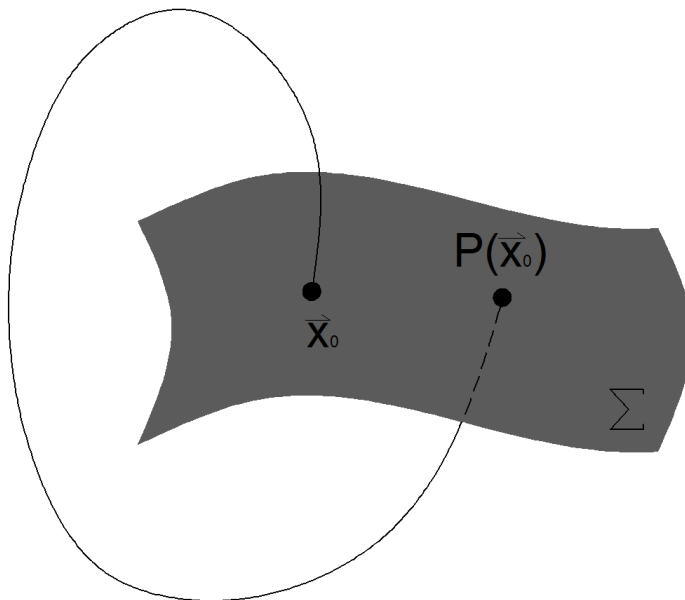
$$\Phi(u, v) = u^2 + v^2 + \sum_{k+l \geq 3} \varphi_{kl} \cdot u^k v^l. \quad (2.33)$$

To je tako imenovani izrek Poincaré-Ljapunova (glej izrek 2.2.27). Izrek pove, da je kvalitativna slika trajektorij v okolici singularne točke povezana z lokalno integrabilnostjo sistema: singularna točka je center natanko tedaj, ko obstaja analitični prvi integral oblike (2.33). Ta rezultat je najprej dokazal Poincaré ([100]) za primer, ko sta  $\hat{P}$  in  $\hat{Q}$  polinoma. Ljapunov ([80]) je posplošil ta rezultat na primer, ko sta  $\hat{P}$  in  $\hat{Q}$  realni analitični funkciji. Prav tako se da dokazati, da obstaja analitični prvi integral oblike (2.33) natanko tedaj, ko obstaja formalni prvi integral sistema (2.32), ki je oblike (2.33). Izrek Poincaré-Ljapunov pa ne poda odgovora na vprašanje, kako preveriti, če za dan sistem diferencialnih enačb obstaja prvi integral oblike (2.33). Odgovor na to vprašanje mora biti poiskan za vsak sistem posebej in do sedaj nimamo neke univerzalne metode, ki bi omogočila odgovoriti na to vprašanje za poljubni sistem (2.32). Zato obstaja odprt problem, kako identificirati sisteme s centrom znotraj podane parametrične družine ravninskih polinomskih sistemov navadnih diferencialnih enačb. To je podobno kot za trirazsežne sisteme zgoraj tako imenovani problem centra in fokusa ali (Poincaréjev) problem centra. Zaenkrat je problem centra v celoti razrešen samo za sisteme (2.32) z dodanimi kvadratnimi členi (glej [34]), z dodanimi homogenimi kubičnimi členi (glej [86]), za nekatere poddružine z dodanimi homogenimi členi reda 5 (glej [15]), za tako imenovan Kuklesov sistem (glej [84]) in za kubični sistem Kolmogorova [82, 52, 114].

V nadaljevanju si bomo ogledali nekaj pristopov, s katerimi lahko obravnavamo (Poincaréjev) problem centra. Najprej si pogledjmo tako imenovano Poincaréjevo preslikavo (angl. return map) in z njo povezano Poincaréjevo sečno ploskev (angl. Poincaré section). Poincaréjava (povratna) preslikava  $\mathcal{P} : \Sigma \rightarrow \Sigma$  elementu  $\vec{x}_0 \in \Sigma \subset \mathcal{M}$ , ki je ob času  $t_0$  na Poincaréjevi sečni ploskvi ( $\vec{x}_0 \in \Sigma$ ), priredi

$$\mathcal{P}(\vec{x}_0) = F^{\tau(t_0)}(\vec{x}_0) \in \Sigma,$$

kjer je  $T = \tau(t_0)$  prvi čas  $T > t_0$ , pri katerem rešitev  $F^t(\vec{x}_0)$  (ponovno) preseka sečno ploskev  $\Sigma$ . Poincaréjeva sečna ploskev [28, str. 48]  $\Sigma$  je  $(n-1)$ -razsežna (množica) hiperploskev vložena v prostor  $\mathcal{M}$  (glej sliko 2.9). V nadaljevanju želimo eksplicitno izraziti Poincaréjevo (povratno)



Slika 2.9: Poincaréjeva sečna ploskev.

preslikavo za sisteme (2.32). V ta namen označimo

$$\sum_{i+j=2}^{\infty} \alpha_{ij} u^i v^j = \widehat{P}(u, v) = \sum_{k=2}^{\infty} P^{(k)}(u, v),$$

$$\sum_{i+j=2}^{\infty} \beta_{ij} u^i v^j = \widehat{Q}(u, v) = \sum_{k=2}^{\infty} Q^{(k)}(u, v),$$

kjer so  $P^{(k)}(u, v)$  in  $Q^{(k)}(u, v)$  homogeni polinomi stopnje  $k$  in vpeljimo v (2.32) polarne koordinate (2.5). Potem sistem (2.32) dobi obliko

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \alpha r + \widehat{P}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cos \varphi + \widehat{Q}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sin \varphi \\ \dot{\varphi} &= \beta - r^{-1} \left( \widehat{P}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sin \varphi - \widehat{Q}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cos \varphi \right) \end{aligned}$$

oz. po deljenju zgornjih enačb

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\alpha r + r^2 F(r \sin \varphi, r \cos \varphi)}{\beta + r G(r \sin \varphi, r \cos \varphi)} = R(r, \varphi). \quad (2.34)$$

Funkcija  $R(r, \varphi)$  v (2.34) je glede na spremenljivko  $\varphi$  periodična s periodo  $2\pi$  in za  $|r| < r^*$  (za neki dovolj majhnen  $r^*$ ) analitična (za vsak  $\varphi$ ). Ker je izhodišče singularnost sistema (2.32), je

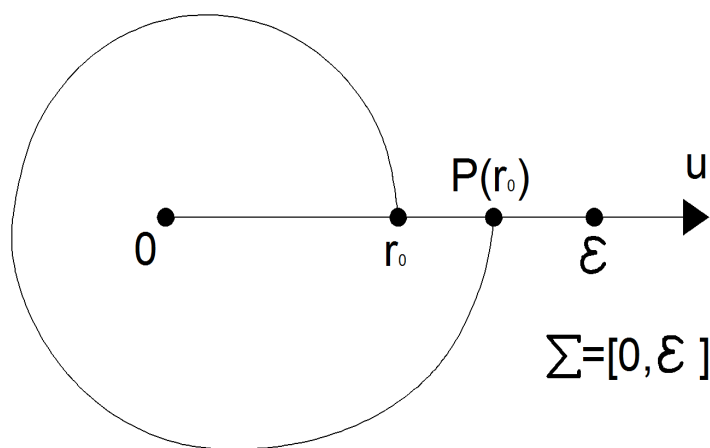
$r = 0$  (singularna) rešitev enačbe (2.34), saj je  $R(0, \varphi) \equiv 0$ . Zato je razvoj  $R(r, \varphi)$  v potenčno vrsto okoli  $r = 0$  takšen:

$$R(r, \varphi) = R_0(\varphi) + rR_1(\varphi) + r^2R_2(\varphi) + \dots,$$

kjer je očitno  $R_0(\varphi) = 0$  in  $R_1(\varphi) = \frac{\alpha}{\beta}$ , vse druge funkcije  $R_k(\varphi)$  so periodične s periodo  $2\pi$  in zgornja vrsta je konvergentna (za vse  $\varphi$ —je in dovolj majhne  $r$ —je). Označimo z  $r = f(\varphi, \varphi_0, r_0)$  rešitev enačbe (2.34) z začetnim pogojem  $r = r_0$  in  $\varphi = \varphi_0$ . Funkcija  $f$  je analitična v vseh treh spremenljivkah in velja  $f(\varphi, \varphi_0, 0) \equiv 0$ , saj je  $r = 0$  rešitev enačbe (2.34). Zato (zaradi zvezne odvisnosti rešitev (2.34) od parametrov) rešitev enačbe (2.34) za dovolj majhne vrednosti  $r$  za vsak  $\varphi = c$ ,  $0 \leq c < 2\pi$  preseka žarek  $\varphi = c$ . To pomeni, da lahko brez izgube za splošnost vzamemo  $c = \varphi_0 = 0$  in obravnavamo t. i. Poincaréjevo sečno premico

$$\Sigma = \{(u, v); v = 0, 0 \leq u \leq r^*\} \quad (2.35)$$

(za neki dovolj majhen  $r^*$ ) oz. rešitve  $r = f(\varphi, 0, r_0)$  (glej sliko 2.10). Funkcijo  $f(\varphi, 0, r_0)$  lahko



Slika 2.10: Poincaréjeva sečna premica.

razvijemo (za dovolj majhne  $|r_0| < r^*$ ) v konvergentno vrsto

$$f(\varphi, 0, r_0) = w_1(\varphi)r_0 + w_2(\varphi)r_0^2 + \dots \quad (2.36)$$

Ker je (2.36) rešitev enačbe (2.34), sledi

$$\begin{aligned} w_1(\varphi)r_0 + w_2(\varphi)r_0^2 + \dots &\equiv R_1(\varphi)(w_1(\varphi)r_0 + w_2(\varphi)r_0^2 + \dots) + \\ &+ R_2(\varphi)(w_1(\varphi)r_0 + w_2(\varphi)r_0^2 + \dots)^2 + \\ &+ R_3(\varphi)(w_1(\varphi)r_0 + w_2(\varphi)r_0^2 + \dots)^3 + \dots \end{aligned}$$

Za dovolj majhne vrednosti  $r_0$  po enačenju istoležnih koeficientov pri  $r_0^k$  za  $w_1(\varphi)$ ,  $w_2(\varphi)$ , ...

sledi zaporedje diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= R_1(\varphi) w_1, \\ \dot{w}_2 &= R_1(\varphi) w_2 + R_2(\varphi) w_1^2, \\ \dot{w}_3 &= R_1(\varphi) w_3 + 2R_2(\varphi) w_1 w_2 + R_3(\varphi) w_1^3, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.37}$$

Začetni pogoj  $r = f(0, 0, r_0) = r_0$  pomeni

$$w_1(0) = 1, \quad w_j(0) = 0 \text{ za } j > 1. \tag{2.38}$$

Upoštevajoč začetne pogoje (2.38), lahko rešimo sistem (2.37) NDE za  $w_1, w_2, \dots$ . Očitno je

$$w_1(\varphi) = e^{\frac{\alpha}{\beta}\varphi}.$$

Vse ostale rešitve  $w_k = w_k(\varphi)$  za  $k > 2$  dobimo kot rešitve linearnih NDE prvega reda. Ko v rešitev  $r = f(\varphi, 0, r_0)$  vstavimo  $\varphi = 2\pi$ , dobimo vrednost, kjer rešitev prvič (naslednjič) preseka Poincaréjevo sečno premico (2.35). Sedaj lahko ekzaktno definiramo Poincaréjevo (povratno) preslikavo za sisteme (2.32).

**Definicija 2.2.22** *Za izbran sistem oblike (2.32) velja:*

a) *funkcijo (definirano za vse  $|r_0| < r^*$ )*

$$\mathcal{P}(r_0) = f(2\pi, 0, r_0) = \tilde{\eta}_1 r_0 + \eta_2 r_0^2 + \eta_3 r_0^3 + \dots,$$

*kjer je  $\tilde{\eta}_1 = w_1(2\pi)$  in za vse  $k > 2$  je  $\eta_k = w_k(2\pi)$ , imenujemo Poincaréjeva (povratna) preslikava,*

b) *funkcijo*

$$\mathcal{D}(r_0) = \mathcal{P}(r_0) - r_0 = \eta_1 r_0 + \eta_2 r_0^2 + \eta_3 r_0^3 + \dots \tag{2.39}$$

*imenujemo diferenčna funkcija ali funkcija razlike,*

c) *koeficient  $\eta_k$  za  $k \in \mathbb{N}$  imenujemo  $k$ -ti Ljapunov koeficient.*

Prvi Ljapunov koeficient je enak

$$\eta_1 = e^{\frac{2\pi\alpha}{\beta}} - 1.$$

Iz geometrijskih razlogov je očitno, da je prvi neničelni koeficient v (2.39) nujno lihe stopnje  $\eta_{2k+1} \neq 0$ . Če je diferenčna funkcija  $\mathcal{D}(r) \equiv 0$ , so vse trajektorije sistema (2.32) ovalne in izhodišče je center. Izoliranim ničlam diferenčne funkcije  $\mathcal{D}(r) = 0$  pripadajo limitni cikli. Če poznamo Ljapunove količine nekega sistema (2.32), lahko odločimo, ali je v izhodišču center ali fokus, kot govori naslednji izrek.

**Izrek 2.2.23** *Sistem (2.32) ima v izhodišču center natanko tedaj, ko so vse Ljapunove količine ničelne. V nasprotnem primeru je v izhodišču fokus in velja bodisi  $\eta_1 \neq 0$  bodisi za neki  $k \in \mathbb{N}$  velja*

$$\eta_1 = 0, \eta_2 = 0, \dots, \eta_{2k} = 0 \text{ in } \eta_{2k+1} \neq 0. \tag{2.40}$$

*Ce je  $\eta_1 < 0$  oz.  $\eta_{2k+1} < 0$ , gre za stabilni fokus, sicer (če je  $\eta_1 > 0$  oz.  $\eta_{2k+1} > 0$ ) gre za nestabilni fokus.*

Kot smo videli na sliki 2.3, so v tem primeru trajektorije spirale, ki vodijo k oz. od singularne točke. Dokaz izreka 2.2.23 je v [114, Izrek 3.1.5]. Iz  $w_1(\varphi) = e^{\frac{\alpha}{\beta}\varphi}$  in iz zgornjega izreka sledi, da je za  $\alpha < 0$  ( $\alpha > 0$ ) fokus stabilen (nestabilen). Če (2.40) velja za  $k > 0$ , se fokus v izhodišču imenuje *šibki fokus reda k*. Torej šibki fokus nastopi v sistemih (2.32) z  $\alpha = 0$ , kar pomeni, da je izhodišče nehiperbolična singularna točka.

#### 2.2.4 Fokusne količine, Bautinov ideal in centralna raznoterost

Kljub temu, da ideal definiran z Ljapunovimi količinami oz. njemu pripadajoča raznoterost, ki izhaja iz (originalnega) realnega sistema (2.41) predstavlja potrebne pogoje za nastop centra, običajno uporabljamo kompleksifikacijo sistema, saj je kompleksne raznoterosti v več pogledih lažje obravnavati.

Obravnavali bomo sistem (2.32) za  $\alpha = 0$  (da se izognemo fokusu) in vpeljali skrčitev/razteg časa  $t \rightarrow \frac{1}{\beta}\tau$ . Dodani nelinearni členi bodo polinomi stopnje največ  $n$  (torej vsoti na desni strani v (2.32) sta končni). Če odvoda po  $\tau$  označimo z  $u'$  in  $v'$ , iz (2.32) sledi

$$\begin{aligned} u' &= -v + \widehat{P}(u, v), \\ v' &= u + \widehat{Q}(u, v), \end{aligned} \quad (2.41)$$

kjer je  $st(\widehat{P}) \leq n$  in  $st(\widehat{Q}) \leq n$ . V sistem (2.41) vpeljemo kompleksne koordinate (2.6), da dobimo

$$\dot{x} = R(x, \bar{x}). \quad (2.42)$$

Zgornji sistem naravno nastopa s svojim konjugiranim parom

$$\dot{\bar{x}} = \overline{R(x, \bar{x})}.$$

Če namesto kompleksne konjugacije  $\bar{x}$  vpeljemo novo (neodvisno) spremenljivko  $y$  (t.j.  $\bar{x} \rightarrow y$ ) in, če v tem smislu posplošimo tudi funkcijo  $\overline{R}$ , iz obeh delov enačb sledi kompleksni sistem

$$\begin{aligned} x' &= i \left( x - \sum_{p+q=1}^{n-1} a_{pq} x^{p+1} y^q \right) = ix - \widetilde{P}(x, y), \\ y' &= -i \left( y - \sum_{p+q=1}^{n-1} b_{qp} x^q y^{p+1} \right) = -iy + \widetilde{Q}(x, y). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Očitno lahko s ponovno spremembo časa  $t = i\tau$  sistem preoblikujemo na

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - \sum_{p+q=1}^{n-1} a_{pq} x^{p+1} y^q = x - P(x, y), \\ \dot{y} &= -y + \sum_{p+q=1}^{n-1} b_{qp} x^q y^{p+1} = -y + Q(x, y). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Če sledimo teoriji [34] in izreku Poincaré-Ljapunova, lahko razširimo koncept centra na kompleksne sisteme oblike (2.43).

**Definicija 2.2.24** *Obravnavamo sistem (2.43), kjer sta  $\widetilde{P}$  in  $\widetilde{Q}$  kompleksni vrsti brez konstantnih in linearnih členov v okolici izhodišča. Tedaj ima sistem (2.43) center v izhodišču, če ima formalni prvi integral oblike*

$$\Psi(x, y) = xy + \sum_{j+k \geq 3} v_{jk} x^j y^k. \quad (2.45)$$

Če v (2.43)  $\tilde{P}$  in  $\tilde{Q}$  zadoščata pogoju  $\tilde{Q}(x, \bar{x}) = \overline{\tilde{P}(x, \bar{x})}$ , imenujemo sistem (2.43) *kompleksifikacija* realnega sistema (2.41) in realni sistem je lahko dobljen z zamenjavo  $y$  z  $\bar{x}$ . Poudariti pa je potrebno, da je bistvo definicije 2.2.24, da ima realni sistem (2.41) center v  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$  natanko tedaj, ko ima njegova kompleksifikacija (2.43) center v izhodišču  $\mathbb{C}^2$ .

Prvi integral,  $\Psi(x, y)$ , sistema (2.43) je definiran s parcialno diferencialno enačbo

$$D\Psi := \mathcal{X}\Psi = (ix - \tilde{P}(x, y)) \cdot \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} + (-iy + \tilde{Q}(x, y)) \cdot \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} \equiv 0.$$

V praksi iščemo prvi integral  $\Psi$  v obliki vrste (formalni prvi integral) in obravnavamo približek reda  $2N + 1$  (za dovolj velik  $N$ )

$$\Psi_{2N+1}(x, y) = xy + \sum_{k+j=3}^{2N+1} v_{j-1, k-1} \cdot x^j y^k$$

in na vsakem koraku  $i = 3, 4, \dots, 2N + 1$  enačimo vse koeficiente reda  $i$  v enačbi  $D\Psi_{2N+1} = 0$  z nič. Pri tem na vsakem koraku dobimo sistem linearnih enačb z neznankami  $v_{j,k}$ . Izkaže se, da imajo tako dobljeni linearni sistemi za lihe  $i = 2\ell - 1$  vedno enolične rešitve, ki jih sproti upoštevamo v nadaljnjem postopku, medtem ko za sode  $i = 2\ell$  dobimo vedno eno enačbo več kot je na tem koraku neznank oz. natančneje: ena neznanka v enačbah ne nastopa. Enačba, kjer  $v_{j,k}$  ne nastopa, je vedno pri koeficientu oblike  $x^\ell y^\ell$ , ki ga označimo z  $g_{\ell-1, \ell-1}$ . Koeficient  $g_{\ell-1, \ell-1}$  je polinom, v katerem nastopajo izključno parametri sistema (2.43), ki jih označimo z  $(a, b)$ , kjer  $a$  in  $b$  razumemo kot vektorja, ki pripadata koeficientom v polinomih  $\tilde{P}$  oz.  $\tilde{Q}$ . Torej imamo na  $2\ell$ -tem koraku enačbo

$$D\Psi_{2N+1} = g_{11}(a, b) \cdot (xy)^2 + g_{22}(a, b) \cdot (xy)^3 + \dots + g_{\ell-1, \ell-1}(a, b) \cdot (xy)^\ell + \dots,$$

za celotni približek  $\Psi_{2N+1}$  pa sledi

$$D\Psi_{2N+1} = g_{11}(a, b) \cdot (xy)^2 + \dots + g_{\ell-1, \ell-1}(a, b) \cdot (xy)^\ell + \dots + g_{2N-1, 2N-1}(a, b) \cdot (xy)^N.$$

V splošnem za  $D\Psi$  dobimo izraz

$$D\Psi = g_{11}(a, b) \cdot (xy)^2 + \dots + g_{\ell-1, \ell-1}(a, b) \cdot (xy)^\ell + \dots, \quad (2.46)$$

ki ga enačimo z nič (za vsak par  $x, y \in \mathbb{C}$ ), kar pomeni, da morajo za obstoj prvega integrala biti vsi polinomi  $g_{11}(a, b)$ ,  $g_{22}(a, b)$ ,  $\dots$  ničelni. Prvi integral ne obstaja vedno (lahko gre za fokus), kljub temu pa lahko totalnemu odvodu  $D\Psi = \Psi_x \tilde{P} + \Psi_y \tilde{Q}$  vedno priredimo desno stran enačbe (2.46) in definiramo dvoje.

**Definicija 2.2.25 (Fokusne količine)** Polinome  $g_{kk} \in \mathbb{C}[a, b]$ , ki so definirani v enačbi (2.46), imenujemo *fokusne količine*. Natančneje:  $g_{kk}$  je  $k$ -ta fokusna količina sistema (2.43).

**Definicija 2.2.26 (Bautinov ideal)** Ideal, določen s fokusnimi količinami  $g_{kk} \in \mathbb{C}[a, b]$ ,

$$\mathcal{B} = \langle g_{11}, g_{22}, \dots, g_{kk}, \dots \rangle \subset \mathbb{C}[a, b],$$

imenujemo *Bautinov ideal*, njemu pripadajočo raznoterost  $V_{\mathcal{C}} = \mathbf{V}(\mathcal{B})$  pa imenujemo *centralna raznoterost singularne točke sistema (2.43)*.

S pomočjo teorije zgoraj lahko center sistema (2.41) okarakteriziramo bodisi z Ljapunovimi količinami, bodisi z obstojem prvega integrala, ali pa s fokusnimi količinami njegove kompleksifikacije. Naslednji izrek je verzija Poincaré-Ljapunovega izreka (glej npr. [114, Izrek 3.2.9]).

**Izrek 2.2.27** *Naslednje trditve so ekvivalentne:*

- sistem (2.41) ima center v izhodišču,
- vse Ljapunove količine  $\eta_k$  so ničelne,
- (originalni realni) sistem (2.41) ima formalni prvi integral oblike (2.33).
- (pripadajoči kompleksni) sistem (2.43) ima formalni prvi integral oblike (2.45),
- vse fokusne količine  $g_{kk}$  so ničelne.

Ko obravnavamo problem centra za kompleksne sisteme oblike (2.43), si lahko pomagamo z naslednjo trditvijo (glej [114] za dokaz).

**Trditev 2.2.28** *Centralna raznoterost sistema (2.44) sovpada s centralno raznoterostjo sistema (2.43).*

Na podlagi te trditve lahko namesto sistema (2.43) obravnavamo sistem (2.44). Razlika je samo, da v prvem primeru fokusne količine vsebujejo multiplikativni faktor  $i$  in v drugem primeru ga ne. Ker nas pa zanima samo raznoterost, ki jo definirajo fokusne količine, torej njihove ničle, je prisotnost ali odsotnost takšnega neničelnega faktorja v njih nepomembna.

Za sisteme (2.44) navedimo tudi naslednjo opombo, ki poda zvezo med formalnim prvim integralom in analitičnim prvim integralom sistema (2.44) (glej [114, posledica 3.2.6]).

**Opomba 2.2.29** *Kompleksni sistem (2.44) ima formalni prvi integral oblike (2.45) natanko tedaj, ko ima analitični prvi integral oblike (2.45).*

Izrek 2.2.27 med drugim tudi pove, da rešiti problem centra je ekvivalentno kot najti centralno raznoterost. Ideal, generiran s prvimi  $k$  fokusnimi količinami,  $\langle g_{11}, g_{22}, \dots, g_{kk} \rangle$ , označimo z  $\mathcal{B}_k$ . V praksi operiramo samo z ideali  $\mathcal{B}_k$ , saj lahko za večino sistemov, kljub obsežni teoriji o fokusnih količinah (glej [114, Pogl. 3]) in kljub naprednim algoritmom za izračunavanje fokusnih količin (glej npr. [111, 112]), eksplicitno izračunamo samo prvih nekaj fokusnih količin. Potem uporabimo teorijo iz poglavja 1. Spomnimo, da je veriga idealov  $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \dots \subset \mathcal{B}_k \subset \dots$  naraščajoča in ima po Hilbertovem izreku o bazi vsak polinomski ideal končno generirano bazo, kar pomeni, da obstaja takšen  $K$ , da ideal  $\mathcal{B} = \langle g_{11}, g_{22}, \dots \rangle$  zadošča enakosti

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_K = \langle g_{11}, g_{22}, \dots, g_{KK} \rangle. \quad (2.47)$$

V bistvu je enakost (2.47) prestroga zahteva za nastop centra v izhodišču: ker nas zanima samo raznoterost ideala in ne ideal sam, je po trditvi 1.4.8 dovolj, če najdemo tak  $K$ , da je  $\sqrt{\mathcal{B}} = \sqrt{\mathcal{B}_K}$ . Da bi torej našli centralno raznoterost podane družine polinomskih sistemov (2.43), lahko uporabimo sledeč pristop. Izračunamo prvih nekaj fokusnih količin in vzamemo prvo, ki je različna od nič, recimo  $g_u$ , ter tvorimo množico  $I = \{g_u\}$ . Nato vzamemo naslednjo neničelno fokusno količino,  $g_{l+1, l+1}$ , in jo reduciramo po modulu  $g_u$ , da dobimo  $\tilde{g}_{l+1, l+1}$ . Z uporabo rešitve pripadnosti korenu (glej poglavje 1) preverimo, če je  $\tilde{g}_{l+1, l+1} \in \sqrt{\langle g_u \rangle}$ . Če polinom  $\tilde{g}_{l+1, l+1}$  ni

element korena  $\sqrt{\langle gu \rangle}$ , ga dodamo k  $I$  in je tako  $I = \{gu, \tilde{g}_{l+1, l+1}\}$ . Nato reduciramo naslednjo neničelno fokusno količino  $g_{l+2, l+2}$ , po modulu  $\langle I \rangle$ , (kjer je  $\langle I \rangle$  ideal generiran s polinomi iz  $I$ ) in preverimo, če je  $\tilde{g}_{l+2, l+2} \in \sqrt{\langle gu, \tilde{g}_{l+1, l+1} \rangle}$ . Če to ni res, dodamo  $\tilde{g}_{l+2, l+2}$  k množici  $I$  in nadaljujemo, dokler ne pridemo do najmanjše vrednosti  $i$ , za katero je  $I = \langle gu, \tilde{g}_{l+1, l+1}, \dots, \tilde{g}_{l+i, l+i} \rangle$  in  $\tilde{g}_{l+i+1, l+i+1} \in \sqrt{\langle I \rangle}$ . Ko to dosežemo, pričakujemo, da je

$$V_{\mathcal{C}} = \mathbf{V}(\mathcal{B}) = \mathbf{V}(\langle I \rangle). \quad (2.48)$$

Lahko izračunamo še nekaj dodatnih fokusnih količin in preverimo, da prav tako ležijo v  $\sqrt{\langle I \rangle}$ . Ker je  $\langle I \rangle \subset \mathcal{B}$ , je očitno  $\mathbf{V}(\mathcal{B}) \subset \mathbf{V}(\langle I \rangle)$ . Da bi dokazali (2.48), moramo pokazati še obratno inkluzijo,  $\mathbf{V}(\langle I \rangle) \subset \mathbf{V}(\mathcal{B})$ . V ta namen izračunamo ireducibilno dekompozicijo raznoterosti  $\mathbf{V}(\langle I \rangle)$ ,

$$\mathbf{V}(\langle I \rangle) = V_1 \cup \dots \cup V_r,$$

in dokažemo, da ima poljuben sistem posamezne komponente  $V_j$  center v izhodišču oz. po izreku 2.2.27 prvi integral oblike (2.45).

Poznamo več metod za iskanje oz. dokazovanje obstoja prvega integrala sistema. Ena izmed najučinkovitejših je metoda Darbouxjeve integracije, s katero poiščemo prvi integral ali integrirajoči množitelj sistema. S to metodo se podrobneje seznanimo v naslednjem podrazdelku.

Včasih nam pri dokazovanju integrabilnosti pomaga dejstvo, da je sistem hamiltonski. S pojmom hamiltonskega sistema smo se srečali že v razdelku 2.1. Pravimo, da je sistem

$$\dot{x} = \tilde{P}(x, y), \quad \dot{y} = \tilde{Q}(x, y), \quad (2.49)$$

kjer sta  $x, y \in \mathbb{C}$  in  $\tilde{P}, \tilde{Q}$  polinoma brez konstantnih členov in  $m = \max(st(\tilde{P}), st(\tilde{Q}))$ , hamiltonski, če obstaja funkcija  $H : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , t. i. hamiltonova funkcija sistema, da velja:  $\tilde{P} = -H_y$  in  $\tilde{Q} = H_x$ . Hitro vidimo, da je

$$\frac{\partial H}{\partial x} \tilde{P} + \frac{\partial H}{\partial y} \tilde{Q} \equiv 0,$$

in zato je  $H$  prvi integral sistema (2.49). Jasno je, da ima poljuben kompleksni hamiltonski sistem oblike (2.43) ali (2.44) center. Hamiltonskih sistemov znotraj družine sistemov (2.43) ni težko poiskati (glej [114, trditev 3.5.1]).

Naslednji razred sistemov, ki jih bomo opisali v podrazdelku 2.2.6, so sistemi, ki imajo določeno simetrijo, ki v realnem sistemu s singularnostjo tipa center ali fokus v bistvu pomeni center, t. i. časovna reverzibilnost. Videli bomo, kako se pojem časovne reverzibilnosti posploši na kompleksne sisteme oblike (2.43). Nato reverzibilnost razvijemo še naprej in navedemo nekaj rezultatov, ki so bili pred kratkim navedeni v [44] o t. i. posplošeni reverzibilnosti sistemov oblike (2.44).

Ko nobena izmed zgoraj omenjenih metod ne zadošča za dokaz obstoja prvega integrala, imamo na voljo še nekaj metod. Ena izmed metod je tudi dokaz obstoja formalnega prvega integrala sistema (2.44) v obliki potenčne vrste

$$\Psi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y)x^k \quad \text{ali} \quad \Psi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)y^k,$$

kar se prevede na iskanje funkcij  $f_k(y)$  (ali  $f_k(x)$ ) - glej razdelek 3.2.2.

Zelo uporabna je tudi metoda *napihovanja* (angl. blow-up), ki temelji na transformaciji  $(x, y) \rightarrow (x, z) = (x, y/x)$  (ali  $(x, y) \rightarrow (z, y) = (x/y, y)$ ). V tem primeru singularno točko



$x = y = 0$  nadomestimo s premico  $x = 0$  (ali  $y = 0$ ), ki vsebuje dve singularni točki, ki ustrežata separatisam singularne točke v izhodišču sistema (2.44) (glej [42] za več podrobnosti). To metodo bomo uporabili za dokaz integrabilnosti kubičnega sistema v razdelku 3.2.2.

V razdelku 3.2.3 si bomo pri dokazu integrabilnosti sistema četrte stopnje pomagali tudi s t. i. metodo "blow down" v vozlu, ki temelji na linearizabilnosti sistema v smislu obrnljive analitične spremembe koordinat

$$(u, v) = (xy^r, y^s), \quad (\text{ali } (u, v) = (x^r, x^s y)), \quad (2.50)$$

ki sistem (2.44) transformira v sistem

$$\dot{u} = -u + \sum_{j+k=2} U_{jk} u^j v^k, \quad \dot{v} = -nv + \sum_{j+k=2} V_{jk} u^j v^k \quad (2.51)$$

ki ima resonantni vozlu v izhodišču in konstanti  $r, s \in \mathbb{N}$  zadoščata pogoju

$$n(r-1) = s. \quad (2.52)$$

S pomočjo Poincare-Ljapunove teorije o normalnih formah (glej npr. [8]) lahko sistem (2.51) s konvergentno transformacijo

$$\xi = u + \sum_{j+k=2}^{\infty} \alpha_{jk} u^j v^k \quad \eta = v + \sum_{j+k=2}^{\infty} \beta_{jk} u^j v^k \quad (2.53)$$

preoblikujemo v njegovo normalno formo

$$\dot{\xi} = -\xi, \quad \dot{\eta} = -n\eta + a\xi^n. \quad (2.54)$$

Sistem (2.51) je linearizabilen natanko tedaj, ko je koeficient  $a$  v resonantnem členu  $a\xi^n$  enak nič in je zato njegova normalna forma enaka

$$\dot{\xi} = -\xi, \quad \dot{\eta} = -n\eta. \quad (2.55)$$

Ta sistem ima prvi integral  $\xi^n/\eta$ , od koder s pomočjo (2.53) in (2.50) ter pogoja (2.52) dobimo prvi integral sistema (2.44), ki je enak  $\tilde{\Psi} = x^n y^n + \sum_{i+j>2n} c_{ij} x^i y^j$ . Zato je integral oblike (2.45) prvi integral sistema (2.44), ki ima zato center v izhodišču. Za več podrobnosti o metodi "blow-down" v vozlu glej npr. [23].

Pogoje za nastop centra dvorazsežnega sistema bomo poiskali v naslednjem poglavju v razdelku 3.2, kjer bomo obravnavali družino kubičnih sistemov in družino sistemov četrte stopnje.

### 2.2.5 Darbouxjevi integrali in integrirajoči množitelji v $\mathbb{C}^2$

V tem razdelku predstavimo metodo Darbouxjeve integracije za dokazovanje obstoja prvih integralov in integrirajočih množiteljev za kompleksne ravninske polinomske sisteme diferencialnih enačb. S  $st(P)$  označimo stopnjo polinoma  $P$ . Nadalje, s  $\prod_{j=1}^s P_j$  označimo produkt  $P_1 P_2 \cdots P_s$ , kjer je  $s$  neko naravno število. Obravnavamo sisteme oblike

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (2.56)$$

kjer sta  $x, y \in \mathbb{C}$ , ter  $P$  in  $Q$  polinoma brez konstantnih členov, ki nimata nekonstantnega skupnega faktorja in  $m = \max(st(P), st(Q))$ .

Naj  $\mathcal{X}$  označuje ustrezno vektorsko polje, kot je definirano v (2.28). Predpostavimo, da ima sistem (2.56) prvi integral  $H$  v okolici izhodišča. V naslednji trditvi bomo obravnavali produktno obliko prvega integrala  $H = \Pi f_j^{\alpha_j}$  in dokazali, pri katerih pogojih vsak polinom  $f_j$  iz produkta  $\Pi f_j^{\alpha_j}$  deli  $\mathcal{X}f_j$ .

**Trditev 2.2.30** *Recimo, da je  $H = \Pi_{j=1}^s f_j^{\alpha_j}$  prvi integral sistema (2.56), kjer za vsak  $j$  velja  $\alpha_j \in \mathbb{C}$  in  $f_j \in \mathbb{C}[x, y]$  je ireducibilen in za  $k \neq j$  polinoma  $f_k$  in  $f_j$  ne vsebujeta skupnih faktorjev. Tedaj za vsak  $j$  velja  $f_j | \mathcal{X}f_j$ .*

**Dokaz.** Obravnavamo sistem oblike (2.56). Odvod polinoma  $f_j$  po vektorskem polju je

$$\mathcal{X}f_j = \frac{\partial f_j}{\partial x}P + \frac{\partial f_j}{\partial y}Q.$$

Ker je po predpostavki  $H = \Pi_{j=1}^s f_j^{\alpha_j} = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} f_3^{\alpha_3} \dots f_s^{\alpha_s}$  prvi integral, velja

$$\frac{\partial H}{\partial x}P + \frac{\partial H}{\partial y}Q = 0.$$

Iz enačb

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= \alpha_1 f_1^{\alpha_1-1} \frac{\partial f_1}{\partial x} f_2^{\alpha_2} \dots f_j^{\alpha_j} \dots f_s^{\alpha_s} + \\ &\quad + \alpha_2 f_2^{\alpha_2-1} \frac{\partial f_2}{\partial x} f_1^{\alpha_1} f_3^{\alpha_3} \dots f_j^{\alpha_j} \dots f_s^{\alpha_s} + \dots \\ &\quad + \alpha_s f_s^{\alpha_s-1} \frac{\partial f_s}{\partial x} f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_j^{\alpha_j} \dots f_{s-1}^{\alpha_{s-1}} \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= \alpha_1 f_1^{\alpha_1-1} \frac{\partial f_1}{\partial y} f_2^{\alpha_2} \dots f_j^{\alpha_j} \dots f_s^{\alpha_s} + \\ &\quad + \alpha_2 f_2^{\alpha_2-1} \frac{\partial f_2}{\partial y} f_1^{\alpha_1} f_3^{\alpha_3} \dots f_j^{\alpha_j} \dots f_s^{\alpha_s} + \dots \\ &\quad + \alpha_s f_s^{\alpha_s-1} \frac{\partial f_s}{\partial y} f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_j^{\alpha_j} \dots f_{s-1}^{\alpha_{s-1}} \end{aligned}$$

sledi

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x}P + \frac{\partial H}{\partial y}Q &= \alpha_1 f_1^{\alpha_1-1} f_2^{\alpha_2} \dots f_s^{\alpha_s} (\mathcal{X}f_1) + \\ &\quad + \alpha_2 f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2-1} f_3^{\alpha_3} \dots f_s^{\alpha_s} (\mathcal{X}f_2) + \dots \\ &\quad + \alpha_s f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_{s-1}^{\alpha_{s-1}} f_s^{\alpha_s-1} (\mathcal{X}f_s) = 0. \end{aligned}$$

Zadnjo enačbo delimo s skupnim faktorjem

$$f_1^{\alpha_1-1} f_2^{\alpha_2-1} \dots f_s^{\alpha_s-1}$$

in dobimo

$$\alpha_1 f_2 f_3 \dots f_s (\mathcal{X}f_1) + \alpha_2 f_1 f_3 \dots f_s (\mathcal{X}f_2) + \dots + \alpha_s f_1 f_2 \dots f_{s-1} (\mathcal{X}f_s) = 0.$$

Člen  $\alpha_j f_1 f_2 \cdots f_{j-1} f_{j+1} \cdots f_s (\mathcal{X} f_j)$  prenesemo na drugo stran in dobimo

$$\begin{aligned} \alpha_j f_1 \cdots f_{j-1} f_{j+1} \cdots f_s (\mathcal{X} f_j) = & -\alpha_1 f_2 f_3 \cdots f_j \cdots f_s (\mathcal{X} f_1) - \\ & -\alpha_2 f_1 f_3 \cdots f_j \cdots f_s (\mathcal{X} f_2) - \cdots \\ & -\alpha_{j-1} f_1 \cdots f_{j-2} f_j \cdots f_s (\mathcal{X} f_{j-1}) - \\ & -\alpha_{j+1} f_1 \cdots f_j f_{j+2} \cdots f_s (\mathcal{X} f_{j+1}) - \cdots \\ & -\alpha_s f_1 f_2 \cdots f_j \cdots f_{s-1} (\mathcal{X} f_s). \end{aligned}$$

Če na desni strani zadnje enačbe izpostavimo  $f_j$ , dobimo

$$\begin{aligned} \alpha_j f_1 \cdots f_{j-1} f_{j+1} \cdots f_s \mathcal{X} f_j = & f_j \left( -\alpha_1 f_2 \cdots f_{j-1} f_{j+1} \cdots f_s (\mathcal{X} f_1) - \right. \\ & -\alpha_2 f_1 f_3 \cdots f_{j-1} f_{j+1} \cdots f_s (\mathcal{X} f_2) - \cdots \\ & -\alpha_{j-1} f_1 \cdots f_{j-2} f_{j+1} \cdots f_s (\mathcal{X} f_{j-1}) - \\ & -\alpha_{j+1} f_1 \cdots f_{j-1} f_{j+2} \cdots f_s (\mathcal{X} f_{j+1}) - \cdots \\ & \left. -\alpha_s f_1 \cdots f_{j-1} f_{j+1} \cdots f_{s-1} (\mathcal{X} f_s) \right). \end{aligned}$$

Ker za vsak  $k \neq j$  velja  $f_j \nmid f_k$  (in  $f_k$  ter  $f_j$  sta ireducibilna), sledi, da  $f_j \nmid f_1 \cdots f_{j-1} f_{j+1} \cdots f_s$ . Zato mora veljati  $f_j \mid \mathcal{X} f_j$ . ■

Dejstvo, da za vsak polinom  $f_j$  obstaja neki polinom  $K_j \in \mathbb{C}[x, y]$ , za katerega je  $\mathcal{X} f_j = K_j f_j$ , pomeni, da je raznoterost  $\mathbf{V}(f_j)$  invariantna krivulja (glej definicijo 2.2.31) za (2.56), saj potem velja

$$\left( \frac{\partial f_j}{\partial x} P + \frac{\partial f_j}{\partial y} Q \right) \Big|_{\mathbf{V}(f_j)} = (\text{grad} f_j, (P, Q)) \Big|_{\mathbf{V}(f_j)} = \mathcal{X} f_j |_{\mathbf{V}(f_j)} \equiv 0. \quad (2.57)$$

Za sisteme (2.56) lahko prvi integral iščemo v obliki produkta potenc polinomov, katerih ničelne množice so invariantne krivulje v faznem prostoru. To je motivacija za definicije in rezultate v nadaljevanju tega razdelka.

**Definicija 2.2.31** *Nekonstanten polinom  $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$  se imenuje algebraični parcialni integral sistema (2.56), če obstaja tak polinom  $K(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ , da velja*

$$\mathcal{X} f = \frac{\partial f}{\partial x} P + \frac{\partial f}{\partial y} Q = K f. \quad (2.58)$$

*Polinom  $K$  se imenuje kofaktor  $k$   $f$ . Dokazali bomo, da je  $st(K) \leq m - 1$  (glej primer 2.2.32). Krivuljo  $f(x, y) = 0$  imenujemo algebraična invariantna krivulja sistema (2.56).*

Geometrijsko krivulja  $f(x, y) = 0$  določa trajektorijo sistema (2.56).

**Trditev 2.2.32** *Za vsak polinom  $K$ , ki zadošča identiteti (2.58), velja  $st(K) \leq m - 1$ .*

**Dokaz.** Vemo, da velja  $\mathcal{X} f = \frac{\partial f}{\partial x} P + \frac{\partial f}{\partial y} Q = K f$ , kjer je  $\max(st(P), st(Q)) = m$ . Dokazali bomo, da je  $st(K) \leq m - 1$ . Recimo, da je  $st(f) = k$ . Potem je  $f$  oblike  $f = P_k(x, y) + P_{k-1}(x, y) + \cdots + P_1(x, y) + P_0(x, y)$ , pri čemer so  $P_j$  homogeni polinomi stopnje  $j$  s poljubnimi koeficienti in velja

$$st \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \leq k - 1 \quad \text{in} \quad st \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \leq k - 1.$$

Ker je  $\text{st}(P) \leq m$  in  $\text{st}(Q) \leq m$ , sta  $\text{st}\left(\frac{\partial f}{\partial x}P\right) \leq k-1+m$  in  $\text{st}\left(\frac{\partial f}{\partial y}Q\right) \leq k-1+m$ . Od tod sledi, da je

$$\text{st}\left(\frac{\partial f}{\partial x}P + \frac{\partial f}{\partial y}Q\right) \leq k-1+m.$$

Ker  $f$  zadošča identiteti  $\frac{\partial f}{\partial x}P + \frac{\partial f}{\partial y}Q = Kf$ , sledi, da je  $\text{st}(Kf) \leq k-1+m$ . Ker je  $\text{st}(f) = k$ , sledi, da je  $\text{st}(K) \leq m-1$ . ■

Očitno za operator  $\mathcal{X}$  veljata naslednji izjavi.

1. Če je  $f$  algebraični parcialni integral za (2.56) s kofaktorjem  $K$ , je vsak konstanten večkratnik od  $f$  tudi algebraični parcialni integral za (2.56) s kofaktorjem  $K$ .
2. Če sta  $f_1$  in  $f_2$  algebraična parcialna integrala za (2.56) s kofaktorjema  $K_1$  in  $K_2$ , je  $f_1f_2$  algebraični parcialni integral za (2.56) s kofaktorjem  $K_1 + K_2$ .

Dokaz točke 1. je trivialna posledica linearnosti odvoda; natančneje formule  $(\alpha f)' = \alpha f'$ , ki velja tudi za parcialno odvajanje.

Trditev iz toke 2. je posledica formule za odvod produkta  $(f_1f_2)' = f_1'f_2 + f_1f_2'$ . Ker sta  $f_1$  in  $f_2$  algebraična parcialna integrala za (2.56) s kofaktorjema  $K_1$  in  $K_2$ , zanju velja:

$$\begin{aligned}\mathcal{X}f_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x}P + \frac{\partial f_1}{\partial y}Q = K_1f_1, \\ \mathcal{X}f_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial x}P + \frac{\partial f_2}{\partial y}Q = K_2f_2.\end{aligned}$$

Potem je

$$\begin{aligned}\mathcal{X}f_1f_2 &= \frac{\partial(f_1f_2)}{\partial x}P + \frac{\partial(f_1f_2)}{\partial y}Q \\ &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x}f_1\right)P + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial y}f_1\right)Q \\ &= f_2\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}P + \frac{\partial f_1}{\partial y}Q\right) + f_1\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}P + \frac{\partial f_2}{\partial y}Q\right) \\ &= f_2K_1f_1 + f_1K_2f_2 = (f_1f_2)(K_1 + K_2).\end{aligned}$$

Zato je tudi produkt  $f_1f_2$  algebraični parcialni integral za (2.56). Pripadajoči kofaktor k produktu  $f_1f_2$  je polinom  $K_1 + K_2$ .

Če je  $f$  algebraični parcialni integral, je  $\mathbf{V}(f)$  algebraična invariantna krivulja. Naslednja trditev pa pove, da velja tudi obrat.

**Trditev 2.2.33** ([114]) *Naj bo  $f \in \mathbb{C}[x, y]$ . Raznoterost  $\mathbf{V}(f)$  je algebraična invariantna krivulja sistema (2.56) natanko tedaj, ko je  $f$  algebraični parcialni integral sistema (2.56).*

**Dokaz.** Dokazati je potrebno zgolj eno implikacijo. Zapišimo polinom  $f$  kot  $f = f_1^{\alpha_1} \cdots f_s^{\alpha_s}$ , kjer je  $f_j$  za vsak  $j$  ireducibilen polinom. Enakost  $\mathcal{X}f|_{\mathbf{V}(f)} = 0$  pomeni, da je

$$\mathcal{X}f_j|_{\mathbf{V}(f)} = 0$$

za vsak  $j$ . Tako je  $\mathbf{V}(f_j) \subset \mathbf{V}(\mathcal{X}f_j)$  in po trditvi 1.1.7 je  $\mathcal{X}f_j \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(\mathcal{X}f_j)) \subset \mathbf{I}(\mathbf{V}(f_j))$ . Ker je  $f_j$  ireducibilen, je  $\langle f_j \rangle$  zaradi trditve 1.5.8 korenski praideal in po trditvi 1.4.7 je  $\mathbf{I}(\mathbf{V}(f_j)) = \langle f_j \rangle$

in ugotovimo, da je  $\mathcal{X}f_j \in \langle f_j \rangle$  za vsak  $j$ . Torej je  $\mathcal{X}f_j = K_j f_j$  za neke  $K_j \in \mathbb{C}[x, y]$  tako, da je vsak polinom  $f_j$  algebraični parcialni integral sistema (2.56). Kot je dokazano zgoraj, če sta  $g$  in  $h$  dva algebraična parcialna integrala s kofaktorjema  $K_g$  in  $K_h$ , je tudi  $g \cdot h$  algebraični parcialni integral s kofaktorjem  $K_g + K_h$ . Zato je  $f = f_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot f_s^{\alpha_s}$  algebraični parcialni integral sistema (2.56). ■

**Definicija 2.2.34** *Recimo, da so krivulje  $f_1 = 0, \dots, f_s = 0$  algebraične invariantne krivulje sistema (2.56) in da  $\alpha_j \in \mathbb{C}$  za  $1 \leq j \leq s$ . Prvi integral sistema (2.56), oblike*

$$H = f_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot f_s^{\alpha_s}, \quad (2.59)$$

imenujemo Darbouxjev prvi integral sistema (2.56).

Obstoj Darbouxjevega prvega integrala je lahko zelo restriktiven. Na primer, če je za vsak  $j$  konstanta  $\alpha_j$  realna ali racionalna, vsaka trajektorija sistema (2.56) leži na algebraični krivulji. Če najdemo dovolj algebraičnih invariantnih krivulj, je mogoče konstruirati Darbouxjev prvi integral, kot prikazuje naslednji izrek.

**Izrek 2.2.35 (Darboux)** *Predpostavimo, da ima sistem (2.56)  $q$  algebraičnih invariantnih krivulj  $f_j(x, y) = 0$ ,  $1 \leq j \leq q$ , kjer je  $f_j$  ireducibilna za vsak  $j$  nad poljem  $\mathbb{C}^2$  in  $q > \frac{m^2+m}{2}$ . Tedaj ima sistem (2.56) Darbouxjev prvi integral.*

**Dokaz.** Naj  $\mathbb{C}_{m-1}[x, y]$  označuje kompleksen vektorski prostor polinomov stopnje kvečjemu  $m - 1$ . Homogeni polinom stopnje  $p$  ima  $p + 1$  členov in tako je  $\mathbb{C}_{m-1}[x, y]$  razsežnosti  $m + (m - 1) + \dots + 1 = \frac{m(m+1)}{2}$ . Po trditvi 2.2.33 obstajajo takšni polinomi  $K_j \in \mathbb{C}_{m-1}[x, y]$ , da je  $\mathcal{X}f_j = K_j f_j$  za  $1 \leq j \leq q$ . Tako je število vektorjev  $K_j$  večje od razsežnosti  $\mathbb{C}_{m-1}[x, y]$ , zato je množica  $\{K_1, \dots, K_q\}$  linearno odvisna in obstajajo takšne konstante  $\alpha_j$ , ki niso vse enake nič, da je

$$\sum_{j=1}^q \alpha_j K_j = \sum_{j=1}^q \alpha_j \frac{\mathcal{X}f_j}{f_j} = 0.$$

Če za te polinome  $f_j$  in konstante  $\alpha_j$  definiramo  $H$  kot  $H = f_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot f_q^{\alpha_q}$ , dobimo

$$\mathcal{X}H = H \sum_{j=1}^q \alpha_j \frac{\mathcal{X}f_j}{f_j} = H \sum_{j=1}^q \alpha_j K_j = 0,$$

kar pomeni, da je  $H$ , če ni konstanten, prvi integral sistema (2.56). Ker so algebraične krivulje  $f_j = 0$  ireducibilne in vse konstante  $\alpha_j$  niso ničelne, funkcija  $H$  ni konstantna. ■

**Posledica 2.2.36 ([114])** *Če ima sistem (2.56) najmanj  $q = \frac{m^2+m}{2}$  algebraičnih invariantnih krivulj  $f_j(x, y) = 0$ , od katerih je vsaka ireducibilna nad  $\mathbb{C}^2$  in ne poteka skozi izhodišče (t. j.  $f_j(0, 0) \neq 0$ ), premore Darbouxjev prvi integral oblike  $H = f_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot f_q^{\alpha_q}$ .*

**Dokaz.** Privzemimo, da so vsi kofaktorji oblike  $K_j = ax + by + \dots$ . Tako so vsebovani v vektorskem prostoru  $\mathbb{C}_{m-1}[x, y]$  razsežnosti  $\frac{m^2+m}{2}$ . ■

Zelo redko se zgodi, da ima sistem oblike (2.56) več neodvisnih algebraičnih invariantnih krivulj, kot je  $\dim(\mathbb{C}_{m-1}[x, y])$ . Včasih je kljub manjšemu številu odkritih algebraičnih invariantnih krivulj mogoče najti Darbouxjev prvi integral. Dejansko dokaz izreka 2.2.35 pokaže, da

če je  $f_1, \dots, f_s$  poljubno število različnih ireducibilnih algebraičnih parcialnih integralov sistema (2.56), bo  $H = f_1^{\alpha_1} \dots f_s^{\alpha_s}$  prvi integral sistema (2.56), če so le netrivialne linearne kombinacije ustreznih kofaktorjev enake nič, t. j.

$$\sum_{j=1}^s \alpha_j K_j = 0. \quad (2.60)$$

Če ni mogoče najti prvega integrala sistema (2.56), poskušamo najprej poiskati integrirajoči množitelj in z njim konstruirati prvi integral. Sistem (2.56) lahko preoblikujemo na enačbo  $\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$ . Zato trajektorije sistema (2.56) zadoščajo enačbi

$$P(x,y)dy - Q(x,y)dx = 0. \quad (2.61)$$

Pravimo, da je izraz na levi strani enačbe (2.61) popolni diferencial, če obstaja takšna funkcija  $H(x,y)$ , da velja

$$\mathcal{X}H = \frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial y} dy \equiv P(x,y)dy - Q(x,y)dx. \quad (2.62)$$

Tako funkcijo  $H(x,y)$  imenujemo prvi integral enačbe (2.61). Iz (2.62) sledi, da je leva stran enačbe (2.61) popolni diferencial, če velja:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -Q \quad \text{in} \quad \frac{\partial H}{\partial y} = P. \quad (2.63)$$

Od tod lahko izpeljemo formulo, s katero preverimo, ali je (2.61) popolni diferencial ali ne. Če sta funkciji  $P$  in  $-Q$  zvezni in imata zvezna parcialna prva odvoda, potem, če odvajamo  $P$  po spremenljivki  $x$  in  $-Q$  po spremenljivki  $y$ , dobimo

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial(-Q)}{\partial y} &= \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x}. \end{aligned}$$

Zaradi predpostavke, da je  $H$  zvezna funkcija dveh spremenljivk  $x$  in  $y$ , velja, da sta njena mešana druga odvoda  $\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}$  in  $\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x}$  enaka. Tako velja

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(-Q)}{\partial y}. \quad (2.64)$$

Ta pogoj je potreben in zadosten, da je enačba (2.61) popolni diferencial oz. da ima sistem (2.56) prvi integral  $H(x,y)$ , ki zadošča (2.62).

Če izraz na levi strani enačbe (2.61) ni popolni diferencial, poskušamo najti takšno funkcijo  $\mu(x,y)$ , da je izraz na levi strani enačbe

$$\mu(x,y)P(x,y)dy - \mu(x,y)Q(x,y)dx = 0$$

popolni diferencial. Iz formule (2.63) sledi, da tedaj obstaja takšna funkcija  $H(x,y)$ , da velja

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\mu Q \quad \text{in} \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \mu P. \quad (2.65)$$

Funkcijo  $\mu(x, y)$  imenujemo integrirajoči množitelj sistema (2.56) na odprti množici  $\Omega$ , kjer sta izpolnjena pogoja (2.65).

S pomočjo formule (2.64) vidimo, da ima sistem (2.56) integrirajoči množitelj  $\mu(x, y)$ , če velja

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial x} = -\frac{\partial(\mu Q)}{\partial y}. \quad (2.66)$$

Ko enkrat najdemo integrirajoči množitelj sistema (2.56), lahko s pomočjo formule (2.65) konstruiramo prvi integral  $H(x, y)$  sistema (2.56). Najprej integriramo po spremenljivki  $y$  enačbo  $\frac{\partial H}{\partial y} = \mu P$  in dobimo

$$H(x, y) = \int \mu(x, y)P(x, y)dy + h(x). \quad (2.67)$$

Ker mora  $H$  zadoščati tudi enačbi  $\frac{\partial H}{\partial x} = -\mu Q$  iz (2.65), lahko funkcijo  $h(x)$  določimo prav iz slednje.

Označimo z  $\text{div}\mathcal{X}$  divergenco vektorskega polja  $\mathcal{X}$ :  $\text{div}\mathcal{X} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ . Potem lahko pogoj (2.66) zapišemo tudi kot je navedeno v naslednji definiciji, kjer zahtevamo, da sta  $P$  in  $Q$  odvedljivi funkciji.

**Definicija 2.2.37** *Integrirajoči množitelj sistema (2.56) na odprti množici  $\Omega$  je takšna odvedljiva funkcija  $\mu(x, y)$  na območju  $\Omega$ , da identiteta*

$$\mathcal{X}\mu = -\mu \text{div}\mathcal{X} \quad (2.68)$$

velja na celotni množici  $\Omega$ . Integrirajoči množitelj oblike

$$\mu = f_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot f_s^{\beta_s}, \quad (2.69)$$

kjer je  $f_j$  algebraični parcialni integral za (2.56) na  $\Omega$  za  $1 \leq j \leq s$ , imenujemo Darbouxjev integrirajoči množitelj na množici  $\Omega$ .

Kot smo že navedli, je ta definicija integrirajočega množitelja ekvivalentna klasični definiciji integrirajočega množitelja, ki je navedena pred definicijo (2.2.37), saj lahko (2.66) zapišemo kot

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} P + \frac{\partial \mu}{\partial y} Q + \mu \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \equiv 0,$$

kar sovпада z enačbo (2.68).

Sedaj pokažimo, da je funkcija  $\mu$  oblike (2.69) integrirajoči množitelj natanko tedaj, ko je

$$\mathcal{X}\mu + \mu \text{div}\mathcal{X} = \mu \left( \sum_{j=1}^s \beta_j K_j + \text{div}\mathcal{X} \right) \equiv 0,$$

kjer so  $K_j$  ustrezni kofaktorji algebraičnih parcialnih integralov  $f_j$  za  $j = 1, \dots, s$ . Predpostavimo najprej, da je funkcija  $\mu$  oblike (2.69) integrirajoči množitelj in dokažimo, da je

$$\mu \left( \sum_{j=1}^s \beta_j K_j + \text{div}\mathcal{X} \right) = 0. \quad (2.70)$$

Funkcija  $\mu = f_1^{\beta_1} \dots f_s^{\beta_s}$  je integrirajoči množitelj natanko tedaj, ko velja formula (2.68). Če vstavimo  $\mu$  v (2.68), dobimo

$$\begin{aligned} \mathcal{X}\mu &= \frac{\partial \mu}{\partial x} P + \frac{\partial \mu}{\partial y} Q = \\ &= \left( \beta_1 f_1^{\beta_1-1} \frac{\partial f_1}{\partial x} f_2 \dots f_s + \dots + \beta_s f_1^{\beta_1} \dots f_{s-1}^{\beta_{s-1}} f_s^{\beta_s-1} \frac{\partial f_s}{\partial x} \right) P \\ &+ \left( \beta_1 f_1^{\beta_1-1} \frac{\partial f_1}{\partial y} f_2 \dots f_s + \dots + \beta_s f_1^{\beta_1} \dots f_{s-1}^{\beta_{s-1}} f_s^{\beta_s-1} \frac{\partial f_s}{\partial y} \right) Q \\ &= \beta_1 f_1^{\beta_1-1} f_2^{\beta_2} \dots f_s^{\beta_s} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} P + \frac{\partial f_1}{\partial y} Q \right) + \dots \\ &+ \beta_s f_1^{\beta_1} f_2^{\beta_2} \dots f_{s-1}^{\beta_{s-1}} f_s^{\beta_s-1} \left( \frac{\partial f_s}{\partial x} P + \frac{\partial f_s}{\partial y} Q \right). \end{aligned}$$

Za vsak  $j = 1, \dots, s$  je  $\frac{\partial f_j}{\partial x} P + \frac{\partial f_j}{\partial y} Q = K_j f_j$ . Zato je

$$\begin{aligned} \mathcal{X}\mu &= \beta_1 f_1^{\beta_1} f_2^{\beta_2} \dots f_s^{\beta_s} K_1 + \dots + \beta_s f_1^{\beta_1} f_2^{\beta_2} \dots f_s^{\beta_s} K_s \\ &= f_1^{\beta_1} f_2^{\beta_2} \dots f_s^{\beta_s} (\beta_1 K_1 + \beta_2 K_2 + \dots + \beta_s K_s) \\ &= \mu \sum_{j=1}^s \beta_j K_j. \end{aligned}$$

Po (2.68) je  $\mathcal{X}\mu + \mu \operatorname{div} \mathcal{X} = 0$ , zato sledi  $\mu \sum_{j=1}^s \beta_j K_j + \mu \operatorname{div} \mathcal{X} = 0$ .

Koncept Darbouxjeve integrabilnosti je mogoče razširiti na širši razred funkcij, ki vključuje limite prvih integralov oblike  $H = f_1^{\alpha_1} \dots f_s^{\alpha_s}$ . Uporabimo lahko naslednji pristop. Recimo, da sta za vsako vrednost parametra  $\varepsilon$  blizu nič  $f = 0$  in  $f + \varepsilon g = 0$  invariantni krivulji sistema (2.56) z ustreznima kofaktorjema  $K_f$  in  $K_{f+\varepsilon g}$ . Potem je

$$\begin{aligned} K_{f+\varepsilon g} &= \frac{\mathcal{X}(f + \varepsilon g)}{f + \varepsilon g} = \frac{\mathcal{X}f}{f + \varepsilon g} + \varepsilon \frac{\mathcal{X}g}{f + \varepsilon g} = K_f \left( 1 - \varepsilon \frac{g}{f} + O(\varepsilon^2) \right) + \varepsilon \frac{\mathcal{X}g}{f} + O(\varepsilon^2) \\ &= K_f + \varepsilon \frac{\mathcal{X}g - gK_f}{f} + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Ker je  $K_{f+\varepsilon g}$  polinom stopnje največ  $m - 1$ , je

$$K' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathcal{X}g - gK_f}{f}$$

polinom stopnje največ  $m - 1$ . Tako je

$$K_{f+\varepsilon g} = K_f + \varepsilon K' + O(\varepsilon^2)$$

in

$$\mathcal{X} \left( \left[ \frac{f + \varepsilon g}{f} \right]^{\frac{1}{\varepsilon}} \right) = \left[ \frac{f + \varepsilon g}{f} \right]^{\frac{1}{\varepsilon}} \left( \frac{K_{f+\varepsilon g}}{\varepsilon} - \frac{K_f}{\varepsilon} \right) = \left[ \frac{f + \varepsilon g}{f} \right]^{\frac{1}{\varepsilon}} (K' + O(\varepsilon)).$$



Ko gre  $\varepsilon$  proti nič, se  $\left(\frac{f+\varepsilon g}{f}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}$  približuje k  $h \stackrel{\text{def}}{=} e^{\frac{g}{f}}$ , ki očitno zadošča enačbi

$$\mathcal{X}h = K'h. \quad (2.71)$$

Tako funkcija  $h$  zadošča enačbi za algebraično invariantno krivuljo in ima polinomski kofaktor  $K'$  stopnje največ  $m-1$ .

V naslednji definiciji se seznanimo s pojmom Darbouxjeve funkcije in eksponentnega faktorja

**Definicija 2.2.38** *Funkcijo oblike*

$$e^{\frac{g}{f}} \prod f_j^{\alpha_j},$$

kjer so  $f$ ,  $g$  in  $f_j$  polinomi, imenujemo Darbouxjeva funkcija. Funkcijo oblike  $h = e^{\frac{g}{f}}$ , ki zadošča enačbi (2.71), kjer je  $K'$  polinom stopnje največ  $m-1$ , imenujemo eksponentni faktor. Kot prej, je  $K'$  kofaktor k funkciji  $h$ .

Včasih se eksponentni faktor imenuje “izrojena algebraična invariantna krivulja”, da poudarimo njegov izvor iz združitve algebraičnih invariantnih krivulj. Zgornje ime je boljše, saj faktor  $e^{\frac{g}{f}}$  ni niti algebraičen, niti ni krivulja. Lahko preverimo, da če je  $h = e^{\frac{g}{f}}$  eksponentni faktor, potem je  $f = 0$  algebraična invariantna krivulja in  $g$  zadošča enačbi

$$\mathcal{X}g = gK_f + fK_h, \quad (2.72)$$

kjer je  $K_f$  kofaktor k  $f$  in  $K_h$  kofaktor k  $h$ . Ker je produkt dveh eksponentnih faktorjev ponovno eksponentni faktor, je brez izgube za splošnost eksponentni faktor v definiciji 2.2.38 enoličen.

Teorija Darbouxjeve integrabilnosti za algebraične invariantne krivulje, ki je predstavljena zgoraj, ostaja bistveno nespremenjena, ko dodamo več algebraičnih krivulj. Obstoj najmanj  $\frac{m(m+1)}{2} + 1$  invariantnih algebraičnih krivulj ali eksponentnih faktorjev zagotovi obstoj Darbouxjevih prvih integralov in obstoj najmanj  $\frac{m(m+1)}{2}$  invariantnih algebraičnih krivulj ali eksponentnih faktorjev pomeni obstoj Darbouxjevega integrirajočega množitelja. Naslednji izrek govori o obstoju Darbouxjevega prvega integrala, ko je število algebraičnih invariantnih krivulj in eksponentnih faktorjev majhno.

**Izrek 2.2.39** *Recimo, da ima sistem (2.56)  $q$  (različnih) ireducibilnih algebraičnih parcialnih integralov  $f_j$  z ustreznimi kofaktorji  $K_j$ ,  $1 \leq j \leq q$  in  $r$  (različnih) eksponentnih faktorjev  $e^{\frac{g_j}{h_j}}$  z ustreznimi kofaktorji  $L_j$ ,  $1 \leq j \leq r$ , za katere obstaja  $q$  kompleksnih konstant  $\alpha_j$ ,  $1 \leq j \leq q$  in  $r$  kompleksnih konstant  $\beta_j$ ,  $1 \leq j \leq r$ , ki niso vse 0, tako da je  $\sum_{j=1}^q \alpha_j K_j + \sum_{j=1}^r \beta_j L_j \equiv 0$ . Tedaj ima sistem (2.56) prvi integral oblike*

$$H = f_1^{\alpha_1} \cdots f_q^{\alpha_q} \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right)^{\beta_1} \cdots \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right)^{\beta_r}. \quad (2.73)$$

**Dokaz.** Pokažimo, da je  $H = f_1^{\alpha_1} \cdots f_q^{\alpha_q} \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right)^{\beta_1} \cdots \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right)^{\beta_r}$  prvi integral sistema (2.56). Pokazati moramo, da je  $\mathcal{X}H \equiv 0$ , t. j.

$$\frac{\partial H}{\partial x} P + \frac{\partial H}{\partial y} Q \equiv 0.$$

Najprej odvajamo  $H$  po spremenljivki  $x$  in dobimo

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} = & \alpha_1 f_1^{\alpha_1-1} \frac{\partial f_1}{\partial x} f_2^{\alpha_2} \dots f_q^{\alpha_q} \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right)^{\beta_1} \dots \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right)^{\beta_r} + f_1^{\alpha_1} \alpha_2 f_2^{\alpha_2-1} \frac{\partial f_2}{\partial x} \dots f_q^{\alpha_q} \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right)^{\beta_1} \dots \\ & \dots \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right)^{\beta_r} + \dots + f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots \alpha_q f_q^{\alpha_q-1} \frac{\partial f_q}{\partial x} \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right)^{\beta_1} \dots \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right)^{\beta_r} + \\ & + f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_q^{\alpha_q} \beta_1 \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right)^{\beta_1-1} \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right) \frac{\frac{\partial g_1}{\partial x} h_1 - g_1 \frac{\partial h_1}{\partial x}}{h_1^2} \left(e^{\frac{g_2}{h_2}}\right)^{\beta_2} \dots \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right)^{\beta_r} + \dots \\ & + f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_q^{\alpha_q} \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right)^{\beta_1} \dots \beta_r \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right)^{\beta_r-1} \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right) \frac{\frac{\partial g_r}{\partial x} h_r - g_r \frac{\partial h_r}{\partial x}}{h_r^2}. \end{aligned}$$

Podobno odvajamo  $H$  po spremenljivki  $y$  in dobimo

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial y} = & \alpha_1 f_1^{\alpha_1-1} \frac{\partial f_1}{\partial y} f_2^{\alpha_2} \dots f_q^{\alpha_q} \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right)^{\beta_1} \dots \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right)^{\beta_r} + f_1^{\alpha_1} \alpha_2 f_2^{\alpha_2-1} \frac{\partial f_2}{\partial y} \dots f_q^{\alpha_q} \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right)^{\beta_1} \dots \\ & \dots \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right)^{\beta_r} + \dots + f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots \alpha_q f_q^{\alpha_q-1} \frac{\partial f_q}{\partial y} \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right)^{\beta_1} \dots \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right)^{\beta_r} + \\ & + f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_q^{\alpha_q} \beta_1 \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right)^{\beta_1-1} \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right) \frac{\frac{\partial g_1}{\partial y} h_1 - g_1 \frac{\partial h_1}{\partial y}}{h_1^2} \left(e^{\frac{g_2}{h_2}}\right)^{\beta_2} \dots \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right)^{\beta_r} + \dots \\ & + f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_q^{\alpha_q} \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right)^{\beta_1} \dots \beta_r \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right)^{\beta_r-1} \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right) \frac{\frac{\partial g_r}{\partial y} h_r - g_r \frac{\partial h_r}{\partial y}}{h_r^2}. \end{aligned}$$

Če vstavimo zgornja izraza za  $\frac{\partial H}{\partial x}$  in  $\frac{\partial H}{\partial y}$  v izraz  $\frac{\partial H}{\partial x} P + \frac{\partial H}{\partial y} Q$ , sledi

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} P + \frac{\partial H}{\partial y} Q = & \alpha_1 f_1^{\alpha_1-1} \frac{\partial f_1}{\partial x} P f_2^{\alpha_2} \dots f_q^{\alpha_q} \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right)^{\beta_1} \dots \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right)^{\beta_r} + \\ & + \alpha_1 f_1^{\alpha_1-1} \frac{\partial f_1}{\partial y} Q f_2^{\alpha_2} \dots f_q^{\alpha_q} \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right)^{\beta_1} \dots \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right)^{\beta_r} + \\ & \vdots \\ & + f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots \alpha_q f_q^{\alpha_q-1} \frac{\partial f_q}{\partial x} P \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right)^{\beta_1} \dots \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right)^{\beta_r} + \\ & + f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots \alpha_q f_q^{\alpha_q-1} \frac{\partial f_q}{\partial y} Q \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right)^{\beta_1} \dots \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right)^{\beta_r} + \\ & + f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_q^{\alpha_q} \beta_1 \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right)^{\beta_1-1} \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right) \frac{\frac{\partial g_1}{\partial x} h_1 - g_1 \frac{\partial h_1}{\partial x}}{h_1^2} P \dots \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right)^{\beta_r} + \\ & + f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_q^{\alpha_q} \beta_1 \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right)^{\beta_1-1} \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right) \frac{\frac{\partial g_1}{\partial y} h_1 - g_1 \frac{\partial h_1}{\partial y}}{h_1^2} Q \dots \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right)^{\beta_r} + \\ & \vdots \\ & + f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_q^{\alpha_q} \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right)^{\beta_1} \dots \beta_r \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right)^{\beta_r-1} \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right) \frac{\frac{\partial g_r}{\partial x} h_r - g_r \frac{\partial h_r}{\partial x}}{h_r^2} P + \\ & + f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_q^{\alpha_q} \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right)^{\beta_1} \dots \beta_r \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right)^{\beta_r-1} \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right) \frac{\frac{\partial g_r}{\partial y} h_r - g_r \frac{\partial h_r}{\partial y}}{h_r^2} Q. \end{aligned}$$

Iz prvih dveh členov izpostavimo  $\alpha_1 f_1^{\alpha_1-1} f_2^{\alpha_2} \dots f_q^{\alpha_q} \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right)^{\beta_1} \dots \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right)^{\beta_r}$ , iz  $j$ -tega člena izpostavimo  $\alpha_j f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_{j-1}^{\alpha_{j-1}} f_j^{\alpha_j-1} f_{j+1}^{\alpha_{j+1}} \dots f_q^{\alpha_q} \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right)^{\beta_1} \dots \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right)^{\beta_r}$  in tako dalje. Tako dobimo

$$\begin{aligned} & \frac{\partial H}{\partial x} P + \frac{\partial H}{\partial y} Q = \\ & \alpha_1 f_1^{\alpha_1-1} f_2^{\alpha_2} \dots f_q^{\alpha_q} \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right)^{\beta_1} \dots \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right)^{\beta_r} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} P + \frac{\partial f_1}{\partial y} Q \right) + \dots \\ & + \alpha_q f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_q^{\alpha_q-1} \cdot \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right)^{\beta_1} \dots \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right)^{\beta_r} \left( \frac{\partial f_q}{\partial x} P + \frac{\partial f_q}{\partial y} Q \right) + \\ & + \beta_1 f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_q^{\alpha_q} \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right)^{\beta_1-1} \dots \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right)^{\beta_r} \cdot \left( \frac{\left(\frac{\partial g_1}{\partial x} P + \frac{\partial g_1}{\partial y} Q\right) h_1 - \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} P + \frac{\partial h_1}{\partial y} Q\right) g_1}{h_1^2} \right) + \dots \\ & + \beta_r f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_q^{\alpha_q} \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right)^{\beta_1} \dots \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right)^{\beta_r-1} \cdot \left( \frac{\left(\frac{\partial g_r}{\partial x} P + \frac{\partial g_r}{\partial y} Q\right) h_r - \left(\frac{\partial h_r}{\partial x} P + \frac{\partial h_r}{\partial y} Q\right) g_r}{h_r^2} \right). \end{aligned}$$

Najprej pogledjmo izraze

$$\frac{\left(\frac{\partial g_i}{\partial x} P + \frac{\partial g_i}{\partial y} Q\right) h_i - \left(\frac{\partial h_i}{\partial x} P + \frac{\partial h_i}{\partial y} Q\right) g_i}{h_i^2}. \quad (2.74)$$

Kot smo že navedli, je  $L_i$  kofaktor od  $e^{\frac{g_i}{h_i}}$ . Po enačbi (2.72) je

$$\mathcal{X}g_i = \left( \frac{\partial g_i}{\partial x} P + \frac{\partial g_i}{\partial y} Q \right) = g_i K_{h_i} + h_i L_i.$$

Velja tudi

$$\frac{\partial h_i}{\partial x} P + \frac{\partial h_i}{\partial y} Q = K_{h_i} h_i.$$

Izraz (2.74) postane

$$\frac{g_i K_{h_i} h_i + h_i^2 L_i - K_{h_i} h_i g_i}{h_i^2} = \frac{h_i^2 L_i}{h_i^2} = L_i.$$

In to velja za vse tovrstne izraze ( $i = 1, \dots, r$ ). Torej formule z zgornjimi izračuni in (2.58) postanejo:

$$\begin{aligned} & f_1^{\alpha_1} \dots f_q^{\alpha_q} \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right)^{\beta_1} \dots \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right)^{\beta_r} \alpha_1 K_1 + \dots + f_1^{\alpha_1} \dots f_q^{\alpha_q} \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right)^{\beta_1} \dots \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right)^{\beta_r} \alpha_q K_q + \\ & + f_1^{\alpha_1} \dots f_q^{\alpha_q} \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right)^{\beta_1} \dots \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right)^{\beta_r} \beta_1 L_1 + \dots + f_1^{\alpha_1} \dots f_q^{\alpha_q} \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right)^{\beta_1} \dots \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right)^{\beta_r} \beta_r L_r. \end{aligned}$$

Vidimo, da lahko pri vsakem členu izpostavimo  $f_1^{\alpha_1} \dots f_q^{\alpha_q} \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right)^{\beta_1} \dots \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right)^{\beta_r}$  in dobimo

$$f_1^{\alpha_1} \dots f_q^{\alpha_q} \left(e^{\frac{g_1}{h_1}}\right)^{\beta_1} \dots \left(e^{\frac{g_r}{h_r}}\right)^{\beta_r} (\alpha_1 K_1 + \dots + \alpha_q K_q + \beta_1 L_1 + \dots + \beta_r L_r). \quad (2.75)$$

Ker je  $\alpha_1 K_1 + \dots + \alpha_q K_q + \beta_1 L_1 + \dots + \beta_r L_r = 0$ , je izraz (2.75) enak nič in velja  $\mathcal{X}H \equiv 0$ . ■

V naslednjem izreku je trditev (i) posledica iz [30], trditev (ii) pa izhaja iz [21, 22].

**Izrek 2.2.40** ([81]) *Predpostavimo, da polinomsko vektorsko polje  $\mathcal{X}$  stopnje  $m$  v  $\mathbb{C}^2$  vsebuje  $p$  ireducibilnih algebraičnih invariantnih krivulj  $f_i = 0$ , takšnih, da  $f_i$  paroma nimajo skupnih faktorjev in  $p$  ustreznih kofaktorjev  $K_i$  za  $i = 1, \dots, p$ . Naj  $\mathcal{X}$  vsebuje tudi  $r$  eksponentnih faktorjev  $e^{\left(\frac{g_j}{h_j}\right)}$  s kofaktorji  $L_j$  za  $j = 1, \dots, r$ . Tedaj velja:*

- (i) *Obstajajo  $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ , ki niso vsi ničelni, tako da je  $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^r \mu_j L_j = -\operatorname{div} \mathcal{X}$  natanko tedaj, ko je funkcija (2.73) integrirajoči množitelj vektorskega polja  $\mathcal{X}$ .*
- (ii) *Če je  $p + r = \binom{m+1}{2}$ , je funkcija (2.73) prvi integral, če velja  $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^r \mu_j L_j = 0$  ali je integrirajoči množitelj, če velja  $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^r \mu_j L_j = -\operatorname{div} \mathcal{X}$ , pri čemer niso vsi  $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$  enaki nič.*

Ker nas zanima integrabilnost sistemov oblike (2.44), lahko včasih uporabimo naslednjo trditev, ki se navezuje na integrirajoče množitelje. Funkcija  $V = 1/\mu$  se imenuje inverzni integrirajoči množitelj.

**Lema 2.2.41** (i) *Če ima sistem (2.44) inverzni integrirajoči množitelj oblike*

$$V = (xy)^\alpha \prod_{i=1}^m F_i^{\beta_i},$$

*kjer je  $F_i$  analitična v  $x$  in  $y$ ,  $F_i(0,0) \neq 0$  za  $i = 1, \dots, m$ ,  $\alpha \neq 0$ , in  $\alpha$  je celo število, ki ni večje od 1, ima (2.44) prvi integral oblike (2.45).*

(ii) *Če ima sistem (2.44) inverzni integrirajoči množitelj oblike  $V = (xy)^\alpha$  in  $a_{\alpha-1, \alpha-1} = b_{\alpha-1, \alpha-1} = 0$ , ima (2.44) prvi integral oblike (2.45).*

Točka (i) v lemi je poseben primer izreka 4.13 (iii) iz [23]. Točka (ii) sledi iz formule (4.28) iz [23].

Darbouxjeva metoda je eno najučinkovitejših orodij pri študiju problema centra sistema (2.56). Če lahko konstruiramo Darbouxjev prvi integral (2.59) ali Darbouxjev integrirajoči množitelj (2.69) z algebraičnimi invariantnimi krivuljami  $f_i = 0$ , ki ne potekajo skozi izhodišče, potem imamo zagotovo prvi integral, ki je analitičen v okolici izhodišča. Če ima sistem (2.43) (ali (2.44)) Darbouxjev prvi integral (2.59), tedaj ima tudi prvi integral (2.45) in zato center v izhodišču (glej [23]).

Ko iščemo algebraične parcialne integrale sistema (2.56), jih iščemo v obliki  $F = \sum_{i+j=0}^s \alpha_{ij} x^i y^j$  s  $K = \sum_{i+j=0}^{m-1} \beta_{ij} x^i y^j$  ( $m$  je stopnja sistema). Nato vstavimo te izraze v enačbo

$$\frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y} \dot{y} = KF \tag{2.76}$$

in enačimo koeficiente pred enakimi monomi na obeh straneh enačbe (2.76), dobimo sistem polinomskih enačb v spremenljivkah  $\alpha_{ij}, \beta_{ij}$ . Če rešitev sistema obstaja, dobimo algebraični parcialni integral (ali več integralov) sistema (2.56).

## 2.2.6 Časovna reverzibilnost in posplošena reverzibilnost

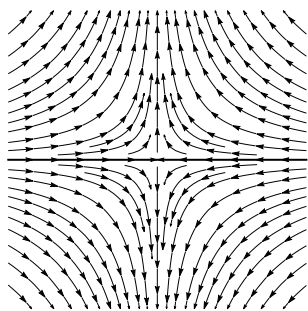
Časovno reverzibilna simetrija nastopi v mnogih primerih v klasični in kvantni mehaniki. V nadaljevanju obravnavamo sisteme, ki imajo simetrijo, ki v realnem sistemu s singularnostjo

tipa fokus ali center dejansko pomeni center. Zato časovno reverzibilni sistemi premorejo neko simetrijsko os (premico)  $L$ . Če (ne) upoštevamo smeri toka, imamo v realnem sistemu glede na os  $L$  dve vrsti simetrij: *zrcalno simetrijo*, kjer je dovolj poznati le polovico faznega portreta, druga polovica faznega portreta je potem zrcalna slika glede na os  $L$ ; in *časovno reverzibilno simetrijo*, ki obravnava tudi tok orbite. Časovno reverzibilna simetrija pomeni, da se vsaka orbita na eni strani premice  $L$  zrcali v sebi obratno (glede na čas obrnjeno) orbito na drugi strani premice  $L$ . Glede na čas obrnjeno orbito  $x(t)$  mislimo, da čas teče v nasprotni smeri:  $x(-t)$ . Kot primer si pogledjmo linearni sistem v ravnini  $(u, v)$ , kjer je premica  $L$  na osi  $u$ . Prvo simetrijo ponazorimo s kanoničnim linearnim sedlom

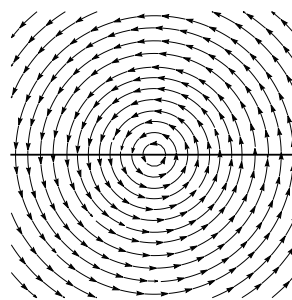
$$\dot{u} = -u, \quad \dot{v} = v \quad (\text{glej sliko 2.11}),$$

drugo pa s kanoničnim linearnim centrom

$$\dot{u} = -v, \quad \dot{v} = u \quad (\text{glej sliko 2.12}).$$



Slika 2.11: Zrcalna simetrija.



Slika 2.12: Časovna reverzibilnost.

V splošnem je realni sistem

$$\dot{u} = U(u, v), \quad \dot{v} = V(u, v), \quad (2.77)$$

zrcalno simetričen glede na os  $u$  natanko tedaj, ko velja

$$U(u, -v) = U(u, v) \quad \text{in} \quad V(u, -v) = -V(u, v), \quad (2.78)$$

in je časovno reverzibilen glede na os  $u$  natanko tedaj, ko velja

$$U(u, -v) = -U(u, v) \quad \text{in} \quad V(u, -v) = V(u, v), \quad (2.79)$$

(glej [114]). Nas bo zanimala samo časovna reverzibilnost, saj jo lahko povežemo s problemom centra in fokusa, kajti vsak sistem, ki ima v izhodišču singularno točko tipa center ali fokus, ima zaradi zgoraj omenjene simetrije, ki določa časovno reverzibilnost, dejansko center. Na primer, obravnavajmo sistem

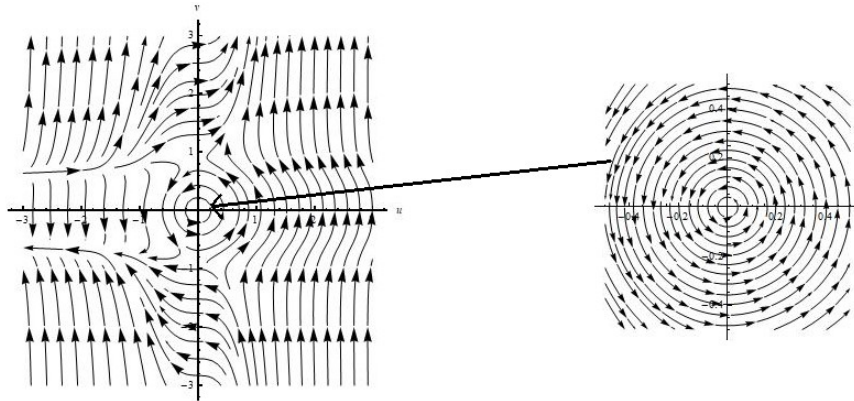
$$\dot{u} = -v - vf(u, v^2), \quad \dot{v} = u + g(u, v^2), \quad (2.80)$$

kjer je  $f$  analitična funkcija brez konstantnega člena in  $g$  analitična funkcija brez konstantnega in brez linearnih členov. Vemo, da je izhodišče tega sistema bodisi center ali fokus. Ker sistem (2.80) zadošča pogoju (2.79), kar v praksi pomeni, da transformacija  $u \rightarrow u, v \rightarrow -v, t \rightarrow -t$

pusti sistem nespremenjen, je sistem časovno reverzibilen. Torej je os  $u$  premica simetrij za trajektorije in zato nobena trajektorija na okolici  $(0,0)$  ne more biti spirala. Odtod sledi, da ima sistem (2.80) center v izhodišču. Poglejmo preprost primer sistema (2.80)

$$\dot{u} = -v - 3uv^3 + 2v^5, \quad \dot{v} = u + 5u^2v^6. \quad (2.81)$$

Vidimo, da ta sistem zadošča enačbi (2.79), kar pomeni, da je časovno reverzibilen. Slika 2.13 prikazuje fazni portret sistema (2.81) in vidimo, da ima sistem center v izhodišču.



Slika 2.13: Fazni portret sistema (2.81).

Če so vse trajektorije sistema simetrične glede na neko premico  $L$ , pravimo, da je  $L$  os simetrije sistema (2.77). Na sliki 2.13 vidimo, da je os simetrije sistema (2.81) os  $u$ .

Kot smo že zgoraj navedli, je lažje obravnavati problem centra za kompleksne sisteme. zato najprej opišimo posplošitev te geometrijske časovne reverzibilnosti na kompleksne sisteme. S substitucijo  $x = u + iv$  kompleksificiramo realni sistem (2.77), da sistem (2.77) postane (kompleksna) diferencialna enačba

$$\dot{x} = P(x, \bar{x}) \quad (2.82)$$

in ji dodamo njeno kompleksno konjugirano enačbo ter obravnavamo  $\bar{x}$  kot novo spremenljivko  $y$  in privzamemo, da so parametri druge enačbe poljubni. Tako dobimo sistem

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y). \quad (2.83)$$

Funkcija  $P(x, \bar{x})$  v (2.82) zadošča enačbi

$$P(x, \bar{x}) = U\left(\frac{1}{2}(x + \bar{x}), \frac{1}{2i}(x - \bar{x})\right) + iV\left(\frac{1}{2}(x + \bar{x}), \frac{1}{2i}(x - \bar{x})\right).$$

Tako zrcalna kot tudi časovna reverzibilnost sta zajeti v preprostem pogoju na vektorju  $\mathbf{a}$  koeficientov polinoma  $P(x, \bar{x})$ : sistem (2.77) ima eno izmed teh dveh simetrij glede na os  $u$  natanko tedaj, ko je

$$U(u, -v) + iV(u, -v) \equiv \pm(U(u, v) - iV(u, v)),$$

kar v jeziku polinoma  $P$  pomeni pogoj  $P(\bar{x}, x) = \pm \overline{P(x, \bar{x})}$ , iz katerega sledi, da je  $\bar{\mathbf{a}} = \pm \mathbf{a}$ . Pozitivni predznak povsod zgoraj pomeni zrcalno simetrijo, negativni pa časovno reverzibilnost. Tako imamo naslednjo lemo.

**Lema 2.2.42** Vektor  $\mathbf{a}$  naj označuje koeficiente polinoma  $P(x, \bar{x})$  v (2.82).

- (i) Sistem (2.77) je zrcalno simetričen (časovno reverzibilen) glede na os  $u$  natanko tedaj, ko je  $\mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}}$  ( $\mathbf{a} = -\bar{\mathbf{a}}$ ), t. j. vsi koeficienti so realni (vsi koeficienti so čista imaginarna števila).
- (ii) Če je  $\mathbf{a} = \pm \bar{\mathbf{a}}$ , je  $u$  os simetrije sistema (2.77).

Iz zgornje leme sledi, da je  $u$  os simetrije sistema (2.82), če je

$$P(\bar{x}, x) = \overline{P(x, \bar{x})}, \quad (2.84)$$

kar ustreza zrcalni simetriji, ali če je

$$P(\bar{x}, x) = -\overline{P(x, \bar{x})}, \quad (2.85)$$

kar ustreza časovno reverzibilni simetriji. Če je izpolnjen pogoj (2.85), je sistem (2.82) z involucijo

$$x \rightarrow \bar{x}, \quad \bar{x} \rightarrow x \quad (2.86)$$

transformiran v sistem

$$\dot{x} = -P(x, \bar{x}), \quad \dot{\bar{x}} = -\overline{P(x, \bar{x})}. \quad (2.87)$$

Torej, če je (2.82) dobljena iz (2.77) in v enačbi (2.82) ter v njej konjugirani enačbi uporabimo transformacijo (2.86), je realni sistem (2.77) časovno reverzibilen in ima posledično center v izhodišču. Če os simetrije  $L$ , ki poteka skozi izhodišče, ne sovpada z osjo  $u$ , lahko uporabimo rotacijo  $x_1 = e^{-i\varphi}x$ , ki os  $L$  zarotira za ustrezen kot  $\varphi$  in jo preslika v os  $u$ . V novih koordinatah  $(x_1, \bar{x}_1)$  sledi enačba:

$$\dot{x}_1 = e^{-i\varphi}P(e^{i\varphi}x_1, e^{-i\varphi}\bar{x}_1) := P(x_1, \bar{x}_1).$$

Iz leme (2.2.42) sledi, da je ta sistem časovno reverzibilen glede na premico  $\text{Im}x_1 = 0$ , če velja analog pogojev (2.85), t. j.  $P(\bar{x}_1, x_1) = -\overline{P(x_1, \bar{x}_1)}$ , kar po kratkem izračunu prinese

$$e^{i\varphi}\overline{P(e^{i\varphi}x_1, e^{-i\varphi}\bar{x}_1)} = -e^{-i\varphi}P(e^{i\varphi}\bar{x}_1, e^{-i\varphi}x_1).$$

Zato je (2.82) časovno reverzibilen, ko obstaja takšen  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , da je

$$e^{2i\varphi}\overline{P(x, \bar{x})} = -P(e^{2i\varphi}\bar{x}, e^{-2i\varphi}x). \quad (2.88)$$

Kot smo videli zgoraj, dobimo kompleksifikacijo sistema (2.77) tako, da enačbi (2.82) dodamo njeno konjugirano enačbo. Iz enačbe (2.88) in njene konjugirane enačbe sledi naslednja naravna posplošitev časovne reverzibilnosti v  $\mathbb{C}^2$ .

**Definicija 2.2.43** Sistem

$$\frac{dz}{dt} = F(z),$$

kjer je  $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  (ali  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ), je časovno reverzibilen, če obstaja linearna transformacija

$$T : (x, y) \mapsto (\gamma y, \gamma^{-1}x), \quad \gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad (2.89)$$

da je

$$\frac{d(Tz)}{dt} = -F(Tz).$$

Za sisteme oblike (2.83) lahko zgornjo definicijo ekvivalentno zapišemo na naslednji način.

**Definicija 2.2.44** Sistem (2.83) je časovno reverzibilen glede na transformacijo (2.89), če in samo če velja

$$P(x, y) = -\gamma Q(\gamma y, \gamma^{-1}x) \quad (2.90)$$

za vse  $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Kot smo videli zgoraj, ima realni polinomski sistem s singularnostjo tipa center ali fokus, ki je časovno reverzibilen glede na premico, ki poteka skozi to singularno točko, nujno center v obravnavani singularni točki. V naslednjem izreku (dokaz glej v [114]) vidimo, da podobno velja za kompleksne sisteme oblike (2.43).

**Izrek 2.2.45** Vsak časovno reverzibilen sistem oblike (2.43) (ali (2.44)) ima center v izhodišču.

**Opomba 2.2.46** V izreku 2.2.45 koeficienti v sistemu (2.43) ne zadoščajo nujno pogoju  $b_{qp} = \bar{a}_{pq}$ , saj govorimo o splošnem kompleksnem sistemu.

Množica časovno reverzibilnih sistemov v prostoru parametrov sistema (2.43) ni nujno raznoterost, saj je, kot bomo videli v nadaljevanju, definirana z racionalno parametrizacijo. Za  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{2\ell}) \in \mathbb{N}_0^{2\ell}$  naj  $[\nu]$  označuje monom v  $\mathbb{C}[a, b]$ , ki je podan s

$$[\nu] = a_{p_1, q_1}^{\nu_1} \cdots a_{p_\ell, q_\ell}^{\nu_\ell} b_{q_\ell, p_\ell}^{\nu_{\ell+1}} \cdots b_{q_1, p_1}^{\nu_{2\ell}}. \quad (2.91)$$

Naj  $\hat{\nu}$  označuje involucijo od  $\nu$ ; torej:  $\hat{\nu} = (\nu_{2\ell}, \dots, \nu_1)$ . Za fiksno družino (2.43) (ali (2.44)) in ustrezno preslikavo  $\mathcal{L}$  podano z

$$\mathcal{L}(\nu) = \binom{p_1}{q_1} \nu_1 + \cdots + \binom{p_\ell}{q_\ell} \nu_\ell + \binom{q_\ell}{p_\ell} \nu_{\ell+1} + \cdots + \binom{q_1}{p_1} \nu_{2\ell}, \quad (2.92)$$

definiramo množico

$$\mathcal{M} = \{\nu \in \mathbb{N}_0^{2\ell} : \mathcal{L}(\nu) = (j, j) \text{ za neki } j \in \mathbb{N}_0\}. \quad (2.93)$$

Naj bo  $I_{sym}$  ideal definiran z

$$I_{sym} = \langle [\nu] - [\hat{\nu}] : \nu \in \mathcal{M} \rangle \subset \mathbb{C}[a, b]. \quad (2.94)$$

Ideal  $I_{sym}$  imenujemo *simetrijski ideal* ali *ideal Sibirskega* za družino (2.43) (ali (2.44)).

Za dokaz naslednje trditve glej [114].

**Trditev 2.2.47** Fokusne količine sistema (2.43) (ali (2.44)) imajo obliko

$$g_{kk} = \sum_{\{\nu: L(\nu)=(k,k)\}} g_{kk}^{(\nu)}([\nu] - [\hat{\nu}]). \quad (2.95)$$

Zaradi definicije Bautinovega ideala  $\mathcal{B}$  in trditve 2.2.47 je  $\mathcal{B} \subset I_{sym}$ , zato je  $\mathbf{V}(I_{sym}) \subset \mathbf{V}(\mathcal{B})$ , kar pomeni, da ima vsak časovno reverzibilni sistem (2.43) (ali (2.44)) center v izhodišču, torej izrek 2.2.45 drži.

Naslednji izrek poda karakterizacijo množice časovno reverzibilnih sistemov (za dokaz glej [115]).



**Izrek 2.2.48** Naj bo  $\mathcal{R} \subset E(a, b)$  množica vseh časovno reverzibilnih sistemov v družini (2.43). Tedaj velja:

- (i)  $\mathcal{R} \subset \mathbf{V}(I_{sym})$  in  
(ii)  $\mathbf{V}(I_{sym}) \setminus \mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbf{V}(I_{sym}) : \text{obstaja par } (p, q) \in S \text{ z lastnostjo } a_{pq}b_{qp} = 0 \text{ in } a_{pq} + b_{qp} \neq 0\}$ .

Ker je  $I_{sym}$  praideal (glej [110]), je raznoterost  $\mathbf{V}(I_{sym})$  ireducibilna (glej poglavje 1). Dejansko je bila za vse polinomske sisteme, obravnavane do sedaj,  $\mathbf{V}(I_{sym})$  komponenta centralne raznoterosti. Avtorja v [114] postavita domnevo, da je to vedno res v sistemih oblike (2.43).

V nadaljevanju si pogledjmo, kako izračunamo množico časovno reverzibilnih sistemov  $\mathcal{R}$ . Označimo z

$$(a, b) = (a_{p_1, q_1}, a_{p_2, q_2}, \dots, a_{p_\ell, q_\ell}, b_{q_\ell, p_\ell}, \dots, b_{q_2, p_2}, b_{q_1, p_1})$$

urejen vektor koeficientov sistema (2.43), z  $E(a, b) = \mathbb{C}^{2\ell}$  označimo prostor parametrov sistema (2.43) in s  $\mathbb{C}[a, b]$  polinomske kolobar spremenljivk  $a_{pq}$  in  $b_{qp}$  nad poljem (obsegom)  $\mathbb{C}$ .

Pogoj (2.90) pomeni, da je sistem (2.43) časovno reverzibilen, če je

$$i \left( x - \sum_{p+q=1}^{n-1} a_{pq} x^{p+1} y^q \right) = \gamma i \left( \gamma^{-1} x - \sum_{p+q=1}^{n-1} b_{qp} (\gamma y)^q (\gamma^{-1} x)^{p+1} \right) = i \left( x - \sum_{p+q=1}^{n-1} b_{qp} \gamma^{q-p} x^{p+1} y^q \right),$$

in odtod sledi, da je

$$a_{pq} = \gamma^{q-p} b_{qp} \quad \text{oz. ekvivalentno} \quad b_{qp} = \gamma^{p-q} a_{pq}, \quad (2.96)$$

kar ni ne fiksni polinomske opis množice  $\mathcal{R}$  (ker je število  $\gamma$  različno za različne sisteme), niti ni polinomska parametrizacija od  $\mathcal{R}$ . V izreku 2.2.48 smo videli, da je  $\mathcal{R} \subset \mathbf{V}(I_{sym})$ . Sedaj bomo pokazali, da je  $\mathbf{V}(I_{sym})$  zaprtje Zariskega množice  $\mathcal{R}$  z uporabo izreka racionalne implicitizacije (izrek 1.5.19).

Začnimo s parametrizacijo množice  $\mathcal{R}$ : zapišimo pogoj (2.96) v obliki

$$a_{p_k q_k} = t_k, \quad b_{q_k p_k} = \gamma^{p_k - q_k} t_k, \quad (2.97)$$

kjer je  $k = 1, \dots, \ell$ . Iz geometrijskega vidika enačbe (2.97) definirajo hiperploskev v afinem prostoru

$$\mathbb{C}^{3\ell+1} = (a_{p_1, q_1}, a_{p_2, q_2}, \dots, a_{p_\ell, q_\ell}, b_{q_\ell, p_\ell}, \dots, b_{q_2, p_2}, b_{q_1, p_1}, t_1, \dots, t_\ell, \gamma).$$

Tako je množica vseh časovno reverzibilnih sistemov projekcija te hiperploskve na  $\mathbb{C}^{2\ell} = E(a, b)$ . Spomnimo se enačb (1.37) in (1.38) ter izreka 1.5.19 in definirajmo za  $1 \leq r \leq \ell$ :

$$Q_r(t_1, \dots, t_\ell, \gamma) \equiv 1,$$

za  $\ell + 1 \leq r \leq 2\ell$ :

$$Q_r(t_1, \dots, t_\ell, \gamma) = \begin{cases} \gamma^{q_{2\ell-r+1} - p_{2\ell-r+1}}, & \text{če je } p_{2\ell-r+1} - q_{2\ell-r+1} \leq 0 \\ 1, & \text{če je } p_{2\ell-r+1} - q_{2\ell-r+1} > 0, \end{cases}$$

za  $1 \leq r \leq \ell$ :

$$P_r(t_1, \dots, t_\ell, \gamma) = t_r,$$

za  $\ell + 1 \leq r \leq 2\ell$ :

$$P_r(t_1, \dots, t_\ell, \gamma) = \begin{cases} t_{2\ell-r+1}, & \text{če je } p_{2\ell-r+1} - q_{2\ell-r+1} \leq 0 \\ \gamma^{p_{2\ell-r+1} - q_{2\ell-r+1}} t_{2\ell-r+1}, & \text{če je } p_{2\ell-r+1} - q_{2\ell-r+1} > 0. \end{cases}$$

Nadalje definiramo

$$Q = Q_1 \cdots Q_{2\ell}$$

$$x_r = \begin{cases} a_{p_r q_r}, & \text{če je } 1 \leq r \leq \ell \\ b_{q_{2\ell-r+1} p_{2\ell-r+1}}, & \text{če je } \ell + 1 \leq r \leq 2\ell \end{cases}$$

in naj bo

$$H = \langle 1 - wQ, Q_r x_r - P_r \mid r = 1, \dots, 2\ell \rangle \subset \mathbb{C}[w, t_1, \dots, t_\ell, \gamma, a, b]. \quad (2.98)$$

Potem je po izreku 1.5.19 najmanjša raznoterost, ki vsebuje množico vseh časovno reverzibilnih sistemov v družini sistemov (2.43)

$$\overline{\mathcal{R}} = \mathbf{V}(\mathcal{I}), \quad \text{kjer je } \mathcal{I} = \mathbb{C}[a, b] \cap H. \quad (2.99)$$

Vidimo, da je zaprtje Zariskega množice vseh časovno reverzibilnih sistemov raznoterost ideala  $\mathcal{I}$ . Da bi našli množico generatorjev ideala  $\mathcal{I}$ , je po izreku 1.3.2 dovolj izračunati Gröbnerjevo bazo ideala  $H$  glede na urejenost  $z \{w, \gamma, t_k\} > \{a_{p_k q_k}, b_{q_k p_k} \mid k = 1, \dots, \ell\}$  in nato iz seznama dobljenih polinomov vzeti tiste polinome, ki so odvisni samo od  $a_{p_k q_k}, b_{q_k p_k}, k = 1, \dots, \ell$ .

Iz (2.99) in izreka 2.2.48(i) sledi, da je  $\mathbf{V}(\mathcal{I}) \subset \mathbf{V}(I_{sym})$ .

Dokazati je mogoče (glej [110]), da velja

$$I_{sym} = \mathcal{I}. \quad (2.100)$$

Ker je ideal  $I_{sym}$  praideal (glej zgoraj), iz (2.100) sledi, da je tudi  $\mathcal{I}$  praideal. Iz (2.99) in (2.100) pa dobimo naslednji rezultat, ki opisuje časovno reverzibilne sisteme.

**Izrek 2.2.49** Raznoterost ideala Sibirskega  $I_{sym}$  je zaprtje Zariskega množice  $\mathcal{R}$  vseh časovno reverzibilnih sistemov v družini (2.43) (ali (2.44)).

Algoritem spodaj poskrbi za množico generatorjev ideala  $= I_{sym}(\mathcal{I})$ , ki ustreza sistemu (2.43) ali (2.44). Pravilnost algoritma je dokazana v [114].

|   |
|---|
| <p><b>Algoritem za izračun <math>I_{sym}</math></b></p> <p><b>Vnos:</b></p> <p>Urejena množica indeksov <math>\{(p_1, q_1), \dots, (p_\ell, q_\ell)\}</math>,<br/>ki določa družino sistemov (2.43).</p> <p><b>Rezultat:</b></p> <p>Reducirana Gröbnerjeva baza <math>G</math> ideala <math>I_{sym}</math>.</p> <p><b>Postopek:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Izračunaj reducirano Gröbnerjevo bazo <math>G_H</math> ideala <math>H</math>,<br/>definiranega z (2.98) glede na leksikografsko urejenost <math>z</math><br/><math>w &gt; t_1 &gt; \dots &gt; t_\ell &gt; \gamma &gt; a_{p_1 q_1} &gt; \dots &gt; b_{q_1 p_1}</math>.</li> <li>2. <math>G := G_H \cap \mathbb{C}[a, b]</math>.</li> </ol> |
|---|

Tabela 2.1: Algoritem za izračun  $I_{sym}$ .

Zgornji algoritem bomo v poglavju 3 uporabili pri izračunu množice časovno reverzibilnih sistemov znotraj družine kubičnih sistemov in sistemov četrte stopnje.

Sedaj obravnavamo dve vrsti t. i. posplošene reverzibilnosti sistemov (2.43) oz. kot smo videli zgoraj, če obravnavamo problem centra ekvivalentnih sistemov (2.44) s homogenimi nelinearnostmi stopnje  $d$  glede na preslikave oblike

$$x_1 = \frac{k_1 y}{f(x, y)^{1/(d-1)}}, \quad y_1 = \frac{k_2 x}{f(x, y)^{1/(d-1)}}. \quad (2.101)$$

Trditve, ki jih predstavimo v nadaljevanju, so bile prvič uporabljene pri dokazu integrabilnosti za nekatere sisteme v [43] in so bile pred kratkim dokazane v [44].

Označimo polinoma na desni strani sistema (2.44) s  $\mathcal{P}(x, y)$  in  $\mathcal{Q}(x, y)$ :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - \sum_{p+q=1}^{n-1} a_{pq} x^{p+1} y^q = \mathcal{P}(x, y), \\ \dot{y} &= -y + \sum_{p+q=1}^{n-1} b_{qp} x^q y^{p+1} = \mathcal{Q}(x, y). \end{aligned} \quad (2.102)$$

Splošni kompleksni sistem oblike (2.83) je (časovno) reverzibilen, če obstaja obrnljiva transformacija  $R$ ,  $(x_1, y_1) = R(x, y)$ , da je sistem nespremenjen glede na transformacijo  $R$  in spremembo časa  $t \rightarrow -T$ . Najpreprostejši primer reverzibilnosti je, ko je  $R$  linearna transformacija oblike

$$R : x_1 \rightarrow \gamma y, \quad y_1 \rightarrow \gamma^{-1} x, \quad (2.103)$$

za neki  $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Če je sistem (2.102) reverzibilen glede na (2.103), smo v izreku 2.2.45 videli, da ima center v izhodišču. Na pojav, ki ga obravnavamo v naslednji trditvi, lahko gledamo kot posplošeno reverzibilnost, saj je sistem nespremenjen glede na obrnljivo transformacijo koordinat in spremembo časa  $dt \rightarrow \tilde{f}(u, v) dT$ . Trditev je podana bolj splošno za sisteme z nehomogenimi nelinearnostmi.

**Trditev 2.2.50** *Recimo, da za sistem diferencialnih enačb (2.102) obstaja obrnljiva sprememba koordinat  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  z inverzom  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ , ki sistem spremeni v sistem*

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\mathcal{P}(u, v)}{\tilde{f}(u, v)}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\mathcal{Q}(u, v)}{\tilde{f}(u, v)}, \quad (2.104)$$

kjer sta  $\mathcal{P}(x, y)$  in  $\mathcal{Q}(x, y)$  enaka polinoma kot v (2.102) v spremenljivkah  $(u, v)$ ,  $\tilde{f}(u, v) \neq 0$ , in

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \mathcal{P}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y} \mathcal{Q}(x, y) \right) \Big|_{x=x(u,v), y=y(u,v)} = -\frac{\mathcal{P}(u, v)}{\tilde{f}(u, v)}, \quad (2.105)$$

$$\left( \frac{\partial v}{\partial x} \mathcal{P}(x, y) + \frac{\partial v}{\partial y} \mathcal{Q}(x, y) \right) \Big|_{x=x(u,v), y=y(u,v)} = -\frac{\mathcal{Q}(u, v)}{\tilde{f}(u, v)}, \quad (2.106)$$

$$xy = uv + h.o.t. \quad (2.107)$$

Tedaj ima sistem (2.102) center v izhodišču..

**Dokaz.** Predpostavimo, da sistem (2.102) ni integrabilen. Ker je  $\mathcal{P} = x + \dots$ ,  $\mathcal{Q} = -y + \dots$ , obstaja formalna potenčna vrsta  $F(x, y) = xy + \dots$ , takšna, da velja

$$\left. \frac{dF(x, y)}{dt} \right|_{(2.102)} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \mathcal{P}(x, y) + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \mathcal{Q}(x, y) = \lambda_m (xy)^m + \dots, \quad (2.108)$$

kjer je  $m$  naravno število in  $\lambda_m \neq 0$  je konstanta. Potem je

$$\begin{aligned} \left. \frac{dF(x, y)}{dt} \right|_{(2.102)} &= \frac{\partial F(u, v)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \mathcal{P}(x, y) + \frac{\partial F(u, v)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \mathcal{P}(x, y) \\ &+ \frac{\partial F(u, v)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} \mathcal{Q}(x, y) + \frac{\partial F(u, v)}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \mathcal{Q}(x, y) \\ &= \frac{-1}{\tilde{f}(u, v)} \left[ \frac{\partial F(u, v)}{\partial u} \mathcal{P}(u, v) + \frac{\partial F(u, v)}{\partial v} \mathcal{Q}(u, v) \right] = -\lambda_m (xy)^m + \dots, \end{aligned} \quad (2.109)$$

kjer druga enakost drži zaradi (2.105) in (2.106) in zadnja zaradi (2.107). Iz (2.108) in (2.109) sledi, da je  $\lambda_m = 0$  za vse naravne  $m$ . To pomeni, da je ustrezen sistem (2.102) integrabilen in ima zato center v izhodišču. ■

Trditev 2.2.50 bomo uporabili v razdelku 3.2.3 za dokaz integrabilnosti sistema četrte stopnje. Tukaj podamo drug primer njene uporabe z rešitvijo odprtega problema, ki je bil predlagan v [40]. Pokažimo, da ima sistem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + b_{04}x^5 + x^2y^3 - y^5, \\ \dot{y} &= -y + x^5 - x^3y^2 + b_{04}y^5 \end{aligned} \quad (2.110)$$

center v izhodišču. Za sistem (2.110) so avtorji v [40] našli samo eno invariantno krivuljo stopnje štiri  $f(x, y) = 1 + b_{04}(x^4 - y^4)$ , ki ni dovolj za konstrukcijo Darbouxjevega prvega integrala ali Darbouxjevega integrirajočega množitelja. Lahko uporabimo trditev 2.2.50, da dokažemo, da ima ta sistem prvi integral oblike (2.45). V sistem (2.110) vpeljemo novi koordinati

$$u = \frac{y}{f(x, y)^{1/4}} \quad \text{in} \quad v = \frac{x}{f(x, y)^{1/4}}. \quad (2.111)$$

Hitro lahko preverimo, da (2.111) zadošča pogojem (2.105)–(2.107). Zato je po trditvi 2.2.50 sistem (2.110) integrabilen in ima zato center v izhodišču.

Enačba  $\tilde{f}(u, v) = 0$  v trditvi 2.2.50 ne definira nujno invariantne krivulje sistema (2.102), četudi je v vseh primerih, kjer smo uporabili trditev 2.2.50, enolična invariantna krivulja, ki nam pomaga pri konstrukciji transformacije v dokazu.

Včasih je reverzibilnost skrita in jo lahko zaznamo skozi spremembo koordinat in časa. Naslednja trditev obravnava situacijo, ko sistem postane reverzibilen glede na involucijo (2.103) po spremembi koordinat in časa.

**Trditev 2.2.51** *Predpostavimo, da je z obrnljivo analitično transformacijo oblike*

$$z = k_1x + h.o.t., \quad w = k_2y + h.o.t. \quad (2.112)$$

in spremembo časa  $dt = \tilde{f}(w, z)dT$  sistem (2.102) zapisan v obliki

$$\frac{dz}{dT} = -z(1 + h(z, w)), \quad \frac{dw}{dT} = w(1 - h(z, w)), \quad (2.113)$$

kjer je  $h(z, w)$  analitična funkcija spremenljivk  $(z, w)$ . Tedaj ima sistem (2.102) center v izhodišču, če je sistem (2.113) invarianten glede na transformacijo  $z \rightarrow w$ ,  $w \rightarrow z$  in  $T \rightarrow -T$ .

**Dokaz.** Sistem (2.113) je invarianten glede na transformacijo  $z \rightarrow w$ ,  $w \rightarrow z$  in  $T \rightarrow -T$ , kar pomeni, da je časovno reverzibilen. Zato ima po izreku (2.2.45) sistem (2.113) prvi integral oblike  $\psi = zw + \dots$ , t. j., ima center v izhodišču in posledično, ker je (2.112) obrnljiva v okolici izhodišča, ima tudi sistem (2.102) center v izhodišču. ■

V razdelku 3.2.3 bomo trditev 2.2.51 uporabili pri dokazu integrabilnosti sistema četrte stopnje. Sedaj pogledjmo, kako je lahko trditev 2.2.51 uporabna pri iskanju integrabilnih sistemov znotraj polinomske družine Lotka-Volterrovih sistemov (2.102) s homogenimi nelinearnostmi. Najprej navedimo naslednjo pomožno trditev.

**Lema 2.2.52** *Naj bo  $f$  polinom oblike  $f(x, y) = 1 + F(x, y)$ , kjer je  $F$  homogen polinom stopnje  $m$ . Tedaj obstaja takšen polinom  $\tilde{f}(w, z)$  stopnje  $m$ , da je*

$$\tilde{f}(w, z)f(x, y) \equiv 1$$

za

$$z = k_1 y / f(x, y)^{1/m} \text{ in } w = k_2 x / f(x, y)^{1/m}. \quad (2.114)$$

Lahko trdimo še več, in sicer velja

$$\tilde{f}(x, y) = 1 + G(x, y), \quad (2.115)$$

kjer je

$$G(x, y) = -F\left(\frac{x}{k_2}, \frac{y}{k_1}\right). \quad (2.116)$$

**Dokaz.** Iščemo  $\tilde{f}(x, y)$  v obliki (2.115) in po kratkem izračunu dobimo

$$G(k_2 x, k_1 y) = -F(x, y),$$

kar prinese (2.116). ■

Obravnavajmo polinomski Lotka-Volterrov sistem oblike

$$\dot{x} = x(1 + A(x, y)), \quad \dot{y} = -y(1 + B(x, y)), \quad (2.117)$$

kjer sta  $A$  in  $B$  homogena polinoma stopnje  $d$ .

**Trditev 2.2.53** *Obstaja polinom  $f$  oblike  $f(x, y) = 1 + F(x, y)$ , kjer je  $F$  takšen homogen polinom stopnje  $d - 1$ , da sprememba koordinat*

$$z = k_1 y / f(x, y)^{1/(d-1)} \text{ and } w = k_2 x / f(x, y)^{1/(d-1)}, \quad (2.118)$$

katere inverzna sprememba je podana z

$$x = w / (k_2 \tilde{f}(w, z)^{1/(d-1)}) \text{ and } y = z / (k_1 \tilde{f}(w, z)^{1/(d-1)}), \quad (2.119)$$

kjer je  $\tilde{f}(w, z) = 1 / f(x(w, z), y(w, z))$ , transformira (2.117) v sistem oblike (2.113). Še več,

$$f = 1 + \frac{A + B}{2} \quad (2.120)$$

in

$$h(w, z) = \frac{1}{2} \left( (\hat{B} - \hat{A}) + \frac{1}{d-1} \left( \left( x \frac{\partial(A+B)}{\partial x} \right) \Big|_{x=w/k_2, y=z/k_1} (\tilde{f} + \hat{A}) - \left( y \frac{\partial(A+B)}{\partial y} \right) \Big|_{x=w/k_2, y=z/k_1} (\tilde{f} + \hat{B}) \right) \right), \quad (2.121)$$

kjer je

$$\hat{A}(w, z) = A(w/k_2, z/k_1), \quad \hat{B}(w, z) = B(w/k_2, z/k_1). \quad (2.122)$$

**Dokaz.** Če izvedemo substitucijo (2.118), dobimo

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -z(1+B) - 1/(d-1)z \frac{1}{f} \left( x \frac{\partial f}{\partial x} (1+A) - y \frac{\partial f}{\partial y} (1+B) \right), \\ \dot{w} &= w(1+A) - 1/(d-1)w \frac{1}{f} \left( x \frac{\partial f}{\partial x} (1+A) - y \frac{\partial f}{\partial y} (1+B) \right), \end{aligned} \quad (2.123)$$

kjer je desna stran sistema definirana z (2.122). Če v (2.123) spremenimo čas  $dt = \tilde{f}(w, z)dT$ , dobimo sistem

$$\dot{z} = Z(z, w), \quad \dot{w} = W(z, w). \quad (2.124)$$

Če odštejemo drugo enačbo v (2.124) od prve, vidimo, da je (2.124) oblike (2.113), če je

$$\tilde{f}(2 + \hat{A} + \hat{B}) = 2,$$

kjer  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  pomenita polinoma  $A$  in  $B$ , ovrednotena z (2.119). Iz zadnje enačbe ugotovimo, da je

$$\tilde{f} = 1 - \frac{A(w/k_2, z/k_1) + B(w/k_2, z/k_1)}{2}.$$

Iz tega izraza za  $\tilde{f}$  in iz (2.116) vidimo, da je polinom  $f$  definiran z (2.120).

Če odštejemo drugo enačbo v (2.124) od prve, vidimo, da je polinom  $h(w, z)$  oblike (2.121).

■

Kot direktno posledico trditve 2.2.51 in 2.2.53 dobimo naslednji kriterij za obstoj centra v sistemu (2.117).

**Trditev 2.2.54** *Sistem (2.117) ima center v izhodišču, če je*

$$h(w, z) + h(z, w) \equiv 0, \quad (2.125)$$

kjer je  $h$  funkcija definirana z (2.121).

Z uporabo trditve 2.2.54 in algoritmov računske algebre lahko najdemo pogoje za obstoj centra v polinomskih Lotka-Volterrovih sistemih s homogenimi nelinearnostmi, kot so to naredili avtorji v [44, izrek 2.6]. Podoben pristop lahko uporabimo za katerikoli sistem s homogenimi nelinearnostmi (ne samo Lotka-Volterrovi sistemi), vendar v splošnem primeru ne moremo transformirati sistema v obliko (2.113) in tako ne moremo najti posplošitve trditve 2.2.53. Pokažimo,

kako pristop deluje za splošne sisteme s homogenimi nelinearnostmi z uporabo kvadratičnih sistemov

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + a_{10}x^2 + a_{01}xy + a_{-12}y^2, \\ \dot{y} &= -y + b_{10}xy + b_{01}y^2 + b_{2,-1}x^2.\end{aligned}\tag{2.126}$$

Naj bosta  $f = 1 + c_1x + c_2y$  in  $\tilde{f} = 1 - c_1w/k_2 - c_2z/k_1$ . Potem je  $f\tilde{f}$  v spremenljivkah

$$w = \frac{xk_2}{f}, \quad z = \frac{yk_1}{f}\tag{2.127}$$

identično enak 1. Če uporabimo inverz od (2.127) v sistemu (2.126), dobimo kubični sistem, ki je zelo dolg. Zato ne izpišemo. Dobljen sistem je časovno reverzibilen, če zadošča pogojem izreka 6 v [67]. Vstavimo koeficiente dobljenega sistema v polinome izreka 6 v [67] in dobimo polinome, ki generirajo ideal, ki mu dodamo polinoma  $1 - k_1\alpha$ ,  $1 - k_2\beta$  (s tem preprečimo, da bi kateri izmed  $k_1$  ali  $k_2$  bil ničelni). Iz dobljenega ideala eliminiramo spremenljivke  $\alpha, \beta, k_1, k_2, c_1$  in  $c_2$  ter izračunamo minimalno dekompozicijo raznoterosti ideala. Dobimo dve ireducibilni podraznoterosti, ki jih definirata naslednja ideala:

$$\begin{aligned}J_1 = \langle a_{10}a_{01} - b_{10}b_{01}, a_{-12}b_{10}^3 - b_{2,-1}a_{01}^3, a_{10}^3a_{-12} - b_{2,-1}b_{01}^3, \\ a_{10}a_{-12}b_{10}^2 - a_{01}^2b_{2,-1}b_{01}, a_{10}^2a_{-12}b_{10} - a_{01}b_{2,-1}b_{01}^2 \rangle,\end{aligned}$$

in

$$J_2 = \langle b_{10}, a_{01}, a_{10}^3a_{-12} - 6a_{10}a_{-12}b_{01}b_{2,-1} + b_{01}^3b_{2,-1} + 8a_{-12}^2b_{2,-1}^2 \rangle.$$

Raznoterost ideala  $J_1$  je komponenta centralne raznoterosti sistema (2.126), ki ustreza sistemom, ki so reverzibilni glede na transformacijo

$$x \mapsto \gamma y, \quad y \mapsto \gamma^{-1}x, \quad t \mapsto -t,$$

(glej npr. [114, §3.7]) in raznoterost ideala  $J_2$  je podmnožica komponente centralne raznoterosti, ki ustreza Darbouxjevim integrabilnim sistemom s tremi invariantnimi premicami.

### 2.2.7 Bifurkacije limitnih ciklov

Teorija bifurkacij limitnih ciklov, kot jo obravnavamo v tej monografiji, izhaja iz (polinomskih) ravninskih sistemov NDE oblike (2.32). Proučujemo spremembe obnašanja orbit v faznem prostoru poljubnega ravninskega sistema, ki ga označimo z  $\vec{u}' = \mathbf{f}(\vec{u})$ . Še posebej proučujemo število in (medsebojno) postavitev limitnih ciklov sistema  $\vec{u}' = \mathbf{f}(\vec{u})$ , kot sprašuje šestnajsti Hilbertov problem. Mnoge študije se osredotočajo na bifurkacije Hamiltonskih sistemov, kjer za rešitev problema uporabimo tako imenovano Melnikovo funkcijo [68] oziroma tako imenovan Abelov integral, če gre za polinomski Hamiltonski sistem. V tej monografiji obravnavamo tako imenovano Bautinovo metodo, ki je opisana v razdelku 3.1. Za nadaljnje branje priporočamo monografijo [87], ki obravnava izključno probleme bifurkacij v sistemih NDE, in vsebuje preko dvesto virov.

Pri problemu cikličnosti je bistveno prešteti največje možno število limitnih ciklov, ki lahko nastanejo s perturbacijo enostavnega centra ali fokusa v sistemu  $\vec{u}' = \mathbf{f}(\vec{u})$ . Brez izgube za splošnost obravnavajmo singularnost  $\vec{u}_0 = (0, 0)$  sistema  $\vec{u}' = \mathbf{f}(\vec{u})$ . S  $\mathbf{F} = J\mathbf{f}(\vec{u}_0)$  označimo

Jacobijevo matriko preslikave  $\mathbf{f}$  v singularni točki  $\vec{u}_0$ . V enostavnem centru ali fokusu je  $\det(\mathbf{F}) \neq 0$ . Zaradi Hartman-Grobmanovega izreka se v hiperbolični singularni točki ravninskega polinomskega sistema število limitnih ciklov ne spremeni (ostane enako nič). Torej v hiperbolični singularni točki je cikličnost vedno (ne glede na naravo perturbacije) enaka nič. Obravnava cikličnosti v hiperbolični singularni točki zato ni zanimiva. Nehiperbolična singularnost ravninskega sistema nastopi, če je  $\det(\mathbf{F}) = 0$  (kar v ravnini ustreza izrojenim primerom) ali  $\det(\mathbf{F}) > 0$  in  $\text{sled}(\mathbf{F}) = 0$  (kot v sistemu (2.32) z  $\alpha = 0$ , ki je najzanimivejši ravninski primer in opisuje centre in/ali fokuse). S spremembo časa  $t \rightarrow \beta t$  lahko sistem (2.32) preoblikujemo v obliko

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \lambda u - v + P(u, v) \\ \dot{v} &= u + \lambda v + Q(u, v),\end{aligned}\tag{2.128}$$

ki omogoča perturbacije, pri katerih je  $\text{sled}(\mathbf{F}) \neq 0$ . V sistemu (2.128) je  $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$ , polinoma  $P$  in  $Q$  pa sta brez prostih in linearnih členov s stopnjo kvečjemu  $n$ . Naj bo  $P(u, v) = A_{20}u^2 + A_{11}uv + A_{02}v^2 + A_{30}u^3 + \dots + A_{0n}v^n$  in  $Q(u, v) = B_{20}u^2 + B_{11}uv + B_{02}v^2 + B_{30}u^3 + \dots + B_{0n}v^n$  in označimo  $A = (A_{20}, \dots, A_{0n})$ ,  $B = (B_{20}, \dots, B_{0n})$ . Tedaj prostor parametrov sistema (2.128) standardno označimo z  $E(\lambda, (A, B))$ . Ko je  $\lambda = 0$ , sistem (2.128) postane

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -v + P(u, v) \\ \dot{v} &= u + Q(u, v),\end{aligned}\tag{2.129}$$

kar je v bistvu sistem (2.41).

**Definicija 2.2.55** *Obravnavajmo sistem (2.128) s parametri  $(\lambda, (A, B))$  in z  $n((\lambda, (A, B)), \varepsilon)$  označimo število limitnih ciklov sistema (2.128), ki v celoti ležijo znotraj  $\varepsilon$ -okolice točke  $\vec{u}_0 = (0, 0)$ , ki je singularna točka sistema (2.128). Točka  $\vec{u}_0 = (0, 0)$  sistema (2.128) z določenimi (fiksiranimi) koeficienti  $(\lambda^*, (A^*, B^*)) \in E(\lambda, (A, B))$  ima (glede na prostor  $E(\lambda, (A, B))$ ) cikličnost  $c$ , če obstajata taki pozitivni konstanti  $\delta_0$  in  $\varepsilon_0$ , da za vsak  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  in  $0 < \delta < \delta_0$  velja*

$$\max \{n((\lambda, a), \varepsilon) : |(\lambda, (A, B)) - (\lambda^*, (A^*, B^*))| < \delta\} = c.$$

Koncept cikličnosti in idejo metode za obravnavo le-te, ki jo bomo predstavili v poglavju 3, lahko pripišemo ruskemu matematiku Bautinu [6]. Predvsem povzamemo rezultate po [114] in se osredotočimo na iskanje zgornje meje za cikličnost.

Spomnimo se, da je za sistem (2.128) funkcija razlike  $\mathcal{D}(r_0) - r_0 = \eta_1 r_0 + \eta_2 r_0^2 + \eta_3 r_0^3 + \dots$  (definirana v (2.39)) v faznem prostoru povezana z limitnimi cikli okoli  $\vec{u}_0 = (0, 0)$ . Spomnimo se tudi, da koeficiente funkcije razlike imenujemo Ljapunovi koeficienti. Izolirane ničle funkcije razlike (2.39) očitno pripadajo limitnim ciklom sistema (2.128). In v grobem lahko rečemo, da je cikličnost sistema enaka številu pozitivnih ničel funkcije razlike (2.39) na majhni okolici točke  $r_0 = 0$ . Ljapunovi koeficienti sistema (2.128) so realne analitične funkcije spremenljivke  $\lambda$  in koeficientov polinomov  $P$  in  $Q$ ; za fiksno vrednost parametra  $\lambda$  so to polinomi. V razdelku 2.2.3 smo videli, da jih lahko rekurzivno izračunamo.

Iz geometrijskih lastnosti Poincaréjeve (povratne) preslikave sledi, da ima prvi neničelni Ljapunov koeficient lihi indeks, npr.  $2k + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ . V primeru šibkega fokusa (ko je  $k > 0$ ) ima funkcija  $\mathcal{D}(r_0)$  največ  $k$  ničel in zato ima sistem največ  $k$  limitnih ciklov, ki obkrožajo izhodišče (glej izrek 6.2.7 v [114]).

Ko je izhodišče center ( $\mathcal{D}(r_0) \equiv 0$ ), problem cikličnosti postane problem iskanja posebne baze ideala, generiranega z Ljapunovimi koeficienti, ko so le-ti obravnavani kot elementi relevantnega kolobarja funkcij, odvisnih od parametrov sistema. Splošna definicija takšne baze je sledeča.



**Definicija 2.2.56** Naj bosta podana Nötherski kolobar  $R$  in urejena množica  $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots\} \subset R$ . Konstruiramo bazo  $M(I)$  ideala  $I = \langle v_1, v_2, \dots \rangle$  kot sledi:

- (i) poišči prvi neničelni polinom  $v_p \in \mathcal{V}$  in postavi  $M(I) = \{v_p\}$ ,
- (ii) preveri naslednje elemente  $v_j \in \mathcal{S}$ , začeniši z  $j = p + 1$ , in dodaj  $v_j$  v  $M(I)$ , če in samo če  $v_j \notin \langle M(I) \rangle$ .

Baza  $M(I)$ , ki jo konstruiramo na tak način, se imenuje minimalna baza ideala  $I$  glede na urejeno množico  $\mathcal{V}$ . Števnost množice  $M(I)$  imenujemo Bautinova globina ideala  $I$  [64].

Izkaže se, da sta ideal, generiran z Ljapunovimi koeficienti, in ideal, generiran z realnimi fokusnimi količinami pripadajoče kompleksifikacije, enaka (in imata enako bazo), zato v praksi namesto z Ljapunovimi koeficienti običajno raje delamo s fokusnimi količinami. V razdelku 3.2 bomo pokazali prej omenjeno enakost idealov in zvezo med fokusnimi količinami in cikličnostjo sistema. Videli bomo, kako nam lahko minimalna baza ideala v nekaterih primerih pomaga določiti natančno zgornjo mejo za število limitnih ciklov, ki bifurcirajo iz centra sistema.

## 2.3 Diskretni sistemi

V tem razdelku bomo razložili nekatere osnovne pojme v teoriji diskretnih dinamičnih sistemov. V nadaljevanju bomo s pomočjo teorije polinomskih idealov iz poglavja 1 obravnavali limitne cikle za sisteme  $(\mathbb{R}, f)$  v smislu definicije 2.3.1, kjer bo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  realna analitična funkcija oblike

$$f(x) = -x + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{k+1}. \quad (2.130)$$

Sistemi s preslikavo (2.130) očitno (za nobeno kombinacijo koeficientov  $a_k$ ) ne morejo imeti cikla s periodo 3 (in zato po izreku Šarkovskega [62, Polgl. 5]) ne premorejo kaotične dinamike. Ker lahko pri diskretnih sistemih že za preslikave  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  oz. za  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  naletimo na kaotično dinamiko, pa tudi z namenom sklenitve razdelka v zaključeno celoto, bomo definirali nekatere za diskretne dinamične sisteme ključne pojme; vključno z definicijo kaosa.

Kaos so v dinamičnih sistemih začeli odkrivati na prelomu 19. stoletja s študijem problema gibanja treh (in več) teles [96, 100]. Za ponovni razcvet oz. uradno rojstvo teorije kaosa pa danes štejemo [96] Lorenzovo delo z naslovom "Deterministic nonperiodic flow" [83]. Za raziskovalce je bilo presenetljivo predvsem odkritje determinističnega kaosa (ki ga danes imenujemo kar kaos) v sistemih navadnih diferencialnih enačb in zveza med kaotično dinamiko ter občutljivostjo na začetne pogoje. Teorija kaosa se je razmahnila v sedemdesetih in osemdestih letih 20. stoletja, vzporedno z razvojem računalništva. Od tedaj je predmet intenzivnega raziskovanja v matematiki, fiziki, astronomiji, biologiji itd. Čeprav obstaja veliko definicij za kaotični dinamični sistem, splošno sprejete definicije ni [11]. V tem poglavju bomo povzeli najpogosteje privzeto *Devaneyjevo definicijo* kaotičnega (diskretnega) dinamičnega sistema, ki temelji na tranzitivnosti, gostosti periodičnih točk in občutljivosti na začetne pogoje. Ena od klasičnih poti do kaosa je tako imenovano podvajanje periode v točkah bifurkacij (glej npr. [10], [62, Pogl. 10] in [32, str. 130]), ko najdemo orbite s periodami  $k, 2k, 4k, \dots$

Nenazadnje lahko imajo sistemi (2.130) (za posebne vrednosti parametrov  $a_k$ ) vse sode periode in na pripadajočih raznoterostih lahko obravnavamo posplošitve limitnih ciklov s poljubno periodo, kar v literaturi še ni raziskano. Zanimivo bi bilo raziskati tudi morebitne zveze takih

limitnih ciklov s cikli reda 2, ki so obravnavani v [92] in [93], ter že prej v [105, 111, 127]. Prav tako je zanimiva posplošitev sistema  $(S, f)$ , kjer je  $f$  oblike (2.130), na preslikave

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(x, y) = & -(x, y) + \left( \sum_{k=0}^2 a_{1[k,2-k]} x^k y^{2-k}, \sum_{k=0}^2 a_{2[k,2-k]} x^k y^{2-k} \right) + \\ & + \left( \sum_{k=0}^3 a_{1[k,3-k]} x^k y^{3-k}, \sum_{k=0}^3 a_{2[k,3-k]} x^k y^{3-k} \right) + \dots, \end{aligned} \quad (2.131)$$

kjer je  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

### 2.3.1 Glavne definicije

**Definicija 2.3.1** Diskretni dinamični sistem je par  $(S, f)$  kjer je  $S$  poljubna množica in  $f : S \rightarrow S$  preslikava množice  $S$  vase. Z zaporednim delovanjem preslikave  $f$  definiramo  $n$ -ti iterat preslikave  $f$  kot

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n\text{-krat}}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.132)$$

Po dogovoru je  $f^0$  identična preslikava na  $S$

$$f^0 = id_S : S \rightarrow S. \quad (2.133)$$

Poudarimo, da pri diskretnih dinamičnih sistemih oznaka  $f^n$  pomeni  $n$ -ti iterat in ne  $n$ -to potenco preslikave  $f$ .

**Definicija 2.3.2** Za dano točko  $x_0 \in S$  in izbrano preslikavo  $f : S \rightarrow S$  lahko obravnavamo zaporedje iteratov  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , ki predstavlja pozitivno orbito (tir) točke  $x_0$ :

$$\mathcal{O}_f(x_0) = \mathcal{O}(x_0) = \{f^n(x_0), n \geq 0\}. \quad (2.134)$$

Pomembna kategorija orbit so tako imenovane *periodične orbite* in v tesni povezavi z njimi periodične točke.

**Definicija 2.3.3** Točka  $x_0$  je periodična, če za neki  $n \geq 1$  velja  $f^n(x_0) = x_0$ . V tem primeru orbiti rečemo (*periodični*) cikel periode  $n$ , najmanjšemu takemu  $n$  pa perioda cikla.

**Definicija 2.3.4** Točka  $x_0$  je predperiodična, če je za neki  $m \in \mathbb{N}_0$  iterat  $f^m(x_0)$  periodična točka.

Množico vseh periodičnih in predperiodičnih točk diskretnega dinamičnega sistema  $(S, f)$  označimo s  $Per(f, S)$  oziroma s  $PerPer(f, S)$ . Natančni definiciji sta takšni:

$$\begin{aligned} Per(f, S) &= \{x \in S, f^n(x) = x, \text{ za neki } n \geq 1\}, \\ PerPer(f, S) &= \{x \in S, f^{m+n}(x) = F^m(x), \text{ za neki } n \geq 1, m \geq 0\}. \end{aligned}$$

**Definicija 2.3.5** *Cikel dolžine ena imenujemo tudi negibna (fiksna) točka sistema  $(f, S)$  oz. singularnost. Singularna točka  $x_0$  diskretnega dinamičnega sistema  $(S, f)$  zadošča enačbi*

$$f(x_0) = x_0. \quad (2.135)$$

Če je množica  $S$  nedvoumno določena (znana), pišemo kar  $Per(f)$  in  $PerPer(f)$  namesto  $Per(f, S)$  oz.  $PerPer(f, S)$ .

Naj bo  $x^*$  fiksna točka sistema  $(f, S)$ , kjer je  $S \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}^2\}$ . Za poljubno matriko  $A$  definiramo njen spektralni radij,  $\rho(A)$ , kot največjo absolutno vrednost njenih (kompleksnih) lastnih vrednosti

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} \{|\lambda|\}.$$

**Definicija 2.3.6 (Hiperbolična fiksna točka)** *Pravimo, da je fiksna točka  $x^*$  hiperbolična, če za Jacobijevo matriko  $A = J_f(x^*)$  velja, da je  $\rho(A) \neq 1$ .*

Podobno kot za zvezne sisteme Hartman-Grobman-ov izrek za diskretne sisteme (glej npr. [38, Razdelek 4.10]) zagotavlja, da je dinamika okoli hiperbolične fiksne točke diskretnega sistema lokalno homeomorfna dinamiki pripadajočega lineariziranega sistema. Prav tako imamo analog izreka o stabilni in nestabilni mnogoterosti (glej [38, Izrek 4.12]).

**Definicija 2.3.7** *Naj bo  $(f_r, S)$  dinamični sistem s parametrom  $r$ . Vrednost parametra  $r$ , pri kateri se kvalitativno obnašanje dinamičnega sistema  $(f_r, S)$  nenadno spremeni, imenujemo bifurkacijska vrednost.*

V nadaljevanju naštejmo še nekaj definicij.

**Definicija 2.3.8** *Naj bo  $x_0$  fiksna točka preslikave  $f$ . Pravimo da je točka  $x$  asimptotična k točki  $x_0$ , če je  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0$ .  $S$  spodnjim izrazom*

$$W^s(x_0) = \{x; \ x \text{ je asimptotična k točki } x_0\}$$

je definirana stabilna množica fiksne točke  $x_0$ .

**Definicija 2.3.9** *Naj bo  $x_0$  periodična točka s periodo  $k$ . Pravimo, da je točka  $x$  asimptotična k točki  $x_0$ , če je  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{nk}(x) = x_0$ .*

Za poljubno preslikavo  $f$  definiramo množico

$$B_f = \{x; \ \mathcal{O}_f(x) \text{ je omejena}\},$$

ki predstavlja množico vseh točk (preslikave  $f$ ) z omejeno orbito. Če je iz konteksta nedvoumno razvidno, za katero preslikavo  $f$  gre, lahko indeks  $f$  tudi opustimo in pišemo kar  $B$ . Tudi za diskretni sistem (2.4) lahko definiramo  $\omega$ -limitno množico.

**Definicija 2.3.10** *Točka  $y$  je element  $\omega$ -limitne množice točke  $x$  za preslikavo  $f$ , če obstaja tako zaporedje naravnih števil  $n_k$ , da velja*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(f^{n_k}(x), y) = 0.$$

**Definicija 2.3.11** *Bazen privlačnosti,  $B_{Att}(x_0)$ , privlačne fiksne točke  $x_0$  je množica vseh točk  $x$  za katere velja  $\omega(x) = x_0$ .*

Obravnavajmo dinamični sistem  $(S, f)$  in naj bo  $B \subset S$ .

**Definicija 2.3.12** *Če za vsako točko  $x \in B$  velja, da je njena pozitivna orbita  $\mathcal{O}_f(x) = \mathcal{O}(x) = \{f^n(x), n \geq 0\}$  vsebovana v  $B$ , pravimo, da je množica  $B$  invariantna množica sistema  $(S, f)$ .*

*Osnovna naloga diskretne dinamike* je klasifikacija točk  $x \in S$  glede na obnašanje orbit  $\mathcal{O}_f(x)$ . Če je  $S$  zgolj množica brez dodatne strukture, je tipična naloga diskretne dinamike opisati množico periodičnih oziroma predperiodičnih točk  $Per(f, S)$ ,  $PerPer(f, S)$  in poiskati vse periode periodičnih točk. Če je množica  $S$  "obogatena" z dodatno strukturo (na primer s topologijo, metriko, algebro), lahko s pomočjo le-te definiramo dodatne lastnosti orbit oz. dinamičnih sistemov, kot na primer konvergenco, gostost orbite v prostoru, gostost periodičnih točk, občutljivost na začetne pogoje, lastnosti posebnih algebrskih elementov itd. Oglejmo si najpomembnejše definicije in lastnosti dinamike v topoloških oz. metričnih prostorih.

**Definicija 2.3.13** *Naj bo  $D \subset X$  podmnožica topološkega prostora  $(X, \tau)$  in  $f : D \rightarrow D$ , preslikava množice  $D$  vase. Preslikava  $f$  je topološko tranzitivna, če za poljubni odprti množici  $U$  in  $V$  iz topološkega prostora  $(X, \tau)$ , ki sekata  $D$ , obstaja element  $z \in U \cap D$  in tako naravno število  $n$ , da je  $f^n(z) \in V$ .*

Zgornja definicija je topološka. Ekvivalentna definicija v metričnem prostoru je takšna.

**Definicija 2.3.14** *Funkcija  $f$  je topološko tranzitivna na metričnem prostoru  $(D, d)$ , če za poljubni točki  $x, y \in D$  in vsak  $\varepsilon > 0$ , obstaja tak  $z$  iz  $(D, d)$ , da za neki  $n \in \mathbb{N}$  velja*

$$d(z, x) < \varepsilon \text{ in } d(f^n(z), y) < \varepsilon. \quad (2.136)$$

Pogosto je metrični prostor  $X = (\mathbb{R}^2, d)$ , kjer je za poljuben par  $\vec{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\vec{y} = (y_1, y_2)$  iz  $\mathbb{R}^2$ , metrika  $d$  definirana takole

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}. \quad (2.137)$$

Med pomembnejše osnovne rezultate na tem področju spada spodnja trditev, ki poveže gostost periodičnih točk in topološko tranzitivnost (dokaz glej npr. v [32]).

**Trditev 2.3.15** *Naj bo  $D \subset X$  podmnožica metričnega prostora  $X$  in  $f : D \rightarrow D$ . Če je množica vseh periodičnih točk gosta v  $D$  in če obstaja točka, ki ima gosto orbito v  $D$ , je  $f$  topološko tranzitivna na  $D$ .*

### 2.3.2 Limitni cikli in njihove bifurkacije za preslikave (2.130)

V nadaljevanju se omejimo na sisteme  $(\mathbb{R}, f)$ , kjer je  $f$  oblike (2.130). Za zvezne sisteme smo razliko med centrom in fokusom podali v definicijah 2.2.14 in 2.2.16. Za sisteme  $(\mathbb{R}, f)$ , kjer je  $f$  oblike (2.130), sta ustrezni definiciji takšni.

**Definicija 2.3.16** *Singularno (fiksno) točko  $x = 0$  preslikave (2.130) imenujemo:*

1. *stabilni fokus*, če obstaja tak  $\varepsilon > 0$ , da je za vse  $x$ , za katere je  $|x| < \varepsilon$ , limita  $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(z)$  enaka nič,
2. *nestabilni fokus*, če je stabilni fokus za (inverzno) preslikavo  $f^{-1}(x)$ ,
3. *center*, če obstaja tak  $\varepsilon > 0$ , da je za vse vrednosti  $x$ , za katere je  $|x| < \varepsilon$ , izpolnjena enakost  $f^2(x) = x$ .

**Definicija 2.3.17 (Limitni cikel)** Točko  $x_0 > 0$  imenujemo limitni cikel preslikave (2.130), če je  $x_0$  izolirana rešitev enačbe

$$f^2(x) - x = 0. \quad (2.138)$$

Preslikave (2.130) so lahko implicitno definirane (to je obravnavano tudi v [111], [105], [93], [92]) preko spodnje družine enačb

$$\Psi(x, w) = x + w + \sum_{i+j=2}^n \alpha_{ij} x^i w^j = 0. \quad (2.139)$$

Na tak način je prvi obravnaval sisteme (2.130) Żołądek v [127]. Pravimo, da ima polinom (2.139) center v izhodišču, če ima enačba  $\Psi(x, w) = 0$  rešitev oblike (2.130), ki je tudi sama center za  $x = 0$ . Analogno definiramo fokus enačbe (2.139).

Če želimo obravnavati število limitnih ciklov, ki nastanejo blizu  $x = 0$ , je najbolje uporabiti pristop, ki ga je v [127] predlagal Żołądek in temelji na tako imenovani Ljapunovi funkciji  $\Phi$ , definirani v (2.140), ki je očitno direktna posplošitev (v smislu analogije) prvega integrala iz (2.46). Vrednosti  $g_2, g_4, \dots$  iz (2.140) pa so analogne fokusnim količinam iz enačbe (2.46); glej definicijo 2.2.25. Ljapunova funkcija,  $\Phi$ , in fokusne količine,  $g_{2k}$ , za sistem (2.130) oz. (2.139) so definirane s spodnjo enačbo

$$\Phi(f(x)) - \Phi(x) = g_2 x^4 + g_4 x^6 + \dots + g_{2k} x^{2k+2} + \dots \quad (2.140)$$

Če za izbrano preslikavo (2.130) obstaja Ljapunova funkcija  $\Phi$ , jo formalno zapišemo v obliki vrste

$$\Phi(x) = x^2 \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k \right). \quad (2.141)$$

Koeficiente  $g_{2k}$  iz (2.140) tedaj imenujemo *fokusne količine*. Spodnja trditev je iz [111]. V dokazu uporabimo kompozicije formalnih vrst, ki so za preslikave (2.130) dobro definirane, saj vedno uporabimo samo končne vsote.

**Trditev 2.3.18** Če so za vse  $k \in \mathbb{N}$  fokusne količine  $g_{2k}$  enake nič, ima preslikava (2.130) v izhodišču center. Če je  $g_2 = \dots = g_{2k-2} = 0$  vendar  $g_{2k} \neq 0$ , je  $x = 0$  stabilni (oz. nestabilni) fokus preslikave (2.130), če je  $g_{2k} < 0$  (oz.  $g_{2k} > 0$ ).

**Dokaz.** V primeru, ko je  $g_{2k} = 0$  za vse  $k \in \mathbb{N}$ , je  $\Phi \circ f = \Phi$  implicira  $\Phi \circ f^2 = \Phi$ . Naj bo  $f^2(x) = x + c_k x^k + \dots$ , kjer je očitno  $k \geq 3$ . Če vstavimo ta izraz v  $\Phi \circ f^2 = \Phi$ , sledi (za vsak  $k \geq 3$ )

$$x^2 + b_1 x^3 + \dots + b_{k-1} x^{k+1} + 2c_k x^{k+1} + v.č. = x^2 + b_1 x^3 + \dots + b_{k-1} x^{k+1} + v.č.,$$

od koder sledi  $c_k = 0$ , kar omplicira  $f^2(x) \equiv x$  (oznaka v.č. pomeni višje člene).

Če je  $g_2 = \dots = g_{2k-2} = 0$  in  $g_{2k} \neq 0$ , je (2.140) oblike

$$\Phi(f(x)) - \Phi(x) = g_{2k}x^{2k+2} + \dots$$

Za dovolj velik  $m$  označimo  $\Phi_m(x) = x^2 \left(1 + \sum_{j=1}^m b_j x^j\right)$ . Tedaj je

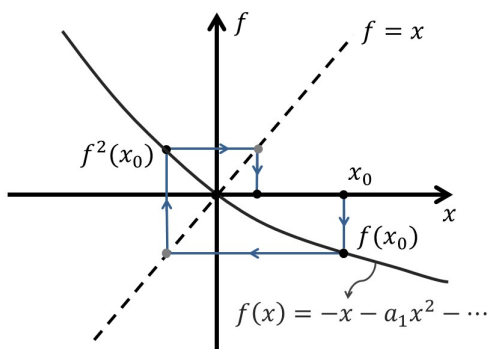
$$\Phi_{2k}(f(x)) - \Phi_{2k}(x) = g_{2k}x^{2k+2} + O(x^{2k+3}).$$

Če v zgornji enačbi  $x$  nadomestimo z  $f(x)$ , sledi

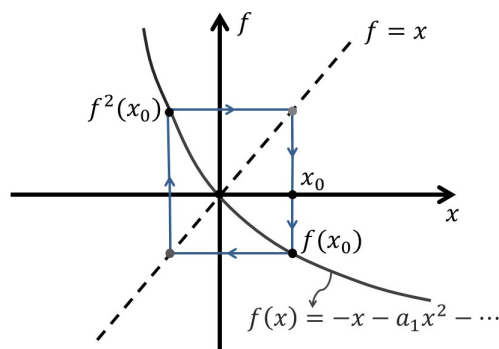
$$\begin{aligned} \Phi_{2k}(f^2(x)) - \Phi_{2k}(f(x)) &= g_{2k}[f(x)]^{2k+2} + O(x^{2k+3}) \\ \Phi_{2k}(f^2(x)) &= \Phi_{2k}(f(x)) + g_{2k}[f(x)]^{2k+2} + O(x^{2k+3}) \\ \Phi_{2k}(f^2(x)) &= \Phi_{2k}(x) + g_{2k}x^{2k+2} + \\ &\quad + g_{2k}[-x - a_2x^2 - \dots]^{2k+2} + O(x^{2k+3}) \\ \Phi_{2k}(f^2(x)) - \Phi_{2k}(x) &= 2g_{2k}x^{2k+2} + O(x^{2k+3}) \end{aligned}$$

Brez izgube za splošnost lahko privzamemo, da je  $x \geq 0$ . Potem je tudi  $f^2(x) \geq 0$ . Ker je  $\Phi$  (in  $\Phi_{2k}$ ) za dovolj majhne  $x \geq 0$  injektivna in naraščajoča, iz zadnje enačbe za  $g_{2k} < 0$  sledi, da je  $\Phi_{2k}(f^2(x)) - \Phi_{2k}(x) < 0$  in potem je (za dovolj majhne pozitivne  $x$ ) tudi  $f^2(x) - x < 0$ , kar pomeni, da je  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n}(x) = 0$ . Podobno za  $f^{-1}$  v primeru, ko je  $g_{2k} > 0$ , sledi, da je  $\Phi_{2k}(f^2(x)) - \Phi_{2k}(x) > 0$  iz tega pa  $f^2(x) - x > 0$  in končno:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f^{-1})^{2n}(x) = 0$ , kot smo želeli dokazati. ■

To še dodatno potrjuje analogijo Ljapunovih funkcij (2.141) s prvim integralom  $\Phi(x, y)$  v zveznih sistemih (2.41), ki obstaja natanko tedaj, ko je  $g_{2k} = 0$  za vsak  $k \in \mathbb{N}$ . Poleg tega obstaja očitna analogija med izrekom 2.2.23 in zgornjim rezultatom. Očitna pa je tudi podobnost med slikama 2.3 (levo) in 2.14 ter slikama 2.3 (desno) in 2.15.



Slika 2.14: Fokus preslikave (2.130).



Slika 2.15: Center preslikave (2.130).

Analogija med prvim integralom in Ljapunovo funkcijo  $\Phi$  je motivacija, da preslikavi (2.130) priredimo analog Poicaréjeve povratne preslikave  $\mathcal{R}(x) = f^2(x) = x + c_2x^3 + c_3x^4 + \dots$  ter analog funkcije razlike (2.39)

$$\mathcal{P}(x) = f^2(x) - x = c_2x^3 + c_3x^4 + \dots, \quad (2.142)$$

podobno, kot v definiciji 2.2.22.

### 2.3.3 Fokusne količine preslikave (2.130)

V nadaljevanju bomo privzeli, da so koeficienti  $a_i$  preslikave (2.130) polinomi parametrov  $\{\alpha_{ij}\}$  iz (2.139) za  $i + j \leq k$  ali  $i + j = k$  ( $k \leq n$ ) in bomo označili  $\{\alpha_{ij}\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ . To pomeni, da so koeficienti  $g_{2k}$  ter  $b_i$  in  $c_i$  iz (2.140) ter (2.141) in (2.142) polinomi v spremenljivkah  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  (t.j.  $g_{2k}, b_i, c_i \in \mathbb{R}[\alpha_1, \dots, \alpha_m]$ ).

Označimo prostor parametrov  $\{\alpha_{ij}\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$  z  $\mathbf{A}$  in  $\delta$ -okolico od  $\alpha^* \in \mathbf{A}$  z

$$\mathbf{N}_\delta(\alpha^*) = \{\alpha \in \mathbf{A}; |\alpha_i - \alpha_i^*| \leq \delta, \forall i \in \{1, \dots, m\}\}.$$

Nadalje označimo z

$$f_\alpha(x) = -x - \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\alpha) \cdot x^{k+1} \quad (2.143)$$

preslikavo (2.130), ki ustreza točki  $\alpha \in \mathbf{A}$ . Na primer  $\alpha = (\alpha_{20}, \alpha_{11}, \alpha_{02}, \alpha_{30}, \alpha_{21}, \alpha_{12}, \alpha_{03})$  ali  $\alpha = (\alpha_{20}, \alpha_{11}, \alpha_{02})$  ali  $\alpha = (\alpha_{30}, \alpha_{21}, \alpha_{12}, \alpha_{03})$ . Predpostavili bomo tudi, da je za vsako vrednost  $\alpha^* \in \mathbf{A}$  desna stran enačbe (2.143) konvergentna na dovolj majhni okolici  $|x| < \varepsilon$ ,  $\alpha \in \mathbf{N}_\delta(\alpha^*)$ .

Podobno, kot v podrazdelku 2.2.7, kjer smo obravnavali bifurkacije limitnih ciklov v zveznih sistemih  $\vec{u}' = \mathbf{f}(\vec{u})$ , je tudi za sisteme (2.130) v prostoru parametrov  $\mathbf{A}$  smiselno obravnavati, koliko limitnih ciklov nastane v neki okolici  $\mathbf{N}_\delta(\alpha^*)$  točke  $\alpha^* \in \mathbf{A}$ , če parametre sistema malo spreminjamo.

**Definicija 2.3.19** ([111]) *Z  $n_{\alpha, \varepsilon}$  označimo število limitnih ciklov preslikave  $f_\alpha$  na okolici  $|x| < \varepsilon$ . Tedaj ima singularna točka  $x = 0$  preslikave  $f_{\alpha^*}$  cikličnost  $c$  v okolici izhodišča v prostoru parametrov  $\mathbf{A}$ , če obstajata taka  $\delta_0$  in  $\varepsilon_0$ , da je za vsak  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  in vsak  $0 < \delta < \delta_0$*

$$\max_{\alpha \in \mathbf{N}_\delta(\alpha^*)} n_{\alpha, \varepsilon} = c.$$

*Kot bomo videli v naslednjem razdelku in v razdelku 3.3, je tudi v primeru preslikav (2.130) smiselno cikličnost preslikave  $f_\alpha$  obravnavati preko fokusnih količin, ki so definirane v naslednjem razdelku.*

V nadaljevanju bomo opisali teoretični postopek (kot je opisan v [111]) za pridobivanje fokusnih količin  $g_{2k}$ . Uporabljamo Ljapunovo funkcijo  $\Phi$ , ki je definirana s (2.140). Spomnimo se, da sistem enačb  $g_2 = g_4 = \dots = g_{2k} = \dots = 0$  določa centralno raznoterost preslikave  $f$  (glej (2.130)). V praksi v (2.140) namesto  $f$  uporabljamo (glej npr. [92, 93, 105, 111]) približek

$$f_n(x) = -x - \sum_{k=1}^n a_k x^{k+1} = -x \left( 1 + \sum_{k=1}^n a_k x^k \right),$$

tako, da (2.140) dobi obliko

$$\Phi(f_n(x)) - \Phi(x) = g_2x^4 + g_4x^6 + \dots + g_{2k}x^{2k+1} + \dots$$

Potem lahko fokusne količine  $g_{2k}$  izrazimo kot polinome spremenljivk  $a_k$ . Desno stran zgornje enačbe označimo s  $\Psi$

$$\Psi(x) = g_2x^4 + g_4x^6 + \dots + g_{2k}x^{2k+1} + \dots$$

Problem centra in fokusa za (2.130) je potem poiskati tak  $\Phi(b_1, b_2, \dots)$  (t. j. poiskati koeficiente  $b_k$ ) in tak  $\Psi(g_2, g_4, \dots)$  (t. j. poiskati koeficiente  $g_{2k}$ ) v odvisnosti od koeficientov  $a_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , da bosta za vsak  $n \in \mathbb{N}$  (formalni) vrsti za  $\Phi(f_n(x)) - \Phi(x)$  in  $\Psi(x)$  hkrati ničelni:

$$\begin{aligned}\Phi(f_n) - \Phi(x) &= 0, \\ \Psi(x) &= 0.\end{aligned}$$

Za obravnavo fokusnih količin  $g_{2k}$  je zelo pomembn kolobar monomov  $M$ , ki je definiran kot

$$M = \{v; L(v) = 2k \text{ za } k = 0, 1, 2, \dots\}, \quad (2.144)$$

$L(v)$  je linearni operator, ki slika  $\mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$  ( $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ) in je definiran z

$$L((v_1, v_2, \dots, v_n)) = 1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + \dots + n \cdot v_n. \quad (2.145)$$

Označimo  $v := (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ,  $|v| := v_1 + v_2 + \dots + v_n$  in  $[v] := a_1^{v_1} \cdot a_2^{v_2} \cdot \dots \cdot a_n^{v_n}$  in izračunajmo  $\Phi(f_n)$ . Najprej izračunamo  $m$ -to potenco od  $f_n$ :

$$f_n^m = (-x)^n \sum_{|v|=m-1} \frac{m!}{v_1! \cdot \dots \cdot v_n!} (a_1x)^{v_1} (a_2x^2)^{v_2} \cdot \dots \cdot (a_nx^n)^{v_n}.$$

Torej je koeficient pri  $x^{k+m}$  v  $\Phi(f_n)$  enak

$$(-1)^m \sum_{\substack{v: |v|=m-1 \\ l(v)=k}} \frac{m!}{v_1! \cdot \dots \cdot v_n!} [v].$$

V skladu z zgornjimi oznakami iz  $\Phi(f_n) - \Phi(z) = \Psi(z) = 0$  sledi:

$$\begin{aligned}b_{2i-1} &= \frac{1}{2} S_{2i-1}(a_1, \dots, a_n), \\ g_{2i} &= S_{2i}(a_1, \dots, a_n),\end{aligned}$$

kjer je

$$S_k = \sum_{\substack{|v|=1 \\ l(v)=k}} \frac{2!}{v_1! \cdot \dots \cdot v_n!} [v] + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j b_j \sum_{\substack{|v|=j+1 \\ l(v)=k-j}} \frac{(j+2)!}{v_1! \cdot \dots \cdot v_n!} [v] \quad (2.146)$$

in  $b_{2i}$  lahko izberemo poljubno (seveda izberemo  $b_{2i} = 0$ ). Induktivno lahko dokažemo (glej [111, lema 3]), da za vsak monom  $[v]$ , ki je vsebovan v  $g_{2i}$ , velja  $L(v) = 2i$ , kar lahko za prvih nekaj



fokusnih količin  $g_{2i}$  hitro preverimo: za  $g_2 = -2a_1^2 + 2a_2$  sta  $[v_1] = a_1^2$  in  $[v_2] = a_2$  edina monoma in velja:  $L(v_1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = L(v_2) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$ . Podobno za

$$g_4 = \frac{13}{2}a_1^4 - \frac{7}{2}a_1^2a_2 + a_2^2 - 6a_1a_3 + 2a_4$$

velja  $l(v) = 4$  in

$$\begin{aligned} [v_1] = a_1^4 &\implies L(v_1) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 4 \\ [v_2] = a_1^2a_2 &\implies L(v_2) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 4 \\ [v_3] = a_2^2 &\implies L(v_3) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 4 \\ [v_4] = a_1a_3 &\implies L(v_4) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 4 \\ [v_5] = a_4 &\implies L(v_5) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 4. \end{aligned}$$

Lastnost  $[v] \in g_{2i} \implies L(v) = 2i$  implicira, da so fokusne količine invariantne za transformacijo  $x \mapsto -x$  v prostoru parametrov, ki so določeni z (2.130). To uvidimo, če koeficiente iz  $f(-x)$  označimo z  $a'_k$ . Očitno je  $a'_k = (-1)^k a_k$  in za  $[v'] = (a'_1)^{v_1} \cdots (a'_n)^{v_n}$  sledi

$$[v'] = (-1)^{l(v)} [v] = (-1)^{2i} [v] = [v]$$

prej omenjena invariantnost.

Računanje fokusnih količin je lahko za zvezne sisteme zelo zamudno (glej str. razdelek 2.2 in npr. [107, 113]). Teoretično lahko v (diskretnem) primeru preslikave (2.130) fokusne količine  $g_{2i}$  zaradi zgoraj naštetih lastnosti (dodatne informacije najdete v [111, izrek 1]) dobimo zaporedno; tako, da na vsakem koraku (t. j. za vsak vektor  $v \in \mathbb{N}_0^n$ ) izračunamo pomožni količini  $V_{(v)}$  in  $U_{(v)}$ . Za  $v$ -je, za katere velja  $|v| = 1$ , postavimo  $V_{(v)} = 1$ , če je  $L(v)$  liho število, in  $V_{(v)} = 0$ , če je  $L(v)$  sodo število. Za vse  $v$ -je, za katere velja  $|v| > 1$ , pa definiramo

$$V_{(v)} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( \Delta(v) - \sum_{0 < \mu < |v|} V_{(\mu)} \frac{(L(\mu)+2)!}{(\theta(\mu,v))!(v_1-\mu_1)! \cdots (v_n-\mu_n)!} \right) & \text{če } L(v) = 2i - 1 \\ 0 & \text{če } L(v) = 2i \end{cases}. \quad (2.147)$$

Za  $|v| = 1$  postavimo  $U_{(v)} = 2$ , če je  $L(v)$  sodo, in  $U_{(v)} = 0$ , če je  $L(v)$  liho. Za  $|v| > 1$  pa definiramo

$$U_{(v)} = \begin{cases} 0 & \text{če } L(v) = 2i - 1 \\ \Delta(v) - \sum_{0 < \mu < |v|} V_{(\mu)} \frac{(L(\mu)+2)!}{(\theta(\mu,v))!(v_1-\mu_1)! \cdots (v_n-\mu_n)!} & \text{če } L(v) = 2i \end{cases}. \quad (2.148)$$

V (2.147) in (2.148) je

$$\Delta(v) = \begin{cases} 0 & \text{če } |v| \neq 2 \\ 2 & \text{če } |v| = 2 \text{ in } \exists v_i, v_j \text{ tako, da je } v_i \cdot v_j \neq 0 \\ 1 & \text{če } |v| = 2 \text{ in } \exists ! v_i \text{ tako, da je } v_i \neq 0 \end{cases}$$

in

$$\theta(\mu, v) = l(\mu) + 2 - \sum_{i=1}^n (v_i - \mu_i).$$

Ko imamo dovolj pomožnih količin  $U_{(v)}$  in  $V_{(v)}$ , je  $2i$ -ta fokusna količina enaka

$$g_{2i} = \sum_{l(v)=2i} U_{(v)} [v]. \quad (2.149)$$

**Opomba 2.3.20** Pomožni količini (2.147) in (2.148) ter sama formula (2.149) sta v [111, izrek 1] izpeljani s pomočjo (2.146). V praksi pa je računanje fokusnih količin tudi s pomočjo teh formul dokaj zamudno, zato raje uporabimo kak računski algebrski sistem.

## Poglavje 3

# Primeri uporabe polinomskih idealov

### 3.1 Bautinova metoda za reševanje bifurkacijskih problemov

Bautinova metoda za reševanje bifurkacijskih problemov, ki je opisana v tem razdelku, je uporabna tako za zvezne kot tudi za diskretne sisteme. Metodo je z namenom reševanja drugega dela šestnajstega Hilbertovega problema vpeljal ruski matematik N. N. Bautin sredi prejšnjega stoletja (glej [6]). Problem cikličnosti za polinomske sisteme

$$\dot{u} = -v + P_2(u, v) + \dots + P_n(u, v), \quad \dot{v} = u + Q_2(u, v) + \dots + Q_n(u, v), \quad (3.1)$$

kjer s  $P_n(u, v)$  in  $Q_n(u, v)$  označimo homogene polinome stopnje  $n$ , sprašuje po (maksimalnem) številu in razporeditvi limitnih ciklov, ki lahko nastanejo v faznem portretu sistema (3.1). Pojem cikličnosti je vpeljal Bautin in v [6] rešil problem cikličnosti za kvadratne sisteme oblike (3.1); torej za  $n = 2$ .

V tem razdelku obravnavamo Bautinovo metodo/izrek, ki je znana kot glavna metoda reševanja problema cikličnosti. Dokaze Bautinovega izreka lahko najdemo npr. v [47, 57, 125, 126]. Podrobneje je metoda opisana v [114, 117]. Kljub navidezni preprostosti problema cikličnosti za sisteme (3.1), je odgovorov oz. rešitev relativno malo. Posledično je to bogat vir trenutnih raziskav različnih avtorjev. Po številnih zapletih so različni avtorji uspeli dokazati Dulacov izrek, da je za vsak sistem (3.1) število limitnih ciklov, ki lahko nastanejo (z dodajanjem nelinearnosti do členov reda  $n$ ), končno, "samo" za  $n = 2$ . Podrobnejše informacije o tem najdete v [114], str. 249. Še danes ni jasno, koliko limitnih ciklov lahko nastane v kvadratnih sistemih (3.1). Bautin je originalno dokazal, da je to število vsaj 3 (glej [114]).

Bistvo Bautinove metode je, da se problem cikličnosti za elementarne singularne točke (t. j. izolirane singularne točke z vsaj eno neničelno lastno vrednostjo) lahko preoblikuje na ocenjevanje števila izoliranih ničel blizu izhodišča neke analitične funkcije in v končni fazi na algebrski problem iskanja baze polinomskega ideala, ki izhaja iz prej omenjene analitične funkcije, ter ga imenujemo Bautinov ideal. Poleg tega je Bautinov ideal generiran s fokusnimi količinami (glej npr. razdelek 2.3.3). Iz poglavja 1 vemo, da je vsak polinomski ideal končno generiran, toda pogosto je težko najti bazo Bautinovega ideala. Splošne rešitve žal ni in problem cikličnosti je razrešen samo za kvadratne in kubične sisteme (glej [120]). Če je sistemu pripadajoč Bautinov ideal korenski, je, kot bomo videli v nadaljevanju, cikličnost v nekaterih primerih relativno enostavno razrešiti, v nasprotnem primeru lahko uporabimo aproksimacijsko metodo, ki jo je za zvezne sisteme predlagal Christopher v [20]. Kot je obravnavano v [93], lahko isto metodo uporabimo tudi za diskretne sisteme (2.130).

Obravnavajmo analitično funkcijo  $F : \mathbb{R} \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{R}$ , kjer je  $\alpha \in \mathbf{A} \subset \mathbb{R}^n$  (v nadaljevanju bo to prostor parametrov), ki je v okolici točke  $z = 0$  oblike

$$F(z, \alpha) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(\alpha) z^j \quad (3.2)$$

in velja, da je za vsak  $j \in \mathbb{N}_0$  funkcija  $f_j(\alpha)$  za vsak  $\alpha^* \in \mathbf{A}$  analitična in funkcija (3.2) konvergentna na (majhni) okolici točke  $(z, \alpha) = (0, \alpha^*)$ . Zanimajo nas majhne pozitivne ničle funkcije (3.2) za vsako izbrano vrednost  $\alpha^*$ ; torej rešitve enačbe  $F(z, \alpha^*) = 0$  v okolici  $z = 0 \in \mathbb{R}$ . Smiselno je definirati multiplikativnost za vrednost parametra  $a = \alpha^*$ .

**Definicija 3.1.1 (Multiplikativnost)** Za izbrano vrednost parametra  $\alpha = \alpha^* \in \mathbf{A} \subset \mathbb{R}^n$  in dovolj majhno vrednost  $\varepsilon > 0$  označimo z  $\mathcal{N}(\alpha, \varepsilon)$  število izoliranih ničel funkcije (3.2) na intervalu  $(0, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}$ . Pravimo, da ima točka  $\alpha^*$  glede na prostor parametrov  $\mathbf{A}$  v okolici točke  $z = 0 \in \mathbb{R}$  multiplikativnost  $c$ , če obstajata taki pozitivni konstanti  $\delta_0$  in  $\varepsilon_0$ , da za vsak  $0 < \delta < \delta_0$  in  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  velja

$$\max \{ \mathcal{N}(\alpha, \varepsilon) : \|\alpha - \alpha^*\| \leq \delta \} = c,$$

pri čemer  $\|\cdot\|$  označuje evklidsko normo na  $\mathbb{R}^n$ .

V zvezi z multiplikativnostjo je mogoče dokazati naslednjo trditev (dokaz najdete v [114, trditev 6.1.2, posledica 6.1.3]).

**Trditev 3.1.2** Naj bo  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija, ki jo lahko zapišemo v obliki

$$F(z, \alpha) = f_1(\alpha) z^{j_1} (1 + \Psi_1(z, \alpha)) + \cdots + f_s(\alpha) z^{j_s} (1 + \Psi_s(z, \alpha)), \quad (3.3)$$

kjer so  $j_u \in \mathbb{N}$  in za  $u = 1, \dots, s$  velja  $j_1 < \cdots < j_s$ . Poleg tega naj bodo funkcije  $f_1, \dots, f_s$  ter  $\Psi_1, \dots, \Psi_s$  za neki pozitivni realni vrednosti  $\delta$  in  $\varepsilon$  na območju  $\{(z, \alpha) : |z| < \varepsilon \text{ and } |\alpha - \alpha_0| < \delta\}$  realne in analitične in za vse  $j = 1, \dots, s$  naj velja  $\Psi_j(0, \alpha^*) = 0$ . Potem obstajata števili  $\varepsilon_1$  in  $\delta_1$ , za kateri ima enačba

$$F(z, \alpha) = 0$$

za vsako izbrano vrednost  $\alpha$ , ki zadošča neenačbi  $\|\alpha - \alpha^*\| < \delta_1$ , kvečjemu  $s - 1$  izoliranih ničel na intervalu  $0 < z < \varepsilon_1$ . Pri izbrani vrednosti  $\alpha$  enačbo  $F(z, \alpha) = 0$  obravnavamo kot enačbo glede na eno realno spremenljivko  $z$ .

**Posledica 3.1.3** Če koeficienti funkcije  $F$  iz enačbe (3.2) zadoščajo pogojem

$$f_0(\alpha^*) = \cdots = f_m(\alpha^*) = 0, \quad f_{m+1}(\alpha^*) \neq 0,$$

je multiplikativnost funkcije  $F$  pri vrednosti parametra  $\alpha^*$  kvečjemu  $m$ .

**Dokaz.** Ker v okolici točke  $\alpha^*$  velja  $f_{m+1}(\alpha^*) \neq 0$ , lahko (3.2) zapišemo v obliki

$$F(z, \alpha) = \sum_{j=1}^m f_j(\alpha) z^j + f_{m+1}(\alpha) z^{m+1} (1 + \Psi(z, \alpha))$$

in uporabimo trditev 3.1.2. ■

Z  $B_I$  označimo bazo ideala  $I \subseteq \mathbb{R}[\alpha_1, \dots, \alpha_m]$  in naj bo  $B_I = \{g_1, g_2, \dots, g_s\}$ . Tedaj za vsak  $g \in I = \langle g_1, g_2, \dots, g_s \rangle$  obstajajo polinomi  $h_1, \dots, h_s \in \mathbb{R}[\alpha_1, \dots, \alpha_m]$ , da velja  $g = h_1 g_1 + h_2 g_2 + \cdots + h_s g_s$ .

**Trditev 3.1.4** Naj bo  $F$  funkcija oblike (3.2), ki je za  $|z| < \varepsilon$  in za  $\alpha \in N_\delta(\alpha^*)$  konvergentna. Če je  $B_I = \{f_{k_1}, f_{k_2}, \dots, f_{k_s}\}$  minimalna baza ideala  $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_k, \dots \rangle$ , kjer  $f_i$  izhaja iz enačbe (3.2), obstajata  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  in  $0 < \delta < \delta_0$ , pri katerih je število pozitivnih ničel enačbe

$$F(z, \alpha) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(\alpha) z^j = 0$$

v okolici točke  $z = 0$  za vse  $\alpha \in N_{\delta_0}(\alpha^*)$  manjše od  $s$ .

## 3.2 Zvezni sistemi

V tem razdelku se najprej seznanimo z enim od pristopov za reševanje problema cikličnosti za realne dvorazsežne polinomske sisteme. Pristop temelji na izračunu fokusnih količin in iskanju minimalne baze Bautinovega ideala, s katero smo se seznanili v razdelku 2.2.7. Če želimo rešiti problem cikličnosti, najprej rešimo problem centra (poiščemo fokusne količine), nato pa se lotimo povsem algebralnega problema (iskanja baze ideala z uporabo teorije iz poglavja 1). V prvem podrazdelku se seznanimo s teorijo, ki povezuje fokusne količine sistema z zgornjo mejo za cikličnost. Celoten pristop, ki ga tukaj opišemo, je povzet po [114]. V naslednjih dveh podrazdelkih rešimo problem centra za dve družini dvorazsežnih polinomskih sistemov NDE. Družina kubičnih sistemov, za katero bomo najprej poiskali pogoje za center v izhodišču, je bila obravnavana v [45], kjer so bili izračuni centralne ranoterosti izhodišče za nadaljnjo obravnavo cikličnosti tega sistema. V drugem podrazdelku na podlagi pridobljenih rezultatov za problem centra družine kubičnih sistemov pridobimo tudi zgornjo mejo za cikličnost s pomočjo rezultatov, ki so izpeljani v prvem podrazdelku. Prav tako obravnavamo cikličnost vsake komponente centralne raznoterosti in na ta način pokažemo, da znotraj obravnavane družine obstajajo sistemi s centrom v izhodišču, iz katerega bifurcira natanko toliko limitnih ciklov, kot je bilo predhodno dokazano, da je zgornja meja za cikličnost sistema. Pri tem si pomagamo z naslednjim rezultatom [20, izrek 2.1].

**Izrek 3.2.1** Naj bo  $\alpha \in \mathbf{A}$  točka na centralni raznoterosti sistema (2.129) in naj ima prvih  $k$  Ljapunovih količin  $L(i)$ ;  $i = 1, \dots, k$  neodvisne linearne dele. Tedaj  $\alpha$  leži na komponenti centralne mnogoterosti s sorazsežnostjo vsaj  $k$ , in obstajajo bifurkacije, ki glede na parameter  $\alpha$  iz centra porodijo  $k - 1$  limitnih ciklov.

Če poleg tega vemo, da  $\alpha$  leži na komponenti s sorazsežnostjo  $k$ , je  $\alpha$  gladka točka raznoterosti in cikličnost glede na parameter  $\alpha$  iz centra je natanko  $k - 1$ .

V slednjem primeru je  $k - 1$  tudi cikličnost generične točke na tej komponenti centralne raznoterosti.

Prav tako bomo ta rezultat uporabili v tretjem razdelku tega poglavja, kjer ga posplošimo na preslikave (2.130). V obeh primerih bomo z njegovo pomočjo cikličnost komponent centralne raznoterosti povezali z njihovo razsežnostjo. Tako bomo uporabili teorijo o izračunu razsežnosti raznoterosti (glej poglavje 1) in pridobili natančno vrednost za cikličnost nekaterih sistemov, ki imajo center v izhodišču.

V tretjem podrazdelku rešimo še problem centra za dvorazsežno družino sistemov četrte stopnje, ki je bila prvič obravnavana v [43] in za katero so bile fokusne količine izračunane s pomočjo modularne aritmetike opisane v razdelku 1.5.

V zadnjem podrazdelku si bomo na kratko pogledali trirazsežno družino kvadratnih sistemov NDE, za katero poiščemo pogoje za nastop centra na centralni mnogoterosti. Nato za vsak sistem s centrom poiščemo enačbo centralne mnogoterosti in s pomočjo le-te reduciramo sistem na ustrezen dvorazsežen sistem.

### 3.2.1 Fokusne količine in zgornja meja za cikličnost

Kot smo že omenili v razdelku 2.2.3, je pridobitev Ljapunovih koeficientov (glej definicijo 2.2.22) z računskega vidika zahteven problem. Ker tako Ljapunovi koeficienti, kot tudi fokusne količine, katerih izračun je lažji, določajo sisteme s centrom znotraj družine (2.129), predvidevamo, da obstaja povezava med njimi. Ta povezava nam omogoča, da obravnavamo problem cikličnosti s pomočjo fokusnih količin. Ključ do povezave množice Ljapunovih koeficientov, ki izhajajo iz originalnega sistema (2.129), in množice fokusnih količin, ki izhajajo iz kompleksifikacije sistema, je ta, da delamo na invariantni ravnini  $x = \bar{x}$  v  $\mathbb{C}^2$ , ki vsebuje kopijo faznega portreta realnega sistema. Problem, ki se pri tem pojavi in, katerega bomo tudi izpostavili, je, da medtem ko fokusne količine izhajajo iz kompleksifikacije sistema (2.129), perturbacije nastopijo znotraj večje družine (2.128).

V (2.129) in (2.128) naj bosta

$$P(u, v) = \sum_{j+k \geq 2}^n A_{j,k} u^j v^k \quad \text{in} \quad Q(u, v) = \sum_{j+k \geq 2}^n B_{j,k} u^j v^k.$$

Z  $(A, B)$  označimo množico parametrov  $A_{j,k}$  in  $B_{j,k}$  sistema (2.129) in z  $E(A, B)$  prostor, ki je povezan s parametri. Podobno z  $(\lambda, (A, B))$  označimo množico parametrov  $\lambda$ ,  $A_{j,k}$  in  $B_{j,k}$  sistema (2.128) in z  $E(\lambda, (A, B))$  ustrezen prostor parametrov.

Če sledimo postopku kompleksifikacije, ki je opisan v podrazdelku 2.2.3, najprej v sistem (2.128) vpeljemo kompleksno spremenljivko  $x = u + iv$  in dobimo enačbo

$$\dot{x} = \lambda x + i \left( x - \sum_{j+k=2}^N a_{j,k} x^j \bar{x}^k \right). \quad (3.4)$$

Enačba (3.4) je kompleksna oblika realnega sistema (2.128). K tej enačbi dodamo njeno konjugirano enačbo in dobimo

$$\dot{x} = \lambda x + ix - \sum_{j+k=2}^N a_{j,k} x^j \bar{x}^k, \quad \dot{\bar{x}} = \lambda \bar{x} - i \bar{x} + \sum_{j+k=2}^N \bar{a}_{j,k} x^k \bar{x}^j.$$

Zamenjamo  $\bar{x}$  z neodvisno spremenljivko  $y$  in vse kompleksne koeficiente  $\bar{a}_{j,k}$  z neodvisnimi kompleksnimi koeficienti  $b_{k,j}$  in dobimo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x + i \left( x - \sum_{j+k=2}^N a_{j,k} x^j y^k \right), \\ \dot{y} &= \lambda y - i \left( y - \sum_{j+k=2}^N b_{k,j} x^k y^j \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Če v sistemu (3.5) določimo  $\lambda = 0$ , dobimo kompleksifikacijo sistema (2.129). Ker koeficienti  $(a, b)$  kompleksifikacije zadoščajo enačbi  $b = \bar{a}$  in je  $g_{kk}(a, \bar{a}) \in \mathbb{R}$  za vsak  $a$  in ker so  $\operatorname{Re}a_{jk}$  in  $\operatorname{Im}a_{jk}$  polinomi z racionalnimi koeficienti v spremenljivkah koeficientov  $(A, B)$  originalnega sistema, lahko s spremembo koordinat  $a_{jk} = A_{jk} + iB_{jk}$  in  $b_{kj} = A_{jk} - iB_{jk}$  pridobimo fokusne količine ustreznega realnega sistema, ki so polinomi v spremenljivkah  $(A, B)$  z racionalnimi koeficienti in ki jih označimo z  $g_{kk}^{\mathbb{R}}$ :

$$g_{kk}^{\mathbb{R}}(A, B) = g_{kk}(a(A, B), \bar{a}(A, B)). \quad (3.6)$$

Za dokaz naslednjega izreka glej [114, izrek 6.2.3].

**Izrek 3.2.2** *Naj bodo  $\eta_j$  Ljapunovi koeficienti, definirani z (2.39) sistema (2.128) in  $g_{kk}^{\mathbb{R}}$  naj bodo fokusne količine realnega sistema (2.129), definirane s (3.6). Tedaj velja:*

- (i)  $\eta_1 = \eta_2 = 0$ ;
- (ii)  $\eta_3 = \pi g_{11}^{\mathbb{R}}$ ;
- (iii) za  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ ,  $\eta_{2k} \in \langle g_{11}^{\mathbb{R}}, \dots, g_{k-1, k-1}^{\mathbb{R}} \rangle$  in  $\eta_{2k+1} - \pi g_{kk}^{\mathbb{R}} \in \langle g_{11}^{\mathbb{R}}, \dots, g_{k-1, k-1}^{\mathbb{R}} \rangle$  v  $\mathbb{R}[A, B]$ .

Zarodek analitične funkcije (angl. germ of analytic function) v točki  $\theta^* \in k^n$  ( $k$  je  $\mathbb{R}$  ali  $\mathbb{C}$ ) je ekvivalenčni razred analitičnih funkcij glede na relacijo “ $f$  je ekvivalentno  $g$ ”, če obstaja okolica točke  $\theta^*$ , na kateri  $f$  in  $g$  sovpadata. Z  $\mathcal{G}_{\theta^*}$  označimo kolobar analitičnih zarodkov funkcij odvisnih od  $\theta$  v točki  $\theta^* \in k^n$ .

Direktna posledica izreka 3.2.2 je enakost idealov

$$\langle g_{kk}^{\mathbb{R}} : k \in \mathbb{N} \rangle = \langle \eta_k : k \in \mathbb{N} \rangle = \langle \eta_{2k+1} : k \in \mathbb{N} \rangle$$

v  $\mathbb{R}[A, B]$  in enakost ustreznih idealov v kolobarju  $\mathcal{G}_{(A^*, B^*)}$ . Od tod sledi naslednji rezultat [114, posledica 6.2.5].

**Izrek 3.2.3** *Naj bodo  $\eta_k$  Ljapunovi koeficienti singularnosti sistema (2.129) v izhodišču,  $g_{kk}$  fokusne količine kompleksifikacije sistema (2.129) in  $g_{kk}^{\mathbb{R}}$  naj bodo fokusne količine realnega sistema (2.129), definirane s (3.6). Predpostavimo, da sta  $\{\eta_{k_1}, \dots, \eta_{k_m}\}$  in  $\{g_{j_1, j_1}, \dots, g_{j_n, j_n}\}$  minimalni bazi ideala  $\langle \eta_{2k+1} : k \in \mathbb{N} \rangle = \langle g_{kk} : k \in \mathbb{N} \rangle \subset \mathcal{G}_{(A^*, B^*)}$  glede na urejeni množici  $\{\eta_3, \eta_5, \dots\}$  in  $\{g_{11}, g_{22}, \dots\}$ . Tedaj je  $m = n$  in za  $g = 1, 2, \dots, m$  je  $k_g = 2j_g + 1$ .*

Izrek 3.2.3 poveže Ljapunove koeficiente sistema (2.129) s fokusnimi količinami ustrezne kompleksifikacije sistema (2.129). Bifurkacije, ki povzročijo nastanek limitnih ciklov, nastopijo v večji družini (2.128). Za obravnavo problema cikličnosti s pomočjo fokusnih količin, moramo pogledati povezavo med minimalno bazo ideala, generiranega z Ljapunovimi koeficienti družine (2.129), in minimalno bazo ideala, generiranega z Ljapunovimi koeficienti družine (2.128). V ta namen z  $\eta_k$  označimo Ljapunove koeficiente, ki so odvisni le od parametrov  $(A, B)$  in z  $\eta_k(\lambda)$  tiste, ki so odvisni od parametrov  $(\lambda, (A, B))$ . Seveda velja  $\eta_k(0, (A, B)) = \eta_k(A, B)$ . Ker funkcije  $\eta_k(\lambda)$  niso polinomi, delamo v kolobarju  $\mathcal{G}_{(0, (A^*, B^*))}$ .

Naslednji rezultat je pomožna trditev 6.2.8 v [114].

**Izrek 3.2.4** *Fiksiramo družini (2.129) in (2.128), ki imata enaka nelinearna dela. Naj bodo  $\{\eta_k(\lambda) : k \in \mathbb{N}\}$  Ljapunovi koeficienti družine (2.128) in  $\{\eta_k : k \in \mathbb{N}\}$  Ljapunovi koeficienti družine (2.129). Fiksiramo  $(A^*, B^*)$  in predpostavimo, da je minimalna baza ideala  $\langle \eta_1, \eta_2, \dots \rangle \subset \mathcal{G}_{(A^*, B^*)}$  enaka  $\{\eta_{k_1}, \dots, \eta_{k_m}\}$ , kjer je  $k_1 < \dots < k_m$ . Tedaj je  $\{\eta_1(\lambda), \eta_{k_1}, \dots, \eta_{k_m}\}$  minimalna baza ideala  $\langle \eta_1(\lambda), \eta_2(\lambda), \dots \rangle \subset \mathcal{G}_{(0, (A^*, B^*))}$ .*

Naslednji izrek priskrbi orodje za določanje zgornje meje cikličnosti sistemov oblike (2.128).

**Izrek 3.2.5** *Recimo, da za  $(A^*, B^*) \in E(A, B)$  minimalna baza  $M$  ideala  $J = \langle g_{11}^{\mathbb{R}}, g_{22}^{\mathbb{R}}, \dots \rangle$  v  $\mathcal{G}_{(A^*, B^*)}$  za ustrezni sistem oblike (2.129) sestoji iz  $m$  polinomov. Potem je cikličnost izhodišča sistema oblike (2.129) glede na perturbacijo v (2.128) kvečjemu  $m$ .*

**Dokaz.** Cikličnost izhodišča sistema znotraj družine (2.129) glede na perturbacijo v družini (2.128) je enaka maksimalnemu številu pozitivnih ničel (multiplikativnosti) funkcije razlike (2.39). Po predpostavki izreka 3.2.5 in izreku 3.2.3 minimalna baza ideala  $\langle \eta_3, \eta_5, \dots \rangle \subset \mathcal{G}_{(A^*, B^*)}$  vsebuje  $m$  elementov in zato ima po izreku 3.2.4 minimalna baza ideala  $\langle \eta_1(\lambda), \eta_2(\lambda), \dots \rangle \subset \mathcal{G}_{(A^*, B^*)}$   $m + 1$  elementov. Tako je po trditvi 3.1.4 maksimalno število pozitivnih ničel funkcije  $\mathcal{D}(r_0)$  enako  $m$ . ■

Da lahko uporabimo izrek 3.2.5, potrebujemo računsko metodo za določitev minimalne baze ideala  $\langle g_{kk}^{\mathbb{R}} : k \in \mathbb{N} \rangle$ , v kateri je eksplicitno podanih samo prvih nekaj generatorjev. Če je izhodišče šibki fokus reda  $k$ , je za sisteme (2.129) cikličnost kvečjemu  $k - 1$ , za sisteme (2.128) pa kvečjemu  $k$ . Zato je določitev zgornje meje za cikličnost izhodišča relevantna samo, ko je izhodišče center. Zato predpostavimo, da je problem centra rešen in poznamo najmanjši  $K$ , za katerega je  $\mathbf{V}(\mathcal{B}) = \mathbf{V}(\mathcal{B}_K)$ .

Naslednji izrek pove, kako je koncept minimalnosti Bautinovega ideala povezan s cikličnostjo centra v izhodišču [76, 114].

**Izrek 3.2.6** *Predpostavimo, da za sistem (3.5) z  $\lambda = 0$  veljata naslednja dva pogoja:*

$$(a) \mathbf{V}(\mathcal{B}) = \mathbf{V}(\mathcal{B}_K),$$

(b)  $\mathcal{B}_K$  je korenski ideal.

*Tedaj je cikličnost izhodišča sistema (2.129) glede na perturbacije v sistemu (2.128) kvečjemu enaka števnosti  $M(\mathcal{B}_K)$ , t. j. Bautinovi globini (glej definicijo 2.2.56) ideala  $\mathcal{B}_K$ .*

**Dokaz.** Po predpostavki (a) so polinomi  $g_{kk}$  ničelni v vsaki točki raznoterosti  $\mathbf{V}(\mathcal{B}_K)$  za vsak  $k \in \mathbb{N}$  in zato je  $g_{kk} \in \mathbf{I}(\mathbf{V}(\mathcal{B}_K))$ . Po krepkem Hilbertovem izreku o ničlah (izrek 1.4.6) pa je  $\mathbf{I}(\mathbf{V}(\mathcal{B}_K)) = \sqrt{\mathcal{B}_K}$ , kar je po predpostavki (b) enako  $\mathcal{B}_K$  in je zato  $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_K$ , odkoder sledi  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_K$ . Potem pa je minimalna baza ideala  $\mathcal{B}$  enaka  $\{g_{k_1 k_1}, \dots, g_{k_m k_m}\}$ , kar je minimalna baza ideala  $\mathcal{B}_K$ , ki jo lahko izračunamo. Tako za vsak  $k \in \mathbb{N}$  obstajajo funkcije  $f_{1,k}, \dots, f_{m,k} \in \mathbb{C}[a, b]$ , da je

$$g_{kk} = f_{1,k} g_{k_1 k_1} + \dots + f_{m,k} g_{k_m k_m}.$$

Ker pa je  $g_{kk}(a, \bar{a}) = g_{kk}^{\mathbb{R}}(A(a, \bar{a}), B(a, \bar{a})) \in \mathbb{R}$  za vsak  $k \in \mathbb{N}$ , pomeni, da je

$$g_{kk}^{\mathbb{R}} = (\text{Re } f_{1,k}) g_{k_1 k_1}^{\mathbb{R}} + \dots + (\text{Re } f_{m,k}) g_{k_m k_m}^{\mathbb{R}}.$$

Tako je za vsak  $(A^*, B^*) \in E(A, B)$  množica  $\mathcal{S} := \{g_{k_1 k_1}^{\mathbb{R}}, \dots, g_{k_m k_m}^{\mathbb{R}}\}$  baza ideala  $\langle g_{kk}^{\mathbb{R}} : k \in \mathbb{N} \rangle \subset \mathcal{G}_{(A^*, B^*)}$ . Očitno je, da četudi  $\mathcal{S}$  ne bi bila minimalna baza ideala  $\langle g_{kk}^{\mathbb{R}} : k \in \mathbb{N} \rangle$  v  $\mathcal{G}_{(A^*, B^*)}$  (ni nujno, da vsak  $g_{k_q k_q}$  privede do  $g_{k_q k_q}^{\mathbb{R}} = 0$ ), vsebuje minimalno bazo, ki ima zato lahko največ  $m$  elementov. Zaključek izreka sledi iz izreka 3.2.5. ■

Pogoja (a) in (b) izreka 3.2.6 torej pomenita, da je  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_K$ . Da preverimo pogoj (a), moramo rešiti problem centra za ustrezni sistem.



Da preverimo pogoj (b) izreka 3.2.6, izračunamo  $\sqrt{\mathcal{B}_K}$  in nato še reducirani Gröbnerjevi bazi idealov  $\sqrt{\mathcal{B}_K}$  in  $\mathcal{B}_K$  ter preverimo njuno enakost (glej poglavje 1). Druga možnost pa je, da v SINGULARJU izračunamo primarno dekompozicijo ideala  $\mathcal{B}_K$ . Vemo, da takšna dekompozicija vedno obstaja (glej Lasker-Noetherjev izrek - izrek 1.5.16 v poglavju 1) in v razdelku 1.6 smo videli, da je rezultat izračuna v Singularju podan kot seznam parov idealov, kjer je vsak ideal določen z generatorji. Prvi ideal  $Q_j$  v vsakem paru je primarni ideal v primarni dekompoziciji ideala  $\mathcal{B}_K$ ; drugi ideal  $P_j$  v vsakem paru je pridruženi praideal prvega ideala, t. j. koren prvega ideala,  $P_j = \sqrt{Q_j}$ . Če je za vsak  $j$  drugi ideal v vsakem paru enak prvemu:  $Q_j = \sqrt{Q_j} = P_j$ , je vsak  $Q_j$  praideal in zato je  $\mathcal{B}_K$  korenski ideal.

Vedno obstaja takšen  $K$ , da je prvi pogoj izreka 3.2.6 izpolnjen, za drugi pogoj pa to ni vedno res. V nekaterih primerih se je možno izogniti težavam, ki nastopijo zaradi nekorenski ideala  $\mathcal{B}_K$  tako, da izračune izvajamo v drugem kolobarju, v katerem slika Bautinovega ideala postane korenski ideal ali ima preprostejšo strukturo (glej [45, 74, 76] za več podrobnosti).

Če je Bautinov ideal nekorenski in ima primarno dekompozicijo oblike  $\bigcap_{i=1}^s Q_i$ , kjer je  $\sqrt{Q_i} = Q_i$  za  $1 \leq i \leq k$ , medtem ko je  $\sqrt{Q_i} \neq Q_i$  za  $i = k+1, \dots, s$ , si lahko pomagamo s sledečo trditvijo.

**Trditev 3.2.7** Naj bo  $I = \langle g_1, \dots, g_t \rangle$  ideal kolobarja  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  s primarno dekompozicijo

$$I = P_1 \cap \dots \cap P_k \cap Q_1 \cap \dots \cap Q_m,$$

kjer so  $P_i$  in  $Q_i$  primarne komponente, za katere velja  $P_i = \sqrt{P_i}$  (za  $i = 1, \dots, k$ ) in  $Q_j \neq \sqrt{Q_j}$  (za  $j = 1, \dots, m$ ). Naj bo  $Q = Q_1 \cap \dots \cap Q_m$  in naj bo  $g$  polinom, ki je na  $V(I)$  ničelen. Naj bo  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  poljubna točka raznoterosti  $V(I) \setminus V(Q)$ . Potem na majhni okolici točke  $x^*$  vedno velja

$$g = f_1 g_1 + \dots + f_t g_t,$$

kjer so  $f_1, \dots, f_t$  potenčne vrste, ki so v točki  $x^*$  konvergentne.

**Dokaz.** Po predpostavki je

$$\sqrt{I} = P_1 \cap \dots \cap P_k \cap \sqrt{Q_1} \cap \dots \cap \sqrt{Q_m}.$$

Naj bo  $g \in \sqrt{I}$ . Potem je  $g \in P = P_1 \cap \dots \cap P_k$  in  $g \in \sqrt{Q}$ . Za vsak polinom  $q \in Q$  je  $qg \in P$  in  $qg \in Q$ , zato je  $qg \in I$ . Torej obstajajo polinomi  $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_t \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ , da je

$$qg = \hat{f}_1 g_1 + \dots + \hat{f}_t g_t. \quad (3.7)$$

Ker je  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in V(I) \setminus V(Q)$ , obstaja  $q \in Q$ , za katerega je  $q(x^*) \neq 0$ . Ker je tak polinom  $q$  v lokalnem kolobarju (t. j. ko gledamo Taylorjeve približke) v točki  $x^*$  obrnljiv, lahko pišemo

$$g = \frac{\hat{f}_1}{q} g_1 + \dots + \frac{\hat{f}_t}{q} g_t. \quad (3.8)$$

Očitno lahko za vsak  $\ell \in \{1, \dots, t\}$  kofaktorje  $\frac{\hat{f}_\ell}{q}$  izrazimo kot (konvergentne) potenčne vrste v okolici  $x^*$  (t. j.  $f_\ell = \frac{\hat{f}_\ell}{q}$ ), kar zaključí dokaz. ■

### 3.2.2 Problem centra in cikličnost kubičnega sistema

Obravnavamo kompleksni sistem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1 - a_{10}x - a_{20}x^2 - a_{11}xy - a_{02}y^2), \\ \dot{y} &= -y(1 - b_{01}y - b_{02}y^2 - b_{11}xy - b_{20}x^2). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Zgornji sistem je bil obravnavan v [45], kjer sta avtorja pridobila rešitev problemov centra in cikličnosti. Dobljene rezultate navedemo spodaj.

Naslednji izrek poda pogoje za center v izhodišču sistema (3.9).

**Izrek 3.2.8** Naj bo  $\mathbf{V}(\mathcal{B})$  raznoterost Butinovega ideala sistema (3.9) in naj bo  $\mathcal{B}_4 = \langle g_{11}, g_{22}, g_{33}, g_{44} \rangle$ . Tedaj je  $\mathbf{V}(\mathcal{B}) = \mathbf{V}(\mathcal{B}_4)$  in  $\mathbf{V}(\mathcal{B})$  sestoji iz sledečih petih ireducibilnih komponent:

$$\mathbf{V}(\mathcal{B}) = \mathbf{V}(J_1) \cup \mathbf{V}(J_2) \cup \mathbf{V}(J_3) \cup \mathbf{V}(J_4) \cup \mathbf{V}(J_5),$$

kjer je

$$\begin{aligned} J_1 &= \langle a_{10}^2 b_{02} - a_{20} b_{01}^2, a_{02} a_{20} - b_{20} b_{02}, a_{02} a_{10}^2 - b_{20} b_{01}^2, a_{11} - b_{11} \rangle \\ J_2 &= \langle a_{20} + b_{20}, a_{11} - b_{11}, a_{02} + b_{02} \rangle \\ J_3 &= \langle a_{11}, a_{02}, b_{02}, b_{11} \rangle \\ J_4 &= \langle a_{20}, a_{11}, b_{11}, b_{20} \rangle \\ J_5 &= \langle a_{11}, a_{02}, b_{11}, b_{20} \rangle. \end{aligned}$$

**Dokaz.** Z uporabo pristopa, opisanega v razdelku 2.2.4 izračunamo prvih sedem fokusnih količin  $g_{11}, \dots, g_{77}$  sistema (3.9). Prav tako preverimo izračune s pomočjo kode v programu MATHEMATICA, ki je podana v dodatku B (glej tudi [114, dodatek, str. 308]). Prve štiri fokusne količine sistema (3.9) so

$$\begin{aligned} g_{11} &= b_{11} - a_{11}, \\ g_{22} &= -a_{02} a_{20} + 6a_{10} a_{11} b_{01} - 6a_{10} b_{01} b_{11} + b_{02} b_{20}, \\ g_{33} &= -15a_{02} a_{10}^2 a_{11} - 7a_{02} a_{11} a_{20} + 24a_{10} a_{11}^2 b_{01} + 20a_{02} a_{10} a_{20} b_{01} - 108a_{10}^2 a_{11} b_{01}^2 - 4a_{11} a_{20} b_{01}^2 \\ &\quad - 3a_{10}^2 a_{11} b_{02} + 4a_{11} a_{20} b_{02} + 16a_{02} a_{10}^2 b_{11} + 5a_{02} a_{20} b_{11} + 108a_{10}^2 b_{01}^2 b_{11} + 3a_{20} b_{01}^2 b_{11} \\ &\quad + 4a_{10}^2 b_{02} b_{11} - 4a_{20} b_{02} b_{11} - 24a_{10} b_{01} b_{11}^2 + 8a_{02} a_{11} b_{20} - 16a_{11} b_{01}^2 b_{20} - 5a_{11} b_{02} b_{20} \\ &\quad - 20a_{10} b_{01} b_{02} b_{20} - 8a_{02} b_{11} b_{20} + 15b_{01}^2 b_{11} b_{20} + 7b_{02} b_{11} b_{20}, \\ g_{44} &= -1944a_{02} a_{10}^2 a_{11}^2 - 150a_{02}^2 a_{10}^2 a_{20} - 243a_{02} a_{11}^2 a_{20} - 162a_{02}^2 a_{20}^2 + 7128a_{02} a_{10}^3 a_{11} b_{01} \\ &\quad + 4320a_{10} a_{11}^3 b_{01} + 3832a_{02} a_{10} a_{11} a_{20} b_{01} - 10800a_{10}^2 a_{11}^2 b_{01}^2 - 4752a_{02} a_{10}^2 a_{20} b_{01}^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
& -1584a_{11}^2a_{20}b_{01}^2 - 270a_{02}a_{20}^2b_{01}^2 + 26640a_{10}^3a_{11}b_{01}^3 + 1668a_{10}a_{11}a_{20}b_{01}^3 \\
& + 1296a_{10}^2a_{11}^2b_{02} - 258a_{02}a_{10}^2a_{20}b_{02} + 135a_{11}^2a_{20}b_{02} + 108a_{02}a_{20}^2b_{02} \\
& + 1368a_{10}^3a_{11}b_{01}b_{02} - 1412a_{10}a_{11}a_{20}b_{01}b_{02} + 2574a_{02}a_{10}^2a_{11}b_{11} + 90a_{02}a_{11}a_{20}b_{11} \\
& - 7428a_{02}a_{10}^3b_{01}b_{11} - 10800a_{10}a_{11}^2b_{01}b_{11} - 2068a_{02}a_{10}a_{20}b_{01}b_{11} + 2826a_{11}a_{20}b_{01}^2b_{11} \\
& - 26640a_{10}^3b_{01}^3b_{11} - 1368a_{10}a_{20}b_{01}^3b_{11} - 2826a_{10}^2a_{11}b_{02}b_{11} - 1668a_{10}^3b_{01}b_{02}b_{11} \\
& + 1412a_{10}a_{20}b_{01}b_{02}b_{11} - 576a_{02}a_{10}^2b_{11}^2 + 117a_{02}a_{20}b_{11}^2 + 10800a_{10}a_{11}b_{01}b_{11}^2 \\
& + 10800a_{10}^2b_{01}^2b_{11}^2 - 1296a_{20}b_{01}^2b_{11}^2 + 1584a_{10}^2b_{02}b_{11}^2 - 135a_{20}b_{02}b_{11}^2 \\
& - 4320a_{10}b_{01}b_{11}^3 + 12a_{02}^2a_{10}^2b_{20} + 225a_{02}a_{11}^2b_{20} + 180a_{02}^2a_{20}b_{20} \\
& - 1328a_{02}a_{10}a_{11}b_{01}b_{20} + 576a_{11}^2b_{01}^2b_{20} - 174a_{02}a_{20}b_{01}^2b_{20} + 7428a_{10}a_{11}b_{01}^3b_{20} \\
& + 174a_{02}a_{10}^2b_{02}b_{20} - 117a_{11}^2b_{02}b_{20} + 2068a_{10}a_{11}b_{01}b_{02}b_{20} + 4752a_{10}^2b_{01}^2b_{02}b_{20} \\
& + 258a_{20}b_{01}^2b_{02}b_{20} + 270a_{10}^2b_{02}^2b_{20} - 108a_{20}b_{02}^2b_{20} + 1328a_{02}a_{10}b_{01}b_{11}b_{20} \\
& - 2574a_{11}b_{01}^2b_{11}b_{20} - 7128a_{10}b_{01}^3b_{11}b_{20} - 90a_{11}b_{02}b_{11}b_{20} - 3832a_{10}b_{01}b_{02}b_{11}b_{20} \\
& - 225a_{02}b_{11}^2b_{20} + 1944b_{01}^2b_{11}^2b_{20} + 243b_{02}b_{11}^2b_{20} - 12a_{02}b_{01}^2b_{20}^2 \\
& - 180a_{02}b_{02}b_{20}^2 + 150b_{01}^2b_{02}b_{20}^2 + 162b_{02}^2b_{20}^2.
\end{aligned}$$

Reduciramo  $g_{55}$ ,  $g_{66}$  in  $g_{77}$  po modulu Gröbnerjeve baze ideala  $\mathcal{B}_4 = \langle g_{11}, g_{22}, g_{33}, g_{44} \rangle$  in dobimo

$$g_{55}, g_{66}, g_{77} \equiv 0 \pmod{\mathcal{B}_4}.$$

Sedaj preverimo pripadnost korenu za polinom  $g_{44}$  in dobimo

$$g_{44} \notin \sqrt{\langle g_{11}, g_{22}, g_{33} \rangle}.$$

To pomeni, da je  $\sqrt{\mathcal{B}_1} \subsetneq \sqrt{\mathcal{B}_2} \subsetneq \sqrt{\mathcal{B}_3} \subsetneq \sqrt{\mathcal{B}_4} = \sqrt{\mathcal{B}_5} = \dots$ . Zato pričakujemo, da je  $\mathbf{V}(\mathcal{B}_4) = \mathbf{V}(\mathcal{B})$ . Inkluzija  $\mathbf{V}(\mathcal{B}) \subset \mathbf{V}(\mathcal{B}_4)$  je očitna. Obratno inkluzijo preverimo tako, da poiščemo ireducibilno dekompozicijo raznoterosti  $\mathbf{V}(\mathcal{B}_4)$  in nato preverimo, če poljubna točka vsake komponente ireducibilne dekompozicije pripada sistemom, ki imajo center v izhodišču. Za izračun ireducibilne dekompozicije raznoterosti  $\mathbf{V}(\mathcal{B}_4)$  izvedemo izračune z rutino `minAssGTZ` v `Singular`ju (glej razdelek 1.6) glede na stopenjsko inverzno leksikografsko urejenost z  $a_{02} > a_{10} > a_{11} > a_{20} > b_{02} > b_{11} > b_{01} > b_{20}$ . Kot rezultat dobimo komponente  $\mathbf{V}(J_i)$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , ki so navedene v izreku 3.2.8. Sedaj dokažimo, da so pogoji vsake komponente zadostni za nastop centra v izhodišču sistema (3.9) oz. po izreku 2.2.27, da ima poljuben sistem (3.9), ki zadošča pogojem poljubne komponente  $\mathbf{V}(J_i)$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , formalni prvi integral oblike (2.45).

*Komponenta  $\mathbf{V}(J_1)$ .* Pokažimo, da je  $J_1 = I_{sym}$ . Z uporabo algoritma, ki smo ga navedli v razdelku 2.2.6 (glej tabelo 2.1), za izračun generatorjev ideala  $\mathcal{I} = I_{sym}$  izračunamo Gröbnerjevo bazo  $G$  ideala  $H$ , definirane z (2.73), ki je v našem primeru enak

$$H = \langle 1 - w\gamma^2, a_{02} - t_1, a_{10} - t_2, a_{11} - t_3, a_{20} - t_4, \gamma^2b_{20} - t_1, b_{01} - \gamma t_2, b_{11} - t_3, b_{02} - \gamma^2t_4 \rangle.$$

Nato z dobljene Gröbnerjeve baze eliminiramo polinome, ki so odvisni od spremenljivk  $w, \gamma, t_1, t_2, t_3, t_4$ , kar pomeni, da izračunamo šesti eliminacijski ideal glede na urejenost spremenljivk  $\{w, \gamma, t_1, t_2, t_3, t_4\} \succ \{a_{02}, a_{10}, a_{11}, a_{20}, b_{02}, b_{11}, b_{01}, b_{20}\}$ . Na ta način dobimo Gröbnerjevo bazo  $G_H$  ideala  $H \cap \mathbb{C}[a, b]$ , ki je enaka

$$G_H = \{a_{11} - b_{11}, a_{02}a_{20} - b_{02}b_{20}, a_{10}^2b_{02} - a_{20}b_{01}^2, a_{10}^2a_{02} - b_{20}b_{01}^2\}.$$

Zato je zaprtje Zariskega vseh časovno reverzibilnih sistemov znotraj družine (3.9) raznoterost ideala

$$I_{sym} = \langle a_{11} - b_{11}, a_{02}a_{20} - b_{02}b_{20}, a_{10}^2b_{02} - a_{20}b_{01}^2, a_{10}^2a_{02} - b_{20}b_{01}^2 \rangle.$$

Vidimo, da je  $\mathbf{V}(J_1)$  raznoterost ideala Sibirskega za sistem (3.9) in zato ima po izreku 2.2.45 vsak sistem (3.9) s parametri iz  $\mathbf{V}(J_1)$  center v izhodišču.

*Komponenta*  $\mathbf{V}(J_2)$ . Sistem (3.9), ki ustreza komponenti  $\mathbf{V}(J_2)$ , je oblike

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1 - a_{10}x + b_{20}x^2 - b_{11}xy + b_{02}y^2), \\ \dot{y} &= -y(1 - b_{20}x^2 - b_{01}y - b_{11}xy - b_{02}y^2). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Za ta sistem najdemo dva algebraična parcialna integrala  $l_1 = x$  in  $l_2 = y$ , s pomočjo katerih pridobimo Darbouxjev integrirajoči množitelj  $\mu = (xy)^{-2}$  in iz njega prvi integral

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{xy}(1 - a_{10}x - b_{01}y + b_{20}x^2 - b_{02}y^2) + b_{11} \log(xy).$$

Vidimo, da zgornji prvi integral ni analitična funkcija v okolici izhodišča, zato za dokaz obstoja prvega integrala oblike (2.45) uporabimo drugo metodo, in sicer metodo napihovanja. Uporabimo transformacijo

$$(x, y) \rightarrow (z, y) = \left(\frac{x}{y}, y\right), \quad (3.12)$$

ki sistem (3.11) spremeni v

$$\begin{aligned} \dot{z} &= 2z - b_{01}yz - a_{10}yz^2 - 2b_{11}y^2z^2 = \mathcal{F}(z, y) \\ \dot{y} &= -y + b_{01}y^2 + b_{02}y^3 + b_{11}y^3z + b_{20}y^3z^2 = \mathcal{G}(z, y). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Iščemo prvi integral oblike

$$\mathcal{H}(z, y) = \sum_{k=2}^{\infty} f_k(z)y^k. \quad (3.14)$$

Ko izračunamo  $\dot{\mathcal{H}} = (\partial\mathcal{H}/\partial z)\mathcal{F} + (\partial\mathcal{H}/\partial y)\mathcal{G}$  in koeficient vsake stopnje spremenljivke  $y$  enačimo z nič, dobimo naslednjo rekurzivno diferencialno enačbo za  $f_k$ :

$$\begin{aligned} (k-2)(b_{02} + b_{11}z + b_{20}z^2)f_{k-2} + (k-1)b_{01}f_{k-1} \\ -kf_k - 2b_{11}z^2f'_{k-2} - z(b_{01} + a_{10}z)f'_{k-1} + 2zf'_k = 0. \end{aligned}$$

Za  $k = 2, \dots, 8$  dobimo  $f_2 = z$ ,  $f_3 = z(b_{01} + a_{10}z)$ ,  $f_4 = z(b_{01}^2 + b_{02} + (a_{10}^2 - b_{20})z^2)$ ,  $f_5 = zP_3$ , kjer je  $P_3$  polinom stopnje 3,  $f_6 = zQ_4(z)$ , kjer je  $Q_4(z)$  polinom stopnje 4, ki ne vsebuje člena z monomom  $z^2$ ,  $f_7 = zR_5(z)$ , kjer je  $R_5$  polinom stopnje 5,  $f_8 = zS_6(z)$ , kjer je  $S_6(z)$  polinom stopnje 6, ki ne vsebuje člena z monomom  $z^3$ . Zato predpostavimo, da je za vsak lihi  $k$  polinom  $f_k$  oblike

$$f_k(z) = z(C_0 + C_1z + C_2z^2 + \dots + C_{k-2}z^{k-2})$$

in za vsak sodi  $k$  je polinom  $f_k$  oblike  $f_k = zQ_{k-2}$ , kjer je  $Q_{k-2}$  neki polinom stopnje največ  $k-2$  brez člena z monomom  $z^{\frac{k}{2}-1}$ , t. j.

$$f_k(z) = z(C_0 + C_1z + C_2z^2 + \dots + C_{\frac{k}{2}-2}z^{\frac{k}{2}-2} + C_{\frac{k}{2}}z^{\frac{k}{2}} + \dots + C_{k-2}z^{k-2}).$$

Z uporabo indukcije dokažemo, da za vsak  $k$  dobimo polinom  $f_k$ . Recimo, da domneva velja za  $k = 1, \dots, n-1$  in izračunamo  $f_k$  za  $k = n$  tako, da rešimo diferencialno enačbo

$$f'_n - \frac{n}{2z} f_n = \frac{1}{2z} \left[ (2-n)(b_{02} + b_{11}z + b_{20}z^2)f_{n-2} - (n-1)b_{01}f_{n-1} + 2b_{11}z^2 f'_{n-2} + z(b_{01} + a_{10}z)f'_{n-1} \right]. \quad (3.15)$$

Naj bo najprej  $n$  lih in želimo dokazati, da je  $f_n(z) = zQ_{n-2}$ , kjer je  $Q_{n-2}$  polinom stopnje največ  $n-2$ . Če je  $n$  lih, je tudi  $n-2$  lih,  $n-1$  pa je sodo število. Izraz na desni strani diferencialne enačbe (3.15) je polinom stopnje kvečjemu  $n-2$  in ta izraz označimo z  $R_{n-2}(z)$ . Diferencialna enačba (3.15) postane  $f'_n - \frac{n}{2z} f_n = R_{n-2}(z)$ . Vemo, da je splošna rešitev linearne diferencialne enačbe oblike

$$f'(z) + g(z)f(z) = h(z) \quad (3.16)$$

enaka

$$f(z) = e^{-\int g(z)dz} \left( C + \int e^{\int g(z)dz} h(z) dz \right). \quad (3.17)$$

V našem primeru je  $g(z) = -\frac{n}{2z}$  in  $h(z) = R_{n-2}(z) = A_0 + A_1z + \dots + A_{n-2}z^{n-2}$ . Zato je rešitev

$$\begin{aligned} f_n(z) &= e^{\int \frac{n}{2z} dz} \left[ C + \int e^{-\int \frac{n}{2z} dz} (A_0 + A_1z + \dots + A_{n-2}z^{n-2}) dz \right] \\ &= e^{\frac{n}{2} \ln z} \left[ C + \int e^{-\frac{n}{2} \ln z} (A_0 + A_1z + \dots + A_{n-2}z^{n-2}) dz \right] \\ &= Cz^{\frac{n}{2}} + z^{\frac{n}{2}} \int z^{-\frac{n}{2}} (A_0 + A_1z + \dots + A_{n-2}z^{n-2}) dz \\ &= Cz^{\frac{n}{2}} + z^{\frac{n}{2}} \int (A_0z^{-\frac{n}{2}} + A_1z^{1-\frac{n}{2}} + \dots + A_{n-2}z^{\frac{n}{2}-2}) dz \\ &= Cz^{\frac{n}{2}} + z^{\frac{n}{2}} (\tilde{A}_0z^{1-\frac{n}{2}} + \tilde{A}_1z^{2-\frac{n}{2}} + \dots + \tilde{A}_{n-2}z^{\frac{n}{2}-1}) \\ &= Cz^{\frac{n}{2}} + \tilde{A}_0z + \tilde{A}_1z^2 + \dots + \tilde{A}_{n-2}z^{n-1} \\ &= Cz^{\frac{n}{2}} + z(\tilde{A}_0 + \tilde{A}_1z + \dots + \tilde{A}_{n-2}z^{n-2}) = Cz^{\frac{n}{2}} + zQ_{n-2}(z). \end{aligned}$$

Za  $C = 0$  dobimo  $f_n(z) = zQ_{n-2}(z)$ , kot smo predpostavili. Opazimo, da se za lihe  $n$  v izračunih ne pojavi logaritemski člen, kar pa ne moremo zagotoviti v primeru, ko je  $n$  sodo število. Zato je v tem primeru potrebna podrobnejša analiza. Naj bo torej  $n$  sodo število. Tedaj je tudi  $n-2$  sodo in  $n-1$  je liho število; funkcije  $f_{n-2}$ ,  $f'_{n-2}$ ,  $f_{n-1}$ , in  $f'_{n-1}$  so oblike

$$\begin{aligned} f_{n-2}(z) &= z(C_0 + C_1z + C_2z^2 + \dots + C_{\frac{n}{2}-3}z^{\frac{n}{2}-3} + C_{\frac{n}{2}-1}z^{\frac{n}{2}-1} \\ &\quad + \dots + C_{n-4}z^{n-4}), \\ f'_{n-2}(z) &= C_0 + 2C_1z + 3C_2z^2 + \dots + \left(\frac{n}{2} - 2\right)C_{\frac{n}{2}-3}z^{\frac{n}{2}-3} + \frac{n}{2}C_{\frac{n}{2}-1}z^{\frac{n}{2}-1} \\ &\quad + \dots + (n-3)C_{n-4}z^{n-4}, \\ f_{n-1}(z) &= z(A_0 + A_1z + A_2z^2 + \dots + A_{n-3}z^{n-3}), \\ f'_{n-1}(z) &= A_0 + 2A_1z + 3A_2z^2 + \dots + (n-2)A_{n-3}z^{n-3}, \end{aligned}$$

kot smo predpostavili zgoraj. Sedaj te izraze vstavimo v rekurzivno diferencialno enačbo (3.15). Želimo, da pri integriranju te diferencialne enačbe ne nastopi logaritem v funkciji  $f_n(z)$ , in to je

takrat, ko je koeficient pred monomom  $z^{\frac{n}{2}}$  enak nič. Z enostavnim izračunom lahko preverimo, da dobimo  $f_n = zQ_{n-2}$ , ki je oblike

$$f_n = z(B_0 + B_1z + B_2z^2 + \cdots + B_{\frac{n}{2}-2}z^{\frac{n}{2}-2} + B_{\frac{n}{2}}z^{\frac{n}{2}} + \cdots + B_{n-2}z^{n-2}).$$

Torej je prvi integral sistema (3.13) enak

$$\mathcal{H}(z, y) = \sum_{k=2}^{\infty} zQ_{k-2}(z)y^k = zy^2 + \sum_{k=3}^{\infty} zQ_{k-2}(z)y^k$$

in prvi integral sistema (3.11) je

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) &= \mathcal{H}\left(\frac{x}{y}, y\right) = \left(\frac{x}{y}\right)y^2 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{x}{y} \cdot \tilde{Q}_{k-2}\left(\frac{x}{y}\right) \cdot y^k \\ &= xy + \sum_{k=3}^{\infty} xy^{k-1} (B_0 + B_1\frac{x}{y} + B_2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \cdots + B_{k-2}\left(\frac{x}{y}\right)^{k-2}) \\ &= xy + \sum_{k=3}^{\infty} (B_0xy^{k-1} + B_1x^2y^{k-2} + B_2x^3y^{k-3} + \cdots + B_{k-2}x^{k-1}y), \end{aligned}$$

kar je formalni prvi integral zahtevane oblike.

*Komponenta  $\mathbf{V}(J_3)$ .* Pokažimo, da ima sistem

$$\dot{x} = x(1 - a_{10}x - a_{20}x^2) = F(x, y), \quad \dot{y} = -y(1 - b_{20}x^2 - b_{01}y) = G(x, y) \quad (3.18)$$

center v izhodišču, t. j., da premore prvi integral oblike (2.45). Ekvivalentno lahko pokažemo, da ima ta sistem prvi integral oblike

$$\Psi = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y)x^k, \quad (3.19)$$

kjer je za  $k \in \mathbb{N}$   $f_k(y)$  analitična funkcija v okolici 0. Naj bo  $\bar{f}_{k-1} = b_{20}yf'_{k-2}(y) - (k-1)a_{10}f_{k-1}(y)$ . Vidimo, da je  $\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial x}F + \frac{\partial \Psi}{\partial y}G = 0$  natanko tedaj, ko je

$$f_1(y) + y(b_{01}y - 1)f'_1(y) = 0, \quad (3.20)$$

$$-a_{10}f_1(y) + 2f_2(y) + y(b_{01}y - 1)f'_2(y) = 0, \quad (3.21)$$

$$-(k-2)a_{20}f_{k-2}(y) + \bar{f}_{k-1} + kf_k(y) + y(b_{01}y - 1)f'_k(y) = 0, \quad (3.22)$$

za  $k \geq 3$ .

Predpostavimo, da so  $f_k(y)$  v (3.20)–(3.22) oblike

$$f_k = \frac{P_k(y)}{(b_{01}y - 1)^k}, \quad \text{for } k = 1, 2, \dots, \quad (3.23)$$

kjer je  $P_k(y)$  polinom iz  $\mathbb{C}[y]$  stopnje največ  $k$ . To dokažemo z indukcijo. Če integriramo (3.20) in (3.21), dobimo

$$f_1(y) = \frac{yc_1}{1 - b_{01}y}, \quad \text{in } f_2(y) = \frac{y(a_{10} + yc_2)}{(1 - b_{01}y)^2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C},$$

kar dokazuje našo domnevo za  $k = 1, 2$ . Postavimo  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 0$  in predpostavimo, da naša domneva velja za  $k = 1, 2, \dots, j-1$ , ter pokažimo, da prav tako velja za  $k = j$ . Obravnavamo (3.22) za  $k = j$  in opazimo, da je  $\bar{f}_{j-1}(y)$  oblike (3.23) s  $k = j-1$ . Zato je za  $k = j$  enačba (3.22) ekvivalentna

$$y(b_{01}y - 1)f'_j + kf_j = \frac{Q_{j-1}(y)}{(b_{01}y - 1)^{j-1}},$$

kjer je  $Q_{j-1}(y) \in \mathbb{C}[y]$  stopnje največ  $j-1$  oz. ekvivalentno

$$y(b_{01}y - 1)^j f'_j + j(b_{01}y - 1)^{j-1} f_j = Q_{j-1}(y). \quad (3.24)$$

Pokazati moramo, da je  $f_j(y)$  v (3.24) oblike (3.23). Če je

$$f_j(y) = \frac{P_j(y)}{(b_{01}y - 1)^j}, \quad \text{potem je} \quad f'_j(y) = \frac{P'_j(y)(b_{01}y - 1) - jb_{01}P_j(y)}{(b_{01}y - 1)^{j+1}}.$$

Če vstavimo zgornja izraza v (3.24), dobimo

$$yP'_j(y) - jP_j(y) = Q_{j-1}(y). \quad (3.25)$$

Rešimo diferencialno enačbo (3.25) in dobimo, da je  $P_j(y)$  polinom spremenljivke  $y$  stopnje največ  $j$ , saj je glede na (3.16) in (3.17)

$$\begin{aligned} P_j(y) &= e^{\int \frac{j}{y} dy} \left[ C + \int e^{-\int \frac{j}{y} dy} \frac{Q_{j-1}(y)}{y} dy \right] \\ &= y^j \left[ C + \int \frac{a_0 + a_1y + \dots + a_{j-1}y^{j-1}}{y^{j+1}} dy \right] \\ &= Cy^j + y^j \left( \frac{b_0}{y^j} + \frac{b_1}{y^{j-1}} + \dots + \frac{b_{j-1}}{y} \right) \\ &= Cy^j + b_{j-1}y^{j-1} + \dots + b_1y + b_0. \end{aligned}$$

Zato je funkcija  $f_j(y)$  oblike (3.23), kar dokazuje predpostavko. Lahko se zgodi, da je integral (3.19) samo formalni prvi integral sistema (3.18), kar pa glede na izrek 2.2.27 zadošča za obstoj centra v izhodišču sistema (3.18).

*Komponenta  $\mathbf{V}(J_4)$ .* Ta primer je podoben prejšnjemu, namreč, če v vsakem generatorju ideala  $J_3$  zamenjamo vsak  $a_{ij}$  z  $b_{ji}$  in obratno, vsak  $b_{ij}$  zamenjamo z  $a_{ji}$ , dobimo generatorje ideala  $J_4$ . Zato vsak postopek, ki proizvede prvi integral sistema, določenega z  $\mathbf{V}(J_3)$ , prav tako proizvede prvi integral sistema, določenega z  $\mathbf{V}(J_4)$ , in sicer tako, da v prvem integralu sistema, ki ustreza pogojem komponente  $\mathbf{V}(J_3)$ , izvedemo involucijo  $a_{kj} \leftrightarrow b_{kj}^1$ .

*Komponenta  $\mathbf{V}(J_5)$ .* V tem primeru je sistem (3.9) enak

$$\dot{x} = x(1 - a_{10}x - a_{20}x^2), \quad \dot{y} = -y(1 - b_{01}y - b_{02}y^2), \quad (3.26)$$

za katerega najdemo naslednje algebraične parcialne integrale:

$$\begin{aligned} l_1 &= x, \\ l_2 &= y, \\ l_3 &= 1 - b_{01}y - b_{02}y^2, \\ l_4 &= 1 - a_{10}x - a_{20}x^2, \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Podoben argument lahko navedemo pri nekaterih primerih v razdelku 3.2.3, kjer bomo samo zapisali, da dobimo obravnavan primer iz drugega primera z involucijo  $a_{kj} \leftrightarrow b_{kj}$ .

in ustrezne kofaktorje

$$\begin{aligned} k_1 &= 1 - a_{10}x - a_{20}x^2, \\ k_2 &= -1 + b_{01}y + b_{02}y^2 \\ k_3 &= -y(-b_{01} - 2b_{02}y), \\ k_4 &= x(-a_{10} - 2a_{20}x). \end{aligned}$$

Lahko konstruiramo inverzni integrirajoči množitelj oblike  $V = xyl_3l_4$ . Zato ima po lemi 2.2.41(i) sistem (3.26) prvi integral oblike (2.45). ■

Sedaj obravnavamo problem cikličnosti za družino realnih kubičnih sistemov, ki so izraženi v kompleksni obliki kot

$$\dot{x} = \lambda x + ix(1 - a_{10}x - a_{20}x^2 - a_{11}x\bar{x} - a_{02}\bar{x}^2), \quad (3.27)$$

kjer je  $x = u + iv$ .

K enačbi (3.27) dodamo njeno kompleksno konjugirano enačbo in obravnavamo  $\bar{x}$  kot novo spremenljivko  $y$ , ter  $\bar{a}_{ij}$  kot nove parametre  $b_{ji}$ . Tako dobimo kompleksni sistem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x + ix(1 - a_{10}x - a_{20}x^2 - a_{11}xy - a_{02}y^2), \\ \dot{y} &= \lambda y - iy(1 - b_{01}y - b_{02}y^2 - b_{11}xy - b_{20}x^2). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Za pridobitev meje za cikličnost izhodišča realnega sistema (3.27) obravnavamo strukturo Bautinovega ideala sistema (3.28) z  $\lambda = 0$  in njegovo raznoterost. Videli bomo, da bo izrek 3.2.6 podal oceno za cikličnost elementarnega centra za skoraj vse točke centralne raznoterosti. Rešitev problema centra za sistem (3.28) z  $\lambda = 0$  je zapisana v izreku 3.2.8, kjer smo dokazali, da je  $\mathbf{V}(\mathcal{B}) = \mathbf{V}(\mathcal{B}_4)$ . Z uporabo tega rezultata dokažimo naslednji izrek, ki poskrbi za mejo cikličnosti izhodišča sistema (3.27).

**Izrek 3.2.9** *Če je  $a_{11} \neq 0$  ali  $a_{20} - \bar{a}_{02} \neq 0$ , je cikličnost centra v izhodišču sistema (3.27) kvečjemu štiri.*

**Dokaz.** Za dokaz cikličnosti uporabimo izrek 3.2.6. Enakost  $\mathbf{V}(\mathcal{B}) = \mathbf{V}(\mathcal{B}_4)$  je bila dokazana v izreku 3.2.8 in zato pogoj (a) izreka 3.2.6 drži. Sedaj preverimo, če je  $\mathcal{B}_4$  korenski. Izračunamo generatorje ideala  $\sqrt{\mathcal{B}_4}$  z uporabo ukaza `radical` v SINGULARJU. Nato izračunamo reducirani Gröbnerjevi bazi idealov  $\mathcal{B}_4$  in  $\sqrt{\mathcal{B}_4}$ . Ideal  $\mathcal{B}_4$  je korenski natanko tedaj, ko sta  $\mathcal{B}_4$  in  $\sqrt{\mathcal{B}_4}$  enaka. Izkaže se (to preverimo s pomočjo ukaza `reduce` v SINGULARJU), da se nekateri elementi korena  $\sqrt{\mathcal{B}_4}$  ne reducirajo v nič po modulu Gröbnerjeve baze ideala  $\mathcal{B}_4$ . Zato  $\sqrt{\mathcal{B}_4} \neq \mathcal{B}_4$  in  $\mathcal{B}_4$  ni korenski ideal. Torej ne moremo direktno uporabiti izreka 3.2.6. Da bi natančneje videli, kateri del ideala  $\mathcal{B}_4$  ni korenski, izračunamo primarno dekompozicijo ideala  $\mathcal{B}_4$ . Primarno dekompozicijo izračunamo v SINGULARJU s pomočjo rutine `primdecGTZ` in dobimo

$$\mathcal{B}_4 = P_1 \cap \dots \cap P_5 \cap Q, \quad (3.29)$$

kjer so  $P_1, \dots, P_5$  praideali in  $Q$  ni praideal, kar potrjuje, kar smo povedali že zgoraj, da  $\mathcal{B}_4$  ni korenski. Rezultat izračunov v SINGULARJU je podan v dodatku B. Opazimo, da je  $Q$  v (3.29) primarni ideal, za katerega velja  $\sqrt{Q} = \langle a_{11}, b_{11}, a_{02} + b_{02}, a_{20} + b_{20} \rangle$ . Tako ima  $\mathcal{B}_4$  strukturo iz trditve 3.2.7. V prostoru parametrov  $E(a, b)$  (kjer je  $(a, b) = (a_{10}, a_{20}, a_{11}, a_{02}, b_{20}, b_{11}, b_{02}, b_{01})$ ) je raznoterost  $\mathbf{V}(Q)$  definirana z enačbami  $a_{11} = b_{11} = a_{02} + b_{02} = a_{20} + b_{20} = 0$ . Presek  $\mathbf{V}(Q)$



s prostorom parametrov  $E(a)$  je množica  $a_{20} - \bar{a}_{02} = a_{11} = 0$ . Naj bo  $(a^*, \bar{a}^*)$  točka iz  $E(a, b)$ , ki ustreza sistemu (3.28). Če je  $a_{11} \neq 0$  ali  $a_{20} - \bar{a}_{02} \neq 0$ , velja  $(a^*, \bar{a}^*) \notin \mathbf{V}(Q)$ . Zato po trditvi 3.2.7 obstajajo takšne funkcije  $f_{j,k}$ , da v okolici  $(a^*, \bar{a}^*)$  z  $a_{11} \neq 0$  ali  $a_{20} - \bar{a}_{02} \neq 0$  velja

$$g_{kk} = g_{11}f_{1,k} + g_{22}f_{2,k} + g_{33}f_{3,k} + g_{44}f_{4,k} \quad (3.30)$$

za vsak  $k > 4$ .

Tako je po izreku 3.2.5 cikličnost centra v izhodišču sistema (3.27) pri  $a_{11} \neq 0$  ali  $a_{20} - \bar{a}_{02} \neq 0$  kvečjemu štiri. ■

Sedaj obravnavamo število limitnih ciklov, ki lahko bifurcirajo iz vsake komponente centralne raznoterosti sistema (3.27). Naš pristop temelji na rezultatu iz [20], ki poveže ta števila z razsežnostjo vsake komponente.

Najprej vpeljimo nekaj oznak. Naj  $g_{kk}^{\mathbb{R}}$  označuje realne fokusne količine kot v (3.6). Potem je centralna raznoterost realnega sistema (3.27) raznoterost  $\mathbf{V}^{\mathbb{R}}$  v prostoru parametrov  $E(A, B)$  ideala  $\mathcal{B}^{\mathbb{R}} = \langle g_{11}^{\mathbb{R}}, g_{22}^{\mathbb{R}}, \dots \rangle$ . Z  $J_p(\mathcal{B}_k^{\mathbb{R}})$  označimo Jacobijevo matriko polinomov  $g_{11}^{\mathbb{R}}, g_{22}^{\mathbb{R}}, \dots, g_{kk}^{\mathbb{R}}$  v točki  $p$  in z  $\text{rang}(J_p^k)$  rang matrike  $J_p(\mathcal{B}_k^{\mathbb{R}})$ .

Naslednji izrek je majhna reformulacija izreka 3.2.1.

**Izrek 3.2.10** *Predpostavimo, da za sistem (3.4) z  $\lambda = 0$  in točko  $p \in \mathbf{V}^{\mathbb{R}}$ , velja  $\text{rang}(J_p^k) = k$ . Tedaj je sorazsežnost raznoterosti  $\mathbf{V}^{\mathbb{R}}$  najmanj  $k$  in obstajajo bifurkacije sistema (3.4), ki lokalno proizvedejo  $k$  limitnih ciklov iz centra, ki ustreza vrednosti parametrov  $p$ . Še več, če  $p$  leži na komponenti  $C$  raznoterosti  $\mathbf{V}^{\mathbb{R}}$  sorazsežnosti  $k$ , je  $p$  gladka točka centralne raznoterosti in cikličnost točke  $p$  in generične točke komponente  $C$  je natanko  $k$ .*

Da bi uporabili ta izrek, najprej poiščemo vse ireducibilne komponente raznoterosti  $\mathbf{V}^{\mathbb{R}}$ . Te lahko pridobimo iz ireducibilnih komponent kompleksne centralne raznoterosti sistema (3.28) (opisane v izreku 3.2.8) z vpeljavo

$$\begin{aligned} a_{10} &= A_{10} + iB_{10} & a_{20} &= A_{20} + iB_{20} \\ a_{11} &= A_{11} + iB_{11} & a_{02} &= A_{02} + iB_{02} \\ b_{02} &= A_{20} - iB_{20} & b_{01} &= A_{10} - iB_{10} \\ b_{11} &= A_{11} - iB_{11} & b_{20} &= A_{02} - iB_{02}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Velike črke označujejo koeficiente realnega sistema, zapisanega v kompleksni obliki kot (3.4). Opazimo, da koeficienti, ki se pojavijo v (3.31), ne sovpadajo s koeficienti iz (2.128). Koeficienti sistema (2.128) so dodelani izrazi koeficientov v (3.31).

Naslednji izrek podrobno opiše raznoterost  $\mathbf{V}^{\mathbb{R}}$ .

**Izrek 3.2.11** *Centralna raznoterost v  $\mathbb{R}^8$  realnega sistema (3.27) z  $\lambda = 0$  sestoji iz naslednjih treh ireducibilnih komponent*

$$\mathbf{V}^{\mathbb{R}} = \mathbf{V}(G_1) \cup \mathbf{V}(G_2) \cup \mathbf{V}(G_3),$$

kjer so

$$\begin{aligned} G_1 &= \langle B_{11}, A_{20}B_{02} + A_{02}B_{20}, A_{10}^2B_{02} + 2A_{02}A_{10}B_{10} - B_{02}B_{10}^2, A_{10}^2B_{20} \\ &\quad - 2A_{10}A_{20}B_{10} - B_{10}^2B_{20} \rangle \\ G_2 &= \langle B_{11}, A_{02} + A_{20}, B_{02} - B_{20} \rangle \\ G_3 &= \langle A_{11}, B_{11}, A_{02}, B_{02} \rangle. \end{aligned}$$

Komponenti  $G_1$  in  $G_2$  sta razsežnosti 5, komponenta  $G_3$  je razsežnosti 4.

**Dokaz.** Ideale  $G_1$ ,  $G_2$  in  $G_3$  dobimo, če uporabimo spremembo koordinat (3.31) na generatorjih idealov  $J_1$ ,  $J_2$  in  $J_5$  izreka 3.2.8. Opazimo, da če uporabimo (3.31) na  $J_3$  in  $J_4$  izreka 3.2.8, dobimo isti ideal  $\langle A_{11}, B_{11}, A_{02}, B_{02}, A_{20}, B_{20} \rangle$ , ki določa podraznoterost raznoterosti  $\mathbf{V}(G_3)$ .

Očitno je, da je razsežnost raznoterosti  $\mathbf{V}(G_2)$  enaka 5 in da je razsežnost raznoterosti  $\mathbf{V}(G_3)$  enaka 4. Sedaj pokažimo, da je razsežnost raznoterosti  $\mathbf{V}(G_1)$  enaka 5.

Poiščimo racionalno parametrizacijo raznoterosti  $\mathbf{V}(G_1)$ . Trdimo, da je podana z

$$\begin{aligned} A_{11} &= f_1 & A_{02} &= f_2 & A_{10} &= f_3 & B_{10} &= f_4 \\ A_{20} &= f_5 & B_{11} &= f_0 & B_{02} &= \frac{f_6}{g_1} & B_{20} &= \frac{f_7}{g_1}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

kjer je  $f_0 = 0$ ,  $f_1 = t$ ,  $f_2 = u_1$ ,  $f_3 = u_2$ ,  $f_4 = u_3$ ,  $f_5 = u_4$ ,  $f_6 = -2u_1u_2u_3$ ,  $f_7 = 2u_2u_3u_4$  in  $g_1 = u_2^2 - u_3^2$ . Za dokaz naše trditve tvorimo ideal  $I_6$  z eliminacijo spremenljivk  $w, t, u_1, u_2, u_3, u_4$  iz ideala

$$I = \langle 1 - wg_1, A_{11} - f_1, A_{02} - f_2, A_{10} - f_3, B_{10} - f_4, A_{20} - f_5, g_1B_{02} - f_6, g_1B_{20} - f_7 \rangle$$

v kolobarju

$$\mathbb{R}[w, t, u_1, u_2, u_3, u_4, A_{02}, A_{10}, A_{11}, A_{20}, B_{20}, B_{10}, B_{02}].$$

Izračun pokaže, da je  $I_6 = G_1$ . Zato je po izreku 1.5.19 (3.32) racionalna parametrizacija raznoterosti  $G_1$  in razsežnost raznoterosti  $\mathbf{V}(G_1)$  manjša ali enaka 5. Ker je rang Jacobijeve matrike funkcij  $f_0, \dots, f_7$  v naključno izbrani točki  $t = 0, u_1 = 1, u_2 = -1, u_3 = 2, u_4 = 3$  pet, je razsežnost natanko 5, kar zaključuje dokaz izreka. ■

Definirajmo naslednje polinome:

$$\begin{aligned} F_1 &= A_{11}(B_{02} - B_{20})(A_{10}^2 + B_{10}^2) \\ F_2 &= -A_{11}(2A_{02}A_{10}B_{10} + (B_{10}^2 - A_{10}^2)B_{20}) \\ F_3 &= (2A_{10}A_{20}B_{10} - A_{10}^2B_{20} + B_{10}^2B_{20})^2(A_{20}^2 + B_{20}^2). \end{aligned}$$

**Izrek 3.2.12** *Cikličnost generične točke  $p$  raznoterosti  $\mathbf{V}(G_1)$  z  $F_1(p) \neq 0$  in točke  $p'$  raznoterosti  $\mathbf{V}(G_2)$  z  $F_2(p') \neq 0$  je tri. Cikličnost točke  $p''$  raznoterosti  $\mathbf{V}(G_3)$  z  $F_3(p'') \neq 0$  je štiri.*

**Dokaz.** Ugotovimo, da je za  $\mathbf{V}(G_1)$ ,  $\text{rang}(J_p^3) = 3$  v točki  $p$  z  $F_1(p) \neq 0$ ; podobno za  $\mathbf{V}(G_2)$  dobimo  $\text{rang}(J_{p'}^3) = 3$  v točki  $p'$  z  $F_2(p') \neq 0$ . Zato po izreku 3.2.10 bifurcirajo trije limitni cikli iz izhodišča sistemov, ki ustrezajo točki  $p$  ali  $p'$ . Za  $\mathbf{V}(G_3)$  imamo  $\text{rang}(J_{p''}^4) = 4$  v točki  $p''$  z  $F_3(p'') \neq 0$ . Ker je sorazsežnost raznoterosti  $\mathbf{V}(G_3)$  enaka 4, je po izreku 3.2.10 cikličnost sistema, ki ustreza točki  $p''$ , enaka štiri. ■

### 3.2.3 Problem centra v sistemu četrte stopnje

Kot naslednji primer ilustracije idej, ki smo jih razvili do sedaj, v tem razdelku poiščemo množico zadostnih pogojev za obstoj centra v družini sistemov četrte stopnje. Preden se posvetimo obstoju centra oz. (ekvivalentno) integrabilnosti omenjene družine sistemov, navedimo še pomožni rezultat, s katerim si lahko pomagamo v primeru, ko preiskujemo integrabilnost in dobimo integral ali integrirajoči množitelj, ki ni definiran za vse vrednosti parametrov. Namesto, da iščemo eksplicitno obliko prvega integrala za te vrednosti parametrov, kjer integral ni definiran, lahko pogosto zaključimo, da integral obstaja, če uporabimo geometrijski argument, podan v naslednji pomožni trditvi.

**Lema 3.2.13** Naj bo  $E(a, b) = \mathbb{C}^{2\ell}$  ( $\ell$  je kardinalnost indeksne množice  $\{(p, q) : 1 \leq p + q \leq n - 1, p \in \mathbb{N} \cup \{-1, 0\}, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ ) prostor parametrov sistema (2.44) in naj bosta  $V$  in  $W$  takšni raznoterosti v  $E(a, b)$ , da ima sistem (2.44) analitični prvi integral oblike (2.45) za vse vrednosti parametrov  $V \setminus W$ . Če je

$$\overline{V \setminus W} = V, \quad (3.33)$$

ima sistem analitični prvi integral oblike (2.45) za vse vrednosti parametrov v  $V$ .

**Dokaz.** Po izreku 2.2.27 je množica vseh sistemov, ki vsebujejo analitični prvi integral oblike (2.45) raznoterost Bautinovega ideala  $\mathbf{V}(\mathcal{B})$ . Po predpostavki je  $V \setminus W \subset \mathbf{V}(\mathcal{B})$  in če vzamemo zaprtje Zariskega, dobimo  $\overline{V \setminus W} \subset \mathbf{V}(\mathcal{B})$ . Zato je po (3.33)  $V \subset \mathbf{V}(\mathcal{B})$  in vsi sistemi iz  $V$  premorejo analitični prvi integral oblike (2.45). ■

Za nekatere raznoterosti lahko enačbo (3.33) hitro preverimo. Če so raznoterosti bolj zapletene in je npr.  $V = \mathbf{V}(I)$  in  $W = \mathbf{V}(J)$ , pogledamo, če je ideal  $I$  korenski. Tedaj, ker je  $k = \mathbb{C}$  algebraično zaprto polje, je po (1.24)  $\overline{V \setminus W} = \mathbf{V}(I : J)$  in enačba (3.33) drži, če je  $I : J = I$ . Če  $I$  ni korenski, ga lahko zamenjamo z  $\sqrt{I}$ , saj je  $\mathbf{V}(I) = \mathbf{V}(\sqrt{I})$ .

Sistem, ki ga obravnavamo v tem razdelku, je

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1 - a_{30}x^3 - a_{21}x^2y - a_{12}xy^2 - a_{03}y^3), \\ \dot{y} &= -y(1 - b_{30}x^3 - b_{21}x^2y - b_{12}xy^2 - b_{03}y^3). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Ta osem parametrična družina sistemov je bila obravnavana v [43]. Sistem (3.34) ima dve kompleksni invariantni premici, ki potekata skozi izhodišče in zato ga imenujemo *Lotka-Volterrov kompleksni sistem*.

Podobno kot v prejšnjem razdelku izračunamo generatorje ideala  $I_{sym}$  za sistem (3.34) tako, da izračunamo Gröbnerjevo bazo  $G$  ideala  $H$ , definiranega z (2.73), ki je za sistem (3.34) enak

$$H = \langle 1 - w\gamma^3, a_{30} - t_1, a_{21} - t_2, a_{12} - t_3, a_{03} - t_4, \gamma^3 b_{30} - t_4, \gamma b_{21} - t_3, b_{12} - \gamma t_2, b_{03} - \gamma^3 t_1 \rangle.$$

Nato iz dobljene Gröbnerjeve baze eliminiramo polinome, ki so odvisni od spremenljivk  $w, \gamma, t_1, t_2, t_3, t_4$ , kar pomeni, da izračunamo šesti eliminacijski ideal glede na urejenost spremenljivk  $\{w, \gamma, t_1, t_2, t_3, t_4\} \succ \{a_{30}, a_{21}, a_{12}, a_{03}, b_{30}, b_{21}, b_{12}, b_{03}\}$ . Dobimo Gröbnerjevo bazo  $G_H$  ideala  $H \cap \mathbb{C}[a, b]$ , ki je enaka

$$\begin{aligned} G_H &= \{a_{30}a_{03} - b_{30}b_{03}, a_{21}a_{12} - b_{21}b_{12}, a_{30}b_{12}^3 - a_{21}^3b_{03}, a_{30}a_{12}b_{12}^2 - a_{21}^2b_{21}b_{03}, \\ & a_{30}a_{12}^2b_{12} - a_{21}b_{21}^2b_{03}, a_{21}a_{03}b_{21}^2 - a_{12}^2b_{30}b_{12}, a_{21}^2a_{03}b_{21} - a_{12}b_{30}b_{12}^2, \\ & a_{12}^3b_{30} - a_{03}b_{21}^3, a_{21}^3a_{03} - b_{30}b_{12}^3, a_{30}a_{12}^3 - b_{21}^3b_{03}\} \end{aligned}$$

in zaprtje Zariskega vseh časovno reverzibilnih sistemov (3.34) je raznoterost ideala  $I_{sym} = \langle G_H \rangle$ .

Da rešimo problem centra, izračunamo prvih 24 fokusnih količin  $g_{jj}$  in dobimo  $\mathcal{B}_{24} = \langle g_{11}, \dots, g_{24} \rangle$ . Izkaže se, da so fokusne količine  $g_{3k} g_{3k}$  za  $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$  neničelni

polinomi. Vse ostale fokusne količine so enake nič. Prvi dve neničelni fokusni količini sta

$$\begin{aligned}
g_{33} &= a_{12}a_{21} + a_{03}a_{30} - b_{12}b_{21} - b_{03}b_{30}, \\
g_{66} &= \frac{1}{45}(180a_{30}a_{12}^3 + 90b_{30}a_{12}^3 + 1350a_{21}^2a_{12}^2 - 180a_{30}b_{12}a_{12}^2 - 1440a_{21}b_{21}a_{12}^2 - 225b_{12}b_{30}a_{12}^2 \\
&+ 45a_{30}b_{12}^2a_{12} + 1440b_{12}b_{21}^2a_{12} + 1465a_{03}a_{21}a_{30}a_{12} - 100a_{21}a_{30}b_{03}a_{12} - 1215a_{21}^2b_{12}a_{12} \\
&- 1170a_{03}a_{30}b_{21}a_{12} + 90b_{12}^2b_{30}a_{12} - 85a_{03}a_{21}b_{30}a_{12} - 1100a_{21}b_{03}b_{30}a_{12} + 1170b_{03}b_{21}b_{30}a_{12} \quad (3.35) \\
&- 90a_{03}b_{21}^3 - 180b_{03}b_{21}^3 + 160a_{03}^2a_{30}^2 - 1350b_{12}^2b_{21}^2 + 225a_{03}a_{21}b_{21}^2 + 180a_{21}b_{03}b_{21}^2 - 160b_{03}^2b_{30}^2 \\
&+ 175a_{03}b_{03}b_{30}^2 - 100a_{03}a_{30}^2b_{03} - 1215a_{03}a_{21}a_{30}b_{12} - 90a_{03}a_{21}^2b_{21} + 1215a_{21}b_{12}^2b_{21} \\
&- 45a_{21}^2b_{03}b_{21} + 1100a_{03}a_{30}b_{12}b_{21} + 100a_{30}b_{03}b_{12}b_{21} + 100a_{30}b_{03}^2b_{30} - 175a_{03}^2a_{30}b_{30} \\
&+ 1215a_{21}b_{03}b_{12}b_{30} + 85a_{03}b_{12}b_{21}b_{30} - 1465b_{03}b_{12}b_{21}b_{30}).
\end{aligned}$$

Ostale so predolge, da bi jih zapisali tukaj, vendar jih lahko bralec izračuna sam s pomočjo kateregakoli sistema računske algebre in teorije, opisane v razdelku 2.2.4, ali pa s pomočjo kode v dodatku B, ki je zapisana za program *Mathematica*. Z  $\tilde{\mathcal{B}}_8$  označimo ideal, generiran s prvimi osmimi neničelnimi fokusnimi količinami:  $\tilde{\mathcal{B}}_8 = \langle g_{33}, g_{66}, \dots, g_{24\ 24} \rangle$ . Opazimo, da če sta v sistemu (3.34)  $a_{12} \neq 0$  in  $b_{21} \neq 0$ , lahko po linearni transformaciji

$$X = ax, \quad Y = by,$$

kjer je  $a = a_{12}^{1/3}b_{21}^{2/3}$  in  $b = a_{12}^{2/3}b_{21}^{1/3}$ , postavimo v (3.34)  $a_{12} = b_{21} = 1$ . Če to upoštevamo, lahko poenostavimo izračunave in razdelimo sistem (3.34) na tri podsisteme, ki jih ločeno obravnavamo v treh primerih:

$$(\alpha) a_{12} = b_{21} = 1, \quad (\beta) a_{12} = 1, b_{21} = 0, \quad (\gamma) a_{12} = b_{21} = 0.$$

Za primer  $(\alpha)$  dobimo pogoje za center v izhodišču, ki so predstavljeni v izreku 3.2.14. Ostala dva primera sta obravnavana v izrekih 3.2.15 in 3.2.17. Če uporabimo na pogojih izreka 3.2.15, ki poda pogoje za primer  $(\beta)$ , involucijo  $a_{ij} \leftrightarrow b_{ji}$ , dobimo pogoje za center sistema (3.34) za primer  $a_{12} = 0, b_{21} = 1$ . Tako izreki 3.2.14 - 3.2.17 podajo celotno rešitev za kompleksni center sistema (3.34). Ti pogoji v izrekih so torej reducirani, saj so nekateri parametri ( $a_{12}$  in  $b_{21}$ ) fiksni. V [39] je podan pristop, kako iz reduciranih pogojev dobiti splošne pogoje za center, t. j. pogoje, kjer sta  $a_{12}$  in  $b_{21}$  splošna parametra.

**Izrek 3.2.14** *Sistem (3.34) z  $a_{12} = b_{21} = 1$  ima center v izhodišču natanko tedaj, ko velja eden od naslednjih pogojev:*

- 1)  $a_{21} - b_{12} = 2a_{03}b_{12} + b_{12}b_{03} - a_{03} - 2b_{03} = a_{30}b_{12} + 2b_{30}b_{12} - 2a_{30} - b_{30} = a_{30}a_{03} - b_{30}b_{03} = 0$ ;
- 2)  $a_{30} - b_{30} = a_{21} - b_{12} = a_{30} - b_{03} = 0$ ;
- 3)  $b_{12} - 2 = b_{30} = a_{21} - 2 = a_{30} = 0$ ;
- 4)  $b_{03} = b_{12} - 2 = a_{03} = a_{21} - 2 = 0$ ;
- 5)  $b_{12} - 2 = a_{03} - 2b_{03} = a_{21} - 2 = 2a_{30} - b_{30} = 0$ ;
- 6)  $b_{03} - 1 = b_{30} + b_{12} - 2 = a_{03} - b_{12} + 2 = a_{21} + b_{12} - 4 = a_{30} - 1 = 0$ ;

- 7)  $12a_{03} - 8b_{12} - 3b_{03} + 7 = 3a_{30} + 8a_{21} - 12b_{30} - 7 = 2b_{30}b_{03} - a_{21} + b_{12} = 0,$   
 $8a_{21}b_{03} + 12b_{12} - 7b_{03} + 3 = 32b_{12}^2 - 20b_{12} + 27b_{03} - 7 = 8b_{30}b_{12} + 3a_{21} - 7b_{30} - 6 = 0,$   
 $8a_{21}b_{12} - 7a_{21} - 7b_{12} - 4 = 8a_{21}^2 - 23a_{21} + 27b_{30} + 14 = 0;$
- 8)  $b_{03} - 4 = b_{12} + 9 = 4b_{30} - 5 = a_{03} - 8 = a_{21} + 2 = 4a_{30} + 1 = 0;$
- 9)  $4b_{03} + 1 = b_{12} + 2 = b_{30} - 8 = 4a_{03} - 5 = a_{21} + 9 = a_{30} - 4 = 0;$
- 10)  $9b_{03} + 16 = 3b_{12} + 5 = 16b_{30} + 9 = 9a_{03} + 8 = 2a_{21} + 1 = 16a_{30} - 3 = 0;$
- 11)  $4b_{03} - 1 = b_{12} - 1 = b_{30} + 4 = a_{03} = a_{21} = a_{30} + 8 = 0;$
- 12)  $16b_{03} - 3 = 2b_{12} + 1 = 9b_{30} + 8 = 16a_{03} + 9 = 3a_{21} + 5 = 9a_{30} + 16 = 0;$
- 13)  $b_{03} + 8 = b_{12} = b_{30} = a_{03} + 4 = a_{21} - 1 = 4a_{30} - 1 = 0.$

**Dokaz.** Za pridobitev potrebnih pogojev za obstoj centra v izhodišču sistema (3.34) z  $a_{12} = b_{21} = 1$  izračunamo ireducibilno dekompozicijo raznoterosti ideala  $\tilde{\mathcal{B}}_8 = \langle g_{33}, g_{66}, \dots, g_{24\ 24} \rangle$ , kjer je  $a_{12} = b_{21} = 1$ . To je zelo zahteven računski problem, ki predstavlja najtežavnejši del obravnave tega problema. Z uporabo ukaza `minAssGTZ` sistema računske algebre `Singular` ne moremo najti ireducibilne dekompozicije raznoterosti  $\mathbf{V}(\tilde{\mathcal{B}}_8)$  nad poljem racionalnih števil. Zato uporabimo dekompozicijski algoritem z modularno aritmetiko, opisan v podrazdelku 1.5.3. Najprej izračunamo minimalne pridružene praideale ideala  $\tilde{\mathcal{B}}_8$  v  $\mathbb{Z}_{32003}[a_{30}, \dots, b_{30}]$ , t.j. izračunamo ireducibilno dekompozicijo raznoterosti  $\mathbf{V}(\tilde{\mathcal{B}}_8)$  v polju karakteristike 32003.<sup>2</sup> Dobimo naslednjih 13 praidealov:

- 1)  $\langle a_{21} - b_{12}, a_{03}b_{12} - 16001b_{12}b_{03} + 16001a_{03} - b_{03}, a_{30}b_{12} + 2b_{30}b_{12} - 2a_{30} - b_{30}, a_{30}a_{03} - b_{30}b_{03} \rangle,$
- 2)  $\langle a_{03} - b_{30}, a_{21} - b_{12}, a_{30} - b_{03} \rangle,$
- 3)  $\langle b_{12} - 2, b_{30}, a_{21} - 2, a_{30} \rangle,$
- 4)  $\langle b_{03}, b_{12} - 2, a_{03}, a_{21} - 2 \rangle,$
- 5)  $\langle b_{12} - 2, a_{03} - 2b_{03}, a_{21} - 2, a_{30} + 16001b_{30} \rangle,$
- 6)  $\langle b_{03} - 1, b_{30} + b_{12} - 2, a_{03} - b_{12} + 2, a_{21} + b_{12} - 4, a_{30} - 1 \rangle,$
- 7)  $\langle a_{03} + 10667b_{12} - 8001b_{03} - 13334, a_{30} - 10665a_{21} - 4b_{30} - 10670, b_{30}b_{03} + 16001a_{21} - 16001b_{12}, a_{21}b_{03} - 16000b_{12} - 12002b_{03} - 4000, b_{12}^2 - 4001b_{12} - 9000b_{03} + 13001, b_{30}b_{12} - 4000a_{21} - 12002b_{30} + 8000, a_{21}b_{12} - 12002a_{21} - 12002b_{12} + 16001, a_{21}^2 - 12004a_{21} - 3997b_{30} - 7999 \rangle,$
- 8)  $\langle b_{03} - 4, b_{12} + 9, b_{30} - 8002, a_{03} - 8, a_{21} + 2, a_{30} + 8001 \rangle,$
- 9)  $\langle b_{03} + 8001, b_{12} + 2, b_{30} - 8, a_{03} - 8002, a_{21} + 9, a_{30} - 4 \rangle,$
- 10)  $\langle b_{03} - 7110, b_{12} - 10666, b_{30} - 6000, a_{03} - 3555, a_{21} - 16001, a_{30} + 2000 \rangle$

<sup>2</sup>Število 32003 je bilo največja možna karakteristika končnega polja v prejšnjih verzijah sistema `Singular`. V novejši verziji `Singular 3` je največja karakteristika 2147483629. Vendar pa so izračuni v  $\mathbb{Z}_{2147483629}$  počasnejši kot v  $\mathbb{Z}_{32003}$ . Večinoma ugotovimo, da je učinkoviteje, če računamo v polju karakteristike 32003.

- 11)  $\langle b_{03} - 8001, b_{12} - 1, b_{30} + 4, a_{03}, a_{21}, a_{30} + 8 \rangle$   
 12)  $\langle b_{03} + 2000, b_{12} - 16001, b_{30} - 3555, a_{03} - 6000, a_{21} - 10666, a_{30} - 7110 \rangle,$   
 13)  $\langle b_{03} + 8, b_{12}, b_{30}, a_{03} + 4, a_{21} - 1, a_{30} - 8001 \rangle.$

Sedaj za teh 13 idealov uporabimo algoritem racionalne rekonstrukcije, ki je skupaj s preprosto kodo za izvedbo tega algoritma v programu *Mathematica* opisan v podrazdelku 1.5.3. Dobimo ideale, ki so generirani s polinomi, ki nastopajo v pogojih izreka 3.2.14. Označimo jih s  $Q_i$ ,  $i = 1, \dots, 13$ . Npr.  $Q_1 = \langle a_{21} - b_{12}, 2a_{03}b_{12} + b_{12}b_{03} - a_{03} - 2b_{03}, a_{30}b_{12} + 2b_{30}b_{12} - 2a_{30} - b_{30}, a_{30}a_{03} - b_{30}b_{03} \rangle$  je ideal, generiran s polinomi pogoja 1) izreka 3.2.14;  $Q_2 = \langle a_{30} - b_{30}, a_{21} - b_{12}, a_{30} - b_{03} \rangle$  je ideal, generiran s polinomi pogoja 2) izreka 3.2.14 itd. Če sledimo dekompozicijskemu algoritmu z modularno aritmetiko, v tretjem koraku preverimo, da je vsaka fokusna količina  $g_{3k} \ 3k$  v vsakem korenu idealov  $Q_i$ , t. j. reducirana Gröbnerjeva baza vsakega ideala  $\langle 1 - wg_{3k} \ 3k, Q_i \rangle$ , kjer je  $k = 1, \dots, 8$  in  $i = 1, \dots, 13$ , je enaka  $\{1\}$ . Ker je odgovor na ta korak dekompozicijskega algoritma z modularno aritmetiko pritrdilen, lahko nadaljujemo s četrtim korakom, kjer preverimo, da v izračunih noben pogoj ni izgubljen. V *Singular*ju izračunamo presek  $Q = \bigcap_{i=1}^{13} Q_i$  nad poljem racionalnih števil in dobimo 28 polinomov, ki jih označimo s  $q_1, \dots, q_{28}$ . Kot zadnji korak moramo preveriti še, da je  $\sqrt{Q} = \sqrt{\tilde{\mathcal{B}}_8}$ . V ta namen izračunamo Gröbnerjevo bazo vsakega ideala  $\langle 1 - wq_i, \tilde{\mathcal{B}}_8 \rangle$  za  $i = 1, \dots, 28$  in Gröbnerjevo bazo vsakega ideala  $\langle 1 - wg_{3k} \ 3k, Q \rangle$ ,  $k = 1, \dots, 8$ . Izkazuje se, da so vse Gröbnerjeve baze enake  $\{1\}$ , kar pomeni, da je  $\sqrt{Q} = \sqrt{\tilde{\mathcal{B}}_8}$ , od koder po trditvi 1.4.8 sledi, da je  $\mathbf{V}(\tilde{\mathcal{B}}_8) = \mathbf{V}(Q)$  oz. po (1.23) je  $\mathbf{V}(\tilde{\mathcal{B}}_8) = \bigcup_{i=1}^{13} \mathbf{V}(Q_i)$ .

S tem smo pokazali, da so pogoji izreka 3.2.14 potrebni pogoji za nastop centra v izhodišču sistema (3.34) z  $a_{12} = b_{21} = 1$ . Pokažimo še njihovo zadostnost tako, da za vsak sistem (3.34), ki zadošča enemu izmed trinajstih pogojev izreka 3.2.14, najdemo ali dokažemo obstoj formalnega prvega integrala oblike (2.45). Za nekatere pogoje tega izreka in prav tako naslednjih dveh izrekov so bili dokazi zadostnosti, ki jih navedemo tukaj, izvedeni v [51]. Kot smo že zgoraj navedli, ima sistem (3.34) dve invariantni premici  $x = 0$  in  $y = 0$ , ki potekata skozi izhodišče in ju v nekaterih primerih uporabimo pri konstrukciji Darbouxjevega integrala ali integrirajočega množitelja.

Sistem (3.34), ki zadošča pogoju 1) izreka 3.2.14, je oblike

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1 - a_{30}x^3 - b_{12}x^2y - xy^2 - a_{03}y^3), \\ \dot{y} &= -y \left( 1 - \frac{a_{30}(2-b_{12})}{2b_{12}-1}x^3 - x^2y - b_{12}xy^2 - \frac{a_{03}(2b_{12}-1)}{2-b_{12}}y^3 \right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Z Darbouxjevo metodo najdemo integrirajoči množitelj

$$\mu = (xy)^{\frac{2-3b_{12}}{b_{12}-1}},$$

s pomočjo katerega konstruiramo prvi integral

$$H = (xy)^{\frac{1-2b_{12}}{b_{12}-1}} (2 - b_{12} + a_{30}(b_{12} - 2)x^3 + (2 - 5b_{12} + 2b_{12}^2)(x^2y + xy^2) + a_{03}(1 - 2b_{12})y^3).$$

Vidimo, da  $H$  ni definiran za  $b_{12} = 1$  in da izraz na desni strani druge enačbe sistema (3.36) ni definiran za  $b_{12} = 2$  in  $b_{12} = 1/2$ . Označimo z  $V$  raznoterost  $\mathbf{V}(I)$ , kjer je  $I$  ideal generiran s polinomi pogojev 1) izreka 3.2.14,

$$I = \langle a_{21} - b_{12}, 2a_{03}b_{12} + b_{12}b_{03} - a_{03} - 2b_{03}, a_{30}b_{12} + 2b_{30}b_{12} - 2a_{30} - b_{30}, a_{30}a_{03} - b_{30}b_{03} \rangle,$$

in z  $J_1 = \langle b_{12} - 1 \rangle$ ,  $J_2 = \langle b_{12} - 2 \rangle$  in  $J_3 = \langle b_{12} - 1/2 \rangle$ . Vidimo, da  $H$  ni definiran za točke raznoterosti  $\mathbf{V}(I)$ , kjer je  $b_{12}$  enak 1, 2 ali  $1/2$ , t. j. definiran je za točke iz  $V \setminus W$ , kjer je  $W = \mathbf{V}(J_1) \cup \mathbf{V}(J_2) \cup \mathbf{V}(J_3) = \mathbf{V}(J)$  in  $J = J_1 \cap J_2 \cap J_3$ . Najprej izračunamo ideal  $J$  in dobimo  $J = \langle 2b_{12}^3 - 7b_{12}^2 + 7b_{12} - 2 \rangle$ . Nato izračunamo kvocient idealov  $I$  in  $J$ ; dobimo ideal

$$I : J = \langle a_{21} - b_{12}, 2a_{03}b_{12} + b_{12}b_{03} - a_{03} - 2b_{03}, a_{30}b_{12} + 2b_{30}b_{12} - 2a_{30} - b_{30}, a_{30}a_{03} - b_{30}b_{03} \rangle.$$

Vidimo, da je  $I : J = I$ , kar pomeni, da je

$$\overline{V \setminus W} = V,$$

zato ima po lemi 3.2.13 sistem (3.34) v vsaki točki raznoterosti  $V$  center v izhodišču <sup>3</sup>.

Sistemi, ki zadoščajo pogojem primera 2), so časovno reverzibilni, saj njihovi parametri ležijo v raznoterosti  $\mathbf{V}(I_{sym}|_{a_{12}=b_{21}=1})$ , kjer je

$$I_{sym}|_{a_{12}=b_{21}=1} = \langle a_{03}a_{30} - b_{03}b_{30}, a_{21} - b_{12}, a_{30}b_{12}^3 - a_{21}^3b_{03}, a_{30}b_{12}^2 - a_{21}^2b_{03}, a_{30}b_{12} - a_{21}b_{03}, \\ a_{03}a_{21} - b_{12}b_{30}, a_{03}a_{21}^2 - b_{12}^2b_{30}, b_{30} - a_{03}, a_{03}a_{21}^3 - b_{12}^3b_{30}, a_{30} - b_{03} \rangle.$$

Sistem, ki zadošča pogojem 3), ima obliko

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1 - 2x^2y - xy^2 - a_{03}y^3), \\ \dot{y} &= -y(1 - x^2y - 2xy^2 - b_{03}y^3). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Za dokaz integrabilnosti oz. obstoja centra v tem sistemu uporabimo metodo "blow-down" v voz. Vpeljemo analitično spremembo koordinat

$$u = xy^2, \quad v = y^3, \quad (3.38)$$

in sistem (3.37) postane

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -u + 3u^2 + (2b_{03} - a_{03})uv, \\ \dot{v} &= -3v + 3u^2 + (6 + 3b_{03})uv. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Za sistem (3.39) lahko s transformacijo oblike (2.53) dobimo njegovo normalno formo in vidimo, da je koeficient  $a$  v resonantnem členu  $a\xi^3$  ničelni, t. j. normalna forma je linearna:

$$\dot{\xi} = -\xi, \quad \dot{\eta} = -3\eta. \quad (3.40)$$

Sistem (3.40) ima prvi integral  $\xi^3/\eta$ . Če se vrnemo nazaj k originalnim koordinatam  $x$  in  $y$ , dobimo, da je prvi integral sistema (3.37) enak  $x^3y^3 + \sum_{i+j=7} c_{ij}x^i y^j$  in sledi, da ima sistem (3.37) prav tako prvi integral oblike (2.45) (glej razdelek 2.2.4).

Primer 4) dobimo iz primera 3) z involucijo  $a_{kj} \leftrightarrow b_{jk}$ .

Sistem (3.34), ki zadošča pogojem 5), ima obliko

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \left( 1 - \frac{b_{30}}{2}x^3 - 2x^2y - xy^2 - 2b_{03}y^3 \right), \\ \dot{y} &= -y(1 - b_{30}x^3 - x^2y - 2xy^2 - b_{03}y^3). \end{aligned}$$

<sup>3</sup>S podobnim računom dokazemo integrabilnost sistemov, ki jih študiramo spodaj, če Darbouxjev integral ali integrirajoči množitelj ni definiran povsod.

in premore invariantno krivuljo  $f = 0$ , kjer je

$$\begin{aligned} f = & (4 - 24x^2y - 24xy^2 + 36x^4y^2 + 18b_{30}x^4y^2 + 108x^3y^3 - 54b_{03}b_{30}x^3y^3 \\ & - 54b_{30}x^6y^3 + 27b_{03}b_{30}^2x^6y^3 + 36x^2y^4 + 36b_{03}x^2y^4 - 108x^5y^4 + 54b_{03}b_{30}x^5y^4 \\ & - 108x^4y^5 + 54b_{03}b_{30}x^4y^5 - 108b_{03}x^3y^6 + 54b_{03}^2b_{30}x^3y^6), \end{aligned}$$

z ustreznim kofaktorjem  $k = -6x(x - y)y$ . Inverzni integrirajoči množitelj je podan z

$$V = (xy)^{-2}f.$$

Obstoj analitičnega prvega integrala v okolici izhodišča sledi iz leme 2.2.41(i).

V primeru 6) je sistem (3.34) oblike

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1 - x^3 - (4 - b_{12})x^2y - xy^2 - (b_{12} - 2)y^3), \\ \dot{y} &= -y(1 - (2 - b_{12})x^3 - x^2y - b_{12}xy^2 - y^3). \end{aligned} \quad (3.41)$$

V ta sistem vpeljemo nov parameter  $\lambda$  in novi neznanki  $X$  in  $Y$  tako, da je  $b_{12} = 2 + i\lambda$ ,  $x = X + iY$ ,  $y = X - iY$ . Na ta način skupaj s spremembo časa  $t = iT$  dobimo sistem

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dT} &= -(1 - 2X)(1 + 2X + 4x^2)Y, \\ \frac{dY}{dT} &= X(1 - 4X^3 - 4\lambda X^2Y + 4XY^2 - 4\lambda Y^3). \end{aligned} \quad (3.42)$$

S pomočjo transformacije

$$\begin{aligned} X &= \frac{u}{(1 + 4u^3)^{\frac{1}{3}}}, \\ Y &= \frac{3v}{(1 + 4u^3)^{\frac{1}{3}}[3(1 - 16u^6)^{\frac{\lambda^2 - 3}{18}} + 4\lambda u^2v]}, \\ d\tau &= \frac{3(1 - 4u^3)(1 - 16u^6)^{\frac{1}{6}}}{3(1 - 16u^6)^{\frac{\lambda^2}{18}} + 4\lambda u^2(1 - 16u^6)^{\frac{1}{6}}v} dT \end{aligned}$$

dobimo iz (3.42) sistem

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= -v = P(u, v), \\ \frac{dv}{d\tau} &= u(1 - 16u^6)^{\frac{\lambda^2 - 12}{9}} \left[ 1 - \frac{4}{27}\lambda(1 - 16u^6)^{\frac{3 - \lambda^2}{6}}(45 - 432u^6 + 32\lambda^2u^6)v^3 \right] = Q(u, v). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Vektorsko polje, definirano s (3.43), je simetrično glede na os  $v$  za poljubno kompleksno konstanto  $\lambda$ . Če vzamemo  $z = v + iu$ ,  $w = v - iu$  in  $\tau_1 = -i\tau$ , lahko sistem (3.43) zapišemo kot

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau_1} &= z + \sum_{j+k=2}^{\infty} \alpha_{jk} z^j w^k = F(z, w), \\ \frac{dw}{d\tau_1} &= -w - \sum_{j+k=2}^{\infty} \beta_{jk} w^j z^k = -G(z, w), \end{aligned} \quad (3.44)$$



kjer je

$$\begin{aligned} F(z, w) &= -P\left(\frac{i(w-z)}{2}, \frac{w+z}{2}\right) + iQ\left(\frac{i(w-z)}{2}, \frac{w+z}{2}\right) \\ G(z, w) &= -P\left(\frac{i(w-z)}{2}, \frac{w+z}{2}\right) - iQ\left(\frac{i(w-z)}{2}, \frac{w+z}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Ker je  $P(u, v) = P(-u, v)$  in  $Q(u, v) = Q(-u, v)$ , iz (3.45) sledi, da je  $F(z, w) = G(w, z)$  in zato je  $\alpha_{jk} = \beta_{jk}$  za vse  $(j, k)$ . Tako ima po izreku 2.2.45 sistem (3.44) prvi integral oblike  $\Psi = zw + \dots$  in od tod sledi, da ima sistem (3.41) prvi integral oblike (2.45).

V primeru 7) ima sistem (3.34) obliko

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathcal{P}(x, y) = x \left( 1 - \frac{(1+4a_{21})(7-8a_{21})x^3}{27} - a_{21}x^2y - xy^2 + \frac{27(2-a_{21})y^3}{(7-8a_{21})^2} \right), \\ \dot{y} &= \mathcal{Q}(x, y) = -y \left( 1 + \frac{(2-a_{21})(7-8a_{21})x^3}{27} - x^2y + \frac{(4+7a_{21})xy^2}{7-8a_{21}} + \frac{27(1+4a_{21})y^3}{(7-8a_{21})^2} \right), \end{aligned} \quad (3.46)$$

kjer je  $7-8a_{21} \neq 0$ . Sistem (3.46) premore algebraično invariantno krivuljo  $f(x, y) = 0$ , kjer je

$$f(x, y) = 1 - \frac{(1+4a_{21})(7-8a_{21})x^3}{27} - \frac{(1+4a_{21})x^2y}{3} + \frac{3(1+4a_{21})xy^2}{7-8a_{21}} + \frac{27(1+4a_{21})y^3}{(7-8a_{21})^2}.$$

Za dokaz obstoja centra v izhodišču uporabimo trditev 2.2.50. Obravnavamo spremembo koordinat

$$u = u(x, y) = \frac{9y}{(7-8a_{21})f^{\frac{1}{3}}(x, y)}, \quad v = v(x, y) = \frac{(7-8a_{21})x}{9f^{\frac{1}{3}}(x, y)}, \quad (3.47)$$

katere inverzna sprememba je podana z

$$x = \frac{9v}{(7-8a_{21})f^{\frac{1}{3}}(u, v)}, \quad y = \frac{(7-8a_{21})u}{9f^{\frac{1}{3}}(u, v)}, \quad xy = \frac{uv}{f^{\frac{2}{3}}(u, v)}.$$

Sistem (3.46) v spremenljivkah  $(u, v)$  postane

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\mathcal{P}(u, v)}{f(u, v)}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\mathcal{Q}(u, v)}{f(u, v)}, \quad (3.48)$$

kjer sta  $\mathcal{P}(u, v)$  in  $\mathcal{Q}(u, v)$  enaka polinoma kot v (3.46) v spremenljivkah  $(u, v)$ . Tako (3.47) zadošča pogojem (2.105)–(2.107) trditve 2.2.50 in zato ima sistem (3.46) center v izhodišču.

Sistem (3.34), ki zadošča pogojem 8), je

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1 + x^3/4 + 2x^2y - xy^2 - 8y^3), \\ \dot{y} &= -y(1 - 5x^3/4 - x^2y + 9xy^2 - 4y^3), \end{aligned}$$

in ima dva algebraična parcialna integrala

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 + x^3 + 3x^6/8 + x^9/16 + x^{12}/256 + 8x^2y + 3x^5y - x^{11}y/16 + 28xy^2 + 3x^4y^2 \\ &\quad - 15x^7y^2/4 + 7x^{10}y^2/16 - 60x^3y^3 + 20x^6y^3 - 7x^9y^3/4 + 78x^2y^4 - 45x^5y^4 \\ &\quad + 35x^8y^4/8 + 48x^4y^5 - 7x^7y^5 - 20x^3y^6 + 7x^6y^6 - 4x^5y^7 + x^4y^8, \end{aligned}$$

in

$$f_2 = 1 + 3x^3/4 + 3x^6/16 + x^9/64 + 6x^2y + 3x^5y/4 - 3x^8y/16 + 21xy^2 - 9x^4y^2 \\ + 15x^7y^2/16 + 21x^3y^3 - 5x^6y^3/2 - 15x^2y^4 + 15x^5y^4/4 - 3x^4y^5 + x^3y^6,$$

z ustreznima kofaktorjema  $k_1 = x(x - 2y)(3x + 14y)$  in  $k_2 = 3x(x - 2y)(3x + 14y)/4$ . Enačba (2.60), ki je v tem primeru enaka

$$\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 = 0,$$

ima rešitev  $\alpha_1 = -3$  in  $\alpha_2 = 4$  in odtod konstruiramo Darbouxjev prvi integral

$$H(x, y) = f_1^{-3} f_2^4.$$

Primer 9) dobimo iz primera 8) z involucijo  $a_{kj} \leftrightarrow b_{jk}$ .

V primeru 10) ima sistem (3.34) obliko

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \left( 1 - \frac{3x^3}{16} + \frac{x^2y}{2} - xy^2 + 8\frac{y^3}{9} \right), \\ \dot{y} &= -y \left( 1 + \frac{9x^3}{16} - x^2y + \frac{5xy^2}{3} + \frac{16y^3}{9} \right). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Za dokaz integrabilnosti tega sistema uporabimo metodo napihovanja. Uvedemo transformacijo (3.12) in sistem (3.49) postane

$$\begin{aligned} \dot{z} &= 2z + \frac{8y^3z}{3} + \frac{2y^3z^2}{3} - \frac{y^3z^3}{2} + \frac{3y^3z^4}{8} = F_1(x, y), \\ \dot{y} &= -y - \frac{16y^4}{9} - \frac{5y^4z}{3} + y^4z^2 - \frac{9y^4z^3}{16} = F_2(x, y). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Podobno kot v dokazu izreka 3.2.8 (komponenta  $\mathbf{V}(J_2)$ ) iščemo prvi integral oblike (3.14). Izračunamo  $\dot{\mathcal{H}} = (\partial\mathcal{H}/\partial z)F_1 + (\partial\mathcal{H}/\partial y)F_2$  in enačimo z nič koeficient vsake stopnje spremenljivke  $y$ , dobimo naslednjo rekurzivno diferencialno enačbo za  $f_k$ :

$$p_3(z)f_{k-3} + \frac{1}{24}z(64 + 16z - 12z^2 + 9z^3)f'_{k-3} - kf_k + 2zf'_k = 0,$$

kjer je  $p_3(z)$  polinom tretje stopnje. Za  $k = 2, \dots, 8$  dobimo  $f_2 = Cz$  in izberemo  $C = 1$ ;  $f_3 = Cz^{\frac{3}{2}}$  in izberemo  $C = 0$ ;  $f_4 = Cz^2$  in brez izgube za splošnost izberemo  $C = 0$  (lahko izberemo tudi  $C \neq 0$ , saj bo  $f_4$  v vsakem primeru polinom);  $f_5 = zP_3(z)$ , kjer je  $P_3$  polinom stopnje 3,  $f_6 = Cz^3$  in ponovno izberemo  $C = 0$ ;  $f_7 = Cz^{\frac{7}{2}}$  in vstavimo  $C = 0$ ;  $f_8 = zS_6(z)$ , kjer je  $S_6(z)$  polinom stopnje 6, ki ne vsebuje člena z monomom  $z^3$ . Zato predpostavimo, da je za vsak lihi  $k$  polinom  $f_k$  oblike

$$f_k(z) = z(C_0 + C_1z + C_2z^2 + \dots + C_{k-2}z^{k-2}),$$

in za vsak sodi  $k$  je polinom  $f_k$  oblike  $f_k = zQ_{k-2}$ , kjer je  $Q_{k-2}$  neki polinom stopnje največ  $k - 2$  brez člena z monomom  $z^{\frac{k}{2}-1}$ , t.j.

$$f_k(z) = z(C_0 + C_1z + C_2z^2 + \dots + C_{\frac{k}{2}-2}z^{\frac{k}{2}-2} + C_{\frac{k}{2}}z^{\frac{k}{2}} + \dots + C_{k-2}z^{k-2}).$$

Z uporabo indukcije dokažemo, da za vsak  $k$  dobimo polinom  $f_k$ . Dokaz poteka na enak način kot je potekal dokaz integrabilnosti komponente  $\mathbf{V}(J_2)$  izreka 3.2.8. Dobimo, da je  $f_n(z) = zQ_{n-2}(z)$ , kjer je  $Q_{n-2}(z)$  polinom stopnje kvečjemu  $n-2$  in v posebnem primeru, če je  $n$  sod, polinom  $Q_{n-2}(z)$  ne vsebuje člena s potenco  $z^{\frac{n}{2}-1}$ , za kar smo potrebovali podrobnejšo analizo.

Torej je prvi integral sistema (3.50) enak

$$\mathcal{H}(z, y) = \sum_{k=2}^{\infty} zQ_{k-2}(z)y^k = zy^2 + \sum_{k=3}^{\infty} zQ_{k-2}(z)y^k$$

in odtod je prvi integral sistema (3.49) oblike (2.45).

V primeru 11) je sistem (3.34) oblike

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1 + 8x^3 - xy^2), \\ \dot{y} &= -y(1 + 4x^3 - x^2y - xy^2 - y^3/4), \end{aligned} \quad (3.51)$$

in premore algebraična parcialna integrala

$$f_1 = 1 - 3xy^2/2 - y^3/4, \quad \text{in} \quad f_2 = 1 + 8x^3 - 3xy^2/2 - y^3/4,$$

z ustreznima kofaktorjema  $k_1 = 3y^2(2x+y)/4$  in  $k_2 = 3(4x+y)(8x^2 - 2xy + y^2)/4$ . Konstruiramo integrirajoči množitelj

$$\mu = (xy)^{-2} f_1^{-5/6} f_2^{1/6}.$$

Za dokaz obstoja analitičnega prvega integrala v okolici izhodišča uporabimo točko (ii) leme 2.2.41. Obe enačbi sistema (3.51) množimo z  $f_1^{5/6} f_2^{-1/6}$  in dobimo sistem

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (3.52)$$

ki ima integrirajoči množitelj  $\mu = (xy)^{-2}$  oz. inverzni integrirajoči množitelj  $V = (xy)^2$  in koeficienta pred monomom  $x^2y$  v  $P$  in  $xy^2$  v  $Q$  sta ničelna. Zato po lemi 2.2.41 sistem premore prvi integral oblike (2.45).

Primer 12) dobimo iz primera 10) z involucijo  $a_{kj} \leftrightarrow b_{jk}$ .

Primer 13) dobimo iz primera 11) z involucijo  $a_{kj} \leftrightarrow b_{jk}$ . ■

Za potrebne pogoje primera ( $\beta$ ), ki so predstavljeni v izreku 3.2.15, poiščemo ireducibilno dekompozicijo raznoterosti ideala  $\tilde{\mathcal{B}}_8 \Big|_{(\beta)}$ , in podobno za potrebne pogoje primera ( $\gamma$ ), ki so predstavljeni v izreku 3.2.17, poiščemo ireducibilno dekompozicijo raznoterosti ideala  $\tilde{\mathcal{B}}_8 \Big|_{(\gamma)}$ . V obeh primerih so izračuni lažji kot v primeru ( $\alpha$ ) in so zato lahko izvedeni v polju racionalnih števil.

**Izrek 3.2.15** Sistem (3.34) z  $a_{12} = 1$ ,  $b_{21} = 0$  ima center v izhodišču natanko tedaj, ko zadošča enemu izmed pogojev:

- 1)  $a_{21} = 2a_{03}b_{12} + b_{12}b_{03} - a_{03} - 2b_{03} = a_{30}b_{12} + 2b_{30}b_{12} - 2a_{30} - b_{30} = a_{30}a_{03} - b_{30}b_{03} = 0$ ;
- 2)  $b_{03} = b_{12} - 2 = a_{03} = a_{21} = 0$ ;
- 3)  $b_{30} = a_{21} = a_{30} = 0$ ;

$$4) b_{12} - 2 = a_{03} - 2b_{03} = a_{21} = 2a_{30} - b_{30} = 0;$$

$$5) 8b_{12} - 7 = 4a_{03} + b_{03} = a_{30} - 4b_{30} = 2b_{30}b_{03} - a_{21} = 16a_{21}b_{03} + 27 = 8a_{21}^2 + 27b_{30} = 0;$$

$$6) b_{12} = b_{30} = 2a_{03} - b_{03} = a_{30}b_{03} + 2a_{21} = a_{21}b_{03} - 8 = a_{21}^2 + 4a_{30} = 0;$$

$$7) b_{12} = b_{30} = 2a_{03} + b_{03} = a_{30}b_{03} - 2a_{21} = a_{21}b_{03} + 8 = a_{21}^2 + 4a_{30} = 0.$$

**Dokaz.** Dokažimo, da ima sistem (3.34) z  $a_{12} = 1$ ,  $b_{21} = 0$ , ki zadošča poljubnemu pogoju izreka 3.2.15, center v izhodišču oz. prvi integral oblike (2.45).

V primeru 1) je sistem (3.34) enak

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \left( 1 - a_{30}x^3 - xy^2 + \frac{b_{03}(b_{12}-2)}{2b_{12}-1}y^3 \right), \\ \dot{y} &= -y \left( 1 + \frac{a_{30}(b_{12}-2)}{2b_{12}-1}x^3 - b_{12}xy^2 - b_{03}y^3 \right). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Sistem (3.53) ima algebraično invariantno krivuljo  $f_1 = 1 - a_{30}x^3 + (1 - 2b_{12})xy^2 - b_{03}y^3 = 0$ , z ustreznim kofaktorjem  $k_1 = -3a_{30}x^3 - xy^2 + 2b_{12}xy^2 + 3b_{03}y^3$  in odtod konstruiramo analitični prvi integral

$$H = xy f_1^{\frac{1-b_{12}}{2b_{12}-1}},$$

ki je oblike (2.45).

V primeru 2) je sistem enak

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - a_{30}x^3 - xy^2), \quad \frac{dy}{dt} = -y(1 - b_{30}x^3 - 2xy^2). \quad (3.54)$$

Z uvedbo novih koordinat  $u = x^3$ ,  $v = xy^2$  postane ta sistem

$$\frac{du}{dt} = 3u(1 - a_{30}u - v), \quad \frac{dv}{dt} = v(-1 + (2b_{30} - a_{30})u + 3v). \quad (3.55)$$

Izhodišče sistema (3.55) je sedlo in sistem (3.55) je linearizabilen v izhodišču (glej [54]), t. j. obstajata potenčni vrsti  $x = uf(u, v)$ ,  $Y = vg(u, v)$  z  $f(0, 0) = g(0, 0) = 1$ , da je sistem (3.55) v koordinatah  $(X, Y)$  enak

$$\frac{dX}{dt} = 3X, \quad \frac{dY}{dt} = -Y.$$

Tako je sistem (3.54) s transformacijo

$$\begin{aligned} \xi &= X^{\frac{1}{3}} = x f^{\frac{1}{3}}, \\ \eta &= X^{-\frac{1}{6}} Y^{\frac{1}{2}} = y f^{-\frac{1}{6}} g^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

kjer je  $f = f(x^3, xy^2)$ ,  $g = g(x^3, xy^2)$ , transformiran v linearni sistem

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi, \quad \frac{d\eta}{dt} = -\eta,$$

ki ima prvi integral  $\bar{\Psi}(\xi, \eta) = \xi\eta$ . Od tod dobimo z uporabo (3.56) prvi integral sistema (3.54), ki je oblike (2.45).

V primeru 3) je sistem oblike

$$\dot{x} = x - x^2y^2 - a_{03}xy^3, \quad \dot{y} = -y + b_{12}xy^3 + b_{03}y^4. \quad (3.57)$$

S substitucijo (3.38) dobimo sistem

$$\dot{u} = -u + (2b_{12} - 1)u^2 + (2b_{03} - a_{03})uv, \quad \dot{v} = -3v + 3b_{12}uv + 3b_{03}v^2. \quad (3.58)$$

Če izračunamo normalno formo sistema (3.58), vidimo, da je koeficient v resonantnem členu  $a\xi^3$  enak nič in zato je normalna forma oblike (3.40). S podobnim razmislekom kot v primeru 3) izreka 3.2.14 ugotovimo, da ima sistem (3.57) prvi integral oblike (2.45).

Sistem (3.34), ki zadošča pogojem primera 4), je oblike

$$\dot{x} = x\left(1 - \frac{b_{30}x^3}{2} - xy^2 - 2b_{03}y^3\right), \quad \dot{y} = -y(1 - b_{30}x^3 - 2xy^2 - b_{03}y^3) \quad (3.59)$$

in ima algebraično invariantno krivuljo  $f = 0$ , kjer je

$$f = 4 - 24xy^2 + 18b_{30}x^4y^2 - 54b_{03}b_{30}x^3y^3 + 27b_{03}b_{30}^2x^6y^3 + 36x^2y^4 + 54b_{03}b_{30}x^4y^5 + 54b_{03}^2b_{30}x^3y^6,$$

z ustreznim kofaktorjem  $k = 6xy^2$ . Inverzni integrirajoči množitelj sistema (3.59) je podan z  $V = (xy)^{-2}f$ . Obstoj analitičnega prvega integrala v okolici izhodišča je zagotovljen s točko (i) leme 2.2.41.

V primeru 5) je ustrezní sistem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + \frac{27x^4}{128a_{03}^2} - \frac{27x^3y}{64a_{03}} - x^2y^2 - a_{03}xy^3, \\ \dot{y} &= -y - \frac{27x^3y}{512a_{03}^2} + \frac{7xy^3}{8} - 4a_{03}y^4. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Za sistem (3.60) najdemo samo eno algebraično invariantno krivuljo

$$f_1 = 1 + \frac{27x^3}{128a_{03}^2} - \frac{9x^2y}{16a_{03}} - \frac{3xy^2}{2} + 4a_{03}y^3 = 0,$$

s kofaktorjem

$$k_1 = \frac{3(3x - 8a_{03}y)(9x^2 + 16a_{03}xy + 64a_{03}^2y^2)}{128a_{03}^2}.$$

Krivulja  $f_1 = 0$  in obe invariantni premici  $x = 0$  in  $y = 0$  ne zadoščajo za konstrukcijo Darbouxjevega prvega ali Darbouxjevega integrirajočega množitelja. Za dokaz zadostnosti teh pogojev uporabimo trditev 2.2.51. Vpeljemo novi koordinati  $z$  in  $w$  tako, da je

$$\begin{aligned} z^3 &= \frac{512a_{03}^3y^3}{3(1024a_{03}^2 + 135x^3 - 216a_{03}x^2y - 960a_{03}^2xy^2 + 1536a_{03}^3y^3)}, \\ w^3 &= \frac{-9x^3}{1024a_{03}^2 + 135x^3 - 216a_{03}x^2y - 960a_{03}^2xy^2 + 1536a_{03}^3y^3}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Potem je

$$\begin{aligned} x^3 &= \frac{-1024a_{03}^2w^3}{9(1-9z^3-15z^2w+9zw^2+15w^3)}, \\ y^3 &= \frac{6z^3}{a_{03}(1-9z^3-15z^2w+9zw^2+15w^3)}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

S spremembo časa

$$dt = (1 - 9z^3 - 15z^2w + 9zw^2 + 15w^3)dT$$

dobimo sistem

$$\frac{dz}{dT} = -z(1+h), \quad \frac{dw}{dT} = w(1-h), \quad (3.63)$$

kjer je

$$h = 3(z-w)(2z^2 + 2w^2 - 45z^5 - 117z^4w - 94z^3w^2 - 94z^2w^3 - 117zw^4 - 45w^5).$$

Očitno je sistem (3.63) invarianten glede na transformacijo

$$z \rightarrow w, \quad w \rightarrow z, \quad T \rightarrow -T,$$

in zato ima po trditvi 2.2.51 sistem (3.60) center v izhodišču.

Sistem (3.34), ki zadošča pogojem 6), je oblike

$$\dot{x} = x\left(1 + \frac{a_{21}^2}{4}x^3 - a_{21}x^2y - xy^2 - \frac{4}{a_{21}}y^3\right), \quad \dot{y} = y\left(-1 + \frac{8}{a_{21}}y^3\right). \quad (3.64)$$

Sistem ima algebraična parcialna integrala

$$f_1 = 1 - \frac{8}{a_{21}}y^3, \quad f_2 = 1 + \frac{a_{21}^2}{4}x^3 - \frac{3}{2}a_{21}x^2y$$

z ustreznima kofaktorjema

$$k_1 = \frac{24}{a_{21}}y^3, \quad k_2 = \frac{3}{4}a_{21}x^2(a_{21}x - 2y),$$

s pomočjo katerih konstruiramo inverzni integrirajoči množitelj  $V = (xy)^2 f_1^{\frac{5}{6}} f_2^{\frac{2}{3}}$ . Če množimo obe enačbi sistema (3.64) z  $f_1^{\frac{5}{6}} f_2^{\frac{2}{3}}$ , dobimo sistem

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y),$$

ki ima inverzni integrirajoči množitelj  $V = (xy)^2$  in koeficienta pred  $x^2y$  v  $P(x, y)$  in  $xy^2$  v  $Q(x, y)$  sta ničelna. Tako ima sistem (3.64) po lemi 2.2.41 prvi integral oblike (2.45).

V primeru 7) je sistem oblike (3.34)

$$\dot{x} = x\left(1 + \frac{a_{21}^2}{4}x^3 - a_{21}x^2y - xy^2 - \frac{4}{a_{21}}y^3\right), \quad \dot{y} = y\left(-1 - \frac{8}{a_{21}}y^3\right) \quad (3.65)$$

in ima algebraična parcialna integrala

$$f_1 = 1 + \frac{8}{a_{21}}y^3, \quad f_2 = 1 + \frac{a_{21}^2}{4}x^3 - \frac{3}{2}a_{21}x^2y + \frac{8}{a_{21}}y^3$$

z ustreznima kofaktorjema

$$k_1 = -\frac{24}{a_{21}}y^3, \quad k_2 = \frac{3}{4a_{21}}(a_{21}x^2 + 2a_{21}xy + 8y^2)(a_{21}x - 4y).$$

Sistem (3.65) ima inverzni integrirajoči množitelj  $V = (xy)^2 f_1^{-\frac{1}{6}} f_2^{\frac{2}{3}}$ . S podobnim argumentom kot v primeru 6) in z uporabo leme 2.2.41 vidimo, da ima sistem (3.65) prvi integral oblike (2.45). ■

**Opomba 3.2.16** *Nekatere funkcije, ki nastopajo v dokazih izrekov 3.2.14 in 3.2.15, niso definirane za specifične vrednosti parametrov. Obstoj analitičnega prvega integrala za te specifične vrednosti sledi iz dejstva, da je množica vseh sistemov (3.34) s centrom zaprta množica v topologiji Zariskega in iz podobnega izračuna, kot smo ga izvedli v dokazu primera 1) izreka 3.2.14.*

**Izrek 3.2.17** *Sistem (3.34) z  $a_{12} = b_{21} = 0$  ima center v izhodišču natanko tedaj, ko zadošča enemu izmed pogojev:*

- 1)  $b_{03} = a_{03} = a_{21} = 0$ ;
- 2)  $a_{30}a_{03} - b_{30}b_{03} = a_{30}b_{12}^3 - a_{21}^3b_{03} = a_{21}^3a_{03} - b_{30}b_{12}^3 = 0$ ;
- 3)  $b_{12} = b_{30} = a_{30} = 0$ ;
- 4)  $2a_{03} + b_{03} = a_{30} + 2b_{30} = 0$ ;
- 5)  $a_{03} - 2b_{03} = 2a_{30} - b_{30} = 2a_{21}b_{12} - 9b_{30}b_{03} = 0$ .

**Dokaz.** V primeru 1) dobimo sistem

$$\dot{x} = x - a_{30}x^4, \quad \dot{y} = -y + b_{30}x^3y + b_{12}xy^3, \quad (3.66)$$

ki s transformacijo (3.12) postane

$$\dot{z} = 2z - b_{12}y^3z^2 - a_{30}y^3z^4 - b_{30}y^3z^4, \quad \dot{y} = -y + b_{12}y^4z + b_{30}y^4z^3. \quad (3.67)$$

Izračunamo  $\dot{\mathcal{H}} = (\partial\mathcal{H}/\partial z)F_1 + (\partial\mathcal{H}/\partial y)F_2$  in koeficient vsake stopnje spremenljivke  $y$  enačimo z nič. S tem dobimo naslednjo rekurzivno diferencialno enačbo za  $f_k$ :

$$(k-3)z(b_{12} + b_{30}z^2)f_{k-3} - z(b_{12} + (a_{30} + b_{30})z^2)f'_{k-3} - kf_k + 2zf'_k = 0.$$

Za  $k = 2$  dobimo rešitev  $f_2 = Cz$  in za  $k = 3, \dots, 8$  dobimo zelo podobne rešitve kot v primeru 10) izreka 3.2.14, zato poteka dokaz na podoben način kot tam in ga lahko bralec sam enostavno izpelje. Torej je vsak polinom  $f_k$  oblike  $f_k = zQ_{k-2}$ , kjer je  $Q_{k-2}$  neki polinom stopnje največ  $k-2$ , ki je v primeru, da je  $k$  sodi, brez člena z monomom  $z^{\frac{k}{2}-1}$ .

Zatorej je prvi integral sistema (3.67) enak

$$\mathcal{H}(z, y) = \sum_{k=2}^{\infty} zQ_{k-2}(z)y^k = zy^2 + \sum_{k=3}^{\infty} zQ_{k-2}(z)y^k$$

in prvi integral sistema (3.66) je oblike (2.45).

Sistem, ki zadošča pogojem 2), je časovno reverzibilen, saj pogoji 2) določajo raznoterost ideala

$$I_{sym}|_{a_{12}=b_{21}=0} = \langle a_{03}a_{30} - b_{03}b_{30}, a_{30}b_{12}^3 - a_{21}^3b_{03}, a_{03}a_{21}^3 - b_{12}^3b_{30} \rangle.$$

Primer 3) dobimo iz primera 1) z involucijo  $a_{kj} \leftrightarrow b_{jk}$ .

V primeru 4) ima sistem (3.34) obliko

$$\dot{x} = x(1 + 2b_{30}x^3 - a_{21}x^2y - a_{03}y^3), \quad \dot{y} = -y(1 - b_{30}x^3 - b_{12}xy^2 + 2a_{03}y^3).$$

in ima invariantno krivuljo  $f = 0$ , kjer je

$$f = 1 + 2b_{30}x^3 - 2a_{21}x^2y - 2b_{12}xy^2 + 2a_{03}y^3,$$

s kofaktorjem  $k = 2(3b_{30}x^3 - a_{21}x^2y + b_{12}xy^2 - 3a_{03}y^3)$ . Lahko konstruiramo Darbouxjev prvi integral  $H = xyf^{-1/2}$ , ki je analitični prvi integral oblike (2.45).

Sistem (3.34), ki zadošča pogojem primera 5), ima obliko

$$\dot{x} = x \left( 1 - a_{30}x^3 - a_{21}x^2y - \frac{2a_{21}b_{12}}{9a_{30}}y^3 \right), \quad \dot{y} = -y \left( 1 - 2a_{30}x^3 - b_{12}xy^2 - \frac{a_{21}b_{12}}{9a_{30}}y^3 \right). \quad (3.68)$$

Sistem (3.68) ima invariantni krivulji  $f_1 = 0$  in  $f_2 = 0$ , kjer sta

$$f_1 = 1 - 2a_{21}x^2y - 2b_{12}xy^2 + 3a_{30}b_{12}x^4y^2 + 2a_{21}b_{12}x^3y^3 + \frac{a_{21}^2b_{12}}{3a_{30}}x^2y^4$$

in

$$\begin{aligned} f_2 = & -18a_{21}a_{30}^2 + 54a_{21}^2a_{30}^2x^2y + 54a_{21}a_{30}^2b_{12}xy^2 - 27a_{21}^3a_{30}^2x^4y^2 - 81a_{21}a_{30}^3b_{12}x^4y^2 \\ & -9a_{21}^4a_{30}x^3y^3 - 54a_{21}^2a_{30}^2b_{12}x^3y^3 - 81a_{30}^3b_{12}^2x^3y^3 + 27a_{21}^2a_{30}^3b_{12}x^6y^3 + 81a_{30}^4b_{12}^2x^6y^3 \\ & -9a_{21}^3a_{30}b_{12}x^2y^4 - 27a_{21}a_{30}^2b_{12}^2x^2y^4 + 27a_{21}^3a_{30}^2b_{12}x^5y^4 + 81a_{21}a_{30}^3b_{12}^2x^5y^4 \\ & +9a_{21}^4a_{30}b_{12}x^4y^5 + 27a_{21}^2a_{30}^2b_{12}^2x^4y^5 + a_{21}^5b_{12}x^3y^6 + 3a_{21}^3a_{30}b_{12}^2x^3y^6 \end{aligned}$$

in ustrezna kofaktorja sta  $k_1 = -2xy(a_{21}x - b_{12}y)$  in  $k_2 = -3xy(a_{21}x - b_{12}y)$ . Ker je  $3k_1 - 2k_2 = 0$ , je Darbouxjev prvi integral enak

$$H(x, y) = f_1^3 f_2^{-2}.$$

■

Kot smo že zgoraj navedli, so pogoji v izrekih 3.2.14–3.2.17 reducirani, saj sta parametra  $a_{12}$  in  $b_{21}$  fiksna (imata vrednost ena). Čeprav s temi pogoji načeloma popolnoma rešimo problem centra, je lahko včasih pomembno poiskati pogoje za cel sistem brez omejitve parametrov. V [39] avtorica predlaga pristop za iskanje pogojev za center splošnega kompleksnega sistema (2.44) ob predpostavki, da je problem že rešen za nekatere fiksne parametre (kot npr. zgoraj). Geometrijsko fiksiranje enega parametra pomeni, da sekamo centralno raznoterost s hiperravnino. Z uporabo metode, predlagane v [39], lahko konstruiramo celotno centralno raznoterost iz presekov s hiperravninami.

Ko imamo rešitev problema kompleksnega centra za sistem (3.34), lahko enostavno pridobimo pogoje za ustrezen realni sistem četrte stopnje iz pogojev za kompleksni center in sicer s substitucijo:

$$\begin{aligned} a_{30} &= A_{30} + iB_{30}, & a_{21} &= A_{21} + iB_{21}, \\ a_{12} &= A_{12} + iB_{12}, & a_{03} &= A_{03} + iB_{03}. \end{aligned} \quad (3.69)$$



Obravnavamo enačbo

$$\dot{x} = ix(1 - a_{30}x^3 - a_{21}x^2\bar{x} - a_{12}x\bar{x}^2 - a_{03}\bar{x}^3). \quad (3.70)$$

Izvedemo substitucije (3.69) in  $x = u + iv$  v (3.70) ter ločimo realni in imaginarni del enačbe (3.70). Tako dobimo realni sistem oblike (2.41), t. j.

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -v + \alpha_{40}u^4 + \alpha_{31}u^3v + \alpha_{22}u^2v^2 + \alpha_{13}uv^3 + \alpha_{04}v^4, \\ \dot{v} &= u + \beta_{40}u^4 + \beta_{31}u^3v + \beta_{22}u^2v^2 + \beta_{13}uv^3 + \beta_{04}v^4, \end{aligned} \quad (3.71)$$

kjer je

$$\begin{aligned} \alpha_{40} &= B_{30} + B_{21} + B_{12} + B_{03}, & \beta_{40} &= -(A_{30} + A_{21} + A_{12} + A_{03}), \\ \alpha_{31} &= 4A_{30} + 2A_{21} - 2A_{03}, & \beta_{31} &= 4B_{30} + 2B_{21} - 2B_{03}, \\ \alpha_{22} &= -6B_{30} + 2B_{12}, & \beta_{22} &= 6A_{30} - 2A_{12}, \\ \alpha_{13} &= -4A_{30} + 2A_{21} - 2A_{03}, & \beta_{13} &= -4B_{30} + 2B_{21} - 2B_{03}, \\ \alpha_{04} &= B_{30} - B_{21} + B_{12} - B_{03}, & \beta_{04} &= -(A_{30} - A_{21} + A_{12} - A_{03}). \end{aligned}$$

Realna centralna raznoterost sistema (3.71) (t. j. množica parametrov sistema (3.71), za katere ima sistem (3.71) center v izhodišču) je, kot smo videli že v prejšnjem podrazdelku, lahko izračunana s pomočjo komponent centralne raznoterosti ustreznega kompleksnega sistema (3.34) in to je lahko izhodišče za obravnavo bifurkacij limitnih ciklov v tej družini polinomskih sistemov. Videli smo že, da se zanimive bifurkacije pojavijo v okolici centralne raznoterosti. Zato, ko imamo rešitev problema centra celega sistema brez restrikcij na parametrih, lahko dobimo realno centralno raznoterost in obravnavamo limitne cikle, ki bifurcirajo iz vsake komponente centralne raznoterosti realnega sistema (3.71), podobno kot smo to naredili v prejšnjem podrazdelku za kubični sistem.

### 3.2.4 Problem centra v družini trirazsežnih sistemov NDE

Obravnavamo družino trirazsežnih sistemov navadnih diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -v + au^2 + av^2 + cuw + dvw, \\ \dot{v} &= u + bu^2 + bv^2 + euw + fvw, \\ \dot{w} &= -w + Su^2 + Sv^2 + Tuw + Uvw, \end{aligned} \quad (3.72)$$

za katero z uporabo pristopa, opisanega na strani 89, poiščemo pogoje za nastop centra na centralni mnogoterosti. Izrek 2.2.21 nam zagotovi, da je izhodišče sistema (3.72) center za  $\mathcal{X}|W^C$ , kjer je  $\mathcal{X}$  ustrezno vektorsko polje, definirano z (2.29), natanko tedaj, ko  $\mathcal{X}$  premore realni analitični prvi integral oblike (2.30). V našem primeru iščemo pogoje s pomočjo funkcije

$$\Phi = \Phi(u, v, w) = u^2 + v^2 + \sum_{j+k+l \geq 3}^{16} \varphi_{jkl} \cdot u^j v^k w^l$$

z neznanimi koeficienti  $\varphi_{jkl}$ , ki mora ustrezati enačbi (2.31). Izračune izvedemo v `Mathematici`. Ko vstavimo  $\Phi$  v izraz, ki je na levi strani enačbe (2.31), pogledamo koeficiente pred različnimi monomi. Koeficienti pred monomomi  $u, v, w$  in  $u^2, v^2, w^2, uv, uw$  ter  $vw$  so ničelni. Nadalje pogledamo koeficiente v kubičnih členih in jih zaradi pogoja (2.31) enačimo z nič. Tako dobimo naslednji sistem enačb:

$2a + \varphi_{210} = 2c + \varphi_{111} - \varphi_{201} = \varphi_{012} - 2\varphi_{102} = -3\varphi_{003} = 2b + 2\varphi_{120} - 3\varphi_{300} = 2d + 2e + 2\varphi_{021} - \varphi_{111} - 2\varphi_{201} = -2\varphi_{012} - \varphi_{102} = 2a + 3\varphi_{030} - 2\varphi_{210} = 2f - \varphi_{021} - \varphi_{111} = 2b - \varphi_{120} = 0$ , od koder lahko hitro izračunamo vse koeficiente  $\varphi_{jkl}$ , kjer je  $j + k + l = 3$ .

Pri naslednjem koraku pogledamo koeficiente v členih četrte stopnje in podobno kot zgoraj dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} 4ab + 2/5(3c + d + e + 2f)S + \varphi_{310} &= 6bc - 2ae - 2/5b(2c - d - e - 2f) + 4/5a(3c + d + e + 2f) \\ &+ 2/5(3c + d + e + 2f)T + \varphi_{211} - \varphi_{301} = -(2/5)e(2c - d - e - 2f) + 4/5c(3c + d + e + 2f) + \\ \varphi_{112} - 2\varphi_{202} &= \varphi_{013} - 3\varphi_{103} = -4\varphi_{004} = -4a^2 + 4b^2 - 2/5(2c - d - e - 2f)S + 2\varphi_{220} - 4\varphi_{400} = \\ -4ac + 6bd + 4be &- 2/5a(2c - d - e - 2f) - 2af + 4/5b(2c - d - e + 3f) - 2/5(2c - d - e - 2f)T + \\ 2/5(3c + d + e + 2f)U &+ 2\varphi_{121} - \varphi_{211} - 3\varphi_{301} = -(2/5)c(2c - d - e - 2f) - 2/5(2c - d - e - \\ 2f)f + 4/5d(3c + d + e + 2f) &+ 4/5e(2c - d - e + 3f) + 2\varphi_{022} - 2\varphi_{112} - 2\varphi_{202} = -3\varphi_{013} - \varphi_{103} = \\ 2/5(3c + d + e + 2f)S &+ 2/5(2c - d - e + 3f)S + 3\varphi_{130} - 3\varphi_{310} = 2bc - 4ad - 6ae - 2/5b(2c - \\ d - e - 2f) + 4bf + 4/5a(3c + d + e + 2f) &+ 2/5(2c - d - e + 3f)T - 2/5(2c - d - e - 2f)U + \\ 3\varphi_{031} - \varphi_{121} - 2\varphi_{211} &= -(2/5)d(2c - d - e - 2f) + 4/5f(2c - d - e + 3f) - 2\varphi_{022} - \varphi_{112} = \\ -4a^2 + 4b^2 - 2/5(2c - d - e - 2f)S &+ 4\varphi_{040} - 2\varphi_{220} = 2bd - 2/5a(2c - d - e - 2f) - 6af + \\ 4/5b(2c - d - e + 3f) + 2/5(2c - d - e + 3f)U &- \varphi_{031} - \varphi_{121} = -4ab + 2/5(2c - d - e + 3f)S - \varphi_{130} = 0. \end{aligned}$$

Opazimo, da je ena neznanica (koeficient  $\varphi_{jkl}$ ) v zgornjem sistemu neodvisna in jo lahko izberemo poljubno. Brez izgube za splošnost izberemo  $\varphi_{400}$  in ji dodelimo vrednost 0. Prav tako izračun pokaže, da je sistem rešljiv ob pogoju, da je  $S(c + f) = 0$ . Označimo s  $p_1 = S(c + f)$ .

Pri naslednjem koraku izračunamo vse  $\varphi_{jkl}$ , kjer je  $j + k + l = 5$ . Nato pri šestem koraku ponovno dobimo sistem, kjer je en koeficient  $\varphi_{jkl}$  neodvisen in podobno kot prej izberemo  $\varphi_{600} = 0$ . Podobno kot pri četrtem koraku je  $p_2 = 0$  pogoj za rešljivost ustreznega sistema, kjer je

$$\begin{aligned} p_2 = &S(16abc - 4a^2c - 676b^2c - 28a^2d + 32abd - 12b^2d + 12a^2e + 32abe + 28b^2e - 36a^2f \\ &- 16abf - 644b^2f + 52c^2S + 32cdS - 4d^2S + 32ceS - 8deS - 4e^2S + 88cfS + 32dfS \\ &+ 32efS + 20f^2S - 36acT - 48bcT + 8adT + 4bdT - 12aeT - 16beT - 24afT - 52bfT \\ &+ 9cT^2 + 3dT^2 + 3eT^2 + 11fT^2 + 52acU - 24bcU - 16adU + 12bdU + 4aeU - 8beU \\ &+ 48afU - 36bfU - 6cTU - 2dTU - 2eTU + 6fTU + 11cU^2 - 3dU^2 - 3eU^2 + 9fU^2). \end{aligned}$$

Če nadaljujemo na tak način, dobimo pri osmem koraku zopet polinom, ki ga označimo s  $p_3$  in ki predstavlja pogoj  $p_3 = 0$ , pod katerim je sistem rešljiv; pri desetem koraku dobimo polinom  $p_4$  in podobno še pri dvanajstem, štirinajstem koraku dobimo  $p_5$  in  $p_6$ . Polinomov  $p_3, \dots, p_6$  nismo izpisali, ker so predolgi. Iz pogoja  $p_1 = 0$  vidimo, da je bodisi  $S = 0$  ali  $c = -f$ . Če je  $S = 0$ , imajo tudi vsi ostali polinomi  $p_i$  vrednost nič. Torej je  $S = 0$  pogoj za nastop centra v izhodišču sistema (3.72) na centralni mnogoterosti in lahko zapišemo naslednji izrek.

**Izrek 3.2.18** *Če je v sistemu (3.72)  $S = 0$ , ima ta sistem center v izhodišču na lokalni centralni mnogoterosti.*

**Dokaz.** Če je  $S = 0$ , ima sistem (3.72) obliko

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -v + au^2 + av^2 + cuw + dw, \\ \dot{v} &= u + bu^2 + bv^2 + euw + fw, \\ \dot{w} &= -w + Tuw + Uvw. \end{aligned} \tag{3.73}$$

Centralna mnogoterost za ta sistem je  $w = 0$  in ustrežni dvorazsežni sistem na tej centralni mnogoterosti je

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -v + au^2 + av^2, \\ \dot{v} &= u + bu^2 + bv^2\end{aligned}\tag{3.74}$$

in ima center v izhodišču za vse  $a, b \in \mathbb{R}$  (glej [36, izrek 2]).

■

Nadaljujemo s pogojem  $c + f = 0$  in predpostavko, da je  $S \neq 0$ . Če koordinato  $w$  pomnožimo z  $1/S$ , lahko prav tako predpostavimo, da je  $S = 1$ . Ko vstavimo  $c = -f$  in  $S = 1$  v polinome  $p_2, \dots, p_7$ , dobimo  $\tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_7$ . V *Singularju* poskušamo izračunati ireducilno dekompozicijo raznoterosti  $\mathbf{V}(\tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_7)$  in vidimo, da so izračuni pretežki. Zato podamo dodatne omejitve. To naredimo na dva načina: prvič predpostavimo, da je  $a = b = 0$  in drugič, da je  $c - f = d + e = 0$ . Izvedemo dva ločena izračuna v *Singularju* in dobimo naslednji rezultat.

**Izrek 3.2.19** *Sistem (3.72) ima center v izhodišču za  $\mathcal{X}|W^C$ , če velja eden od naslednjih pogojev:*

- (a)  $a = b = c + f = 8c + T^2 - U^2 = 4(e - d) - T^2U^2 = 2(e + d) + TU = 0$  in  $S = 1$ ;
- (b)  $a = b = c = f = d + e = 0$  in  $S = 1$ ;
- (c)  $d + e = c = f = T - 2a = U - 2b = 0$  in  $S = 1$ ;
- (č)  $c = d = e = f = 0$  in  $S = 1$ .

**Dokaz.** Če vstavimo pogoj (a) v sistem (3.72) in označimo  $\alpha = \frac{T-U}{2}$  in  $\beta = \frac{T+U}{2}$ , dobimo sistem

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -v - \frac{1}{2}\alpha\beta uw - \frac{1}{2}\beta^2vw, \\ \dot{v} &= u + \frac{1}{2}\alpha^2uw + \frac{1}{2}\alpha\beta vw, \\ \dot{w} &= -w + u^2 + v^2 + (\alpha + \beta)uw + (\beta - \alpha)vw,\end{aligned}\tag{3.75}$$

Iskanje algebraičnih invariantnih ploskev nas pripelje do eksplicitne enačbe centralne mnogoterosti  $W^c$ , ki je podana z  $w = \frac{u^2+v^2}{1-\alpha u-\beta v}$ . Vstavimo izraz za  $w$  v sistem (3.75) in dobimo sistem

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -v - \frac{\beta(\alpha u + \beta v)(u^2 + v^2)}{2(1 - \alpha u - \beta v)}, \\ \dot{v} &= u + \frac{\alpha(\alpha u + \beta v)(u^2 + v^2)}{2(1 - \alpha u - \beta v)},\end{aligned}$$

kar prinese, da je v lokalnih koordinatah blizu izhodišča  $(\alpha u + \beta v - 1) \mathcal{X}|W^C$  enak

$$\begin{aligned}\dot{u} &= v - (\alpha u + \beta v)v - \frac{1}{2}\beta(\alpha u + \beta v)(u^2 + v^2), \\ \dot{v} &= -u + (\alpha u + \beta v)u + \frac{1}{2}\alpha(\alpha u + \beta v)(u^2 + v^2).\end{aligned}\tag{3.76}$$

Oblika sistema narekuje simetrijo glede na radialno premico, ki je pravokotna premici  $\alpha u + \beta v = 0$ . Z rotacijo

$$u = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}U - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}V, \quad v = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}U + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}V$$

sistem (3.76) postane

$$\dot{U} = V - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}UV, \quad \dot{V} = -U + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}U^2 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}U(U^2 + V^2)$$

in je neobčutljiv na spremembo  $(U, V, t) \rightarrow (U, -V, -t)$ , kar pomeni, da je časovno reverzibilen in ima zato center v izhodišču.

Za primer (b) dobimo sistem

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -v + dvw, \\ \dot{v} &= u - duw, \\ \dot{w} &= -w + u^2 + v^2 + (Tu + Uv)w, \end{aligned} \tag{3.77}$$

ki ima prvi integral  $\Phi(u, v) = u^2 + v^2$ .

Sistem (3.72) s pogojem iz (c) postane

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -v + au^2 + av^2 + dvw, \\ \dot{v} &= u + bu^2 + bv^2 - duw, \\ \dot{w} &= -w + u^2 + v^2 + 2auw + 2bv w. \end{aligned} \tag{3.78}$$

Ta sistem ima centralno mnogoterost  $w = u^2 + v^2$ . Če vstavimo izraz za  $w$  v sistem (3.78), dobimo sistem

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -v + (a + dv)(u^2 + v^2), \\ \dot{v} &= u + (b - du)(u^2 + v^2), \end{aligned}$$

ki ga z rotacijo

$$u = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}U - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}V, \quad v = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}U + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}V$$

prevedemo v sistem

$$\dot{U} = -V + (\sqrt{a^2 + b^2} + dV)(U^2 + V^2), \quad \dot{V} = U - dU(U^2 + V^2).$$

Ta sistem je neobčutljiv na transformacijo  $(U, V, t) \rightarrow (-U, V, -t)$ , zato je časovno reverzibilen in ima posledično center v izhodišču.

V primeru (č) ima sistem (3.72) obliko

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -v + au^2 + av^2, \\ \dot{v} &= u + bu^2 + bv^2, \\ \dot{w} &= -w + u^2 + v^2 + Tuw + Uvw \end{aligned} \tag{3.79}$$

in ima centralno mnogoterost

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2}u^3(-2a + 2b + T - U) + u^2v \left( -a - b + \frac{T}{2} + \frac{U}{2} \right) \\ &\quad + uv^2 \left( -a + b + \frac{T}{2} - \frac{U}{2} \right) + v^3 \left( -a - b + \frac{T}{2} + \frac{U}{2} \right) + u^2 + v^2, \end{aligned}$$

na kateri je ta sistem enak sistemu (3.74), ki ima center v izhodišču. ■

V dokazih izrekov 3.2.18 in 3.2.19 smo videli, da nam centralna mnogoterost zagotovi zmanjšanje razsežnosti sistema, o čemer smo govorili v razdelku 2.2.2 (glej str. 86).

V [36] so avtorji obravnavali problem centra na centralni mnogoterosti za sistem (3.72) in pridobili enake pogoje, kot so v izrekih 3.2.18 in 3.2.19. Dokaza zgoraj sta deloma povzeta po dokazih v [36]. Pogoje, ki so jih pridobili, so izračunali na nekoliko drugačen način, s kompleksifikacijo, podobno, kot smo zgoraj pridobili pogoje za dvorazsežni sistem. Namreč, če v sistem (2.26) vpeljemo kompleksno spremenljivko  $x = u + iv$ , sta prvi dve enačbi sistema (2.26) enakovredni enačbi  $\dot{x} = ix + X(x, \bar{x}, w)$ , kjer je  $X$  vsota homogenih polinomov stopenj med 2 in  $N$ . Podobno kot na str. 93 dodamo tej enačbi njeno konjugirano enačbo, povsod zamenjamo  $\bar{x}$  z  $y$ , ki ga obravnavamo kot neodvisno kompleksno spremenljivko in zamenjamo  $w$  z  $z$ . Dobimo kompleksifikacijo sistema (2.26),

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ix + \sum_{p+q+r}^N a_{pqr} x^p y^q z^r, \\ \dot{y} &= -iy + \sum_{p+q+r}^N b_{pqr} x^p y^q z^r, \\ \dot{z} &= -\lambda z + \sum_{p+q+r}^N c_{pqr} x^p y^q z^r,\end{aligned}\tag{3.80}$$

kjer je  $b_{pqr} = \bar{a}_{pqr}$ , za koeficiente  $c_{pqr}$  pa zahtevamo, da je vsota  $\sum_{p+q+r}^N c_{pqr} x^p \bar{x}^q w^r$  za vsak  $x \in \mathbb{C}$  in vsak  $w \in \mathbb{R}$  realna. Naj  $\mathcal{Y}$  označuje sistemu (3.80) pripadajoče vektorsko polje v  $\mathbb{C}^3$ . Obstoj prvega integrala (2.30) za sistem v družini (2.26) je zagotovljen z obstojem prvega integrala

$$\Psi(x, y, z) = xy + \sum_{j+k+\ell=3} v_{jkl} x^j y^k z^\ell\tag{3.81}$$

za ustrezen sistem v družini (3.80). Podobno kot pri dvorazsežnih sistemih lahko obravnavamo obstoj prvega integrala  $\Psi$  za sistem v družini (3.80) z izračunom koeficientov funkcije  $\mathcal{Y}\Psi$  in nato z iskanjem njihove raznoterosti. Za sistem (3.80) lahko vedno najdemo funkcijo  $\Psi$  oblike (3.81), ki zadošča enačbi

$$\mathcal{Y}\Psi(x, y, z) = g_{110}xy + g_{220}(xy)^2 + g_{330}(xy)^3 + \dots$$

Koeficienti  $g_{kk0}$  so fokusne količine in njihova raznoterost predstavlja potrebne pogoje za obstoj prvega integrala oblike (3.81) sistema (3.80) (glej [36] za več podrobnosti).

### 3.3 Diskretni sistemi

V tem razdelku obravnavamo centralne raznoterosti in bifurkacije limitnih ciklov sistemov (2.130). V veliki meri je to poglavje povzeto po originalnih člankih avtorjev [92] in [93]. Podobna problematika je obravnavana že v [105] in [111]. V nekaterih primerih je dosežena zgornja vrednost zmogljivosti sodobnih računalnikov in algebrskih računskih sistemov. S podobnim pristopom (glej razdelek 2.3) je mogoče obravnavati tudi preslikave (2.131). Za razrešitev zahtevnejših primerov bi bilo treba uporabiti drugačen pristop.

Obdelani so sistemi oblike (2.130), ki izhajajo iz enačbe (2.139). Obravnavamo centralne raznoterosti preslikav  $y = f(x)$ , ki izhajajo iz enačb (2.139), in njim pripadajoče ideale ter cikličnost na centru. Obravnavamo tudi posplošitev izreka 2.1 iz [20] za ocenjevanje cikličnosti v smislu prenosa ideje iz teorije NDE na preslikave (2.130). Posplošeni izrek potrdimo na nekaterih znanih in novih primerih. Ključ dokaza posplošenega izreka 3.3.4 je (v primerjavi z zveznim primerom) podobna zveza med Ljapunovimi koeficienti in podobna oblika le-teh. Pri dokazu lahko zato uporabimo enako linearno algebro, kot v [20], kjer so obravnavani zvezni sistemi.

Glede na to, kateri nelinearni členi so prisotni v enačbi  $\Psi(x, y) = 0$ , bomo uporabljali oznake iz [92] in [93]. Če  $y = f(x)$  izvira iz enačbe  $\Psi(x, y) = 0$  in je

$$\Psi(x, y) = x + y + Ax^2 + Bxy + Cy^2, \quad (3.82)$$

uporabimo oznako **2**. Za  $y = f(x)$  in

$$\Psi(x, y) = x + y + Dx^4 + Ex^3y + Fx^2y^2 + Gxy^3 + Hy^4, \quad (3.83)$$

uporabimo oznako **0:0:4**. Za  $y = f(x)$  in

$$\Psi(x, y) = x + y + Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx^3 + Ex^2y + Fxy^2 + Gy^3 \quad (3.84)$$

uporabimo oznako **2:3**. Za  $y = f(x)$  in

$$\Psi(x, y) = x + y + Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx^4 + Ex^3y + Fx^2y^2 + Gxy^3 + Hw^4 \quad (3.85)$$

uporabimo oznako **2:0:4**.

Cikličnost preslikav (2.130) tipa **2**, **0:0:4** in **2:3** s fokusom v izhodišču je bila obravnavana že v [105, 111]. Samo v primeru **2**, ki je najenostavnejši in je bil tudi kronološko prvi obravnavan v [127], je pripadajoči ideal  $\langle g_2, g_4, \dots, g_{2k}, \dots \rangle$  korenski. Posledično je to edini primer, za katerega lahko uporabimo izrek 3.3.4 v celoti oziroma trditve 3.3.5 in/ali trditve 3.2.7. V vseh drugih primerih ima pripadajoči ideal  $\langle g_2, g_4, \dots, g_{2k}, \dots \rangle$  v primarni dekompoziciji nekaj korenskih in nekaj nekorenskih komponent. V teh primerih lahko za oceno cikličnosti uporabimo samo prvi del izreka 3.3.4 oz. ocenimo cikličnost s pomočjo trditve 3.2.7. Kljub zmogljivosti sodobnih računalnikov in programa *Singular* izračuni primarne dekompozicije ideala centralne raznoterosti v primeru **2:3** v literaturi še niso obdelani.

Če je pripadajoči ideal korenski, so rezultati, ki sledijo iz izreka 3.3.4 natančni, drugače pa lahko uporabimo samo prvi del izreka, ki nam da oceno cikličnosti, ki je veljavna lokalno (v smislu razvoja v Taylorjevo vrsto). Torej, prvi del izreka 3.3.4 velja lokalno tudi na nekorenskih komponentah, kar je njegova glavna prednost. Rezultati iz primarne dekompozicije v primerih **0:0:4** in **2:0:4** so za analizo cikličnosti uporabljeni na enak način kot npr. v [45] in [75].

V smislu zgornjih oznak so v [92] na podoben način obravnavani še primeri **0:0:0:0:6**, **0:0:0:0:0:0:8** in **0:0:0:0:0:0:0:10**. Sode homogene primere višjih stopenj iz očitnih razlogov raje imenujemo kar glede na stopnjo homogenosti  $n = 6, 8, 10$  itd. Nazadnje so obravnavani tudi splošni primeri  $n = 2\ell$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$ . Na osnovi rezultatov za  $n = 2, 4, 6, 8$  in 10 sta za pogoje centralne mnogoterosti in cikličnosti iz centra induktivno postavljeni domnevi.

Za ugotavljanje cikličnosti v okolici fokusa je odgovor, kot vidimo v naslednji trditvi, dokaj preprost.

**Trditev 3.3.1** Če ima preslikava  $f_{\alpha^*}$  v izhodišču fokus reda  $k$ , je cikličnost v  $x = 0$  vsaj  $k - 1$ .

Prav tako z ugotavljanjem cikličnosti in s pogoji centralne mnogoterosti v lihih homogenih primerih **0:3**, **0:0:0:5**, **0:0:0:0:7**, ... torej za  $n = 2\ell + 1$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$ , kot vidimo v naslednjem izreku, ni težav.

**Izrek 3.3.2** *Polinom določen z (3.95) za lihe  $n$  porodi preslikavo (2.130) s centrom v izhodišču natanko tedaj, ko je*

$$\sum_{l+j=n} (-1)^j \alpha_{lj} = 0.$$

*Cikličnost iz centra je za vse  $n = 2\ell + 1$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$ , enaka nič.*

Izrek 3.3.2, ki je dokazan v ([105, izrek 2.4]), skupaj s pogoji centra in cikličnosti za primere  $n = 2$  in  $n = 4$  nakazuje, da za višje homogene sode primere koeficiente  $A, B, C, D, E, F, G, H$  iz enačb (3.82), (3.83) označimo z indeksi, kot je nakazano v (2.139). V primerih  $n = 6, 8, 10$  bomo namesto  $\alpha_{ij}$  uporabili  $A_{ij}$  za elemente iz prostora parametrov  $\mathbf{A}$ . Naš končni cilj v tem razdelku bo torej obravnava cikličnosti iz centra v sodih primerih.

### 3.3.1 Posplošitev izreka o cikličnosti komponent centralne raznoterosti in splošni rezultati o cikličnosti

Izrek 2.1 v [20] poda zgornjo mejo limitnih ciklov pri bifurkacijah iz komponent centralne raznoterosti sistema NDE (2.41). Avtor obravnava povratno preslikavo  $h(c) = c + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i c^i$ , ki pripada sistemu (2.41). Koeficienti  $\beta_i$  so polinomi v prostoru parametrov in izhajajo iz sistema NDE; torej iz koeficientov polinomov  $\widehat{P}(u, v)$  ter  $\widehat{Q}(u, v)$ . Vemo, da limitni cikli sistema (2.41) pripadajo izoliranim ničlam preslikave  $h(c) - c$ , ki smo jo imenovali funkcija razlike. Obravnava funkcije razlike torej odgovori na vprašanje cikličnosti: treba je obravnavati koeficiente  $a_i$  in njihove skupne ničle ali natančneje ideal, ki ga vsi koeficienti  $\beta_i$  generirajo ter njemu pripadajočo raznoterost. Avtor v [20] definira *Ljapunove količine*  $L(i)$ , ki so odvisne od koeficientov  $\beta_i$ . Z namenom ocenjevanja cikličnosti iz (posameznih ireducibilnih komponent) centralne raznoterosti, predlaga izbiro (generične) točke na vsaki komponenti in linearizacijo Ljapunovih količin okrog te generične točke. Seveda je ravno izbira te generične točke lahko "problematična", še posebej, če obravnavani ideal ni korenski [27, str. 173, posledica 3].

Sedaj želimo koncept Ljapunovih količin in izrek 2.1 iz [20] posplošiti na preslikave (2.130), ki izvirajo iz enačbe (2.139). Glede na [111, dokaz trditve 3] lahko funkcijo razlike (2.142),  $\mathcal{P}(x) = f^2(x) - x$ , za preslikave (2.130) izrazimo s fokusnimi količinami,  $g_{2k}$ , ki so definirane v razdelku 2.3.3. To pomeni, da za obravnavo problema centra in fokusa preslikav (2.130) obstajata dva pristopa. Funkcijo razlike lahko obravnavamo direktno iz Ljapunovih količin  $\mathcal{P}(x) = f^2(x) - x = c_2 x^3 + c_3 x^4 + \dots$  in obravnavamo ideal  $\langle c_2, c_3, \dots \rangle$ , ali pa obravnavamo Ljapunovo funkcijo  $\Phi(x) = x^2 (1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k)$ , za katero je dokazano [111] (glej tudi dokaz trditve 2.3.18), da preko zveze (2.140) razlikuje med centri in fokusi preslikave (2.130). Ideal, generiran s koeficienti  $c_k$  iz funkcije razlike (2.142), in ideal, generiran s fokusnimi količinami  $g_{2k}$  sovpadata in pogoji  $g_2 = g_4 = \dots = g_{2k-2} = 0$  ter  $g_{2k} \neq 0$  so ekvivalentni pogojem  $c_2 = c_3 = \dots = c_{2k-1} = 0$  ter  $c_{2k} \neq 0$ . Zato je obravnava preslikav (2.130) preko Ljapunovih količin in preko fokusnih količin enaka kot pri ravninskih sistemih NDE (2.41); glej tudi [114, posledica 6.2.7]. V [111, dokaz trditve 1] je dokazano tudi, da je

$$V(\langle c_2, c_3, \dots \rangle) = V(\langle g_2, g_4, \dots \rangle). \quad (3.86)$$

Poleg tega je dokazano tudi, da lahko funkcijo razlike  $\mathcal{P}(x)$  vedno zapišemo v obliki

$$\mathcal{P}(x) = g_{k_1} x^{k_1} (1 + \Psi_1(\alpha, x)) + \cdots + g_{k_s} x^{k_s} (1 + \Psi_s(\alpha, x)). \quad (3.87)$$

Iz članka [78, trditev 2.1 in izrek 2.2] lahko sklepamo, da sta enačbi (3.86) ter (3.87) nespremenjeni, tudi če delamo na lokalnih kolobarjih v prostoru parametrov (ki izhajajo iz potenčnih vrst pri razvoju okoli koordiantnega izhodišča).

Skratka, v jeziku preslikav (2.130) Christopherjev izrek (izrek 3.2.1) temelji na analizi ideala  $\langle c_2, c_3, \dots \rangle$ , ki izhaja direktno iz (2.142), medtem ko posplošitev izreka [20, izrek 2.1] na preslikave (2.130) v [93] temelji na zvezi (2.22) ter na Bautinovi metodi.

Če želimo posplošiti Christopherjev izrek na sisteme (2.130), je treba videti, da koeficienti  $c_n$  iz Poicaréjeve povratne preslikave za (2.130) zadoščajo enakim pogojem kot koeficienti Poicaréjeve povratne preslikave sistemov NDE (2.41). Najprej dokažimo, da koeficienti  $c_n$  iz Poicaréjeve povratne preslikave  $\mathcal{R}(x) = f^2(x) = x + c_2 x^3 + c_3 x^4 + \cdots$  zadoščajo enačbi (2.145); tako kot kolobar monomov  $M$  definiran v (2.144). V ta namen pogledjmo izraz za  $f^2(x)$  in zvezo med koeficienti  $c_n$  in  $a_n$ . Če je  $f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$  in je  $a_0 = 1$ , sledi

$$\begin{aligned} f^2(x) &= -(-a_0 x - a_1 x^2 - \cdots) - a_1 (-a_0 x - a_1 x^2 - \cdots)^2 - \cdots \\ &= a_0 x + (a_1 - a_0^2 a_1) x^2 + (a_2 a_0^3 - 2a_0 a_1^2 + a_2) x^3 + \\ &+ (a_3 - a_0^4 a_3 - a_1 (a_1^2 + 2a_0 a_2) + 3a_0^2 a_1 a_2) x^4 + \cdots \\ &= x + (2a_2 - 2a_1^2) x^3 + (a_1 a_2 - a_1^3) x^4 + (a_1^2 a_2 - 6a_3 a_1 + 3a_2^2 + 2a_4) x^5 + \cdots \end{aligned}$$

Torej prvih nekaj koeficientov  $c_n$  je takšnih:

$$\begin{aligned} c_0 &= (-1)^0 \cdot 1 \cdot a_0 a_0^1 = 1 \\ c_1 &= (-1)^0 \cdot 1 \cdot a_0 a_1^1 + (-1)^1 \cdot 1 \cdot a_1 a_0^2 \\ &= a_1 - a_1 = 0 \\ c_2 &= (-1)^0 \cdot 1 a_0 \cdot a_2^1 + (-1)^1 \cdot 2a_1 \cdot a_0^1 a_1^1 + (-1)^2 \cdot 1 a_2 \cdot a_0^3 \\ &= 2a_2 - 2a_1^2 \\ c_3 &= (-1)^0 \cdot 1 a_0 \cdot a_3^1 + (-1)^1 \cdot 2a_1 \cdot a_0^1 a_2^1 + (-1)^1 \cdot 1 a_1 \cdot a_1^2 + \\ &+ (-1)^2 \cdot 3a_2 \cdot a_0^2 a_1^1 + (-1)^3 \cdot 1 a_3 \cdot a_0^4 = \\ &= a_1 a_2 - a_1^3 \\ c_4 &= 1 \cdot a_0 a_4 - 2a_1 a_0 a_3 - 2a_1 a_1 a_2 + 3a_2 a_0 a_1^2 + 3a_2 a_0^2 a_2 - 4a_3 a_0^3 a_1 + 1 \cdot a_4 a_0^5 \\ &= a_1^2 a_2 - 6a_3 a_1 + 3a_2^2 + 2a_4. \end{aligned}$$

Iz formule

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \left( \sum_{m=1}^{\infty} A_m x^m \right)^n = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{\substack{\mu_s \leq s, k_i \in \mathbb{Z}^+ \\ m_1 < \cdots < m_s, m_i \in \mathbb{N}}} \kappa_{k_1, \dots, k_s} A_s A_{m_1}^{k_1} \cdots A_{m_s}^{k_s} x^{(k \cdot m)_s},$$



kjer je  $(k \cdot m)_s = k_1 m_1 + \dots + k_s m_s$  in  $\mu_s = k_1 + \dots + k_s$ ,  $k_i \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\kappa_s = \binom{s}{k_1 k_2 \dots k_s} = \frac{s!}{k_1! k_2! \dots k_s!}$ , lahko izračunamo koeficiente  $c_{s-1}$  pri  $s$ -ti potenci spremenljivke  $x$

$$c_{s-1} = \sum_{\substack{1 \leq m_1 < \dots < m_\ell, k_i \in \mathbb{Z}^+ \\ k_1 m_1 + \dots + k_\ell m_\ell = \ell; 1 < \ell \leq s}} \kappa_{k_1, \dots, k_s} A_{\mu_s} \cdot A_{m_1}^{k_1} \dots A_{m_s}^{k_s}.$$

Za vsak  $n \in \mathbb{N}$  je torej koeficient  $c_{n-1}$  pri  $x^n$  v  $f^2(x)$  (po zgornji formuli za  $A_n = -a_{n-1}$ ) enak

$$c_{n-1} = \sum_{\substack{0 \leq m_1 < \dots < m_n \\ k_1 m_1 + \dots + k_n m_n = n - \mu_n}} (-1)^{\mu_n - 1} \kappa_{k_1, \dots, k_n} a_{\mu_n - 1} \cdot a_{m_1}^{k_1} \dots a_{m_n}^{k_n}, \quad (3.88)$$

kjer gre zgornja vsota po vseh koeficientih  $k_i$ ,  $m_j$ , za katere je  $1 \leq k_1 + \dots + k_n \leq n$  in  $0 \leq k_1 m_1 + \dots + k_n m_n \leq n - 1$  ter  $0 \leq m_1 < \dots < m_n$ . Enakost  $k_1 m_1 + \dots + k_n m_n = 0$  je lahko izponjena samo za trivialni nabor koeficientov  $k_1 = n$  in  $m_1 = 0$ . Kako v vsoti (3.88) tečejo koeficienti  $k_i$ ,  $m_j$  in posledično  $\kappa_{k_1, \dots, k_s}$ , vidimo na naslednjih primerih.

Za  $a_0 = 1$  in  $n = 1$  iz formule (3.88) sledi  $c_0 = (-1)^0 \cdot 1 \cdot a_0 a_0^1 = 1$ . Pripadajoča tabela koeficientov  $k_i$ ,  $m_j$  je

| $k_1$ | $k_2$ | $m_1$ | $m_2$ | $\kappa_{k_1, \dots, k_s}$ |
|-------|-------|-------|-------|----------------------------|
| 1     | –     | 0     | –     | 1                          |

Za  $n = 2$  je  $c_1 = (-1)^0 \cdot 1 \cdot a_0 a_1^1 + (-1)^1 \cdot 1 \cdot a_1 a_0^2 = a_1 - a_1 = 0$ . Pripadajoča tabela koeficientov  $k_i$ ,  $m_j$  je

| $k_1$ | $k_2$ | $m_1$ | $m_2$ | $\kappa_{k_1, \dots, k_s}$ |
|-------|-------|-------|-------|----------------------------|
| 1     | –     | 1     | –     | 1                          |
| 2     | –     | 0     | –     | –1                         |

Za  $n = 3$  je  $c_2 = (-1)^0 \cdot 1 a_0 \cdot a_2^1 + (-1)^1 \cdot 2 a_1 \cdot a_0^1 a_1^1 + (-1)^2 \cdot 1 a_2 \cdot a_0^3 = a_2 a_0^3 - 2 a_0 a_1^2 + a_2 a_0 = 2 a_2 - 2 a_1^2$ . Pripadajoča tabela koeficientov  $k_i$ ,  $m_j$  je

| $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $\kappa_{k_1, \dots, k_s}$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------------------------|
| 1     | –     | –     | 2     | –     | –     | 1                          |
| 1     | 1     | –     | 0     | 1     | –     | 2                          |
| 3     | –     | –     | 0     | –     | –     | 1                          |

Za  $n = 4$  je  $c_3 = (-1)^0 \cdot 1 a_0 \cdot a_3^1 + (-1)^1 \cdot 2 a_1 \cdot a_0^1 a_2^1 + (-1)^1 \cdot 1 a_1 \cdot a_1^2 + (-1)^2 \cdot 3 a_2 \cdot a_0^2 a_1^1 + (-1)^3 \cdot 1 a_3 \cdot a_0^4 = -a_3 + 3 a_2 a_1 - 2 a_2 a_1 + a_3 - a_1^3 = a_1 a_2 - a_1^3$ . Pripadajoča tabela koeficientov  $k_i$ ,  $m_j$  je

| $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ | $\kappa_{k_1, \dots, k_4}$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------------------------|
| 1     | –     | –     | –     | 3     | –     | –     | –     | 1                          |
| 1     | 1     | –     | –     | 0     | 2     | –     | –     | 2                          |
| 2     | –     | –     | –     | 1     | –     | –     | –     | 1                          |
| 2     | 1     | –     | –     | 0     | 1     | –     | –     | 3                          |
| 4     | –     | –     | –     | 0     | –     | –     | –     | 1                          |

Očitno koeficient  $a_{2k}$  (pomnožen z 2) prvič nastopi pri koeficientu  $c_{2k}$ , zato lahko sode koeficiente izrazimo z  $a_{2k}$  in  $a_j$  za  $1 \leq j \leq 2k - 1$ :

$$c_{2k} = 2a_{2k} + \sum_{j=1}^{2k-1} w_{2k-j, 2k} \cdot a_j; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.89)$$

Ker je vsak  $c_{2k}$  polinom, so očitno tudi  $w_{2k-j,2k}$  polinomi, ki vsebujejo samo monome oblike  $a_{m_1}^{k_1} \cdots a_{m_n}^{k_n}$ , kjer je  $k_1 m_1 + \cdots + k_n m_n = 2k - j$ .

Prav tako direktno iz (3.88) sledi

$$c_{2k+1} = \frac{2k-1}{2} a_1 c_{2k} + \cdots + h_{2k-1,2k+1} \cdot c_2; \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.90)$$

kjer so  $h_{2j+1,2k+1}$  polinomi, ki vsebujejo samo monome  $a_{m_1}^{k_1} \cdots a_{m_n}^{k_n}$ , kjer je  $k_1 m_1 + \cdots + k_n m_n = 2j + 1$ .

**Opomba 3.3.3** Prvih nekaj koeficientov  $c_n$  ima glede na formuli (3.89) in (3.90) naslednjo strukturo:

$$\begin{aligned} c_2 &= 2a_2 - 2a_1 \cdot a_1, \\ c_3 &= \frac{1}{2} a_1 c_2, \\ c_4 &= 2a_4 + a_1 a_2 \cdot a_1 + 3a_2 \cdot a_2 - 6a_1 \cdot a_3, \\ c_5 &= \frac{3}{2} a_1 \cdot c_4 + \left( \frac{1}{2} a_3 - \frac{1}{4} a_1 a_2 \right) \cdot c_2, \\ c_6 &= 2a_6 + w_{5,6} \cdot a_1 + w_{4,6} \cdot a_2 + w_{3,6} \cdot a_3 + w_{2,6} \cdot a_4 + w_{1,6} \cdot a_5, \\ c_7 &= \frac{5}{2} a_1 c_6 + h_{3,7} \cdot c_4 + h_{5,7} \cdot c_2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

kjer so

$$\begin{aligned} w_{5,6} &= 3a_1 a_2^2, \\ w_{4,6} &= 3a_2^2, \\ w_{3,6} &= -4(a_3 + a_1^3 + 2a_1 a_2), \\ w_{2,6} &= 8(a_2 + a_1^2), \\ w_{1,6} &= -8a_1, \\ h_{3,7} &= -5a_1^3 + 2a_2 a_1 + \frac{1}{2} a_3, \\ h_{5,7} &= -\frac{1}{4} (10a_1^3 a_2 - 42a_3 a_1^2 + 21a_1 a_2^2 + 3a_3 a_2 + 6a_5) \\ &\vdots \end{aligned}$$

To je očitno struktura enakega tipa, kot v izreku 3.2.1.

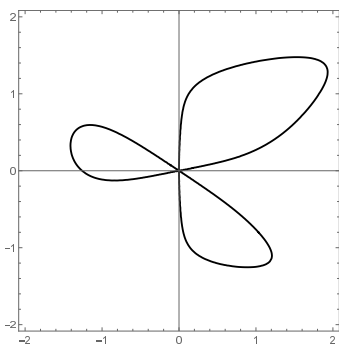
Naj bo zdaj  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  analitična funkcija, ki je implicitno definirana z enačbo

$$G(x, \varepsilon) = 0, \quad (x, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2.$$

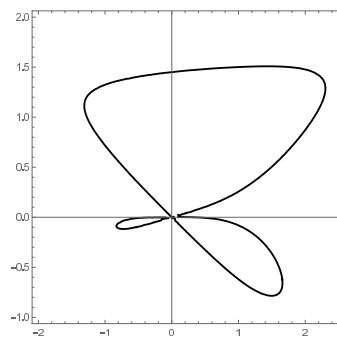
Če je  $G(0, 0) = 0$  in lahko  $G$  zapišemo kot  $G = G_r + v$ . č. (torej, če so  $x^r, x^{r-1}\varepsilon, \dots, x\varepsilon^{r-1}, \varepsilon^r$  monomi najnižje stopnje, ki nastopajo v  $G$ ), je  $(0, 0)$  točka z multiplikativnostjo  $r$  (oz.  $r$ -kratna točka) enačbe  $G(x, \varepsilon) = 0$ .

Na primer za  $G(x, \varepsilon) = (2x + 3\varepsilon)(x - 5\varepsilon) + x^3 + \varepsilon^4 + x^{10}$  in  $\Gamma(x, \varepsilon) = (2x + 3\varepsilon)(x - 5\varepsilon) + x^3 + \varepsilon^4$  je koordinatno izhodišče 2–kratna točka, kar pomeni, da za vsak (dovolj majhen)  $\varepsilon_0$  obstajata glede na spremenljivko  $x$  dve rešitvi enačbe  $G(x, \varepsilon_0) = 0$  oz.  $\Gamma(x, \varepsilon_0) = 0$  (ti dve rešitvi sta približno enaki  $x_1 \approx -\frac{3\varepsilon_0}{2}$  in  $x_2 \approx -5\varepsilon_0$ ). Približka  $x_1$  ter  $x_2$  rešitev izhajata iz linearnih faktorjev  $(2x + 3\varepsilon)(x - 5\varepsilon)$  oz. iz kvadratne enačbe  $(2x + 3\varepsilon)(x - 5\varepsilon) = 0$ . Podobno je za vsako  $r$ –kratno funkcijo blizu  $x = 0$  število rešitev  $G(x, \varepsilon) = 0$  enako  $r$ , razen, če je kateri od linearnih členov enak  $x$  ali  $\varepsilon$ , kar geometrijsko pomeni, da je tangenta na krivuljo vzporedna z  $\varepsilon$ – ali  $x$ –osjo. Za število ničel pa obstoj člena  $x$  v produktu linearnih faktorjev pomeni, da za tako  $r$ –kratno funkcijo obstaja ena neničelna ničla manj. Po drugi strani pa člen  $\varepsilon$  implicira obstoj neizolirane ničle v okolici izhodišča  $x = 0$  (oz. neskončno rešitev). Oba posebna primera sta prikazana na slikah 3.1 in 3.2. Pri funkciji  $G(x, \varepsilon) = \frac{\mathcal{P}(x, \varepsilon)}{x} = \sum_{i=0}^k t_i x^{2i} \varepsilon^{2(k-i)} + v$ . č., kjer je  $\mathcal{P}(x, \varepsilon) + x$  Poincaréjeva povratna preslikava, se želimo izogniti obema, pravkar omenjenima primeroma.

Splošno lahko funkcijo oblike  $G_k(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^k t_i x^{2i} \varepsilon^{2(k-i)}$  zapišemo v produktni obliki kot  $G_k(x, \varepsilon) = \prod_{i=0}^k (x - v_i \varepsilon)^2$ , kar da za  $\frac{\mathcal{P}(x, \varepsilon)}{x} = 0$  aproksimacijo  $\prod_{i=0}^k (c - v_i \varepsilon)^2 + v$ . č. = 0. Posledično je (razen v obeh posebnih primerih) za dovolj majhne  $\varepsilon > 0$  število pozitivnih ničel enačbe  $G(x, \varepsilon) = 0$  blizu  $(0, 0)$  enako  $2k$ .



Slika 3.1: 4-kratna točka: tangentni primer.



Slika 3.2: 4-kratna točka.

Sedaj lahko dokažemo analog izreka 3.2.1, ki velja za preslikave (2.130). Iz enačb (3.89) in (3.90) je očitno, da (polinomski) koeficienti funkcije razlike za (2.130) tvorijo ideal, ki je generiran izključno s koeficienti  $c_{2k}$ , ki jih imenujemo Ljapunove količine  $L(k)$ . To po Hilbertovem izreku o bazi pomeni, da se  $\mathcal{P}(x)$  da zapisati v obliki  $\mathcal{P}(x) = \sum_{k=0}^N c_{2k} x^{2k+1} (1 + \Psi(x, \alpha_1, \dots, \alpha_n))$ , kjer je  $\Psi(0, \vec{0}) = 0$ .

**Izrek 3.3.4** Naj bo  $\alpha \in \mathbf{A}$  točka na centralni raznoterosti enačbe (2.139) in naj ima prvih  $k$  funkcij  $c_{2k}$  oz. glede na (3.86)  $g_{2k}$  neodvisne linearne člene. Potem točka  $\alpha$  leži na komponenti centralne raznoterosti s sorazsežnostjo vsaj  $k$  in obstajajo bifurkacije, ki lokalno blizu vrednosti  $\alpha$  povzročijo  $k - 1$  limitnih ciklov.

Če poleg tega vemo, da točka  $\alpha$  leži na komponenti sorazsežnosti  $k$ , je  $\alpha$  gladka točka raznoterosti in cikličnost centra za vrednost parametra  $\alpha$  je natanko  $k - 1$ . V tem primeru je  $k - 1$  tudi cikličnost generične točke na obravnavani komponenti.

**Dokaz.** Brez izgube za splošnost lahko obravnavamo vrednost parametra  $\alpha$  premaknemo v koordinatno izhodišče. To poenostavi račune in polinomski ideal  $I$ , generiran s prvimi  $k$  Ljapunovimi količinami, lahko obravnavamo v kolobarju potenčnih vrst  $\mathbb{R}[\mathbf{A}]$ , prostora parametrov  $\mathbf{A}$ , kjer so potenčne vrste obravnavane glede na izhodišče. Ker izrek govori o lokalnih lastnostih okoli izhodišča v prostoru  $\mathbf{A}$ , lahko izberemo koordinatni sistem tako, da prvih  $k$  Ljapunovih količin  $c_{2k}$  izrazimo samo s parametri  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ . Ker so parametri  $\alpha_i$  neodvisni, lahko izberemo  $\alpha_{k-1} = 1$  in  $\alpha_i = t_i \varepsilon^{2(k-i-1)}$  za  $i < k-1$ , kjer so  $\varepsilon, t_i \in \mathbb{R}$ . Potem je funkcija razlike (2.142) analitična funkcija spremenljivk  $x, \varepsilon$  in velja

$$\mathcal{P}(x) = x \left( \sum_{i=0}^{k-1} t_i x^{2i} \varepsilon^{2(k-i-1)} + F(x, \varepsilon) \right),$$

kjer  $F$  vsebuje samo člene višjega reda od  $2k-1$  v spremenljivkah  $x$  in  $\varepsilon$ . Koeficiente  $t_i$  zaradi neodvisnosti parametrov lahko izberemo tako, da bodo linearni členi v vsoti  $\sum_{i=0}^s t_i x^{2i} \varepsilon^{2(k-i-1)}$ ,  $s = 0, 1, \dots, k-1$ , imeli paroma različne rešitve.

Zato je  $\frac{\mathcal{P}(x)}{x}$  analitična funkcija spremenljivk  $x, \varepsilon$ , ki je v okolici izhodišča  $2k$ -kratna in vsak od  $k$  (kvadriranih linearnih) faktorjev ima približno rešitev  $x = v_i \varepsilon + v$ . č. in glede na enačbo  $\frac{\mathcal{P}(x)}{x} = 0$ . Za majhne vrednosti  $\varepsilon$  to pomeni natanko  $k$  majhnih pozitivnih ničel enačbe  $\frac{\mathcal{P}(x)}{x} = 0$ .

Poleg tega opazimo, da Ljapunove količine  $c_2, c_4, \dots, c_{2k}$  vedno zadostujejo za obravnavo enačb, ki določajo centralno raznoterost (oz. definirajo pripadajoči ideal). Po Hilbertovem izreku o bazi ideala so od nekega  $k$ -ja naprej vse Ljapunove količine  $L(i)$  za  $i > k$  znotraj ideala  $I = \langle L(2), L(4), \dots, L(2k) \rangle \subset \mathbb{R}[\mathbf{A}]$  in potem lahko uporabimo Bautinova rezultata (glej trditvi 3.1.2 in 3.1.4 oz. [114]).

Nazadnje povejmo, da vrednosti parametrov, za katere centralna raznoterost ni gladka, ali kjer prvih  $k$  Ljapunovih količin ni linearno neodvisnih, očitno tvorijo zaprto podmnožico na centralni mnogoterosti. ■

Izrek 3.3.4 nam torej poda oceno za cikličnost preslikav (2.130) na vsaki komponenti centralne raznoterosti. Pri analizi cikličnosti preslikav (2.130), ki izhajajo iz (2.139), pa si lahko poleg izreka 3.3.4 pomagamo tudi s spodnjo trditvijo, ki temelji na konstrukciji minimalne baze ideala, generiranega s fokusnimi količinami sistema (2.130), in ki poda zgornjo mejo za cikličnost centra v izhodišču preslikave. S pojmom minimalne baze smo se seznanili v razdelku 2.2 (glej str. 121), kjer smo obravnavali zvezne sisteme. V spodnji trditvi povežemo pojem minimalnosti ideala fokusnih količin in cikličnost centra. Naj bo  $G = \langle g_2, g_4, g_6, \dots \rangle \subset \mathbb{C}[\alpha_1, \dots, \alpha_m]$  ideal, generiran s fokusnimi količinami  $g_{2k}$ , ki so definirane v enačbi (2.140). Z  $\mathcal{B}_G$  označimo minimalno bazo ideala  $G$ .

**Trditev 3.3.5 ([111])** *Naj bo  $\mathcal{B}_G = \{g_{k_1}, \dots, g_{k_s}\}$  in naj bosta  $G \subset \mathbb{C}[\alpha_1, \dots, \alpha_m]$  in  $\langle g_{k_1}, \dots, g_{k_s} \rangle$  korenska ideala. Potem je cikličnost centra v izhodišču preslikave (2.130) kvečjemu  $s-1$ .*

Dokaz trditve 3.3.5 lahko najdete v [111, p.8]. Za določevanje cikličnosti preslikave (2.130) jo uporabimo na naslednji način. Naj bo  $G_{k_s}$  ideal generiran s fokusnimi količinami  $g_{k_1}, \dots, g_{k_s}$ , torej  $G_{k_s} = \langle g_{k_1}, \dots, g_{k_s} \rangle$ . Poiščemo tak  $k_s$ , da velja  $V(G) = V(G_{k_s})$ , kar pomeni, da rešimo problem centra pripadajoče preslikave (2.130). Nato preverimo, če je  $G_{k_s}$  korenski. Oba pogoja implicirata, da je  $G = G_{k_s}$ . Če to drži, je cikličnost preslikave (2.130) v izhodišču kvečjemu enaka *Bautinovi globini* ideala  $G_{k_s}$  manj ena. Vidimo, da je pristop zelo podoben kot pri

zveznih sistemih, kjer smo podobna pogoja zapisali v izreku 3.2.6. Vedno obstaja število  $k_s$ , ki izpolni pogoj  $V(G) = V(G_{k_s})$ , toda drugi pogoj, da je  $G_{k_s}$  korenski, ni vedno izpolnjen. V takem primeru je primarna dekompozicija, ki jo izračunamo v SINGULARJU, sestavljena iz parov idealov, kjer v vsaj enem paru primarni ideal in njegov pridružen ideal nista enaka. Tako kot že pri zveznih sistemih si v tem primeru lahko pomagamo s trditvijo 3.2.7, da dobimo vrednost za cikličnost tistih preslikav, katerih parametri ležijo na raznoterosti korenskega dela ideala  $G_{k_s}$ .

### 3.3.2 Potrebni in zadostni pogoji za nastop centra

Zaradi samozadostnosti monografije bomo obravnavali primere **2**, **0:0:4**, **2:3**, **2:0:4**, **0:0:0:0:6**, **0:0:0:0:0:8** in **0:0:0:0:0:0:10** ter splošni sistem, kjer v enačbi  $\Psi(x, y) = 0$  dodamo homogene monome sode stopnje  $n$ . Pogoj za nastop centra  $x = f(y)$  oz.  $f(f(x)) = f(y) = x$  je ekvivalenten zrcalni simetriji glede na premico  $y = x$ , kar lahko opišemo tudi v obliki  $x \mapsto y$ ,  $y \mapsto x$ . Če se, na primer, vsota (2.139) konča s členi stopnje 4 (kot v primerih **2**, **0:0:4**, **2:3**, **2:0:4**), moramo obravnavati primere, kjer  $\Psi(x, y)$  vsebuje bodisi linearne, kvadratne ali pa kubične faktorje s simetrijo  $x \mapsto y$ ,  $y \mapsto x$  (ali pa celo  $\Psi(x, y)$  premore to simetrijo v celoti).

**Primer 2:** Primer (3.82) je prvi obravnaval in razrešil Žoladek v [127]. Centralna raznoterost (3.82) vsebuje natanko dve ireducibilni komponenti

$$\begin{aligned} (i) \quad & A - B + C = 0, \\ (ii) \quad & A - C = 0. \end{aligned}$$

Označimo

$$\begin{aligned} Z_4(A, B, C) &= 13A^2 - 32AB + 15B^2 + 26AC - 16BC - 3C^2, \\ Z_6(A, B, C) &= 150A^4 - 743A^3B + 1235A^2B^2 - 809AB^3 + 175B^4 + 684A^3C - \\ &\quad - 1985A^2BC + 1618AB^2C - 349B^3C + 616A^2C^2 - \\ &\quad - 605ABC^2 - 25B^2C^2 - 156AC^3 + 317BC^3 - 110C^4. \end{aligned}$$

Izračun fokusnih količin iz (2.140) nam da

$$\begin{aligned} g_2 &= -2(A - C)(A - B + C), \\ g_4 &= -\frac{g_2 \cdot Z_4(A, B, C)}{4}, \\ g_6 &= \frac{g_2 \cdot Z_6(A, B, C)}{8}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

kar pomeni, da sta zgornja pogoja potrebna in zadostna, saj velja  $I = \langle g_2, g_4, g_6, \dots \rangle = \langle g_2 \rangle$ .

**Primer 0:0:4:** Obravnavamo problem centra in fokusa za sisteme (2.130), ki izhajajo iz enačbe  $\Psi(x, y) = 0$  za polinome oblike

$$\Psi(x, y) = x + y + Hx^4 + Ix^3y + Jx^2y^2 + Kxy^3 + Ly^4. \quad (3.91)$$

**Izrek 3.3.6** Polinom (3.91) določa center v izhodišču natanko tedaj, ko je izpolnjen eden od spodnjih pogojev:

$$(S) \quad s_1 = s_2 = 0, \text{ kjer je } s_1 = H - L \text{ in } s_2 = I - K;$$

$$(T) \quad t_1 = 0, \text{ kjer je } t_1 = H - I + J - K + L.$$

**Dokaz.** Izračunamo prvih 12 fokusnih količin  $g_2, g_4, \dots, g_{24}$ . Izkaže se, da je samo vsaka tretja fokusna količina neničelna. Torej:  $g_2 = g_4 = g_8 = g_{10} = g_{14} = g_{16} = g_{20} = g_{22} = 0$  (t.j.  $g_{6k} \neq 0$ ). Potem reduciramo vsak neničelni polinom  $g_{6k}$  tako, da ga delimo z množico polinomov, ki jo določa Gröbnerjeva baza ideala  $G_{6(k-1)} = \langle g_6, \dots, g_{6(k-1)} \rangle$  in ostanek pri deljenju označimo z  $\tilde{g}_{6k}$  (pravimo, da smo polinom  $g_{6k}$  reducirali po modulu Gröbnerjeve baze ideala  $G_{6(k-1)}$ ). V **Singularju** za ta namen uporabimo ukaz (rutino) **reduce** (glej razdelek 1.6). Po redukciji dobimo

$$g_6 = -2(2H - I + K - 2L)(H - I + J - K + L), \quad (3.92)$$

$$\tilde{g}_{12} = -\frac{1}{4}(I - K)(I - 2J + 3K - 4L)^2(H - I + J - K + L), \quad (3.93)$$

$$\tilde{g}_{18} \equiv 0, \quad \tilde{g}_{24} \equiv 0.$$

Z ukazom **minAssGTZ** v **Singularju** izračunamo dekompozicijo raznoterosti  $V(\langle g_6, \tilde{g}_{12} \rangle)$  in dobimo pogoja **(S)** in **(T)**, kar dokazuje, da sta ta pogoja potrebna pogoja, da ima (3.91) center v izhodišču. V nadaljevanju bomo dokazali še njuno zadostnost, pri čemer bomo za polinome (3.91) uporabili uvodoma opisan simetrijski pristop.

Pogoj **(S)** očitno implicira simetrijo polinoma  $\Psi(x, y) = x + y + Hx^4 + Ix^3y + Jx^2y^2 + Ixy^3 + Hy^4$ , zato enačba  $\Psi(x, y) = 0$  predstavlja centre (za vse vrednosti ustreznih parametrov  $H, I, J$ ).

Nadalje preverimo simetrije polinoma  $\Psi(x, y)$ . Simetrijo dobimo iz enačbe

$$(x + y)(1 + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3) = \Psi(x, y).$$

Ko enačimo koeficiente istoležnih monomov na levi in desni strani zgornje enačbe in eliminiramo spremenljivke  $a_{10}, a_{01}, a_{20}, a_{11}, a_{02}, a_{30}, a_{21}, a_{12}, a_{03}$ , dobimo natanko pogoj **(T)**. Če velja pogoj **(T)**, ima enačba  $\Psi(x, y) = 0$  rešitev  $x = -y$ , kar porodi center v izhodišču.

■

**Primer 2:3:** Primer (3.84) je bil obravnavan v [111]. Centralna raznoterost polinoma (3.84) je sestavljena iz treh ireducibilnih komponent.

$$(S) \begin{cases} A - B + C = 0, \\ D - E + F - G = 0. \end{cases} \quad (H) \begin{cases} A - C = 0, \\ D - G = 0, \\ E - F = 0. \end{cases}$$

in

$$(T) \begin{cases} 0 = D^2 - DF + EG - G^2, \\ 0 = -C^2D + C^2E - BCF + C^2F + F^2 + B^2G - BCG - \\ \quad - C^2G + 4DG - 4EG - 2FG + 5G^2, \\ 0 = -2CDE + BDF + CDF + CEF - AF^2 - 3BDG + 3CDG + \\ \quad + 4AEG - 2BEG - CEG + BFG - 2CFG - 3AG^2 + 3BG^2, \\ 0 = 2AD - BD - CD + CE - AF + AG + BG - 2CG, \\ 0 = -BCD + C^2D + C^2E - ACF + 2DF + 2ABG - ACG - \\ \quad - BCG - 2DG - 4EG + 2FG + 2G^2, \\ 0 = -2B^2D + 5BCD - C^2D - 4ACE + 2BCE - C^2E + 8DE + \\ \quad + 2ABF - ACF - 2BCF + 2C^2F - 6DF - 4EF + 2F^2 + \\ \quad + 3ACG - 3BCG + 2C^2G - 10DG + 8EG + 2FG - 8G^2, \\ 0 = A^2 - AB + BC - C^2 - D + E - F + G. \end{cases}$$

Da bi našli minimalno bazo ideala, generiranega s fokusnimi količinami, izračunamo prvih 5 fokusnih količin  $g_2, g_4, g_6, g_8, g_{10}$ . Potem vsak polinom  $g_{2k}$  reduciramo po Gröbnerjevi bazi ideala  $\langle g_2, \dots, g_{2(k-1)} \rangle$ . Po redukciji dobimo

$$\begin{aligned} g_2 &= -2(A^2 - AB + BC - C^2 - D + E - F + G), \\ \tilde{g}_4 &= -2(ABD - B^2D - ACD + 2BCD - C^2D - 2D^2 - ACE + BCE - C^2E \\ &\quad + 2DE + ACF - BCF + C^2F - DF - EF + F^2 - ABG + B^2G + ACG \\ &\quad - 2BCG + C^2G + DG + EG - 2FG + G^2), \\ \tilde{g}_6 &= BCD^2 - 3C^2D^2 + 2D^3 - BCDE + 4C^2DE - 2D^2E - C^2E^2 + ACDF \\ &\quad - BCDF - C^2DF - 2D^2F - ACEF + 2BCEF - C^2EF + 4DEF + ACF^2 \\ &\quad - 2BCF^2 + 2C^2F^2 - 2DF^2 - 2EF^2 + 2F^3 - ACDG + 2BCDG - C^2DG \\ &\quad + 4D^2G + 2ABEG - 2B^2EG - 3ACEG + 3BCEG - C^2EG - 8DEG \\ &\quad + 2E^2G - 2ABFG + 2B^2FG + 2ACFG - BCFG - 2C^2FG + 6DFG + 2EFG \\ &\quad - 6F^2G + ACG^2 - 3BCG^2 + 4C^2G^2 - 2DG^2 - 2EG^2 + 8FG^2 - 4G^3 \end{aligned}$$

in  $\tilde{g}_8 \equiv 0, \tilde{g}_{10} \equiv 0$ .

**Primer 2:0:4:** V tem primeru iščemo centre polinoma (3.85).

**Izrek 3.3.7** Polinom (3.85) določa center v izhodišču natanko tedaj, ko je izpolnjen eden od spodnjih pogojev:

$$(M) \quad m_1 = m_2 = m_3 = 0, \text{ kjer je } m_1 = A - C, m_2 = D - H, m_3 = E - G,$$

$$(N) \quad n_1 = n_2 = 0, \text{ kjer je } n_1 = D - E + F - G + H, n_2 = A - B + C.$$

**Dokaz.** Izračunamo prvih sedem fokusnih količin  $g_2, g_4, \dots, g_{14}$ . Potem vsak polinom  $g_{2k}$  reduciramo po modulu Gröbnerjeve baze ideala  $\langle g_2, \dots, g_{2(k-1)} \rangle$  in z  $\tilde{g}_{2k}$  označimo ostanek pri

deljenju polinoma  $g_{2k}$  z Gröbnerjevo bazo ideala  $\langle g_2, \dots, g_{2(k-1)} \rangle$ . Po redukciji dobimo

$$\begin{aligned}
g_2 &= -2(A - C)(A - B + C), \\
\tilde{g}_4 &= \frac{1}{2}(13A^4 + 15B^3C - 31B^2C^2 + A^3(-45B + 26C) + A^2(47B^2 - 29BC - 16C^2) \\
&\quad + B(13C^3 + 8D - 4E + 4G - 8H) - A(15B^3 + 16B^2C - 61BC^2 + 26C^3 + 12D \\
&\quad - 8E + 4F - 4H) + C(3C^3 - 4D + 4F - 8G + 12H)), \\
\tilde{g}_6 &= -2(-4C^3(2D - 2E + F) + B^3(D - E + G - H) + (2D - E + G - 2H) \\
&\quad (D - E + F - G + H) + 4AC^2(F - 2G + 2H) + 4BC(C(3D - 3E + F + G - H) \\
&\quad - A(F - 2G + 2H)) + B^2(-C(6D - 6E + F + 4G - 4H) + A(F - 2G + 2H))), \\
\tilde{g}_8 &= -(B - 2C)(3B(E - G) + 2C(4D - 5E + 5G - 4H))(D - E + F - G + H), \\
\tilde{g}_{10} &= -\frac{1}{2}(B - 2C)(-3E^3 + 20F^2G - 65FG^2 + 45G^3 - 28F^2H + 192FGH - 189G^2H \\
&\quad - 148FH^2 + 264GH^2 - 120H^3 + 4D^2(7F - 18G + 30H) + E^2(23F - 45G + 75H) \\
&\quad + E(-20F^2 + 42FG + 3G^2 - 64FH - 30GH + 48H^2) + D(3E^2 + 28F^2 - 80FG \\
&\quad + 27G^2 + 120FH - 48GH - 6E(8F - 19G + 32H))), \\
\tilde{g}_{12} &= -\frac{1}{4}(E - G)(E - 2F + 3G - 4H)^2(D - E + F - G + H), \\
\tilde{g}_{14} &\equiv 0.
\end{aligned}$$

Nato izračunamo dekompozicijo raznoterosti  $V(\langle g_2, \tilde{g}_4, \tilde{g}_6, \tilde{g}_8, \tilde{g}_{10} \rangle)$  in dobimo pogoja **(M)** in **(N)**, ki sta potrebna pogoja za nastop centra v izhodišču. Pokažimo, da sta tudi zadostna.

Pogoj **(M)** očitno implicira zrcalno simetrijo  $\Psi(x, y) = x + y + Ax^2 + Bxy + Ay^2 + Dx^4 + Ex^3y + Fx^2y^2 + Exy^3 + Dw^4$ , zato enačba  $\Psi(x, y) = 0$  predstavlja centre.

Sedaj pogledajmo faktorizacijo

$$\Psi(x, y) = (x + y)(1 + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3). \quad (3.94)$$

Po enačenju istoležnih koeficientov na levi in desni strani enačbe (3.94) dobimo naslednji sistem enačb

$$\begin{aligned}
a_{02} &= 0, -a_{02} - a_{11} = 0, -a_{11} - a_{20} = 0, \\
a_{20} &= 0, -a_{10} + A = 0, -a_{01} - a_{10} + B = 0, \\
-a_{01} + C &= 0, -a_{30} + D = 0, -a_{21} - a_{30} + E = 0, \\
-a_{12} - a_{21} + F &= 0, -a_{03} - a_{12} + G = 0, -a_{03} + H = 0
\end{aligned}$$

z neznankami  $a_{10}, a_{01}, a_{20}, a_{11}, a_{02}, a_{30}, a_{21}, a_{12}, a_{03}, A, B, C, D, E, F, G, H$ . Eliminacija spremenljivk  $a_{10}, a_{01}, a_{20}, a_{11}, a_{02}, a_{30}, a_{21}, a_{12}, a_{03}$  da pogoj **(N)**. Kot vidimo, pogoj **(N)** implicira rešitev  $x + y = 0$  z zahtevano zrcalno simetrijo v izhodišču, kar zaključuje dokaz. ■

**Primer 0:0:0:0:6:** V nadaljevanju obravnavamo homogene enačbe

$$x + y + \sum_{j=0}^n \alpha_{n-j,j} x^{n-j} y^j = 0 \quad (3.95)$$



za različne sode vrednosti parametra  $n$ . Sedaj, na primer s  $\Psi_6(x, y)$  označimo polinom nelinearnih členov v (3.95) za  $n = 6$ . Torej

$$\Psi_6(x, y) = A_{6,0}x^6 + A_{5,1}x^5y + A_{4,2}x^4y^2 + A_{3,3}x^3y^3 + A_{2,4}x^2y^4 + A_{1,5}xy^5 + A_{0,6}y^6$$

in (3.95) se poenostavi na obliko

$$x + y + \Psi_6(x, y) = 0. \quad (3.96)$$

Naj bo  $A = (A_{6,0}, \dots, A_{0,6})$  in z  $\mathbf{A}$  označimo prostor parametrov, ki pripada enačbi (3.96). Za preslikavo (2.130) lahko formuliramo naslednji izrek.

**Izrek 3.3.8** *Polinom  $\Psi_6$  iz enačbe (3.96) določa center v izhodišču natanko tedaj, ko je izpolnjen eden od spodnjih pogojev:*

$$(S_6) \quad A_{6,0} - A_{0,6} = A_{5,1} - A_{1,5} = A_{4,2} - A_{2,4} = 0;$$

$$(T_6) \quad A_{6,0} - A_{5,1} + A_{4,2} - A_{3,3} + A_{2,4} - A_{1,5} + A_{0,6} = 0.$$

**Dokaz.** Izračunamo prvih sedem neničelnih fokusnih količin. Izkaže se, da je komaj vsaka peta fokusna količina neničelna; torej  $g_{10k} \neq 0$ . Potem reduciramo vsak neničelni polinom  $g_{10k}$  po modulu Gröbner-jeve baze ideala  $\langle g_{10}, \dots, g_{10(k-1)} \rangle$  in z  $\tilde{g}_{10k}$  označimo pripadajoči ostanek pri deljenju (temu ostanku pravimo tudi reducirana fokusna količina). Po redukciji dobimo

$$\begin{aligned} g_{10} &= -2(A_{0,6} - A_{1,5} + A_{2,4} - A_{3,3} + A_{4,2} - A_{5,1} + A_{6,0})(-3A_{0,6} + 2A_{1,5} - A_{2,4} \\ &\quad + A_{4,2} - 2A_{5,1} + 3A_{6,0}); \\ \tilde{g}_{20} &= (A_{0,6} - A_{1,5} + A_{2,4} - A_{3,3} + A_{4,2} - A_{5,1} + A_{6,0})(5A_{1,5} - 4A_{2,4} + 4A_{4,2} - 5A_{5,1}) \\ &\quad (-6A_{0,6} + 5A_{1,5} - 4A_{2,4} + 3A_{3,3} - 2A_{4,2} + A_{5,1})^2; \\ \tilde{g}_{30} &= -(A_{0,6} - A_{1,5} + A_{2,4} - A_{3,3} + A_{4,2} - A_{5,1} + A_{6,0})(A_{2,4} - A_{4,2}) \\ &\quad (10A_{0,6} - 10A_{1,5} + 8A_{2,4} - 5A_{3,3} + 2A_{4,2})^3(4330A_{0,6} - 5030A_{1,5} + 4304A_{2,4} \\ &\quad - 2795A_{3,3} + 1146A_{4,2})(-6A_{0,6} + 5A_{1,5} - 4A_{2,4} + 3A_{3,3} - 2A_{4,2} + A_{5,1})^2; \\ \tilde{g}_{40} &\equiv 0; \\ \tilde{g}_{50} &\equiv 0. \end{aligned}$$

Izračunamo dekompozicijo raznoterosti  $V(\langle g_{10}, \tilde{g}_{20}, \tilde{g}_{30} \rangle)$  in dobimo pogoje  $(S_6)$  in  $(T_6)$  izreka 3.3.8. Zato so pogoji  $(S_6)$  in  $(T_6)$  potrebni za nastop centra pri sistemih, ki izhajajo iz polinoma  $\Psi_6$ .

Pogoj centra  $f^2(x) = x$  je ekvivalenten zrcalni simetriji glede na premico  $y = x$  (oz.  $y \rightarrow x$ ,  $x \rightarrow y$ ). Zato je za dokaz zadostnosti treba dokazati, da enačba (3.96) (in s tem  $\Psi_6$ ) premore to simetrijo (v vsaj enem faktorju).

Pogoj  $(S_6)$  očitno porodi trivialno (glede na celotni izraz) zrcalno simetrijo polinoma  $x + y + \Psi_6(x, y)$ , posledično enačba (3.96) porodi center.

Sedaj obravnavamo enačbo

$$x + y + \Psi_6(x, y) = (x + y)\left(1 + \sum_{i+j=1}^5 c_{ij}x^i y^j\right).$$

Po enačenju istoležnih koeficientov na levi in na desni strani enačbe in po eliminaciji spremenljivk  $c_{ij}$  dobimo pogoj  $(T_6)$ , kar dokazuje, da  $(T_6)$  vsebuje člen  $x + y = 0$ , ki porodi center v izhodišču. ■

**Primer 0:0:0:0:0:0:8:** Obravnavamo primer (3.95) za  $n = 8$ . V ta namen definiramo

$$\Psi_8(x, y) = \sum_{j=0}^8 A_{8-j,j} x^{8-j} y^j$$

in enačba (3.95) dobi obliko

$$x + y + \Psi_8(x, y) = 0. \quad (3.97)$$

Podobno, kot v prejšnjem primeru naj bo  $A = (A_{8,0}, \dots, A_{0,8})$  in naj  $\mathbf{A}$  označuje prostor parametrov, ki pripada enačbi (3.97).

**Izrek 3.3.9** *Polinom  $\Psi_8$  v (3.97) določa center v izhodišču nataka tedaj, ko je izpolnjen eden od pogojev:*

$$(S_8) \quad A_{8,0} - A_{0,8} = A_{7,1} - A_{1,7} = A_{6,2} - A_{2,6} = A_{5,3} - A_{3,5} = 0;$$

$$(T_8) \quad A_{8,0} - A_{7,1} + A_{6,2} - A_{5,3} + A_{4,4} - A_{3,5} + A_{2,6} - A_{1,7} + A_{0,8} = 0.$$

**Dokaz.** Dokaz je podoben dokazu izreka 3.3.8. Izračunamo prvih nekaj fokusnih količin. Izkaže se, da je vsaka sedma fokusna količina neničelna; t. j.  $g_{14k} \neq 0$ . Potem reduciramo neničelne polinome  $g_{14k}$  po modulu Gröbnerjeve baze ideala  $\langle g_{14}, \dots, g_{14(k-1)} \rangle$  iz z  $\tilde{g}_{14k}$  označimo pripadajoči ostanek. Po redukciji dobimo

$$\begin{aligned} g_{14} &= -2(A_{0,8} - A_{1,7} + A_{2,6} - A_{3,5} + A_{4,4} - A_{5,3} + A_{6,2} - A_{7,1} + A_{8,0}) \\ &\quad (-4A_{0,8} + 3A_{1,7} - 2A_{2,6} + A_{3,5} - A_{5,3} + 2A_{6,2} - 3A_{7,1} + 4A_{8,0}); \\ \tilde{g}_{28} &= (A_{0,8} - A_{1,7} + A_{2,6} - A_{3,5} + A_{4,4} - A_{5,3} + A_{6,2} - A_{7,1} + A_{8,0}) \\ &\quad (-7A_{1,7} + 8A_{2,6} - 5A_{3,5} + 5A_{5,3} - 8A_{6,2} + 7A_{7,1}) \\ &\quad (-8A_{0,8} + 7A_{1,7} - 6A_{2,6} + 5A_{3,5} - 4A_{4,4} + 3A_{5,3} - 2A_{6,2} + A_{7,1})^2; \\ \tilde{g}_{42} &= (A_{0,8} - A_{1,7} + A_{2,6} - A_{3,5} + A_{4,4} - A_{5,3} + A_{6,2} - A_{7,1} + A_{8,0}) \\ &\quad (-A_{2,6} + A_{3,5} - A_{5,3} + A_{6,2})(28A_{0,8} - 28A_{1,7} + 25A_{2,6} - 20A_{3,5} + \\ &\quad + 14A_{4,4} - 8A_{5,3} + 3A_{6,2})^2(-8A_{0,8} + 7A_{1,7} - 6A_{2,6} + 5A_{3,5} - 4A_{4,4} + \\ &\quad + 3A_{5,3} - 2A_{6,2} + A_{7,1})^2; \\ \tilde{g}_{56} &= (A_{0,8} - A_{1,7} + A_{2,6} - A_{3,5} + A_{4,4} - A_{5,3} + A_{6,2} - A_{7,1} + A_{8,0}) \\ &\quad (-8A_{0,8} + 7A_{1,7} - 6A_{2,6} + 5A_{3,5} - 4A_{4,4} + 3A_{5,3} - 2A_{6,2} + A_{7,1})^2 \\ &\quad (-28A_{0,8} + 28A_{1,7} - 28A_{2,6} + 23A_{3,5} - 14A_{4,4} + 5A_{5,3})^2(A_{5,3} - A_{3,5}) \\ &\quad (28A_{0,8} - 28A_{1,7} + 25A_{2,6} - 20A_{3,5} + 14A_{4,4} - 8A_{5,3} + 3A_{6,2})^2; \\ \tilde{g}_{70} &\equiv 0; \\ \tilde{g}_{84} &\equiv 0. \end{aligned}$$

Izračunamo dekompozicijo raznoterosti  $V(\langle g_{14}, \tilde{g}_{28}, \tilde{g}_{42}, \tilde{g}_{56} \rangle)$  in dobimo pogoje  $(S_8)$  in  $(T_8)$ . Nato uporabimo simetrijski pristop. Pogoji  $(S_8)$  očitno implicirajo trivialno (celotno) zrcalno simetrijo polinoma  $x + y + \Psi_8(x, y)$ , zato (3.97) porodi center.

Da so tudi pogoji  $(T_8)$  zadostni, je razvidno iz simetrije oblike

$$x + y + \Psi_8(x, y) = (x + y) \left( 1 + \sum_{i+j=1}^7 c_{ij} x^i y^j \right).$$

Po enačenju istoležnih koeficientov na obeh straneh zgornje enačbe in po eliminaciji spremenljivk  $c_{ij}$  sledi pogoj  $(T_8)$ , kar pomeni, da ima  $(T_8)$  simetrijo  $x + y = 0$ , kar dokazuje, da pod tem pogojem (3.97) porodi center. ■

**Primer 0:0:0:0:0:0:0:10:** Obravnavamo enačbo (3.95) za  $n = 10$ . V ta namen definiramo

$$\Psi_{10}(x, y) = \sum_{j=0}^{10} A_{10-j,j} x^{10-j} y^j$$

in preoblikujemo (3.95) na obliko

$$x + y + \Psi_{10}(x, y) = 0. \quad (3.98)$$

Z  $A = (A_{10,0}, \dots, A_{0,10})$  označimo elemente prostora  $\mathbf{A}$  parametrov enačbe (3.98).

**Izrek 3.3.10** *Polinom  $\Psi_{10}$  v (3.98) določa center v izhodišču natanko tedaj, ko je izpolnjen eden od spodnjih pogojev:*

$$(S_{10}) \quad A_{10,0} - A_{0,10} = A_{9,1} - A_{1,9} = A_{8,2} - A_{2,8} = A_{7,3} - A_{3,7} = A_{6,4} - A_{4,6} = 0;$$

$$(T_{10}) \quad A_{10,0} - A_{9,1} + A_{8,2} - A_{7,3} + A_{6,4} - A_{5,5} + A_{4,6} - A_{3,7} + A_{2,8} - A_{1,9} + A_{0,10} = 0.$$

**Dokaz.** Izračuni fokusnih količin kažejo, da je vsaka deveta količina neničelna; t. j.  $g_{18k} \neq 0$ . Po redukciji neničelnih fokusnih količin  $g_{18k}$  po modulu Gröbnerjeve baze ideala  $\langle g_{18}, \dots, g_{18(k-1)} \rangle$  dobimo  $g_{18} \neq 0$ ,  $g_{36} \neq 0$ ,  $g_{54} \neq 0$ ,  $g_{72} \neq 0$ ,  $g_{90} \neq 0$  in  $\tilde{g}_{108} \equiv 0$ , kjer z  $\tilde{g}_{18k}$  označimo ostanek pri deljenju (po redukciji). Polinomi  $g_{36}$ ,  $g_{54}$ ,  $g_{72}$ ,  $g_{90}$ ,  $g_{108}$  so zelo dolgi, zato jih ne bomo izpisali. Enostavno lahko preverimo, da je

$$\begin{aligned} g_{18} &= (Fg_{18,1})(Fg_{18,2}), \\ \tilde{g}_{36} &= (F\tilde{g}_{36,1})(F\tilde{g}_{36,2})^2, \\ \tilde{g}_{54} &= (F\tilde{g}_{54,1})(F\tilde{g}_{54,2})^2(F\tilde{g}_{54,3})^2, \\ \tilde{g}_{72} &= (F\tilde{g}_{72,1})(F\tilde{g}_{72,2})^2(F\tilde{g}_{72,3})^2(F\tilde{g}_{72,4})^2, \\ \tilde{g}_{90} &= (A_{6,4} - A_{4,6})(F\tilde{g}_{90,2})^2(F\tilde{g}_{90,3})^2(F\tilde{g}_{90,4})^2(F\tilde{g}_{90,5})^2, \end{aligned}$$

kjer je

$$\begin{aligned} Fg_{18,1} &= -2(-A_{10,0} + A_{9,1} - A_{8,2} + A_{7,3} - A_{6,4} + A_{5,5} - A_{4,6} + A_{3,7} - A_{2,8} + A_{1,9} - A_{0,10}), \\ Fg_{18,2} &= -5A_{10,0} + 4A_{9,1} - 3A_{8,2} + 2A_{7,3} - A_{6,4} + A_{5,5} - 2A_{4,6} + 3A_{3,7} - 4A_{2,8} + 5A_{0,10}, \\ F\tilde{g}_{36,1} &= 6A_{9,1} - 8A_{8,2} + 7A_{7,3} - 4A_{6,4} + 4A_{6,4} - 7A_{3,7} + 8A_{8,2} - 6A_{1,9}, \\ F\tilde{g}_{36,2} &= A_{9,1} - 2A_{8,2} + 3A_{7,3} - 4A_{6,4} + 5A_{5,5} - 6A_{4,6} + 7A_{3,7} - 8A_{2,8} + 9A_{1,9} - 10A_{0,10}, \\ F\tilde{g}_{54,1} &= 14A_{8,2} - 21A_{7,3} + 15A_{6,4} - 15A_{4,6} + 21A_{3,7} - 14A_{2,8}, \\ F\tilde{g}_{54,2} &= A_{9,1} - 2A_{8,2} + 3A_{7,3} - 4A_{6,4} + 5A_{5,5} - 6A_{4,6} + 7A_{3,7} - 8A_{2,8} + 9A_{1,9} - 10A_{0,10}, \\ F\tilde{g}_{54,3} &= 4A_{8,2} - 11A_{7,3} + 20A_{6,4} - 30A_{5,5} + 40A_{4,6} - 49A_{3,7} + 56A_{2,8} - 60A_{1,9} + 60A_{0,10}, \\ F\tilde{g}_{72,1} &= 7A_{7,3} - 8A_{6,4} + 8A_{4,6} - 7A_{3,7}, \\ F\tilde{g}_{72,2} &= 7A_{7,3} - 22A_{6,4} + 42A_{5,5} - 62A_{4,6} + 77A_{3,7} - 84A_{2,8} + 84A_{1,9} - 84A_{0,10}, \\ F\tilde{g}_{72,3} &= A_{9,1} - 2A_{8,2} + 3A_{7,3} - 4A_{6,4} + 5A_{5,5} - 6A_{4,6} + 7A_{3,7} - 8A_{2,8} + 9A_{1,9} - 10A_{0,10}, \\ F\tilde{g}_{72,4} &= 4A_{8,2} - 11A_{7,3} + 20A_{6,4} - 30A_{5,5} + 40A_{4,6} - 49A_{3,7} + 56A_{2,8} - 60A_{1,9} + 60A_{0,10}, \\ F\tilde{g}_{90,2} &= 7A_{7,3} - 22A_{6,4} + 42A_{5,5} - 62A_{4,6} + 77A_{3,7} - 84A_{2,8} + 84A_{1,9} - 84A_{0,10}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F\tilde{g}_{90,3} &= A_{9,1} - 2A_{8,2} + 3A_{7,3} - 4A_{6,4} + 5A_{5,5} - 6A_{4,6} + 7A_{3,7} - 8A_{2,8} + 9A_{1,9} - 10A_{0,10}, \\
F\tilde{g}_{90,4} &= A_{6,4} - 3A_{5,5} + 5A_{4,6} - 6A_{3,7} + 6A_{2,8} - 6A_{1,9} + 6A_{0,10}, \\
F\tilde{g}_{90,5} &= 4A_{8,2} - 11A_{7,3} + 20A_{6,4} - 30A_{5,5} + 40A_{4,6} - 49A_{3,7} + 56A_{2,8} - 60A_{1,9} + 60A_{0,10}
\end{aligned}$$

in

$$\tilde{g}_{108} \equiv 0.$$

Ko izračunamo ireducibilno dekompozicijo raznoterosti  $V(\langle g_{18}, \tilde{g}_{36}, \tilde{g}_{54}, \tilde{g}_{73}, \tilde{g}_{90} \rangle)$ , dobimo pogoje v  $(S_{10})$  in  $(T_{10})$ . Pogoji  $(S_{10})$  vodijo do zrcalne simetrije polinoma  $x + y + \Psi_{10}(x, y)$  v celoti, pogoj  $(T_{10})$  pa vodi do simetrije tipa

$$x + y + \Psi_{10}(x, y) = (x + y)\left(1 + \sum_{i+j=1}^9 c_{ij}x^i y^j\right),$$

kar zaključimo dokaz. ■

**Primer**  $n = 2\ell$  V [92] je za ta primer postavljena domneva, v kateri predvidimo pogoje centra. Domnevo dobimo po analogiji glede na primere  $n = 2, 4, 6, 8$  in  $10$ . Torej, obravnavajmo primer (3.95) za  $n = 2\ell$  in zapišimo

$$\Psi_{2\ell}(x, y) = \sum_{j=0}^{2\ell} A_{2\ell-j,j} x^{2\ell-j} y^j,$$

da (3.95) dobi splošno obliko

$$x + y + \Psi_{2\ell}(x, y) = 0. \quad (3.99)$$

Naj bo spet  $A = (A_{2\ell,0}, \dots, A_{0,2\ell})$  in naj bo  $\mathbf{A}$  prostor parametrov, ki pripadajo enačbi (3.99). Če privzamemo, da imajo pripadajoče fokusne količine  $g_{k(4\ell-2)}$  ter ostanki  $\tilde{g}_{k(4\ell-2)}$ , ki jih dobimo z redukcijo polinomov  $g_{k(4\ell-2)}$  po modulu Gröbner-jevih baz idealov  $\langle g_{4\ell-2}, \dots, g_{(k-1)(4\ell-2)} \rangle$ ,

obliko

$$\begin{aligned}
g_{4\ell-2} &= -2 \left( \sum_{j=0}^{2\ell} (-1)^j A_{2\ell-j,j} \right) \left( \sum_{j=0}^{\ell-1} (-1)^j \alpha_j^{(1)} (A_{2\ell-j,j} - A_{j,2\ell-j}) \right) \\
\tilde{g}_{2(4\ell-2)} &= \left( \sum_{j=0}^{2\ell} (-1)^j A_{2\ell-j,j} \right) \left( \sum_{j=1}^{\ell-1} (-1)^j \alpha_j^{(2)} (A_{2\ell-j,j} - A_{j,2\ell-j}) \right) \left( \sum_{j=1}^{2\ell} (-1)^{j-1} j A_{2\ell-j,j} \right)^2 \\
\tilde{g}_{3(4\ell-2)} &= \left( \sum_{j=0}^{2\ell} (-1)^j A_{2\ell-j,j} \right) \left( \sum_{j=2}^{\ell-1} (-1)^j \alpha_j^{(3)} (A_{2\ell-j,j} - A_{j,2\ell-j}) \right) \left( \sum_{j=1}^{2\ell} (-1)^{j-1} j A_{2\ell-j,j} \right)^2 \\
&\quad P_1(A_{2\ell-2,2}, \dots, A_{0,2\ell}) \\
\tilde{g}_{4(4\ell-2)} &= \left( \sum_{j=0}^{2\ell} (-1)^j A_{2\ell-j,j} \right) \left( \sum_{j=3}^{\ell-1} (-1)^j \alpha_j^{(4)} (A_{2\ell-j,j} - A_{j,2\ell-j}) \right) \left( \sum_{j=1}^{2\ell} (-1)^{j-1} j A_{2\ell-j,j} \right)^2 \\
&\quad P_1(A_{2\ell-2,2}, \dots, A_{0,2\ell}) P_2(A_{2\ell-3,3}, \dots, A_{0,2\ell}) \\
\tilde{g}_{5(4\ell-2)} &= \left( \sum_{j=0}^{2\ell} (-1)^j A_{2\ell-j,j} \right) \left( \sum_{j=4}^{\ell-1} (-1)^j \alpha_j^{(5)} (A_{2\ell-j,j} - A_{j,2\ell-j}) \right) \left( \sum_{j=1}^{2\ell} (-1)^{j-1} j A_{2\ell-j,j} \right)^2 \\
&\quad P_1(A_{2\ell-2,2}, \dots, A_{0,2\ell}) P_2(A_{2\ell-3,3}, \dots, A_{0,2\ell}) P_3(A_{2\ell-4,4}, \dots, A_{0,2\ell}) \\
&\quad \vdots \\
\tilde{g}_{\ell(4\ell-2)} &= \left( \sum_{j=0}^{2\ell} (-1)^j A_{2\ell-j,j} \right) \left( \sum_{j=\ell-1}^{\ell-1} (-1)^j \alpha_j^{(\ell)} (A_{2\ell-j,j} - A_{j,2\ell-j}) \right) \left( \sum_{j=1}^{2\ell} (-1)^{j-1} j A_{2\ell-j,j} \right)^2 \\
&\quad P_1(A_{2\ell-2,2}, \dots, A_{0,2\ell}) P_2(A_{2\ell-3,3}, \dots, A_{0,2\ell}) \cdots P_{\ell-2}(A_{\ell+1,\ell-1}, \dots, A_{0,2\ell}),
\end{aligned}$$

kjer so  $P_i$  za  $i = 1, \dots, \ell-1$  polinomi in  $\alpha_j^i \in \mathbb{R}^+$ , dobimo domnevi, ki sta podani v nadaljevanju. Pri teh privzetkih ima  $k$ -ta reducirana fokusna količina obliko:

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{k(4\ell-2)} &= \left( \sum_{j=0}^{2\ell} (-1)^j A_{2\ell-j,j} \right) \left( \sum_{j=k-1}^{\ell-1} (-1)^j \alpha_j^{(k)} (A_{2\ell-j,j} - A_{j,2\ell-j}) \right) \left( \sum_{j=1}^{2\ell} (-1)^{j-1} j A_{2\ell-j,j} \right)^2 \\
&\quad P_1(A_{2\ell-2,2}, \dots, A_{0,2\ell}) P_2(A_{2\ell-3,3}, \dots, A_{0,2\ell}) \cdots P_{k-2}(A_{2\ell-k+1,k-1}, \dots, A_{0,2\ell}),
\end{aligned}$$

za  $k \in \{2, \dots, \ell\}$  in

$$\tilde{g}_{k(4\ell-2)} \equiv 0,$$

za  $k > \ell$ .

Potrebni pogoji, pri katerih ima (3.99) center v izhodišču sledijo iz raznoterosti, ki pripada idealu  $I_{2\ell} = \langle g_{4\ell-2}, \dots, g_{\ell(4\ell-2)} \rangle$  (iščemo skupne ničle vseh (reduciranih) fokusnih količin v  $\mathbb{R}^{2\ell+1}$ ).

Pri zgornjih privzetkih vsaka (reducirana) fokusna količina vsebuje polinom  $\sum_{j=0}^{2\ell} (-1)^j A_{2\ell-j,j}$ , zato je prvi potrební pogoj, da ima (3.99) center v izhodišču

$$\sum_{j=0}^{2\ell} (-1)^j A_{2\ell-j,j} = 0. \quad (3.100)$$

Dodatni pogoji sledijo iz drugega faktorja  $\sum_{j=k-1}^{\ell-1} (-1)^j \alpha_k^{(\ell)} (A_{2\ell-j,j} - A_{j,2\ell-j})$  (privzete) oblike fokusnih količin  $g_k(4\ell-2)$ . Ker  $\ell$ -ta fokusna količina (kot faktor) vsebuje polinom

$$\sum_{j=\ell-1} (-1)^j \alpha_j^{(\ell)} (A_{2\ell-j,j} - A_{j,2\ell-j}) = (-1)^{\ell-1} \alpha_{\ell-1}^{(\ell)} (A_{\ell+1,\ell-1} - A_{\ell-1,\ell+1}),$$

dobimo pogoje

$$A_{\ell+1,\ell-1} = A_{\ell-1,\ell+1}. \quad (3.101)$$

Namreč, induktivno,  $(\ell - 1)$ -ta fokusna količina vsebuje polinom

$$\begin{aligned} & \sum_{j=\ell-2}^{\ell-2} (-1)^j \alpha_j^{(\ell)} (A_{2\ell-j,j} - A_{j,2\ell-j}) \\ &= (-1)^{\ell-2} \alpha_{\ell-2}^{(\ell-1)} (A_{\ell+2,\ell-2} - A_{\ell-2,\ell+2}) + (-1)^{\ell-1} \alpha_{\ell-1}^{(\ell-1)} (A_{\ell+1,\ell-1} - A_{\ell-1,\ell+1}), \end{aligned}$$

ki po upoštevanju pogoja (3.101) in enačenju z nič vodi do enačbe

$$A_{\ell+2,\ell-2} = A_{\ell-2,\ell+2}. \quad (3.102)$$

Če s takim induktivnim sklepanjem nadaljujemo, iz  $(\ell - 2)$ -te fokusne količine, upoštevajoč (3.101) in (3.102) ter vse pogoje, dobljene na prejšnjih korakih tega postopka, dobimo iz druge fokusne količine pogoj

$$A_{2\ell-1,1} = A_{1,2\ell-1}$$

in končno iz prve fokusne količine sledi pogoj

$$A_{2\ell,0} = A_{0,2\ell}.$$

Torej drugi sklop pogojev za nastop centra preslikave (3.99) je

$$A_{2\ell-j,j} = A_{j,2\ell-j}, \quad j = 0, 1, \dots, \ell - 1. \quad (3.103)$$

Pri dokazu, da sta oba pogoja (3.100) in (3.103) tudi potrebna, spet uporabimo simetrijski pristop. Očitno pogoj (3.103) implicira (trivialno) zrcalno simetrijo polinoma  $x + y + \Psi_{2\ell}(x, y)$  v celoti, kar pomeni, da (3.99) porodi center. Pogoje (3.103) pa dobimo iz naslednje faktorizacije

$$x + y + \Psi_{2\ell}(x, y) = (x + y) \left( 1 + \sum_{j=0}^{2\ell-1} c_{2\ell-1-j,j} x^{2\ell-1-j} y^j \right).$$

Če v zgornji enačbi enačimo istoležne koeficiente na obeh straneh enačbe, dobimo naslednji sistem:

$$\begin{aligned} x^{2\ell} &: & c_{2\ell-1,0} &= A_{2\ell,0} \\ x^{2\ell-1}y &: & c_{2\ell-1,0} + c_{2\ell-2,1} &= A_{2\ell-1,1} \\ x^{2\ell-2}y^2 &: & c_{2\ell-2,1} + c_{2\ell-3,2} &= A_{2\ell-2,2} \\ & & \vdots & \\ x^2y^{2\ell-2} &: & c_{1,2\ell-3} + c_{2,2\ell-2} &= A_{2,2\ell-2} \\ xy^{2\ell-1} &: & c_{1,2\ell-2} + c_{0,2\ell-1} &= A_{1,2\ell-1} \\ y^{2\ell} &: & c_{0,2\ell-1} &= A_{0,2\ell}. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Če vsako drugo enačbo v sistemu (3.104) pomnožimo z  $-1$  in vse enačbe seštejemo, dobimo

$$A_{2\ell,0} - A_{2\ell-1,1} + A_{2\ell-2,2} - \cdots + A_{0,2\ell} = 0,$$

kar je natanko pogoj (3.100).

Na podlagi zgoraj naštetih ugotovitev (in privzetkov) lahko zapišemo naslednjo domnevo.

**Domneva 3.3.11** *Polinom  $\Psi_{2\ell}$  v enačbi (3.99) določa center v izhodišču natanko tedaj, ko je izpolnjen eden od pogojev:*

$$(S_{2\ell}) \quad A_{2\ell-j,j} = A_{j,2\ell-j}, \quad j = 0, 1, \dots, \ell - 1;$$

$$(T_{2\ell}) \quad \sum_{j=0}^{2\ell} (-1)^j A_{2\ell-j,j} = 0.$$

### 3.3.3 Cikličnost centra

V tem razdelku obravnavamo cikličnost (posameznih komponent) centralne raznoterosti v primerih, za katere je centralna raznoterost in njena ireducibilna dekompozicija obdelana v prejšnjem razdelku. Obravnavamo bifurkacije majhnih limitnih ciklov iz izhodišča, vključno s primeri, ko je  $x = 0$  center.

**Primer 2:** Videli smo, da je  $g_{2k} \in \langle g_2 \rangle$  za vse  $k \in \mathbb{N}$  in je zato minimalna baza sestavljena samo iz polinoma  $g_2$ . Ker je ideal  $\langle g_2 \rangle$  korenski, iz trditve 3.3.5 sledi, da je zgornja meja za cikličnost enaka 0 in cikličnost je (glej [127] ali [111]) dejansko enaka 0 za vse preslikave  $f(x) = -x \cdots$ , ki izhajajo iz enačbe (3.82). Tudi po izreku 3.3.4 dobimo enak rezultat, saj imata obe komponenti (i) in (ii) sorazsežnosti 1.

**Primer 0:0:4:** Za preslikavo (3.91) najprej podajmo zgornjo mejo cikličnosti.

**Trditev 3.3.12** *Denimo, da je  $I - 2J + 3K - 4L \neq 0$  in  $H - J + 2K - 3L \neq 0$ . Tedaj je cikličnost centra preslikave (3.91) v izhodišču kvečjemu 1.*

**Dokaz.** Naj bo  $G_2 = \langle g_6, g_{12} \rangle$ . Centralna raznoterost je enaka  $V(G_2) = V(\langle g_6, g_{12}, g_{18}, \dots \rangle)$ . Primarna dekompozicija ideala  $G_2$  sestoji iz treh delov:

$$G_2 = P_1 \cap P_2 \cap Q, \tag{3.105}$$

kjer sta  $P_1$  in  $P_2$  praideala toda  $Q$  ni praideal; kar pomeni, da  $G_2$  ni korenski. Torej izreka 3.3.5 ne moremo direktno uporabiti. Izkaže se, da je

$$\begin{aligned} P_1 &= \langle H - L, I - K \rangle, \\ P_2 &= \langle H - I + J - K + L \rangle, \end{aligned}$$

medtem ko za  $Q$  iz (3.105) velja

$$\sqrt{Q} = \langle I - 2J + 3K - 4L, H - J + 2K - 3L \rangle.$$

Naj bo  $a^* = (H^*, I^*, J^*, K^*, L^*)$  poljubna točka iz raznoterosti  $V(G_2) \setminus V(Q)$ . Po trditvi 3.2.7 lahko v okolici točke  $a^*$  za vse  $k \geq 3$  polinom  $g_{6k}$  zapišemo v obliki  $g_{6k} = f_1 g_6 + f_2 g_{12}$ . Ker je

$\{g_6, g_{12}\}$  minimalna baza ideala  $\langle g_6, g_{12}, g_{18}, \dots \rangle$ , je za preslikavo (3.91) po izreku 3.3.5 cikličnost centra v izhodišču pri pogoju  $I - 2J + 3K - 4L \neq 0$  in  $H - J + 2K - 3L \neq 0$  kvečjemu 1. ■

Sedaj preglejmo, koliko limitnih ciklov lahko nastane (bifurcira) iz vsake komponente na centralni raznoterosti preslikave (3.91). Uporabimo izrek 3.3.4, ki na to vprašanje odgovori glede na sorazsežnost posamezne komponente oz. glede na število linearno neodvisnih linearnih faktorjev v prvih nekaj začetnih Ljapunovih količinah (oz. fokusnih količinah, ki, kot smo videli v (3.86), porodijo isto raznoterost kot fokusne količine).

Najprej vpeljimo oznake, ki jih bomo v nadaljevanju potrebovali. Z  $J_p^k$  označimo Jacobijevo matriko prvih  $k$  fokusnih količin, izračunanih v točki  $p$ . V tem primeru je eksplicitno izpisana samo prva vrstica matrike  $J_p^2$  za  $p = (H, I, J, K, L)$ , glede na  $g_6$  in  $g_{12}$  iz (3.92) in (3.93)

$$J_p^2 = \begin{bmatrix} -2(4H - 3I + 2J - K) & \frac{\partial g_{12}}{\partial H} \\ 2(3H - 2I + J - L) & \frac{\partial g_{12}}{\partial I} \\ -2(2H - I + K - 2L) & \frac{\partial g_{12}}{\partial J} \\ 2(H - J + 2K - 3L) & \frac{\partial g_{12}}{\partial K} \\ 2(-I + 2J - 3K + 4L) & \frac{\partial g_{12}}{\partial L} \end{bmatrix}^T$$

V drugi vrstici  $\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial H}, \dots, \frac{\partial g_{12}}{\partial L}\right)$  oz. transliranem stolpcu so parcialni odvodi predolgi, da bi jih lahko v celoti zapisali v matriko  $J_p^2$ .

Za točko  $p^* = (I - J + K - L, I, J, K, L)$  iz druge komponente (**T**) centralne raznoterosti (s pomočjo programa *Mathematica*) dobimo naslednje minorje ranga 1:

$$\begin{bmatrix} -2(I - 2J + 3K - 4L) & -2(I - 2J + 3K - 4L)^3 \\ 2(I - 2J + 3K - 4L) & 2(I - 2J + 3K - 4L)^3 \\ -2(I - 2J + 3K - 4L) & -2(I - 2J + 3K - 4L)^3 \\ 2(I - 2J + 3K - 4L) & 2(I - 2J + 3K - 4L)^3 \\ -2(I - 2J + 3K - 4L) & -2(I - 2J + 3K - 4L)^3 \end{bmatrix}^T$$

**Trditev 3.3.13** *Ireducibilni komponenti (S) in (T) centralne raznoterosti polinoma (3.91) imata (po vrsti) razsežnosti 3 ter 4.*

**Dokaz.** Ireducibilni komponenti izračunamo s Singularjem. Razsežnosti sta očitni. ■

**Trditev 3.3.14** *Cikličnost generične točke  $p$  iz raznoterosti  $V(\langle s_1, s_2 \rangle)$ , pri pogoju  $M_{(S)}(p) \neq 0$ , je 1. Cikličnost generične točke  $p^*$  iz raznoterosti  $V(\langle t_1 \rangle)$ , pri pogoju  $M_{(T)}(p^*) \neq 0$ , je enaka 0.*

**Dokaz.** Minorje matrike  $J_p^2$  izračunamo v programu *Mathematica*. Na komponenti (**S**) je  $\text{rang}(J_p^2) = 2$  za vse točke  $p$ , če je le  $M_{(S)}(p) \neq 0$ . Ker je sorazsežnost komponente (**S**) enaka 2, je cikličnost točke  $p$  enaka 1. Podobno je na komponenti (**T**)  $\text{rang}(J_{p^*}^1) = \text{rang}(J_{p^*}^2) = 1$ , če je le  $M_{(T)}(p^*) \neq 0$  zato za preslikavo, ki pripada točki  $p^*$ , v oklici izhodišča ne nastane (bifurcira) noben limitni cikel in cikličnost je enaka nič. ■

**Primer 2:3:** Ker pripadajoči ideal ni korenski, za ocenjevanje zgornje meje cikličnosti ne moremo uporabiti trditve 3.3.5. Glede na [111, p. 18] je cikličnost kvečjemu 2.

Sorazsežnosti komponent (*S*), (*H*), (*T*) so (glej [111, Th. 2]) po vrsti 2, 3, 3. Rangji pripadajočih matrik  $J_{p^*}^3$  v (generičnih) točkah  $p^*$  so:



- Za komponento  $(S)$  je generična točka  $p^* = (B - C, B, C, E - F + B, E, F, G)$  in rang matrice  $J_{p^*}^3$  je enak 2. Zato je na tej komponenti cikličnost po izreku 3.3.4 največ 1. To velja za vse točke, razen za točke, kjer je  $(B - 2C)(E - 2F + 3G) = 0$ .
- Podobno za komponento  $(H)$  z generično točko  $p^* = (C, B, C, G, F, F, G)$  izračunamo, da je rang matrice  $J_{p^*}^3$  enak 3, razen če je  $B - 2C = 0$ . Torej je za vse točke, kjer je  $B - 2C \neq 0$  po izreku 3.3.4 cikličnost največ 2.
- Na komponenti  $(T)$  za analizo ranga izberemo točko na krivulji

$$\mathcal{C} \subset \{(A, B, C, D, E, F, G) \in \mathbb{R}^7\},$$

ki je določena z enačbo  $A = 5$ ,  $C = \frac{1}{4}(15 + \sqrt{17})$ ,  $D = 2$ ,  $E = -45 + \frac{1}{8}(15 + \sqrt{17})^2 + 10B - \frac{1}{2}B(15 + \sqrt{17})$ ,  $F = -21 + \frac{1}{16}(15 + \sqrt{17})^2 + 5B - \frac{1}{4}B(15 + \sqrt{17})$  in  $G = 1$ , in je podraznoterost raznoterosti  $(T)$ . Za poljubno točko  $p^* \in \mathcal{C}$  (razen, če je  $B = \frac{1}{4}(35 + \sqrt{17})$ ) izračunamo rang matrice  $J_{p^*}^3$  ki je 3 (z drugimi besedami: vsi minorji ranga 3 imajo skupni faktor:  $4B - (35 + \sqrt{17})$ ). To pomeni, da je (po izreku 3.3.4) cikličnost vseh točk  $p^* \in \mathcal{C}$ , kjer  $B \neq \frac{1}{4}(35 + \sqrt{17})$ , največ 2. Če raznoterost  $(T)$  predstavimo v parametrični obliki

$$\begin{aligned} E &= \frac{-D^2 + DF + G^2}{G} \\ B &= \frac{A^2 - C^2 - D + E - F + G}{A - C} \\ &= \frac{FD - GD - D^2 + A^2G - C^2G - FG + 2G^2}{G(A - C)}, \end{aligned}$$

kjer  $D$  določimo iz enačbe  $-ACD + C^2D + D^2 + A^2G - ACG - 2DG + G^2 = 0$  in predstavlja skupni faktor vseh ostalih enačb, dobimo

$$D = \frac{1}{2}(A - C) \left( C \pm \sqrt{C^2 - 4G} \right) + G.$$

Za vsako točko  $p^*$  iz raznoterosti  $(T)$ , kjer je  $A - C \neq 0$ , je rang matrice  $J_{p^*}^3$  enak 3 (ali drugače vsi minorji ranga 3 vsebujejo faktor  $A - C$ ). Po izreku 3.3.4 je cikličnost na raznoterosti  $(T)$  enaka 2.

**Primer 2:0:4:** Analiza bifurkacij limitnih ciklov iz vsake komponente na centralni raznoterosti v tem primeru nam da naslednji izrek.

**Izrek 3.3.15** *Ireducibilni komponenti  $(M)$  in  $(N)$  centralne raznoterosti polinoma (3.85) imata (po vrsti) sorazsežnosti 3 ter 2.*

**Dokaz.** Ireducibilni komponenti izračunamo s Singularjem. Razsežnosti sta očitno 5 in 6. Ker je razsežnost celotnega prostora enaka 8, sta sorazsežnosti enaki 3 in 2. ■

Z  $J_p^6$  označimo Jacobijevo matriko prvih 6 fokusnih količin, izračunanih v točki  $p$ . Definiramo polinoma:

$$\begin{aligned} Q_{(M)} &= (B - 2C)(F - 2G + 2H), \\ Q_{(N)} &= (B - 2C)(E - 2F + 3G - 4H). \end{aligned}$$

**Izrek 3.3.16** *Cikličnost generične točke  $p'$  iz raznoterosti  $V(\langle n_1, n_2 \rangle)$ , kjer je  $Q_{(\mathbf{N})}(p') \neq 0$ , je 1. Cikličnost generične točke  $p^*$  iz raznoterosti  $V(\langle m_1, m_2, m_3 \rangle)$ , kjer je  $Q_{(\mathbf{M})}(p^*) \neq 0$ , je 2.*

**Dokaz.** Za poljubno točko  $p^*$  na komponenti  $(\mathbf{M})$ , kjer je  $Q_{(\mathbf{M})}(p^*) \neq 0$ , v programu *Mathematica* izračunamo minorje in dobimo, da je  $\text{rang}(J_{p^*}^6) = 3$ . Po izreku 3.3.4 je cikličnost na komponenti  $(\mathbf{M})$  enaka 2. Podobno za vsako točko  $p'$  iz komponente  $(\mathbf{N})$ , kjer je  $Q_{(\mathbf{N})}(p') \neq 0$ , izračunamo, da je  $\text{rang}(J_{p'}^6) = 2$  in zato je po izreku 3.3.4 cikličnost enaka 1. ■

**Primer 0:0:0:0:6:** Analiza bifurkacij limitnih ciklov iz vsake komponente na centralni raznoterosti preslikave (2.130), ki izhaja iz enačbe (3.96), nam da naslednji izrek.

**Izrek 3.3.17** *Denimo, da je*

$$\sum_{j=1}^6 (-1)^{j+1} j A_{6-j,j} \neq 0 \quad \text{in} \quad A_{6,0} \neq \sum_{j=2}^6 (-1)^j (j-1) A_{6-j,j}. \quad (3.106)$$

*Tedaj je cikličnost centra preslikave (2.130), ki izhaja iz enačbe (3.96), največ 2.*

**Dokaz.** Pri dokazu uporabimo trditev 3.3.5. Preveriti moramo, če je ideal  $I_6 = \langle g_{10}, g_{20}, g_{30} \rangle$  korenski. V ta namen izračunamo primarno dekompozicijo ideala. V našem primeru je primarna dekompozicija ideala  $I_6$  enaka

$$I_6 = P_1 \cap P_2 \cap Q_1 \cap Q_2, \quad (3.107)$$

kjer sta  $P_1$  in  $P_2$  praideala, toda  $Q_1$  in  $Q_2$  sta "samo" primarna. Zato ideal  $I_6$  ni korenski v  $\mathbb{R}[A]$  in trditve 3.3.5 ne moremo direktno uporabiti. Ideala  $P_1$  in  $P_2$  iz (3.107) sta generirana s polinomi iz komponent  $(S_6)$  oz.  $(T_6)$ . Ideala  $Q_1$  in  $Q_2$  iz (3.107) sta primarna ideala, za katera velja:  $\sqrt{Q_1} = \langle A_{51} - 2A_{4,2} + 3A_{3,3} - 4A_{2,4} + 5A_{1,5} + 6A_{0,6}, A_{6,0} - A_{4,2} + 2A_{3,3} - 3A_{2,4} + 4A_{1,5} - 5A_{0,6} \rangle$  in  $\sqrt{Q_2} = \langle 2A_{4,2} - 5A_{3,3} + 8A_{2,4} - 10A_{1,5} + 10A_{0,6}, A_{5,1} - 2A_{3,3} + 4A_{2,4} - 5A_{1,5} + 4A_{0,6}, 2A_{6,0} - A_{3,3} + 2A_{2,4} - 2A_{1,5} \rangle$ . Struktura ideala  $I_6$  se sklada z oznakami v trditvi 3.2.7. Presek idealov  $\sqrt{Q_1} \cap \sqrt{Q_2}$  je  $\sqrt{Q_1}$ , saj je  $\sqrt{Q_1} \subset \sqrt{Q_2}$ . V prostoru parametrov  $\mathbf{A}$  je raznoterost  $\mathbf{V}(Q_1 \cap Q_2) = \mathbf{V}(Q_1)$  določena z enačbami  $A_{51} - 2A_{4,2} + 3A_{3,3} - 4A_{2,4} + 5A_{1,5} + 6A_{0,6} = A_{6,0} - A_{4,2} + 2A_{3,3} - 3A_{2,4} + 4A_{1,5} - 5A_{0,6} = 0$ . Opazimo, da se pogoja, ki določata raznoterost  $\mathbf{V}(Q_1 \cap Q_2)$  in pogoja (3.106) izključujeta. Naj bo  $A^* \in \mathbf{A}$ , tedaj po trditvi 3.2.7 obstajajo racionalne funkcije  $f_1, f_2$  in  $f_3$ , za katere je za vsak  $A^*$ , ki zadošča enačbi (3.106), in za vsak  $k > 3$ , v neki okolici točke  $A^*$  izpolnjena enakost

$$g_{10k} = f_1 g_{10} + f_2 g_{20} + f_3 g_{30}.$$

Torej je po trditvi 3.3.5 cikličnost iz centra v izhodišču za preslikave (2.130), ki izhajajo iz enačbe (3.96), s parametri, ki zadoščajo pogojema (3.106), največ 2. ■

V izreku 3.3.17 je podana zgornja meja cikličnosti. Sedaj pogledajmo, kaj lahko glede cikličnosti povemo po komponentah na centralni raznoterosti v tem primeru. Pri analizi po komponentah uporabimo izrek 3.3.4.

Najprej vpeljimo naslednje oznake: z  $J_p(\mathcal{B}_k)$  označimo Jacobijevo matriko polinomov  $g_{10}, g_{20}, \dots, g_{10k}$ , izračunano v točki  $p$ , z  $\text{rang}(J_p^k)$  označimo rang matrike  $J_p(\mathcal{B}_k)$ . Z  $G_{6,1} = \langle A_{6,0} - A_{0,6}, A_{5,1} - A_{1,5}, A_{4,2} - A_{2,4} \rangle$  označimo ideal, generiran s polinomi iz komponente  $(S_6)$ , z  $G_{6,2} = \langle A_{6,0} - A_{5,1} + A_{4,2} - A_{3,3} + A_{2,4} - A_{1,5} + A_{0,6} \rangle$  pa označimo ideal, generiran s polinomi iz komponente  $(T_6)$ . Iz izreka 3.3.8 vidimo, da pripadajoča centralna raznoterost iz  $\mathbb{R}^7$  sestoji iz

dveh ireducibilnih komponent  $\mathbf{V}(G_{6,1})$  in  $\mathbf{V}(G_{6,2})$ . Očitno je, da sta razsežnosti komponent  $\mathbf{V}(G_{6,1})$  in  $\mathbf{V}(G_{6,2})$  po vrsti enaki 4 in 6.

V naslednjem izreku potrebujemo polinoma

$$\begin{aligned} F_{6,1} &= A_{3,3} - A_{2,4} + 2A_{1,5} - 2A_{0,6}, \\ F_{6,2} &= A_{5,1} - 2A_{4,2} + 3A_{3,3} - 4A_{2,4} + 5A_{1,5} + 6A_{0,6}. \end{aligned}$$

**Izrek 3.3.18** *Cikličnost generične točke  $p \in \mathbf{V}(G_{6,1})$  je enaka 2, če je  $F_{6,1}(p) \neq 0$ . Cikličnost generične točke  $p' \in \mathbf{V}(G_{6,2})$  je enaka 0, če je  $F_{6,2}(p') \neq 0$ .*

**Dokaz.** Na raznoterosti  $\mathbf{V}(G_{6,1})$  je v poljubni točki  $p$ , za katero je  $F_{6,1}(p) \neq 0$ , rang matrice  $J_p^3$  enak 3. Na raznoterosti  $\mathbf{V}(G_{6,2})$  pa je rang poljubne točke  $p'$ , za katero je  $F_{6,2}(p') \neq 0$ , rang matrice  $J_{p'}^1$  enak 1. Po izreku 3.3.4 lahko iz točke  $p$  nastaneta (bifurcirata) dva limitna cikla, iz točke  $p'$  pa noben. ■

**Primer 0:0:0:0:0:0:8:** Analiza bifurkacij limitnih ciklov iz vsake komponente na centralni raznoterosti preslikave (2.130), ki izhaja iz enačbe (3.97), nam da naslednji izrek.

**Izrek 3.3.19** *Denimo, da je*

$$\sum_{j=1}^8 (-1)^{j+1} j A_{8-j,j} \neq 0 \quad \text{in} \quad A_{8,0} \neq \sum_{j=2}^8 (-1)^j (j-1) A_{8-j,j}. \quad (3.108)$$

*Tedaj je cikličnost centra preslikave (2.130), ki izhaja iz enačbe (3.97), največ 3.*

**Dokaz.** Preverimo, če je ideal  $I_8 = \langle g_{14}, g_{28}, g_{42}, g_{56} \rangle$  korenski. Izračunamo primarno dekompozicijo ideala  $I_8$  in dobimo

$$I_8 = P_1 \cap P_2 \cap Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3, \quad (3.109)$$

kjer sta  $P_1$  in  $P_2$  praideala, toda  $Q_1, Q_2$  in  $Q_3$  so 'samo' primarni. Zato  $I_8$  ni korenski v  $\mathbb{R}[A]$  in trditve 3.3.5 ne moremo direktno uporabiti. Ideala  $P_1$  in  $P_2$  iz (3.109) sta po vrsti generirana s polinomi iz komponent  $(S_8)$  in  $(T_8)$ . Primarni ideali  $Q_1, Q_2$ , in  $Q_3$  pa so takšni, da velja  $\sqrt{Q_1} \cap \sqrt{Q_2} \cap \sqrt{Q_3} = \sqrt{Q_1} = \langle A_{7,1} - 2A_{6,2} + 3A_{5,3} - 4A_{4,4} + 5A_{3,5} + 6A_{2,6} - 7A_{1,7} + 8A_{0,8}, A_{8,0} - A_{6,2} + 2A_{5,3} - 3A_{4,4} + 4A_{3,5} - 5A_{2,6} + 6A_{1,7} - 7A_{0,8} \rangle$ . Torej v prostoru parametrov  $\mathbf{A}$  je raznoterost  $\mathbf{V}(Q_1)$  določena z enačbami  $A_{7,1} - 2A_{6,2} + 3A_{5,3} - 4A_{4,4} + 5A_{3,5} + 6A_{2,6} - 7A_{1,7} + 8A_{0,8} = A_{8,0} - A_{6,2} + 2A_{5,3} - 3A_{4,4} + 4A_{3,5} - 5A_{2,6} + 6A_{1,7} - 7A_{0,8} = 0$ .

Spet uporabimo trditve 3.2.7. Naj bo  $A^* \in \mathbf{A}$ , tedaj obstajajo racionalne funkcije  $f_1, f_2, f_3$  in  $f_4$ , za katere je za vsak  $A^*$ , ki zadošča enačbi (3.108), in za vsak  $k > 4$  v neki okolici točke  $A^*$  izpolnjena enakost

$$g_{14k} = f_1 g_{14} + f_2 g_{28} + f_3 g_{42} + f_4 g_{56}.$$

Torej je po trditvi 3.3.5 cikličnost iz centra v izhodišču za preslikave (2.130), ki izhajajo iz enačbe (3.97), s parametri, ki zadoščajo pogojema (3.108), največ 3. ■

Sedaj s pomočjo izreka 3.3.4 preglejmo cikličnost komponent centralne raznoterosti, ki pripada enačbi (3.97).

Z  $J_p(\mathcal{B}_k)$  označimo Jacobijevo matriko polinomov  $g_{14}, g_{28}, \dots, g_{14k}$ , ki jo izračunamo v točki  $p$ . Z  $\text{rang}(J_p^k)$  označimo rang matrice  $J_p(\mathcal{B}_k)$ . Z  $G_{8,1} = \langle A_{8,0} - A_{0,8}, A_{7,1} - A_{1,7}, A_{6,2} - A_{2,6}, A_{5,3} - A_{3,5} \rangle$  označimo ideal, generiran s polinomi iz komponente  $(S_8)$  (glej izrek 3.3.9). Z  $G_{8,2} = \langle A_{8,0} -$

$A_{7,1} + A_{6,2} - A_{5,3} + A_{4,4} - A_{3,5} + A_{2,6} - A_{1,7} + A_{0,8}$ ) iznačimo ideal, generiran s polinomi iz komponente  $(T_8)$ . Ireducibilni komponenti  $\mathbf{V}(G_{8,1})$  in  $\mathbf{V}(G_{8,2})$  centralne raznoterosti sta v  $\mathbb{R}^9$ , njuni razsežnosti sta po vrsti 5 in 7.

V naslednjem izreku potrebujemo polinoma

$$\begin{aligned} F_{8,1} &= A_{4,4} - 2A_{3,5} + 2A_{2,6} - 2A_{1,7} + 2A_{0,8}, \\ F_{8,2} &= A_{7,1} - 2A_{6,2} + 3A_{5,3} - 4A_{4,4} + 5A_{3,5} + 6A_{2,6} - 7A_{1,7} + 8A_{0,8}. \end{aligned}$$

**Izrek 3.3.20** *Cikličnost generične točke  $p \in \mathbf{V}(G_{8,1})$  je enaka 3, če je  $F_{8,1}(p) \neq 0$ . Cikličnost generične točke  $p' \in \mathbf{V}(G_{8,2})$  je enaka 0, če je  $F_{8,2}(p') \neq 0$ .*

**Dokaz.** Izračunamo, da je za poljubno točko  $p \in \mathbf{V}(G_{8,1})$  rang matrice  $J_p^4$  enak 4, če je  $F_{8,1}(p) \neq 0$ . Podobno je za vsako točko  $p' \in \mathbf{V}(G_{8,2})$ , za katero je  $F_{8,2}(p') \neq 0$ , rang matrice  $J_{p'}^1$  enak 1. Ostalo sledi iz izreka 3.3.4. ■

**Primer 0:0:0:0:0:0:0:10:** Analiza bifurkacij limitnih ciklov iz vsake komponente na centralni raznoterosti preslikave (2.130), ki izhaja iz enačbe (3.98), nam da naslednji izrek.

**Izrek 3.3.21** *Denimo, da je*

$$\sum_{j=1}^{10} (-1)^{j+1} j A_{10-j,j} \neq 0 \quad \text{in} \quad A_{10,0} \neq \sum_{j=2}^{10} (-1)^j (j-1) A_{10-j,j}. \quad (3.110)$$

*Tedaj je cikličnost centra preslikave (2.130), ki izhaja iz enačbe (3.98), največ 4.*

**Dokaz.** Dokaz je podoben kot pri izrekih 3.3.17 in 3.3.19. Ideal  $I_{10} = \langle g_{14}, \tilde{g}_{28}, \tilde{g}_{42}, \tilde{g}_{56} \rangle$  ponovno ni korenski. Primarna dekompozicija je oblike

$$I_{10} = P_1 \cap P_2 \cap Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 \cap Q_4, \quad (3.111)$$

kjer sta  $P_1$  in  $P_2$  praideala, toda  $Q_i$ , za  $i = 1, 2, 3, 4$ , niso praideali. Zato lahko trditev 3.3.5 za enačbo (3.98) uporabimo samo za vrednosti parametrov iz  $\mathbf{V}(I_{10}) \setminus \mathbf{V}(Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 \cap Q_4)$ . Izkaže se, da je  $\sqrt{Q_1} \cap \sqrt{Q_2} \cap \sqrt{Q_3} \cap \sqrt{Q_4} = \sqrt{Q_1}$  in raznoterost  $\mathbf{V}(Q_1)$  je definirana z  $A_{9,1} - 2A_{8,2} + 3A_{7,3} - 4A_{6,4} + 5A_{5,5} + 6A_{4,6} - 7A_{3,7} + 8A_{2,8} - 9A_{1,9} + 10A_{0,10} = A_{10,0} - A_{8,2} + 2A_{7,3} - 3A_{6,4} + 4A_{5,5} - 5A_{4,6} + 6A_{3,7} - 7A_{2,8} + 8A_{1,9} - 9A_{0,10} = 0$ . Podobno, kot v dokazih izrekov 3.3.17 in 3.3.19 lahko sklepamo, da je cikličnost v izhodišču na centralni raznoterosti enačbe (3.98) pri parametrih, ki zadoščajo pogoju (3.110), največ 4. ■

Podobno, kot v prejšnjih primerih, označimo z  $G_{10,1}$  oz.  $G_{10,2}$  ideala, generirana s polinomi iz  $(S_{10})$  oz.  $(T_{10})$ . V naslednjem izreku potrebujemo še polinoma

$$\begin{aligned} F_{10,1} &= A_{5,5} - 2A_{4,6} + 2A_{3,7} - 2A_{2,8} + 2A_{1,9} - 2A_{0,10}, \\ F_{10,2} &= A_{9,1} - 2A_{8,2} + 3A_{7,3} - 4A_{6,4} + 5A_{5,5} + 6A_{4,6} - 7A_{3,7} + 8A_{2,8} - 9A_{1,9} + 10A_{0,10}. \end{aligned}$$

**Izrek 3.3.22** *Cikličnost generične točke  $p \in \mathbf{V}(G_{10,1})$  je enaka 4, če je  $F_{10,1}(p) \neq 0$ . Cikličnost generične točke  $p' \in \mathbf{V}(G_{10,2})$  je enaka 0, če je  $F_{10,2}(p') \neq 0$ .*

**Primer**  $n = 2\ell$  Če so fokusne količine takšne, kot smo predvideli v podrazdelku 3.3.2, potem Bautinov ideal za primer  $n = 2\ell$  sestoji iz  $\ell$  fokusnih količin

$$I_{2\ell} = \langle g_{4\ell-2}, g_{2(4\ell-2)}, \dots, g_{\ell(4\ell-2)} \rangle.$$

Iz primerov za  $n = 2, 4, 6, 8$  in  $10$  lahko sklepamo, da je za  $n = 2\ell$  primarna dekompozicija ideala  $I_{2\ell}$  oblike

$$I_{2\ell} = P_1 \cap P_2 \cap Q_1 \cap \dots \cap Q_{\ell-1},$$

kjer sta  $P_1$  in  $P_2$  praideala, generirana s polinomi iz komponent  $(S_{2\ell})$  in  $(T_{2\ell})$ . Po analogiji velja  $P_1 = \langle A_{2\ell-j,j} - A_{j,2\ell-j} : j = 0, 1, \dots, \ell-1 \rangle$  in  $P_2 = \langle \sum_{j=0}^{2\ell} (-1)^j A_{2\ell-j,j} \rangle$ ; ter  $Q_1, \dots, Q_{\ell-1}$  so primarni ideali, za katere velja

$$\sqrt{Q} = \sqrt{Q_1} \cap \dots \cap \sqrt{Q_{\ell-1}} = \langle p_1, p_2 \rangle,$$

kjer je

$$\begin{aligned} p_1 &= \sum_{j=1}^{2\ell} (-1)^{j-1} j A_{2\ell-j,j}, \\ p_2 &= A_{2\ell,0} - \sum_{j=2}^{2\ell} (-1)^j (j-1) A_{2\ell-j,j}. \end{aligned} \tag{3.112}$$

V prostoru parametrov  $\mathbf{A}$ , je raznoterost  $\mathbf{V}(Q)$  določena z enačbama  $p_1 = p_2 = 0$ . Naj bo  $A^* \in \mathbf{A}$ , tedaj po trditvi 3.2.7 obstajajo racionalne funkcije  $f_1, \dots, f_\ell$ , za katere je za vsak  $A^* \in \mathbf{V}(I_{2\ell}) \setminus \mathbf{V}(Q)$ , ki zadošča enačbi (3.99), in za vsak  $k > \ell$  v neki okolici točke  $A^*$  izpolnjena enakost

$$g_{k(4\ell-2)} = f_1 g_{4\ell-2} + f_2 g_{2(4\ell-2)} + \dots + f_\ell g_{\ell(4\ell-2)},$$

kar pomeni, da lahko glede cikličnosti podamo naslednjo domnevo.

**Domneva 3.3.23** *Denimo, da je*

$$p_1 \neq 0 \text{ in } p_2 \neq 0,$$

*kjer sta  $p_1$  in  $p_2$  polinoma, določena v (3.112). Tedaj je cikličnost centra preslikave (2.130), ki izhaja iz enačbe (3.99), največ  $\ell - 1$ .*

Sedaj s pomočjo izreka 3.3.4 preglejmo cikličnost komponent centralne raznoterosti iz domneve 3.3.11. Z  $J_p(\mathcal{B}_k)$  označimo Jacobijevo matriko polinomov  $g_{4\ell-2}, g_{2(4\ell-2)}, \dots, g_{k(4\ell-2)}$ , izračunanih v točki  $p$ , z  $\text{rang}(J_p^k)$  označimo rang matrike  $J_p(\mathcal{B}_k)$ . Ideal, generiran s polinomi iz komponente  $(S_{2\ell})$  iz domneve 3.3.11, označimo z  $G_{2\ell,1} = \langle A_{2\ell-j,j} - A_{j,2\ell-j} : j = 0, 1, \dots, \ell-1 \rangle$  in ideal, generiran s polinomi iz komponente  $(T_{2\ell})$ , označimo z  $G_{2\ell,2} = \langle \sum_{j=0}^{2\ell} (-1)^j A_{2\ell-j,j} \rangle$ .

Komponenta  $\mathbf{V}(G_{2\ell,1})$  sestoji iz  $\ell$  linearnih pogojev. Ker je prostor parametrov  $\mathbf{A}$  razsežnosti  $2\ell + 1$ , je razsežnost te komponente  $\ell + 1$ , sorazsežnost pa  $\ell$ . Označimo

$$F_{2\ell,1} = A_{\ell,\ell} - 2 \sum_{j=1}^{\ell} (-1)^{j-1} A_{\ell-j,\ell+j}. \tag{3.113}$$

Za vse točke  $p$ , z lastnostjo  $F_{2\ell,1}(p) \neq 0$ , je  $\text{rang}(J_p^\ell) = \ell$ . Torej je po izreku 3.3.4 cikličnost take generične točke  $\ell - 1$ .

Komponenta  $\mathbf{V}(G_{2\ell,2})$  ima razsežnost  $2\ell$ , zato je njena sorazsežnost enaka 1. Označimo

$$F_{2\ell,2} = \sum_{j=1}^{2\ell} (-1)^{j-1} j A_{2\ell-j,j}. \quad (3.114)$$

Ker je v vsaki točki  $p'$ , kjer je  $F_{2\ell,2}(p') \neq 0$ ,  $\text{rang}(J_{p'}^1) = 1$ , je na tej komponenti cikličnost enaka 0.

# Dodatki

## Dodatek A

Notranja dvočlena (binarna) operacija  $*$  na množici  $G$  je preslikava iz  $G \times G$  v  $G$ . Pravimo tudi, da je množica  $G$  *zaprta* za takšno operacijo.

**Definicija 3.3.24** *Neprazno množico  $G$  z notranjo dvočleno operacijo  $*$  imenujemo grupa, če za vse elemente  $a, b, c \in G$  velja:*

- (i) *asociativnost:  $a * (b * c) = (a * b) * c$ ,*
- (ii) *obstaja element  $e \in G$  (enota ali nevtralni element), za katerega je  $e * a = a * e = a$ ,*
- (iii) *za vsak element  $a \in G$  obstaja inverzni element  $a^{-1}$ , za katerega velja  $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ .*

Grupo z operacijo  $*$  zapišemo v obliki urejenega para  $(G, *)$ . Grupa  $(G, *)$  je Abelova, če za operacijo  $*$  poleg zgoraj naštetih lastnosti velja še komutativnost:  $a * b = b * a$  za vse  $a, b \in G$ .

**Definicija 3.3.25** *Naj bo  $(G, *)$  grupa. Podmnožica  $H \subseteq G$  je podgrupa grupe  $(G, *)$ , če je grupa za isto operacijo  $*$ :  $H \times H \rightarrow H$ .*

**Definicija 3.3.26** *Množica  $K$  z dvema notranjima dvočlenima operacijama  $+$  (seštevanje) in  $\cdot$  (množenje) je kolobar, če velja:*

- (i)  *$(K, +)$  je Abelova grupa,*
- (ii) *operacija množenja  $\cdot$  je asociativna,*
- (iii) *operaciji  $+$  in  $\cdot$  sta povezani z distributivnostnima zakonoma*

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall a, b, c \in K,$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \forall a, b, c \in K.$$

Kolobar z operacijama seštevanja  $+$  in množenja  $\cdot$  zapišemo v obliki urejene trojice  $(K, +, \cdot)$ . V kolobarju  $K$  nevtralni element za seštevanje označimo z  $0$ , inverzni element za prištevanje k elementu  $a \in K$  pa označimo z  $-a$ .

V kolobarju  $(K, +, \cdot)$  lahko obstajata neničelna elementa  $a, b \in K$ , katerih produkt je nevtralni element za seštevanje

$$a \cdot b = 0.$$

V tem primeru rečemo, da je  $a$  levi delitelj nič in  $b$  desni delitelj nič.

Če je množenje v kolobarju  $(K, +, \cdot)$  komutativno, ga imenujemo *komutativni kolobar*. Če v komutativnem kolobarju obstaja enota za množenje  $1 \in K$ , tako da je  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$  za vsak  $a \in K$ , kolobar  $(K, +, \cdot)$  imenujemo *kolobar z enoto*. V kolobarju z enoto nam do posplošitve pojma števila manjka samo še deljenje (torej obstoj inverznega elementa  $a^{-1}$  za vse neničelne elemente  $a \in K$ ). V komutativnem kolobarju so levi in desni delitelji ničla enaki in jim pravimo kar *delitelji ničla*.

**Definicija 3.3.27** Če komutativen kolobar  $(K, +, \cdot)$  nima deliteljev ničla, ga imenujemo cel kolobar.

V celem kolobarju velja za vsak neničeln element  $0 \neq a \in K$  tako imenovano pravilo krajšanja:

$$\begin{aligned} \text{krajšanje z desne: } x \cdot a = y \cdot a \quad \& \quad a \neq 0 \implies x = y, \\ \text{krajšanje z leve: } a \cdot x = a \cdot y \quad \& \quad a \neq 0 \implies x = y. \end{aligned}$$

**Definicija 3.3.28** Kolobar z enoto, v katerem vsakemu neničelnemu elementu  $a \in K$  pripada inverz (glede na množenje)  $a^{-1}$ , imenujemo obseg.

**Definicija 3.3.29** Obseg, v katerem je množenje komutativno, imenujemo komutativni obseg ali polje.

**Opomba.** V tej monografiji uporabljamo samo komutativne obsege.

Obseg z operacijama seštevanja  $+$  in množenja  $\cdot$  zapišemo v obliki urejene trojice  $(\mathcal{O}, +, \cdot)$ . Vsak obseg je cel kolobar. Primeri komutativnih kolobarjev z enoto, ki so hkrati tudi polja in jih najpogosteje uporabljamo, so  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  in  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ . Primer kolobarja z enoto, ki ni obseg, je  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ .

Najpogostejši in najpomembnejši primeri kolobarjev v tej monografiji so *kolobarji polinomov*.

Ker je množenje v kolobarju  $(K, +, \cdot)$  asociativno, lahko za vsak  $a \in K$  in  $n \in \mathbb{N}$  definiramo potenco  $a^n \in K$  takole:

$$a^1 = a \quad \text{in} \quad a^n = a^{n-1} \cdot a \quad \text{za vse} \quad n \geq 2.$$

Če ima kolobar  $K$  enoto, definiramo še  $a^0 = 1$ .

Polinom (ene spremenljivke  $x$ )

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n; \quad a_n \neq 0$$

določajo koeficienti  $a_0, a_1, \dots, a_n \in F$  polja  $(F, +, \cdot)$  (lahko tudi kolobarja  $(K, +, \cdot)$ ). Za konstantne polinome  $f(x) = a_0$  (ko je v zgornji definiciji  $n = 0$ ) je lahko tudi  $a_0 = 0$  (ničelni polinom). Množico vseh polinomov spremenljivke  $x$  nad poljem  $(F, +, \cdot)$  označimo z  $F[x]$ . Naj bosta  $f, g \in F[x]$  in naj velja

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n_1} a_k x^k \quad \text{in} \quad g(x) = \sum_{k=0}^{n_2} b_k x^k.$$

Naj bo  $n = \max(n_1, n_2)$ . Potem je vsota polinomov  $f$  in  $g$  algebraično definirana kot:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) x^k,$$



produkt polinomov  $f$  in  $g$  pa je algebraično definiran kot:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sum_{k=0}^{2n} \left( \sum_{\substack{i+j=k \\ 0 \leq i, j \leq n}} a_i b_j \right) x^k.$$

Pri obeh definicijah manjkajoče koeficiente polinoma nižje stopnje postavimo na nič. S tako definiranimi operacijama  $+$  in  $\cdot$  postane množica  $F[x]$  kolobar, ki ga imenujemo kolobar polinomov nad poljem  $(F, +, \cdot)$ .

Ničelni element za seštevanje v kolobarju  $F[x]$  je polinom  $n(x) = 0$ . Enota za množenje v kolobarju  $F[x]$  je polinom  $e(x) = 1$ .

Analogno označimo kolobar polinomov dveh spremenljivk  $x$  in  $y$  nad poljem  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  z  $\mathbb{R}[x, y]$ . Podobno označimo kolobar polinomov z  $n$  spremenljivkami  $x_1, x_2, \dots, x_n$  nad poljem  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  s  $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ .

Polinomu  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  lahko priredimo preslikavo, ki vsakemu  $\alpha \in K$  priredi vrednost  $f(\alpha) = \sum_{k=0}^n a_k \alpha^k \in K$ .

**Definicija 3.3.30** Naj bo  $f \in F[x]$ . Vse vrednosti  $x \in F$ , za katere je  $f(x) = 0$ , imenujemo ničle polinoma  $f$ .

**Definicija 3.3.31** Polje  $F$  je algebraično zaprto, če ima vsak polinom stopnje 1 ali več iz kolobarja  $F[x]$  vsaj eno ničlo v  $F$ .

**Opomba.** Iz zgornje definicije s Hornerjevim algoritmom takoj dobimo, da vsak polinom stopnje  $d$  nad algebraično zaprtim poljem  $F$  razpade na  $d$  linearnih faktorjev, kar pomeni, da ima  $d$  ničel, če jih štejemo z ustreznimi večkratnostmi.

Polje realnih števil  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  ni algebraično zaprto, saj polinom  $x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ , ki ima realne koeficiente  $a_0 = a_2 = 1 \in \mathbb{R}$  in  $a_1 = 0 \in \mathbb{R}$ , nima ničel v  $\mathbb{R}$ . Polje kompleksnih števil  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  je primer algebraično zaprtega polja.

**Definicija 3.3.32** Karakteristika polja z multiplikativno enoto 1 je najmanjše število  $p$ , za katero velja

$$\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{p\text{-krat}} = 0.$$

Če ne obstaja  $p \in \mathbb{N}$ , ki reši zgornjo enačbo, je karakteristika polja enaka 0.

Če obstaja  $p \in \mathbb{N}$ , ki reši zgornjo enačbo, je  $p$  očitno praštevilo. Med polji z neničelno karakteristiko  $p$  omenimo polja

$$(\mathbb{Z}_p, +, \cdot),$$

ki jih krajše označimo z  $\mathbb{Z}_p$ .

Polje je končno, če premore končno število elementov.  $\mathbb{Z}_p$  so edini primeri končnih polj, ki nastopajo v tej monografiji. Polja  $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$  najpreprosteje opišemo kot množico ostankov pri deljenju praštevila  $p$  z operacijama seštevanja in množenja po modulu  $p$ . Znano je, da je kolobarje  $\mathbb{Z}_p$  mogoče opisati kot kvocientne kolobarje kolobarja  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  po idealu  $p\mathbb{Z}$ , ki predstavlja večkratnike števila  $p$ . Med ostalimi končnimi polji omenimo le Galoisjeva polja. Galoisjeva polja s karakteristiko  $p$  imajo  $p^k$  elementov, kjer je  $k \geq 1$  poljubno naravno število.

**Definicija 3.3.33** Podmnožica  $W \subseteq K$  kolobarja  $(K, +, \cdot)$  je podkolobar, če je zaprta za množenje  $\cdot$  in je  $(W, +)$  podgrupa grupe  $(K, +)$ .

**Definicija 3.3.34** V komutativnem kolobarju  $(K, +, \cdot)$  je podmnožica  $\mathcal{I} \subseteq K$  ideal, če je  $(\mathcal{I}, +, \cdot)$  podkolobar kolobarja  $(K, +, \cdot)$  in velja

$$K \cdot \mathcal{I} \subseteq \mathcal{I},$$

kjer je  $K \cdot \mathcal{I} = \{a \cdot b \in K; \quad a \in K \ \& \ b \in \mathcal{I}\}$ .

Vsak kolobar  $K$  ima vsaj dva ideala, ki ju imenujemo *trivialna ideala*  $\mathcal{I}_1 = K$  in  $\mathcal{I}_2 = \{0\}$ . Ostale ideale imenujemo *netrivialni ideali*. Če v kolobarju  $(K, +, \cdot)$  obstaja kak netrivialni ideal  $\mathcal{I}$ , lahko definiramo kvocientni kolobar. Na množici  $K$  lahko namreč definiramo *ekvivalenčno relacijo*  $\sim$  nad elementi kolobarja  $K$ . Za  $a, b \in K$  velja

$$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad a - b \in \mathcal{I}.$$

Dejansko je relacija  $\sim$  *kongruenčna relacija*, saj očitno (zaradi definicije ideala) iz  $a \sim b \wedge c \sim d$  sledi  $a + c \sim b + d$  in  $a \cdot c \sim b \cdot d$  za vse  $a, b, c, d \in K$ . Zato  $a \sim b$  označimo tudi kot  $a \equiv b \pmod{\mathcal{I}}$  (beremo:  $a$  je kongruentno  $b$  po modulu  $\mathcal{I}$ ). *Ekvivalenčni razred* elementa  $a \in K$  označimo z  $[a]$

$$[a] = \{b \in K; \quad a \sim b\}.$$

**Definicija 3.3.35** Naj bo  $(K, +, \cdot)$  komutativni kolobar in  $\mathcal{I}$  njegov ideal ter  $\sim$  idealu pripadajoča kongruenčna relacija. Množico vseh ekvivalenčnih razredov kongruenčne relacije  $\sim$  označimo s  $K/\mathcal{I}$  in jo imenujemo kvocientna množica (kolobarja  $K$  glede na ideal  $\mathcal{I}$ ). Na kvocientni množici lahko med elementoma  $a + \mathcal{I} \in K/\mathcal{I}$  in  $b + \mathcal{I} \in K/\mathcal{I}$  naravno definiramo operaciji seštevanja in množenja na naslednji način

$$\begin{aligned} (a + \mathcal{I}) + (b + \mathcal{I}) &= (a + b) + \mathcal{I}, \\ (a + \mathcal{I}) \cdot (b + \mathcal{I}) &= (a \cdot b) + \mathcal{I}. \end{aligned}$$

S tema dvema operacijama postane kvocientna množica  $K/\mathcal{I}$  kolobar, ki ga imenujemo kvocientni kolobar.

Množico  $V$ , katere elemente lahko med sabo seštevamo in množimo s skalarji iz nekega obsega imenujemo *vektorski prostor*. Elemente vektorskega prostora imenujemo *vektorji*. Operacija seštevanja vektorjev je notranja dvočlena operacija nad množico  $V$

$$+ : V \times V \rightarrow V.$$

Operacija množenja vektorjev z elementi  $\alpha$  iz obsega  $F$  je tipa

$$\cdot : F \times V \rightarrow V.$$

Natančneje je vektorski prostor definiran spodaj.

**Definicija 3.3.36** Vektorski prostor nad obsegom  $F$  je množica  $V$  skupaj z operacijama seštevanja vektorjev  $+$  in množenja vektorjev s skalarji  $\cdot$ , za kateri velja:

(i) *asociativnost seštevanja vektorjev*:  $\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3$ , za vse  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in V$ ,

- (ii) komutativnost seštevanja vektorjev:  $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$ , za vse  $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ ,
- (iii) obstaja ničelni element za seštevanje:  $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ , za vse  $\vec{v} \in V$ ,
- (iv) za vsak  $\vec{v} \in V$  obstaja nasprotni element  $(-\vec{v}) \in V$ , tako da je  $\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}$ ,
- (v) za vsak  $\alpha, \beta \in F$  in  $\vec{v} \in V$  velja  $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$ ,
- (vi) za vsak  $\alpha, \beta \in F$  in  $\vec{v} \in V$  velja  $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$ ,
- (vii) za vsak  $\alpha \in F$  in vsak par  $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$  velja  $\alpha(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \alpha\vec{v}_1 + \alpha\vec{v}_2$ ,
- (viii) za vsak  $\vec{v} \in V$  velja  $1\vec{v} = \vec{v}$ , kjer je 1 enota obsega  $F$ :  $1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha$  za vsak  $\alpha \in F$ .

Vektorski prostor označimo z urejeno trojico  $(V, +, \cdot)$ . Podmnožica vektorskega prostora, ki je tudi sama vektorski prostor, je *vektorski podprostor*.

**Definicija 3.3.37** Naj bo  $F$  polje in  $V$  vektorski prostor nad poljem  $F$ . Naj bo  $W$  podmnožica množice  $V$  ( $W \subseteq V$ ). Tedaj je  $W$  vektorski podprostor, če velja:

- (i)  $\vec{0} \in W$ ,
- (ii) za vse  $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$  velja  $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W$ ,
- (iii) za vse  $\alpha \in F$  in  $\vec{w} \in W$  je  $\alpha \cdot \vec{w} \in W$ .

Naj bo  $V$  vektorski prostor nad poljem  $F$ . Podani naj bodo vektorji  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$  in skalarji  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F$ . Potem je

$$\alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \vec{v}_n$$

linearna kombinacija vektorjev  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$ .

**Definicija 3.3.38** Naj bo  $V$  vektorski prostor nad poljem  $F$ . Za izbrane vektorje  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$  množico vseh mogočih linearnih kombinacij

$$\mathcal{L}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n) = \{\vec{x} \in V; \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F: \vec{x} = \alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \vec{v}_n\}.$$

imenujemo linearna lupina vektorjev  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ .

Naj bo  $(V, +, \cdot)$  vektorski prostor nad poljem  $F$ . Preslikava  $*$ :  $V \times V \rightarrow V$ , ki vsakemu urejenemu paru  $(\vec{x}, \vec{y}) \in V \times V$  priredi element  $\vec{x} * \vec{y}$ , je notranja dvočlena operacija nad vektorskim prostorom  $(V, +, \cdot)$ , ki jo imenujemo *množenje vektorjev*.

**Definicija 3.3.39** Naj bo  $F$  polje in  $V$  vektorski prostor nad  $F$ , ki je opremljen z dodatno operacijo  $*$  množenja vektorjev, za katero za vsak skalar  $\alpha$  iz polja  $F$  in za poljubne vektorje  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$  velja:

$$\begin{aligned}(\alpha\vec{x}) * \vec{y} &= \vec{x} * (\alpha\vec{y}) = \alpha(\vec{x} * \vec{y}), \\(\vec{x} + \vec{y}) * \vec{z} &= \vec{x} * \vec{z} + \vec{y} * \vec{z}, \\ \vec{x} * (\vec{y} + \vec{z}) &= \vec{x} * \vec{y} + \vec{x} * \vec{z}.\end{aligned}$$

Tedaj pravimo, da je  $\mathcal{A} = (V, +, *)$  algebra nad poljem  $F$ .

**Opomba.** Zgornje lastnosti množenja vektorjev imenujemo *bilinearnost*. Algebra je poseben primer vektorskega prostora, kjer množica vektorjev ni le Abelova grupa za seštevanje, ampak je kolobar (za seštevanje in množenje).

**Definicija 3.3.40** Podmnožica  $W \subseteq V$  algebre  $\mathcal{A} = (V, +, *)$  je podalgebra (algebre  $\mathcal{A}$ ), če je vektorski podprostor prostora  $(V, +)$  in če je tudi sama algebra za isti operaciji (zoženi na  $W$ ).

Ali je množica  $W \subseteq V$  podalgebra algebre  $V$ , najlažje ugotovimo, če preverimo, ali sta razlika  $a - b$  in produkt  $a * b$  poljubnih elementov  $a, b \in W$  tudi v množici  $W$  (glej [121]).

Ob koncu dodatka A omenimo še preslikave, ki jih obravnavamo v zvezi z vektorskimi prostori, t.i. *linearne preslikave*.

**Definicija 3.3.41** Naj bosta  $V$  in  $W$  vektorska prostora. Preslikava  $\mathcal{A} : V \rightarrow W$  je linearna, če zanjo velja:

$$(i) \text{ aditivnost: } \mathcal{A}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \mathcal{A}(\vec{v}_1) + \mathcal{A}(\vec{v}_2) \text{ za vse } \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V,$$

$$(ii) \text{ homogenost: } \mathcal{A}(\lambda\vec{v}) = \lambda\mathcal{A}(\vec{v}) \text{ za vse } \lambda \in F \text{ in } \vec{v} \in V.$$

Če je  $\mathcal{A}$  linearna, potem iz aditivnosti in homogenosti sledi

$$\mathcal{A}(\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2) = \mathcal{A}(\lambda_1\vec{v}_1) + \mathcal{A}(\lambda_2\vec{v}_2) = \lambda_1\mathcal{A}(\vec{v}_1) + \lambda_2\mathcal{A}(\vec{v}_2)$$

za vse  $\lambda_1, \lambda_2 \in F$  in vse  $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ .

Velja tudi obratno: če je  $\mathcal{A}(\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2) = \lambda_1\mathcal{A}(\vec{v}_1) + \lambda_2\mathcal{A}(\vec{v}_2)$  za vse  $\lambda_1, \lambda_2 \in F$  in  $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ , potem, če izberemo  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ , dobimo  $\mathcal{A}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \mathcal{A}(\vec{v}_1) + \mathcal{A}(\vec{v}_2)$ , kar pomeni, da je  $\mathcal{A}$  aditivna preslikava; in če izberemo  $\lambda_2 = 0$ , dobimo  $\mathcal{A}(\lambda_1\vec{v}_1) = \lambda_1\mathcal{A}(\vec{v}_1)$ , kar pomeni, da je  $\mathcal{A}$  homogena. Zato lahko zgornjo definicijo zapišemo krajše.

**Trditev 3.3.42** Preslikava  $\mathcal{A} : V \rightarrow W$  je linearna natanko tedaj, ko velja

$$\mathcal{A}(\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2) = \lambda_1\mathcal{A}(\vec{v}_1) + \lambda_2\mathcal{A}(\vec{v}_2)$$

za vse za vse  $\lambda_1, \lambda_2 \in F$  in vse  $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ .

## Dodatek B

1. Koda v programu MATHEMATICA za izračun fokusnih količin sistema (3.9).

- Operator (3.71) v [114] za sistem (3.9)

```
11 [nu_1, nu_2, nu_3, nu_4, nu_5, nu_6, nu_7, nu_8] :=
1nu_1+2nu_2+1nu_3+0nu_4+2nu_5+1nu_6+0nu_7+0nu_8
12 [nu_1, nu_2, nu_3, nu_4, nu_5, nu_6, nu_7, nu_8] :=
0nu_1+0nu_2+1nu_3+2nu_4+0nu_5+1nu_6+2nu_7+1nu_8
```

- Definicija funkcije (4.52) v [114].

```

v[k_1,k_2,k_3,k_4,k_5,k_6,k_7,k_8]:=v[k1,k2,k3,k4,k5,k6,k7,k8]=
Module[{us,coef},coef=l1[k1,k2,k3,k4,k5,k6,k7,k8]-l2[k1,k2,k3,k4,k5,k6,k7,k8]; us=0;
v[0,0,0,0,0,0,0,0]=1;
If[k1>0, us=us+(l1[k1-1,k2,k3,k4,k5,k6,k7,k8]+1)*v[k1-1,k2,k3,k4,k5,k6,k7,k8]]
If[k2>0,us=us+(l1[k1,k2-1,k3,k4,k5,k6,k7,k8]+1)*v[k1,k2-1,k3,k4,k5,k6,k7,k8]];
If[k3>0,us=us+(l1[k1,k2,k3-1,k4,k5,k6,k7,k8]+1)*v[k1,k2,k3-1,k4,k5,k6,k7,k8]];
If[k4>0,us=us+(l1[k1,k2,k3,k4-1,k5,k6,k7,k8]+1)*v[k1,k2,k3,k4-1,k5,k6,k7,k8]];
If[k5>0,us=us-(l2[k1,k2,k3,k4,k5-1,k6,k7,k8]+1)*v[k1,k2,k3,k4,k5-1,k6,k7,k8]];
If[k6>0,us=us-(l2[k1,k2,k3,k4,k5,k6-1,k7,k8]+1)*v[k1,k2,k3,k4,k5,k6-1,k7,k8]];
If[k7>0,us=us-(l2[k1,k2,k3,k4,k5,k6,k7-1,k8]+1)*v[k1,k2,k3,k4,k5,k6,k7-1,k8]];
If[k8>0,us=us-(l2[k1,k2,k3,k4,k5,k6,k7,k8-1]+1)*v[k1,k2,k3,k4,k5,k6,k7,k8-1]];
If [coef!=0, us=us/coef]; If [coef==0, gg[k1,k2,k3,k4,k5,k6,k7,k8]=us; us=0]; us]

```

- gmax je število fokusnih količin, ki jih izračunamo

```
gmax=7;
```

- Izračun količin  $q[1], q[2], \dots, q[n]$  do  $n = \text{gmax}$

```

Do[k= sc; num=k; q[num]=0;
For[i1=0,i1<=2 k,i1++ ,
For[i2=0,i2<=(2 k-i1),i2++ ,
For[i3=0,i3<=(2 k-i1-i2),i3++ ,
For[i4=0,i4<=(2 k-i1-i2-i3),i4++ ,
For[i5=0,i5<=(2 k-i1-i2-i3-i4),i5++ ,
For[i6=0,i6<=(2 k-i1-i2-i3-i4-i5),i6++ ,
For[i7=0,i7<=(2 k-i1-i2-i3-i4-i5-i6),i7++ ,
For[i8=0,i8<=(2 k-i1-i2-i3-i4-i5-i6-i7),i8++ ,
If[(l1[i1,i2,i3,i4,i5,i6,i7,i8]==k) && (l2[i1,i2,i3,i4,i5,i6,i7,i8]==k),
v[i1,i2,i3,i4,i5,i6,i7,i8];
q[num]=q[num]+gg[i1,i2,i3,i4,i5,i6,i7,i8]TT[i1,i2,i3,i4,i5,i6,i7,i8]]]]]]]]]]],
{sc,1,gmax}]

```

- Definiranje monomov sistema (3.9)

```

TT[l1_,l2_,l3_,l4_,l5_,l6_,l7_,l8_] :=
a10^l1 a20^l2 a11^l3 a02^l4 b20^l5 b11^l6 b02^l7 b01^l8

```

- Rezultat (fokusne količine)

```
Do[Print[gg[i]=q[i]], {i,1,gmax}];
```

## 2. Koda v programu MATHEMATICA za izračun fokusnih količin sistema (3.34).

```

l1[nu_1,nu_2,nu_3,nu_4,nu_5,nu_6,nu_7,nu_8] :=
3nu_1+2nu_2+1nu_3+0nu_4+3nu_5+2nu_6+1nu_7+0nu_8
l2[nu_1,nu_2,nu_3,nu_4,nu_5,nu_6,nu_7,nu_8] :=
0nu_1+1nu_2+2nu_3+3nu_4+0nu_5+1nu_6+2nu_7+3nu_8

```

```

v[k_1,k_2,k_3,k_4,k_5,k_6,k_7,k_8]:=v[k1,k2,k3,k4,k5,k6,k7,k8]=
Module[{us,coef},coef=11[k1,k2,k3,k4,k5,k6,k7,k8]-12[k1,k2,k3,k4,k5,k6,k7,k8]; us=0;
v[0,0,0,0,0,0,0,0]=1;
If[k1>0, us=us+(11[k1-1,k2,k3,k4,k5,k6,k7,k8]+1)*v[k1-1,k2,k3,k4,k5,k6,k7,k8]]
If[k2>0,us=us+(11[k1,k2-1,k3,k4,k5,k6,k7,k8]+1)*v[k1,k2-1,k3,k4,k5,k6,k7,k8]];
If[k3>0,us=us+(11[k1,k2,k3-1,k4,k5,k6,k7,k8]+1)*v[k1,k2,k3-1,k4,k5,k6,k7,k8]];
If[k4>0,us=us+(11[k1,k2,k3,k4-1,k5,k6,k7,k8]+1)*v[k1,k2,k3,k4-1,k5,k6,k7,k8]];
If[k5>0,us=us-(12[k1,k2,k3,k4,k5-1,k6,k7,k8]+1)*v[k1,k2,k3,k4,k5-1,k6,k7,k8]];
If[k6>0,us=us-(12[k1,k2,k3,k4,k5,k6-1,k7,k8]+1)*v[k1,k2,k3,k4,k5,k6-1,k7,k8]];
If[k7>0,us=us-(12[k1,k2,k3,k4,k5,k6,k7-1,k8]+1)*v[k1,k2,k3,k4,k5,k6,k7-1,k8]];
If[k8>0,us=us-(12[k1,k2,k3,k4,k5,k6,k7,k8-1]+1)*v[k1,k2,k3,k4,k5,k6,k7,k8-1]];
If [coef!=0, us=us/coef]; If [coef==0, gg[k1,k2,k3,k4,k5,k6,k7,k8]=us; us=0]; us]

gmax=8;

Do[k=sc; num=k; q[num]=0;
For[i1=0,i1<=2 k,i1++ ,
For[i2=0,i2<=(2 k-i1),i2++ ,
For[i3=0,i3<=(2 k-i1-i2),i3++ ,
For[i4=0,i4<=(2 k-i1-i2-i3),i4++ ,
For[i5=0,i5<=(2 k-i1-i2-i3-i4),i5++ ,
For[i6=0,i6<=(2 k-i1-i2-i3-i4-i5),i6++ ,
For[i7=0,i7<=(2 k-i1-i2-i3-i4-i5-i6),i7++ ,
For[i8=0,i8<=(2 k-i1-i2-i3-i4-i5-i6-i7),i8++ ,
If[(11[i1,i2,i3,i4,i5,i6,i7,i8]==k) &&(12[i1,i2,i3,i4,i5,i6,i7,i8]==k),
v[i1,i2,i3,i4,i5,i6,i7,i8];
q[num]=q[num]+gg[i1,i2,i3,i4,i5,i6,i7,i8]TT[i1,i2,i3,i4,i5,i6,i7,i8]]]]]]]]]]],
{sc,1,gmax}]

TT[l1_,l2_,l3_,l4_,l5_,l6_,l7_,l8_]:=
a30^l1 a21^l2 a12^l3 a03^l4 b30^l5 b21^l6 b12^l7 b03^l8

Do[Print[gg[i]=q[i]], {i,1,gmax}];

```

3. Rezultat izračuna primarne dekompozicije v SINGULARJU ideala  $\mathcal{B}_4$  za sistem (3.27) z  $\lambda = 0$  (ali sistem (3.9)).

```

[1]:
[1]:
_[1]=a10^2*a02-b20*b01^2
_[2]=a20*b01^2-a10^2*b02
_[3]=a20*a02-b20*b02
_[4]=a11-b11
[2]:
_[1]=a10^2*a02-b20*b01^2
_[2]=a20*b01^2-a10^2*b02
_[3]=a20*a02-b20*b02
_[4]=a11-b11

```

```
[2]:
  [1]:
    _[1]=a02+b02
    _[2]=a20+b20
    _[3]=a11-b11
  [2]:
    _[1]=a02+b02
    _[2]=a20+b20
    _[3]=a11-b11
[3]:
  [1]:
    _[1]=b02
    _[2]=b11
    _[3]=a02
    _[4]=a11
  [2]:
    _[1]=b02
    _[2]=b11
    _[3]=a02
    _[4]=a11
[4]:
  [1]:
    _[1]=b11
    _[2]=a02^2+2*a02*b02+b02^2
    _[3]=a20*b02+a02*b20+2*b20*b02
    _[4]=a20*a02-b20*b02
    _[5]=a20^2+2*a20*b20+b20^2
    _[6]=a11
  [2]:
    _[1]=b11
    _[2]=a02+b02
    _[3]=a20+b20
    _[4]=a11
[5]:
  [1]:
    _[1]=b11
    _[2]=b20
    _[3]=a02
    _[4]=a11
  [2]:
    _[1]=b11
    _[2]=b20
    _[3]=a02
    _[4]=a11
[6]:
  [1]:
```

```
_ [1]=b11  
_ [2]=b20  
_ [3]=a20  
_ [4]=a11  
[2] :  
_ [1]=b11  
_ [2]=b20  
_ [3]=a20  
_ [4]=a11
```



# Literatura

- [1] W. W. Adams, P. Loustau, *An Introduction to Gröbner Bases*. Graduate Studies in Mathematics. Vol. 3. Providence, RI: American Mathematical Society, 1994.
- [2] E.A. Arnold, *Modular algorithms for computing Gröbner bases*. *J. Symbolic Comput.* **35** (2003) 403–419.
- [3] D.K. Arrowsmith, C.M. Place, *Dynamical Systems: Differential equations, maps and chaotic behaviour*. London - New York: Chapman & Hall, 1992.
- [4] B. Aulbach, B. Kieninger, *On Three Definitions of Chaos*, *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, **1** (2001) 23–37.
- [5] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey, *On Devaney's Definition of Chaos*, *Am. Math. Monthly*, **99** (1992), 332–334.
- [6] N.N. Bautin, *On the number of limit cycles which appear with the variation of coefficients from an equilibrium position of focus or center type*. *Math. Sb.* **30** (1952) 181–196; *Amer. Math. Soc. Transl.* **100** (1954) 181–196.
- [7] A. F. Beardon, *Iteration of Rational Functions*, New York: Springer-Verlag, 1991.
- [8] Y.N. Bibikov, *Local Theory of Nonlinear Analytic Ordinary Differential Equations*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 702, New York: Springer-Verlag, 1979.
- [9] G.D. Birkhoff, *Dynamical Systems*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 9. New York: American Mathematical Society, (1927) 295 pp.
- [10] T. Bountis, *Fundamental Concepts of Classical Chaos I*, *Open System and Information Dynamics*, (1995) 23–95.
- [11] R. Brown, L. O. Chua, *Clarifying Chaos: Examples and Counterexamples*, *Int. j. bifurc. chaos appl. sci. eng.* **6** (1996) 219–249.
- [12] B. Buchberger. *Ein Algorithmus zum Auffinden der Basiselemente des Restklassenringes nach einem nulldimensionalen Polynomideal*. PhD Thesis, Mathematical Institute, University of Innsbruck, Austria, 1965; An Algorithm for finding the basis elements of the residue class ring of a zero dimensional polynomial ideal. *J. Symbolic Comput.* **41** (2006) 475–511.
- [13] R. L. Burden, J. D. Faires, *Numerical Analysis*. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 1997.

- [14] J. Carr, *Applications of Center manifold Theory*. New York: Springer-Verlag, 1981.
- [15] J. Chavarriga, J. Giné, *Integrability of a linear center perturbed by a fifth degree homogeneous polynomial*. Publ. Mat. **41** (1997) 335–356.
- [16] J. Chavarriga, J. Giné, I.A. García, *Isochronous centers of a linear center perturbed by fourth degree homogeneous polynomial*. Bull. Sci. Math. **123** (1999) 77–96.
- [17] J. Chavarriga, M. Sabatini, *A survey of isochronous centers*. Qual. Theory Dyn. Syst. **1** (1999) 1-70.
- [18] X. Chen, V.G. Romanovski, W. Zhang, *Linearizability conditions of time-reversible quartic systems having homogeneous nonlinearities*. Nonlinear Anal. **69** (2008) 1525–1539.
- [19] X. Chen, V.G. Romanovski, W. Zhang, *Persistent centers of complex systems*. Bull. Sci math. **138** (2014) 110–123.
- [20] C. Christopher, *Estimating limit cycle bifurcations from centers*, Differential Equations with Symbolic Computations, Trends in Mathematics (2006) 23–35.
- [21] C. Christopher, J. Llibre, *Algebraic aspects of integrability for polynomial differential equations*, Qual. Theory Dyn. Syst. **1** (1999) 71–95.
- [22] C. Christopher, J. Llibre, *Integrability via invariant algebraic curves for planer polynomial differential systems*, Ann. Differ. Equ. **16** (2000) 5–19.
- [23] C. Christopher, P. Mardešić, C. Rousseau, *Normalizable, integrable, and linearizable saddle points for complex quadratic systems in  $\mathbb{C}^2$* . J. Dyn. Control Sys. **9** (2003) 311–363.
- [24] C. Christopher, C. Rousseau, *Nondegenerate linearizable centres of complex planar quadratic and symmetric cubic systems in  $\mathbb{C}^2$* . Publ. Mat. **45** (2001) 95-123.
- [25] C. CHRISTOPHER, C. ROUSSEAU, *Normalizable, integrable and linearizable saddle points in the Lotka-Volterra system*. Qual. Theory Dynam. Syst. **5** (2004) 11–61.
- [26] A. Cima, A. Gasull, J.C. Medrado, *On persistent centers*, Bull. Sci. Math. **133** (2009) 644–657.
- [27] D. Cox, J. Little, D. O’Shea, *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. New York: Springer, 3rd ed., 2007.
- [28] P. Cvitanović, R. Artuso, R. Mainieri, G. Tanner, G. Vattay, *Chaos: Classical and Quantum*, ChaosBook.org (Niels Bohr Institute, Copenhagen 2016) (online) (citirano 24. 3. 2018). Dostopno na naslovu: <http://chaosbook.org/>
- [29] V. I. Danilyuk, A. S. Shubé, *Distinguishing the cases of the center and focus for cubic systems with six parameters*. (Russian) Izv. Akad. Nauk Moldav. SSR Mat. (1990) 18–21.
- [30] G. Darboux, *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré (Mélanges)*, Bull. Sci. Math. 2ème série **2**, 60–90; 123–144; 151–200, 1878.

- 
- [31] W. Decker, S.Laplagne, G. Pfister, H.A. Schonemann, SINGULAR 3-1 library for computing the prime decomposition and radical of ideals, primdec.lib, 2010.
- [32] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Cambridge MA: Westview Press, 2003.
- [33] D. Dolićanin, G. V. Milovanović, V. G. Romanovski, *Linearizability conditions for a cubic system*, Applied Math. and Comp., (2007) 937–945.
- [34] H. Dulac, *Détermination et intégration d'une certaine classe d'équations différentielles ayant pour point singulier un centre*, Bull. Sci. Math. Sér. (2) **32** (1908) 230–252.
- [35] F. Dumortier, J. Llibre, J.C. Artés, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*. Berlin: Springer-Verlag, 2006.
- [36] V. F. Edneral, A. Mahdi, V. G. Romanovski, D. S. Shafer, *The center problem on a center manifold in  $\mathbb{R}^3$* , Nonlinear Anal. **75** (2012) 2614–2622.
- [37] S. N. Elaydi, *An introduction to difference equations*. Third edition. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2005. xxii+539 pp.
- [38] S. N. Elaydi, *Discrete chaos*. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2000.
- [39] B. Ferčec, *On integrability conditions and limit cycle bifurcations for polynomial systems*. Applied mathematics and computation, **263** (2015) 94–106.
- [40] B. Ferčec, X.Chen, V. Romanovski, *Integrability conditions for complex systems with homogeneous quintic nonlinearities*. Journal of applied analysis and computation, **1** (2011) 9–20.
- [41] B. Ferčec, W. Fernandez, M. Mencinger, R. Oliveira, *Linearizability of cubic weakly persistent centers*, Electronic journal of qualitative theory of differential equations, **2018** (2018) 1–27.
- [42] B. Ferčec, J. Giné, *Blow-up method to prove formal integrability for planar differential systems*, Journal of Applied Analysis and Computation, **8** (2018) 1811–1820.
- [43] B. Ferčec, J. Giné, Y. Liu, V. Romanovski, *Integrability conditions for Lotka-Volterra planar complex quartic systems having homogeneous nonlinearities*, Acta applicandae mathematicae. **124** (2013) 107–122.
- [44] B. Ferčec, J. Giné, V. Romanovski, V. F. Edneral, *Integrability of complex planar systems with homogeneous nonlinearities*. Journal of mathematical analysis and applications **434** (2016) 894–914.
- [45] B. Ferčec, A. Mahdi, *Center conditions and cyclicity for a family of cubic systems: Computer algebra approach*, Mathematics and Computers in Simulation, **87** (2013), 55–67.
- [46] B. Ferčec, M. Mencinger, *Isochronicity of centers at a center manifold*, AIP conference proceedings, 1468. Melville, N.Y.: American Institute of Physics, 2012, 148–157.

- [47] J.P. Francoise, Y. Yomdin, *Bernstein inequalities and applications to analytic geometry and differential equations*. J. Funct. Anal. **146** (1997) 185–205.
- [48] P. Gaspard, *Rössler systems*, Encyclopedia of Nonlinear Science (2005), 808–811.
- [49] P. Gianni, B. Trager, G. Zacharias, *Gröbner bases and primary decompositions of polynomials*. J. Symbolic Comput. **6** (1988) 146–167.
- [50] J. Giné, C. Christopher, M. Prešern, V.G. Romanovski, N.L. Shcheglova, *The resonant center problem for a  $2 : -3$  resonant cubic Lotka–Volterra system*, CASC 2012, Maribor, Slovenia (2012), 3–6. Lecture Notes in Computer Science **7442** (2012) 129–142.
- [51] J. Giné, Z. Kadyrsizova, Y. Liu, and V.G. Romanovski, *Linearizability conditions for Lotka–Volterra planar complex quartic systems having homogeneous nonlinearities* *Comput. Appl. Math.* **61** (2011) 1190–1201.
- [52] J. Giné, V. G. Romanovski, *Integrability conditions for Lotka–Volterra planar complex quintic systems*. Nonlinear Analysis: Real World Applications **11** (2010) 2100–2105.
- [53] P. Glendinning, *Stability, Instability and Chaos*, Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
- [54] T. Gravel, P. Thibault, *Integrability and linearizability of the Lotka–Volterra system with a saddle point with rational hyperbolicity ratio*. J. Differential Equations **184** (2002) 20–47.
- [55] R. Gregorič, *Abel–Ruffinijev izrek preko zank in permutacij*. Obzornik za matematiko in fiziko **63** (2016) 161–174.
- [56] G. M. Greuel, G. Pfister, H. A. Schönemann. *SINGULAR 3.0 A Computer Algebra System for Polynomial Computations*. Centre for Computer Algebra, University of Kaiserslautern (2005). <http://www.singular.uni-kl.de>.
- [57] M. Han, H. Zang, T. Zhang. *A new proof to Bautin’s theorem*. Chaos Solitons Fractals, **31** (2007) 218–223.
- [58] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, New York: Wiley, 1964.
- [59] J. Heidel, F. Zhang, *Nonchaotic and chaotic behavior in three-dimensional quadratic systems: five-one conservative cases*. Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **17** (2007) 2049–2072.
- [60] R. Hide, A. C. Skeldon, D. J. Acheson *A study of two novel self-exciting single-disk homopolar dynamos: theory*, Proc. R. Soc. Lond. A **452** (1996) 1369–1395.
- [61] M. W. Hirsch, S. Smale, R. L. Devaney, *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Second edition. Pure and Applied Mathematics, Amsterdam: Elsevier/Academic Press, 2004.
- [62] R. A. Holmgren, *A First Course in Discrete Dynamical Systems*, New York: Springer, 1996.

- [63] Yu. Ilyashenko, *Centennial history of Hilbert's 16th problem*. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **39** (2002) 301–354.
- [64] Yu. Il'yashenko, S. Yakovenko, *Lectures on analytic differential equations*. Graduate Studies in Mathematics. **86**, Providence: American Mathematical Society, 2008.
- [65] M. C. Irwin, *Smooth Dynamical Systems*, New York: Academic Press, 1980.
- [66] K. Janglajew, *On the reduction principle of difference equations*, Dyn. Contin. Discrete Impulsive Syst. **6** (1999) 381–388.
- [67] A. S. Jarrah, R. Laubenbacher, V. Romanovski, *The Sibirsky component of the center variety of polynomial differential systems*, J. Symbolic Comput. **35** (2003) 577–589.
- [68] A. Jebrane, H. Żoładek, *A note on higher order Melnikov functions*, Qual. Theory Dyn. Syst. **6** (2005) 273–287.
- [69] M. K. Kinyon, A. A. Sagle, *Differential Systems and Algebras*, Differential Equations, Dynamical systems and Control Science, **152** (1994) 115–141.
- [70] M. Kutnjak, *On chaotic dynamics of nonanalytic quadratic planar maps*, Nonlinear Phenom. Complex Syst. **10** (2007) 176–179.
- [71] M. Kutnjak, *On ideal structure in quadratic DDS in  $\mathbb{R}^2$* . 7th International Summer School/Conference at the University of Maribor, 29 June - 13 July 2008, Maribor, Slovenia. "Let's face chaos through nonlinear dynamics", (AIP conference proceedings), Melville: American Institute of Physics, **1076** (2008) 137–141.
- [72] M. Kutnjak, *Kaos v diskretnih homogenih kvadratičnih sistemih v ravnini*: doktorska disertacija. Maribor: Fakulteta za naravoslovje in matematiko, 2014.
- [73] J. Ladyman, J. Lambert, K. Wiesner, *What is a Complex System?*, Europ. J. for Philosophy of Sci. **3** (2013) 33–67.
- [74] V. Levandovskyy, A. Logar, V. G. Romanovski, *The cyclicity of a cubic system*, Open Syst. Inf. Dyn. **16** (4) (2009) 429–439.
- [75] V. Levandovskyy, G. Pfister, V. G. Romanovski, *Evaluating cyclicity of cubic systems with algorithms of computational algebra*. Commun. Pure Appl. Anal. **11** (2012), 2023–2035.
- [76] V. Levandovskyy, V.G. Romanovski, D.S. Shafer, *The cyclicity of a cubic system with nonradical Bautin ideal*. J. Differential Equations, **246** (2009) 1274–1287.
- [77] J. Li, *Hilbert's 16th problem and bifurcations of planar polynomial vector fields*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **13** (2003) 47–106.
- [78] N. Li, M. Han, V.G. Romanovski, *Cyclicity of some Liénard systems*, Comm. pure and applied analysis, **14** (2015) 2127–2150.
- [79] T.Y. Li, J. A. Yorke, *Period Three Implies Chaos*, Amer. Math. Monthly, **10** (1975) 985–992.

- [80] A. Liapounoff, *Problème général de la stabilité du mouvement*. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Sér. 2 9 (1907) 204–474. Reproduction in Annals of Mathematics Studies 17, Princeton: Princeton University Press, 1947, reprinted New York: Kraus Reprint Corporation, 1965.
- [81] J. Llibre, X. Zhang, *On the Darboux Integrability of Polynomial Differential Systems*, Qualitative Theory of Dynamical Systems, **11** (2012) 129–144.
- [82] N.G. Lloyd, J.M. Pearson, E. Sáez, I. Szántó, *A cubic Kolmogorov system with six limit cycles*, Comput. Math. Appl. **44** (2002) 445–455.
- [83] E. N. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmospheric Sci. **20** (1963) 130–141.
- [84] W. S. Loud, *Behaviour of the period of solutions of certain plane autonomous systems near centers*. Contributions to Differential Equations, **3** (1964) 21–36.
- [85] O. B. Lykova, *The reduction principle in Banach space*, Ukrainian Math. J., **23** (1971) 391–397.
- [86] K. E. Malkin, *Conditions for the center for a class of differential equations. (Russian)*, Izv. Vysš. Učben. Zaved. , **50** (1966) 104–114.
- [87] H. Maoan, *Bifurcation Theory of Limit Cycles*, Beijing: Science Press, 2013.
- [88] L. Markus, *Quadratic Differential Equations and Nonassociative Algebras*, Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press, 45 (1960) 185–213.
- [89] M. Mencinger, *Stabilnost kvadratičnih sistemov: doktorska disertacija*, Pedagoška fakulteta v Mariboru, Maribor, 2003.
- [90] M. Mencinger, *On quadratizations of homogeneous polynomial systems of ODEs*, Glas. Mat. Ser. III **50** (70) (2015) 163–182.
- [91] M. Mencinger, *On nonchaotic behavior in quadratic systems*. Nonlinear Phenom. Complex Syst. **9** (2006) 283–287.
- [92] M. Mencinger, B. Ferčec, *The center and cyclicity problems for some analytic maps*, Applied mathematics and computation **306** (2017) 73–85.
- [93] M. Mencinger, B. Ferčec, R. Oliveira, D. Pagon, *Cyclicity of some analytic maps*, Applied mathematics and computation **295** (2017) 114–125.
- [94] J. Milnor, *Dynamics in one complex variable: introductory lectures*, Braunschweig: Vieweg, 2000.
- [95] F. C. Moon, R. H. Rand, *Parametric stiffness control of flexible structures*, Jet Propulsion Laboratory Publication, **85-29** (1985) 329–342.
- [96] C. Oestreicher, *A history of chaos theory*, Dialogues Clin Neurosci. **9** (2007) 279 – 289.
- [97] H. O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe, *Chaos and Fractals, New Frontiers of Science*, New York: Springer-Verlag, 1992.

- 
- [98] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems: Texts in Applied Mathematics* 7. New York: Springer-Verlag, 3rd edition, 2001.
- [99] V.A. Pliss, *A reduction principle in the theory of stability of motion*. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **28** (1964) 1297–1324.
- [100] H. Poincaré, *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*. J. Math. Pures et. Appl. (Sér. 3) **7** (1881) 375–422; (Sér. 3) **8** (1882) 251–296; (Sér. 4) **1** (1885) 167–244; (Sér. 4) **2** (1886) 151–217.
- [101] D. Poland, *Cooperative catalysis and chemical chaos: a chemical model for the Lorenz equations*, Physica D, **65** (1993) 86–99.
- [102] T. Puu, *Nonlinear Economic Dynamics*, New York: Springer, 1997.
- [103] A. Reinfelds, K. Janglajew, *Reduction principle in the theory of stability of difference equations*, Discrete Contin. Dyn. Syst, **12** (2007) 864 – 874.
- [104] T. Rikitake, *Oscillations of a system of disc dynamos*. Proc. Cambridge Philos. Soc. **54** (1958) 89–105.
- [105] V. Romanovski, *Bifurcations of periodic points of some algebraic maps*, Math.Comput.Sci. **1** (2007) 253–265.
- [106] V.G. Romanovski, *Computational Algebra and Limit Cycle Bifurcations in Polynomial Systems*, Nonlinear Phenom. Complex Syst. **10** (2007) 79–85.
- [107] V. Romanovski, M. Han, *Critical period bifurcations of a cubic system*, Journal of Physics. A, Mathematical and general **36** (2003) 5011–5022.
- [108] V. G. Romanovski, M. Mencinger, B. Ferčec, *Investigation of center manifolds of 3-dim systems using computer algebra*, Program. comput. softw., **39** (2013) 67–73.
- [109] V. G. Romanovski, M. Prešern, *An approach to solving systems of polynomials via modular arithmetics with applications*, J. comput. appl. math. **2** (2011) 196–208.
- [110] V.G. Romanovski, *Time-Reversibility in 2-Dimensional Systems*. Open Systems & Information Dynamics **15** (2008) 359–370.
- [111] V. Romanovski, A. Rauh, *Local dynamics of some algebraic maps*, Dynam. Systems Appl. **7** (1998) 529–552.
- [112] V. G. Romanovski, M. Robnik, *The centre and isochronicity problems for some cubic systems*, J.Phys. A **34** (2001) 10267–10292.
- [113] V. Romanovski, D. Shafer, *On the center problem for  $p : -q$  resonant polynomial vector fields*, Bulletin of the Belgian Mathematical Society, **115** (2008) 871–887.
- [114] V.G. Romanovski, D.S. Shafer, *The Center and cyclicity Problems: A computational Algebra Approach*. Boston: Birkhäuser, 2009.

- [115] V.G. Romanovski, D.S. Shafer, *Time-reversibility in two-dimensional polynomial systems*, In: Trends in Mathematics, Differential Equations with Symbolic Computations (D. Wang and Z. Theng, Eds.), 67–84. Basel: Birkhäuser Verlag, 2005.
- [116] O. E. Rössler, *An equation for continuous chaos*, Phys. Lett. A **57** (1976) 397–398.
- [117] R. Roussarie, *Bifurcation of planar vector fields and Hilbert's sixteenth problem*. Progress in Mathematics, **164** Basel: Birkhäuser, 1998.
- [118] A. P. Sadovskii, *Solution of the center and focus problem for a cubic system of nonlinear oscillations*, Differ. Equ. **33** (1997) 236–244.
- [119] T. Shimoyama, K. Yokoyama, *Localization and primary decomposition of polynomial ideals*. J. Symbolic Comput. **22** (1996) 247–277.
- [120] K. S. Sibirskii, *On the conditions for existence of a center and focus. (Russian)*, Uč. Zap. Kišinevsk. Univ. **11** (1954) 115–117.
- [121] I. Vidav, F. Lebedinec *Algebra*. Ljubljana: DMFA, 2010.
- [122] S. Walcher, *Algebras and Differential Equations*, Palm Harbor: Hadronic Press, Inc., 1991.
- [123] D. Wang, *Elimination Methods*. New York: Springer-Verlag, 2001.
- [124] P.S. Wang, M.J.T. Guy, J.H. Davenport, *P-adic reconstruction of rational numbers*. ACM SIGSAM Bull. **16** (1982) 2–3.
- [125] S. Yakovenko, *A geometric proof of the Bautin theorem. Concerning the Hilbert Sixteenth Problem*. *Advances in Mathematical Sciences*. Amer. Math. Soc. Transl. **165** (1995) 203–219.
- [126] H. Żołądek, *On a certain generalization of Bautin's theorem*. Nonlinearity **7** (1994) 273–279.
- [127] H. Żołądek, *The problem of center for resonant singular points of polynomial vector fields*. J. Differential Equations **137** (1997) 94–118.



Prof. Dr. Matjaž Perc  
Fakulteta za naravoslovje in matematiko  
Univerza v Mariboru

V Mariboru, 15. 03. 2018

### **Recenzija monografije "*Algebraične metode v dinamičnih sistemih*"**

V monografiji avtorja sistematično in izčrpno obravnavata nekatere novejšje rezultate na interdisciplinarnem področju dinamičnih sistemov. To je področje, ki sega v matematiko, fiziko in tehniko, predvsem pa je pomembno v mehaniki in na področju elektroinženirstva.

Avtorja monografije sta raziskovalno aktivna v teoriji dinamičnih sistemov, predvsem na področju navadnih diferencialnih enačb, kar je tudi glavna tema pričujoče monografije. Obravnavani so problemi, ki so povezani s Hilbertovim 16. problemom. Poleg tega sta oba samostojno oziroma v sodelovanju s kolegi iz Brazilije raziskovala tudi analitične preslikave z linearnim členom, katerih fiksne točke imajo podobne značilnosti kot singularne točke v sistemih navadnih diferencialnih enačb (gre za iterativne sisteme s preslikavo  $f$ , za katero je  $f \circ f$  identiteti podobna preslikava). Ukvarjala sta se tudi s kvadratičnimi dinamičnimi sistemi – tudi z diskretnimi.

V monografiji avtorja obravnavata zvezne in diskretne polinomske dinamične sisteme s stališča teorije kolobarjev. Kolobarji, ki nastopajo v analizi sistema navadnih diferencialnih enačb ali pa diskretnega sistema, kakršni so obravnavani v tej monografiji, naravno nastopajo preko ničel polinomov, katerih spremenljivke so parametri obravnavanega sistema. Dejansko je potrebno obravnavati Poincarejevo preslikavo ter Lyapunove količine oziroma še bolje tako imenovane fokusne količine, ki nastopajo v totalnem odvodu potencialne rešitve sistema navadnih diferencialnih enačb. Družina polinomov iz nekega kolobarja določa ideal. Analiza tega ideala je ključna pri obravnavi glavnih dinamičnih lastnosti sistemov navadnih diferencialnih enačb, ki vsebujejo nehiperbolično singularnost. Glavna tema monografije je zveza med algebro (ideali v polinomskih kolobarjih) in geometrijo (raznoterostmi), ki naravno nastopa pri problemih v dinamičnih sistemih. Povezava med teorijo kolobarjev (polinomskih idealov) in geometrijo (afinimi raznoterostmi) temelji na Hilbertovih rezultatih: tako imenovanem izreku o bazi, na eliminacijski teoriji in tako imenovanem izreku o ničlah ("Nullstellensatz").

Pri obravnavi številnih problemov, ki so prisotni v teoriji (sistemov) navadnih diferencialnih enačb in diskretnih sistemov, ki izhajajo iz preslikav  $f$ , katerih  $f \circ f$  je identiteti podobna preslikava, sta se v monografiji avtorja omejila na celostno in kritično obravnavo problema centra in fokusa ter na problem bifurkacije limitnih ciklov.

V monografiji so kot primeri predstavljeni nekateri tipični problemi zvezne in diskretne dinamike, ki očitno spadajo med novejšje rezultate v stroki oziroma predstavljajo odprte probleme. Algebraične metode in delno tudi teorijo analitičnih funkcij avtorja uporabita pri obravnavi nelinearnih dinamičnih sistemov s poudarkom na problemu centra in fokusa ter bifurkacijah limitnih ciklov.

Monografija je razdeljena na tri poglavja. V prvem poglavju je na kratko predstavljena teorija polinomskih idealov in njihovih raznoterosti ter reševanje (nelinearnih) polinomskih sistemov enačb, ki nastopajo pri obravnavi nekaterih problemov v sistemih diferencialnih enačb. Zato v tem poglavju obravnata Gröbnerjeve baze in osnove eliminacijskih idealov ter radikalne ideale in nekatere operacije nad raznoterostmi.

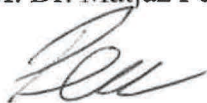
Drugo poglavje je namenjeno kratkemu pregledu teorije dinamičnih sistemov. Avtorja obravnava nekatere pojme iz teorije navadnih diferencialnih enačb ter diskretnih sistemov. Omejita se na pojme, ki jih potem obravnava v tretjem poglavju, kjer so predstavljeni primeri določevanja centralne raznoterosti, kako poiskati fokusne količine in posledično Bautinov ideal in, kako obdelati bifurkacije limitnih ciklov obravnavane družine sistemov.

Knjige, ki obravnavajo podobno tematiko so zelo redke, sploh v slovenščini. V svetovnem merilu je podobna tematika obravnavana v knjigi profesorja Romanovskega in Shaferja. Pričujoča monografija bo zelo dobrodošla, še posebej zato, ker je vsebinsko in jezikovno odlično zasnovana. Avtorja uporabljata terminologijo, ki je matematično korektna, hkrati pa omogoča razumevanje tudi za ostale raziskovalce. Matematično korektnost lahko posplošimo na celoten znanstveni aparat.

V delu je obravnavana celotna relevantna literatura iz obravnavanega področja. Poleg tega so obdelane tudi nekatere izvirne ideje, ki so delno že objavljene v uglednih tujih znanstvenih revijah. Ugotavljam, da gre za izvirno delo. Monografija bo uporabna predvsem kot referenčno delo, ter kot knjiga za strokovno javnost, zelo verjetno pa tudi kot dopolnilno delo za podiplomske študente matematike in fizike.

Ugotavljam, da delo vsebuje vse elemente znanstvene monografije, tako da toplo priporočam financiranje ter objavo tega dela kot znanstveno monografijo.

Prof. Dr. Matjaž Perc



Matej Mencinger, Brigita Ferčec:  
**Algebraične metode v dinamičnih sistemih**

*Recenzija*

Teorija dinamičnih sistemov je veja matematike, ki opisuje časovni razvoj kompleksnih sistemov, podanih z ustreznimi diferencialnimi oziroma diferenčnimi enačbami. Takšni sistemi se pojavljajo vsepovsod – od naravoslovja (fizika, kemija, molekularna biologija, meteorologija) in tehnike (mehanika, teorija upravljanja, robotika) prek družboslovja (psihologija, sociologija, ekonomija) do interdisciplinarnih področij (biomehanika, nevroznanost). Gre torej za pomembno teorijo z zelo široko uporabnostjo.

Monografija Mateja Mencingerja in Brigite Ferčec o algebraičnih pristopih k raziskavam dinamičnih sistemov je izvirno delo, namenjeno tako raziskovalcem teorije dinamičnih sistemov kot tudi vsem uporabnikom njenih rezultatov na številnih že omenjenih področjih znanosti in tehnike.

Knjiga je razdeljena na tri glavne dele. V prvem delu avtorja predstavi teorijo kolobarjev polinomov več spremenljivk nad komutativnimi obsegi, njihove ideale in pripadajoče geometrične objekte – afine raznoterosti. Pomembno orodje za delo s polinomskimi ideali in afinimi raznoterostmi so *Gröbnerjeve baze*, ki jih računamo z *Buchbergerjevim algoritmom*. Gröbnerjeve baze omogočajo avtomatično reševanje številnih računskih problemov od eliminacije spremenljivk, reševanja sistemov polinomskih enačb in implicitizacije afinih raznoterosti prek avtomatičnega dokazovanja geometrijskih izrekov in reševanja kombinatoričnih optimizacijskih problemov do izvajanja računskih operacij s polinomskimi ideali, dekompozicije afine raznoterosti na ireducibilne komponente in dekompozicije polinomskega ideala na primarne ideale. Na koncu tega dela avtorja predstavi programski paket *Singular*, ki vsebuje tako implementacijo Buchbergerjevega algoritma kakor tudi implementacije algoritmov za reševanje pravkar naštetih računskih problemov. Drugi del monografije prinaša kratek pregled teorije dinamičnih sistemov in definicije pomembnih pojmov, kot so določanje centralne raznoterosti, foku-sne količine, časovna in posplošena reverzibilnost, Bautinov ideal in bifurkacije limitnih ciklov, ter problemov, povezanih z njimi. V tretjem delu avtorja uporabita algebraična in računalniška orodja, predstavljena v prvem delu, pri reševanju problemov, opisanih v drugem delu. Tu najdemo veliko njihovih originalnih rezultatov, kot so rešitev problema centra in fokusa v  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}^3$ , kvadratizacija homogenih polinomskih sistemov navadnih diferencialnih enačb, določanje limitnih ciklov reda 2, potrebni in zadostni pogoji za nastop centra v posebnih sistemih, ki izhajajo iz posplošene Zoladekove enačbe itd.

Monografija predstavlja učinkovit interdisciplinaren pristop k reševanju problemov teorije in prakse dinamičnih sistemov z orodji komutativne algebre in sodobne programske opreme za simbolno in algebraično računanje. Dobrodošla bo tako strokovni javnosti kakor tudi kot dopolnilno gradivo pri visokošolskem študiju, še posebej, ker je – če odštejemo nekaj diplomskih del – večina gradiva tokrat prvič predstavljena v slovenskem jeziku. Prav tako monografija vsebuje tudi številne izvirne rezultate avtorjev, ki so delno že bili objavljeni v uglednih mednarodnih znanstvenih revijah. Zato priporočam njeno objavo.

V Ljubljani, 21. marca 2018

  
prof. dr. Marko Petkovšek





Univerza v Mariboru

---

Fakulteta za gradbeništvo,  
prometno inženirstvo in arhitekturo

Nekatere probleme v teoriji dinamičnih sistemov lahko obravnavamo s pomočjo zveze med algebro in geometrijo. V monografiji se omejimo na sisteme navadnih diferencialnih enačb in na diskretne sisteme, ki izhajajo iz preslikav  $f$ , za katere je  $f \circ f$  identiteti podobna preslikava. V teh sistemih obravnavamo izključno problem centra in fokusa in problem bifurkacije limitnih ciklov.

Občutek »laične javnosti«, da je za sisteme NDE v ravnini že vse raziskano je daleč od dejanskega stanja. Kljub zmogljivim sodobnim računalnikom in programskim paketom, kot je na primer Mathematica, Matlab, Singular še vedno ne moremo odgovoriti na številna vprašanja, ki so povezana s Hilbertovim 16. problemom.