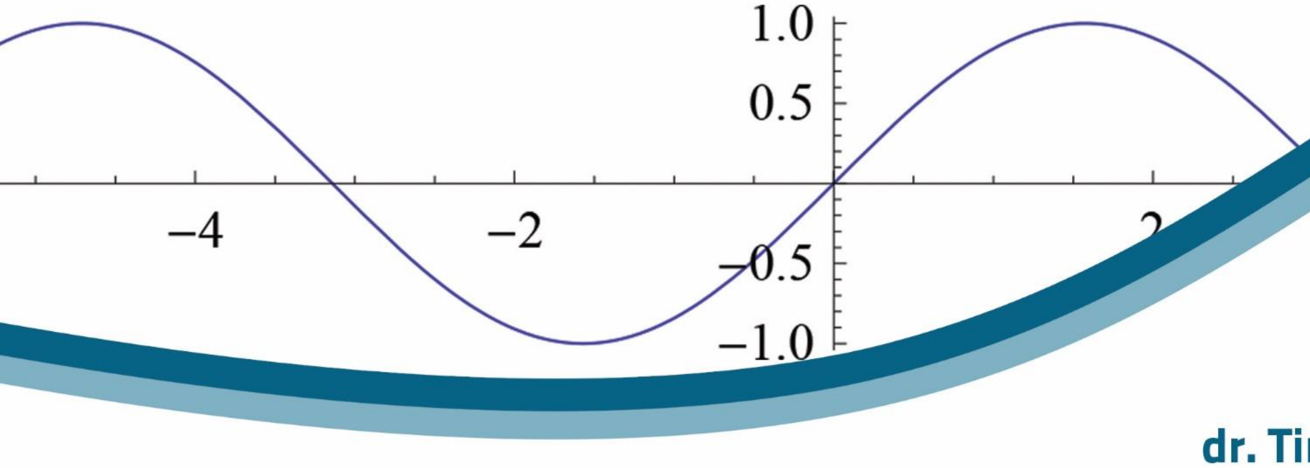
MATEMATIKA 1

Skripta



dr. Tina SOVIČ
dr. Simon ŠPACAPAN

Univerzitetna založba
Univerze v Mariboru

Univerza v Mariboru

Fakulteta za gradbeništvo,
prometno inženirstvo in arhitekturo

MATEMATIKA 1

Skripta

Avtorja:
asist. dr. Tina Sovič
izr. prof. dr. Simon Špacapan

Maribor, april 2018

Naslov: Matematika 1

Podnaslov: Skripta

Avtorja: asist. dr. Tina Sovič (Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo)
izr. prof. dr. Simon Špacapan (Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo)

Recenzenta: red. prof. dr. Borut Zalar (Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo)
doc. dr. Rija Erveš (Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo)

Grafične priloge: Avtorja

Tehnični urednik: doc. dr. Andrej Tibaut (Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo)

Oblikovalce ovitka: Jan Perša (Univerzitetna založba Univerze v Mariboru)

Izdajateljica:
Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo
Smetanova ulica 17, 2000 Maribor, Slovenija
http://www.fgpa.um.si, fgpa@um.si

Založnik:
Univerzitetna založba Univerze v Mariboru
Slomškov trg 15, 2000 Maribor, Slovenija
http://press.um.si, zalozba@um.si

Izdaja: Prva izdaja.

Vrsta publikacije: E-publikacija

Dostopno na: http://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/331

Izid: Maribor, april 2018

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Univerzitetna knjižnica Maribor

51(075.8)

SOVIČ, Tina, 1986-
Matematika 1 [Elektronski vir] : skripta / avtorja Tina Sovič, Simon Špacapan. - 1. izd. - El. učbenik. - V Mariboru : Univerzitetna založba, 2018

Način dostopa (URL): http://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/331

ISBN 978-961-286-156-8

doi: org/10.18690/978-961-286-156-8
1. Špacapan, Simon
COBISS.SI-ID 94349569

ISBN: 978-961-286-156-8 (PDF)

DOI: https://doi.org/10.18690/978-961-286-156-8

Cena: Brezplačen izvod.

Odgovorna oseba založnika: red. prof. dr. Žan Jan Oplotnik, prorektor Univerze v Mariboru

Matematika 1

TINA SOVIČ IN SIMON ŠPACAPAN

Povzetek Skripta Matematika 1 zajema osnovna znanja matematike, ki ga potrebujejo študentje visokošolskih programov Fakultete za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo. V prvem delu skripte so predstavljena poglavja iz področja analize, v drugem delu pa poglavja iz področja algebre. Natančneje, začnemo z zaporedji, kjer opredelimo osnovne pojme, kot so omejenost, monotonost in konvergenca zaporedja. Sledi poglavje, ki na kratko predstavi kompleksna števila in operacije med njimi. Nato so opisane osnovne elementarne funkcije ter predstavljena pojma limita funkcije in zveznost. Definiramo odvod funkcije in pokažemo njegovo uporabo pri določanju lokalnih ekstremov. Odvodu sledi definicija integrala skupaj z njegovo uporabo. Prvi del skripte zaključuje poglavje o funkcijah dveh spremenljivk. V drugem delu predstavimo geometrijske vektorje in operacije med njimi. V nadaljevanju obravnavamo premice in ravnine v prostoru. Skripto zaključimo s poglavjem o matrikah, kjer opišemo osnovne matrične operacije, sisteme enačb in matriko linearne preslikave.

Ključne besede: • zaporedja • funkcije • odvod • integral • vektorji • sistemi enačb • matrike •

NASLOVA AVTORJEV: dr. Tina Sovič, asistentka, Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo, Smetanova ulica 17, 2000 Maribor, Slovenija, e-pošta: tina.sovic@um.si. dr. Simon Špacapan, izredni profesor, Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo, Smetanova ulica 17, 2000 Maribor, Slovenija, e-pošta: simon.spacapan@um.si.

DOI https://doi.org/10.18690/978-961-286-156-8 ISBN 978-961-286-156-8

Dostopno na: http://press.um.si

Kazalo

Predgovor

Skripta je namenjena študentom prvega letnika visokošolskega programa gradbeništvo Univerze v Mariboru. Poglavja, ki so obravnavana v skripti so iz področja algebre in analize, in sledijo učnemu načrtu predmeta Matematika 1.

Študent naj uporablja skripto pri učenju in utrjevanju snovi. Ob tem naj omenimo, da skripta ne vsebuje vseh podrobnosti, kot so recimo dokazi in izpeljave posameznih trditev in izrekov ter rešitve primerov, za katere želimo, da jih študent osvoji pri predmetu Matematika 1. Zato skripta lahko služi zgolj kot vodilo in dopolnilo predavanjam, kjer je snov predstavljena v celoti in kjer so posamezni izreki tudi izpeljani in pospremljeni s številnimi opombami, ki jih razlagajo.

Zaporedja

Zaporedje je funkcija iz množice naravnih števil $\mathbb{N}$ v množico realnih števil $\mathbb{R}$:

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

$a(n)$ imenujemo **n-ti člen zaporedja** in pišemo

$$a(n) = a_n.$$

Zaporedja večkrat zapisujemo tudi tako, da navedemo prvih nekaj členov:

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots).$$

Zgled 1. *Navedimo nekaj znanih primerov zaporedij:*

a) *zaporedje recipročnih vrednosti* $a_n = \frac{1}{n}$, *oziroma* $a_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$

b) *alternirajoče zaporedje recipročnih vrednosti* $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, *oziroma* $a_n = \left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots\right)$

c) *aritmetično zaporedje:* $a_{n+1} = a_n + d$, $a_1, d \in \mathbb{R}$

č) *geometrijsko zaporedje:* $a_{n+1} = qa_n$, $a_1, q \in \mathbb{R}$

d) *Fibonaccijevo zaporedje:* $a_1 = a_2 = 1$ *in* $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ *za* $n \geq 3$

Zaporedje (a_n) je **naraščajoče**, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$a_{n-1} \leq a_n, \text{ oziroma } a_n - a_{n-1} \geq 0.$$

Zaporedje (a_n) je **padajoče**, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$a_{n-1} \geq a_n, \text{ oziroma } a_n - a_{n-1} \leq 0.$$

Zaporedje je **monotono**, če je naraščajoče ali padajoče.

Opomba 1.1. *Če v zgornjih definicijah neenakosti zamenjamo za stroge neenakosti, dobimo definiciji strogo naraščajočega in strogo padajočega zaporedja.*

Primer 1. *Ali je aritmetično zaporedje monotono?*

Primer 2. *Ali je geometrijsko zaporedje monotono?*

Primer 3. *Ali je Fibonaccijevo zaporedje monotono?*

Primer 4. *Pokaži, da je zaporedje* $a_n = \frac{1+n}{2+3n}$ *monotono.*

Število M je **zgornja meja** zaporedja (a_n), če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$a_n \leq M.$$

Število m je **spodnja meja** zaporedja (a_n), če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$m \leq a_n.$$

Zaporedje, ki ima kakšno zgornjo mejo imenujemo **navzgor omejeno zaporedje**.
Zaporedje, ki ima kakšno spodnjo mejo imenujemo **navzdol omejeno zaporedje**.
Zaporedje, ki je navzdol in navzgor omejeno, imenujemo **omejeno zaporedje**.

Najmanjšo zgornjo mejo zaporedja (a_n) imenujemo **natančna zgornja meja** zaporedja ali **supremum** zaporedja. Označimo ga z

$$\sup(a_n).$$

Največjo spodnjo mejo zaporedja (a_n) imenujemo **natančna spodnja meja** zaporedja ali **infimum** zaporedja. Označimo ga z

$$\inf(a_n).$$

Opomba 1.2. *Iz zgoraj zapisanih definicij sledi*

$$m \leq \inf(a_n) \leq a_n \leq \sup(a_n) \leq M$$

za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Primer 5. *Naj bo* $a_n = \frac{2-3n}{1+n}$.

a) Če obstaja, zapiši kakšno spodnjo in kakšno zgornjo mejo zaporedja (a_n).

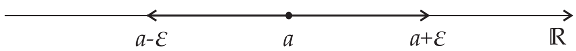
b) Poišči supremum in infimum zaporedja, če obstajata.

Primer 6. *Preuči monotonost in omejenost splošnega geometrijskega zaporedja glede na lastnosti parametra* q.

Naj bo $\varepsilon > 0$ poljubno majhno število. Odprti interval

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

imenujemo ε**-okolica** števila a.



Število $a \in \mathbb{R}$ je **limita zaporedja** (a_n), če velja

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Če je a limita zaporedja (a_n), pišemo

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

Opomba 1.3. *Število* $a \in \mathbb{R}$ *je limita zaporedja* (a_n)*, če so od nekega člena naprej vsi členi zaporedja znotraj* ε*-okolice števila* a.

Če zaporedje ima limito, pravimo, da je **konvergentno**. V nasprotnem primeru rečemo, da je zaporedje **divergentno**.

Število $s \in \mathbb{R}$ je **stekališče** zaporedja (a_n), če vsaka okolica števila s vsebuje neskončno (a ne nujno vseh) členov zaporedja (a_n).

Izrek 1.4. *Če ima zaporedje več kot eno stekališče, je divergentno.*

Izrek 1.5. *Vsako monotono in omejeno zaporedje je konvergentno.*

Trditev 1.6. *Če je (a_n) naraščajoče in omejeno zaporedje, potem (a_n) konvergira k supremumu. Če je (a_n) padajoče in omejeno zaporedje, potem (a_n) konvergira k infimumu.*

Zgled 2. *Zaporedje*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

je konvergentno in velja $\lim_{n\to\infty} a_n = e \approx 2.71828$.

Izrek 1.7. *Naj bosta (a_n) in (b_n) konvergentni zaporedji in naj velja $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ ter $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Potem velja:*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = AB,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}.$$

Opomba 1.8. *Zadnja enakost izreka velja, če je $b_n \neq 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in $B \neq 0$.*

Primer 7. *Pokaži, da je $a_n = \frac{n}{n+1}$ konvergentno zaporedje.*

Primer 8. *Ali je zaporedje $a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$ konvergentno?*

Primer 9. *Izračunaj limito zaporedja $a_n = \frac{3n}{7n+4}$.*

Primer 10. *Poišči stekališča zaporedja*

$$(a_n) = \left(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{6}, \dots\right).$$

Primer 11. *Naj bo $a_n = \frac{1}{n^2}$. Od katerega člena naprej so vsi členi zaporedja v $\frac{1}{10}$-okolici točke 0 ?*

Kompleksna števila

2.1 Definicija

Kompleksna števila so oblike

$$z = x + iy,$$

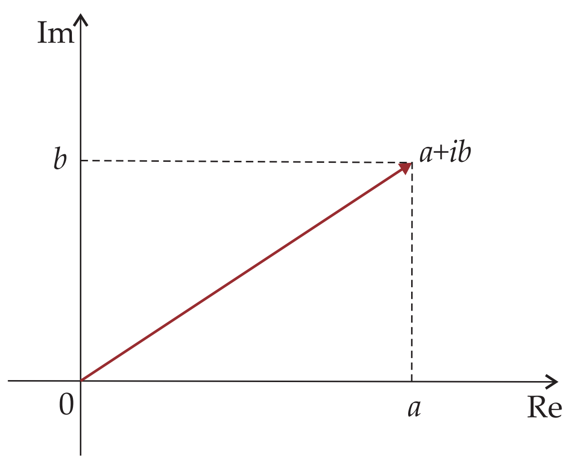
kjer sta x in y realni števili. Število x imenujemo **realni del** kompleksnega števila z in ga označimo z $\mathrm{Re}(z)$, y imenujemo **imaginarni del** kompleksnega števila z in ga označimo z $\mathrm{Im}(z)$, i pa je **imaginarna enota,** za katero velja

$$i^2 = -1.$$

Množico kompleksnih števil označujemo s $\mathbb{C}$. Torej:

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Kompleksna števila ponazorimo kot točke v kompleksni ravnini:



2.2 Računske operacije v $\mathbb{C}$

2.2.1 Seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje

Naj bo $z_1 = a_1 + ib_1$ in $z_2 = a_2 + ib_2$. Tedaj definiramo

$$
\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2),\\
z_1 - z_2 &= (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2),\\
z_1 \cdot z_2 &= a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_2b_1 + a_1b_2),\\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}.
\end{aligned}
$$

2.2.2 Konjugiranje

Naj bo $z = a + ib$. Tedaj kompleksno število

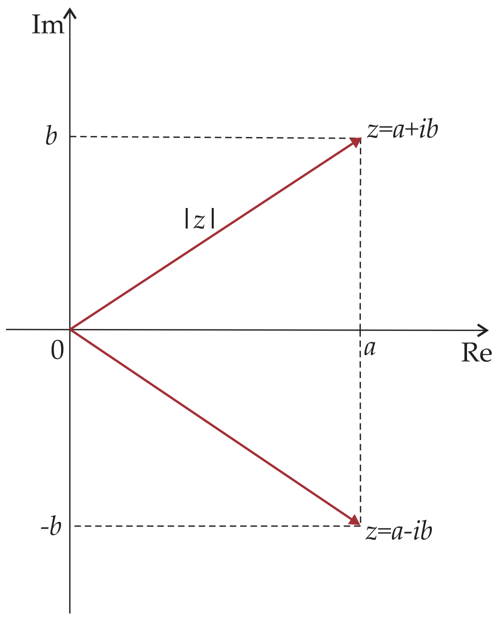
$$\bar{z} = a - ib$$

imenujemo **konjugirano** število števila z.

2.2.3 Absolutna vrednost

Naj bo $z = a+ib$. Tedaj $|z|$ označuje absolutno vrednost kompleksnega števila z, ki je enaka razdalji kompleksnega števila z do koordinatnega izhodišča (če nanj gledamo, kot na točko v kompleksni ravnini). Iz Pitagorovega izreka sledi:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



Primer 12. *V kompleksni ravnini predstavi množico točk:*

a) $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Im}(z) < 5\}$

b) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z) + 1\}$

c) $\{z \in \mathbb{C} \mid \ |z| = 2\}$

č) $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 3\}$

d) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geq 0 \text{ in } |z| \leq 4\}$

Primer 13. *Naj bo $z_1 = 2 + 3i$ in $z_2 = 1 - i$. Izračunaj:*

a) $z_1 - 2z_2$

b) $z_1 \cdot z_2$

c) $\frac{z_1}{z_2}$

č) $|\bar{z}_1 + z_2|$

d) $(3z_1 + \bar{z}_2)z_1$

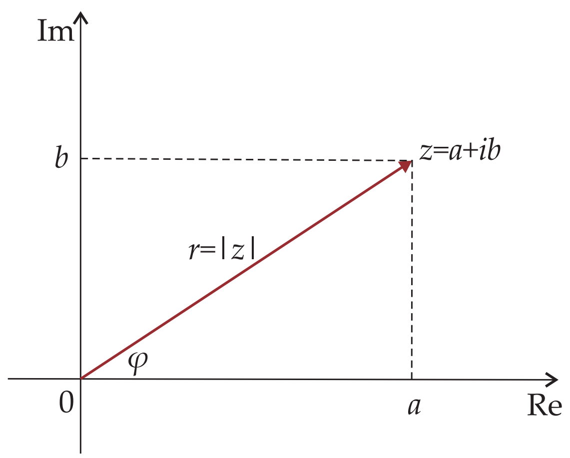
2.3 Polarni zapis

Kompleksno število $z = a + ib$ lahko zapišemo v polarni obliki

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

kjer je $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ in

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a} & \text{če je } a > 0, \\ \pi + \arctan\frac{b}{a} & \text{če je } a < 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{če je } a = 0 \text{ in } b \geq 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{če je } a = 0 \text{ in } b < 0. \end{cases}$$



Primer 14. *Število z zapiši v polarni obliki in ga predstavi v kompleksni ravnini.*

a) $z = 2 + 3i$

b) $z = -5 + i$

c) $z = -4i$

Trditev 2.1. *Naj bo* $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ *in* $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. *Tedaj je*

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right).$$

Trditev 2.2. *Naj bo* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *in* $n \in \mathbb{Z}$. *Tedaj je*

$$z^n = r^n \left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right).$$

2.3.1 Koreni kompleksnih števil

Naj bo $u \in \mathbb{C}$. Tedaj je $\sqrt[n]{u}$ je vsako kompleksno število z, za katero velja $z^n = u$. Torej:

$$\sqrt[n]{u} = z \Leftrightarrow z^n = u.$$

Trditev 2.3. *Naj bo* $u = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. *Tedaj ima enačba* $\sqrt[n]{u} = z$ *rešitve*

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right),$$

pri čemer ima parameter vrednosti $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. *Skupno torej obstaja* n *različnih rešitev.*

Primer 15. *Naj bo* $z_1 = 2 + 3i$ *in* $z_2 = 1 - i$. *Izračunaj:*

a) z_1^5

b) $z_1^8 z_2^{-1}$

c) oba korena $\sqrt{z_1}$

č) vse štiri korene $\sqrt[4]{z_2}$

Primer 16. *Poišči vse možne rešitve spodnjih enačb:*

a) $z^2 = 4i$

b) $z^3 = 2 - 3i$

c) $z^3 + z^2 - 2z = 0$

Funkcije

3.1 Definicija in osnovne lastnosti funkcije

Funkcija $f : A \to B$ je predpis, ki vsakemu elementu iz množice A priredi natanko en element iz množice B. V tem poglavju bomo obravnavali funkcije f, za katere je $A, B \subseteq \mathbb{R}$ in jih imenujemo **realne funkcije**. Če funkcija f številu $x \in A$ priredi število $y \in B$, tedaj pišemo

$$y = f(x)$$

in y imenujemo **slika** elementa x ali **funkcijska vrednost** v točki x.
Graf realne funkcije f je množica točk

$$\Gamma_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\right\}.$$

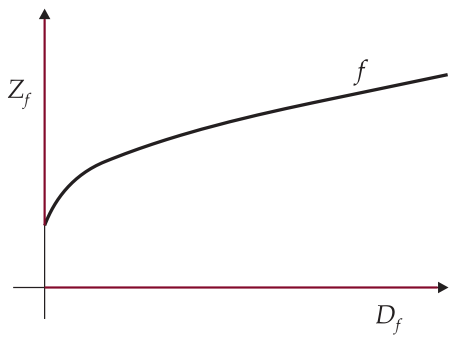
Naravno definicijsko območje realne funkcije f je množica D_f vseh $x \in \mathbb{R}$, za katere je predpis f definiran.
Zaloga vrednosti funkcije f je množica vseh rezultatov predpisa f:

$$Z_f = \{f(x) \,|\, x \in A\}.$$

Opomba 3.1. *Za realno funkcijo f lahko definicijsko območje in zalogo vrednosti odčitamo iz grafa funkcije:*

- *D_f je projekcija grafa funkcije f na os x.*
- *Z_f je projekcija grafa funkcije f na os y.*

Zgled 3. *Na sliki je graf funkcije $f(x) = 1 + \sqrt{x}$. Razberemo lahko, da je $D_f = [0, \infty)$ in $Z_f = [1, \infty)$.*



Funkcija $f : A \to B$ je **injektivna**, če se različna elementa iz množice A preslikata v različna elementa iz množice B:

$$\forall a_1, a_2 \in A : a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)\,.$$

Funkcija $f : A \to B$ je **surjektivna**, če je vsak element iz množice B slika kakšnega elementa iz množice A:

$$\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b\,.$$

Funkcija $f : A \to B$ je **bijektivna**, če je injektivna in surjektivna hkrati.

Naj bosta $f : B \to C$ in $g : A \to B$ funkciji. **Sestavljena funkcija** ali **kompozitum funkcij** f in g je funkcija $f \circ g$ definirana s predpisom

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))\,.$$

Opomba 3.2. *Kompozitum $f \circ g$ funkcij f in g je definiran za tiste $x \in D_g$, za katere je $g(x) \in D_f$.*

Funkcija $f^{-1} : B \to A$ je **obrat** ali **inverz** funkcije $f : A \to B$, če velja

$$y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x\,.$$

Opomba 3.3. *Inverz f^{-1} funkcije f je definiran, če je f bijektivna.*

Primer 17. *Določi sestavljeni funkciji $f \circ g$ in $g \circ f$, ter njuni definicijski območji in zalogi vrednosti.*

a) $f(x) = x + 3$, $g(x) = 2x - 5$

b) $f(x) = x^2 - 3$, $g(x) = \frac{2x-5}{x+3}$

c) $f(x) = e^x$, $g(x) = \sin(x)$

Primer 18. *Določi inverz funkcije f.*

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 3$

b) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 1$

3.2 Pregled elementarnih funkcij

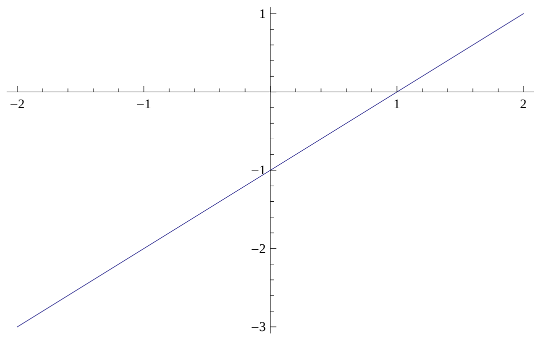
3.2.1 Linearna funkcija

Linearna funkcija je funkcija definirana s predpisom

$$f(x) = kx + n,$$

kjer sta $k, n \in \mathbb{R}$.

Graf linearne funkcije je premica.



Premica skozi točki $T_1(x_1, y_1)$ in $T_2(x_2, y_2)$ ima smerni koeficient

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Primer 19. *Zapiši enačbo premice, ki gre skozi točki T_1 in T_2.*

a) $T_1(3, 2)$, $T_2(-1, 3)$

b) $T_1(1, 2)$, $T_2(4, 2)$

c) $T_1(4, -2)$, $T_2(4, 5)$

3.2.2 Kvadratna funkcija

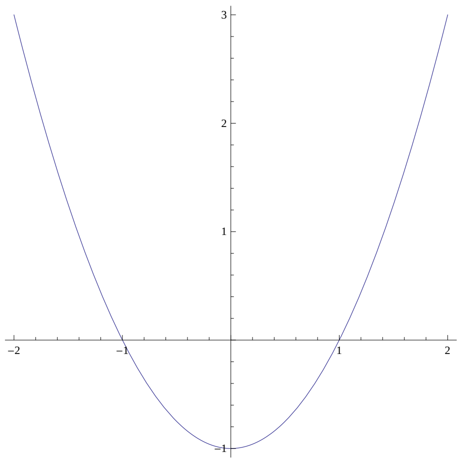
Kvadratna funkcija je funkcija definirana s predpisom

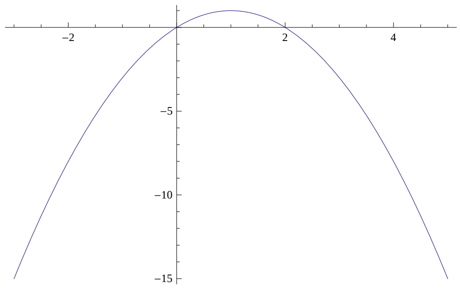
$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

kjer so $a, b, c \in \mathbb{R}$ in $a \neq 0$.

Graf kvadratne funkcije je parabola.

Diskriminanta: $D = b^2 - 4ac$
Ničle: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$





Primer 20. *Nariši graf kvadratne funkcije f.*

a) $f(x) = x^2 + 5x + 6$

b) $f(x) = -x^2 - 3x + 4$

c) $f(x) = x^2 + x + 1$

č) $f(x) = -2x^2 - 4x - 2$

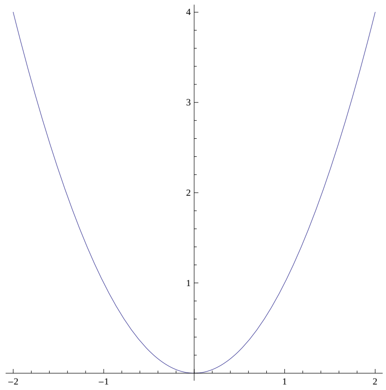
3.2.3 Potenčna funkcija

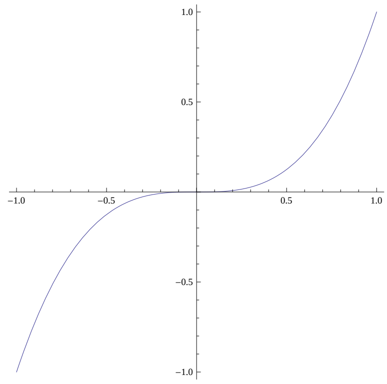
Potenčna funkcija je funkcija definirana s predpisom

$$f(x) = x^n,$$

kjer je $n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ in $\mathbb{Z}$ označuje množico celih števil, torej $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$.

$$D_f = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{za } n > 0, \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{za } n < 0. \end{cases}$$





3.2.4 Korenska funkcija

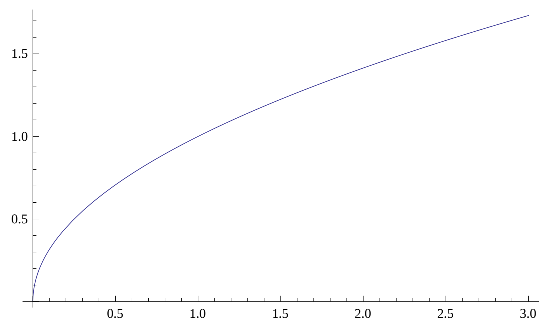
Korenska funkcija je funkcija definirana s predpisom

$$f(x) = \sqrt[n]{x},$$

kjer je $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.
Pri tem velja:

$$\sqrt[n]{x} = y \iff x = y^n$$

$$D_f = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{za lih } n, \\ [0, \infty) & \text{za sod } n. \end{cases}$$



Opomba 3.4. *Korenska funkcija je inverzna potenčni funkciji.*

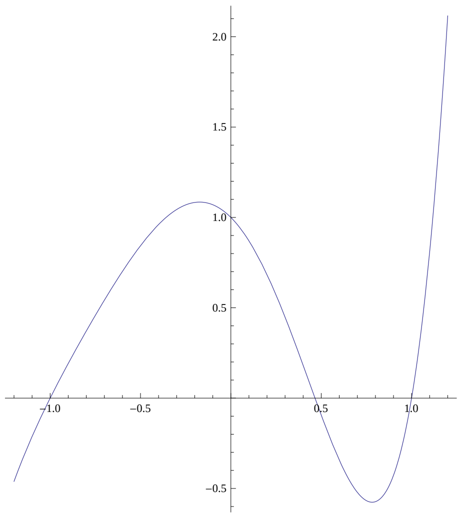
3.2.5 Polinomi

Polinom stopnje n je funkcija definirana s predisom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

kjer $a_n \neq 0$ in $a_i \in \mathbb{R}$ za $i = 0, 1, \ldots, n$.

$D_f = \mathbb{R}$.



Izrek 3.5. *Polinom f stopnje n ima največ n realnih ničel. Natančneje, polinom f stopnje n ima natanko n kompleksnih ničel, od katerih so nekatere lahko tudi večkratne.*

Posledica tega izreka je, da lahko poljuben polinom stopnje n zapišemo v obliki:

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

kjer so $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ ničle polinoma f.

Opomba 3.6. *Linearna in kvadratna funkcija sta le posebna primera polinoma.*

Primer 21. *Skiciraj graf polinoma f.*

a) $f(x) = x^3 - x$

b) $f(x) = x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 12x$

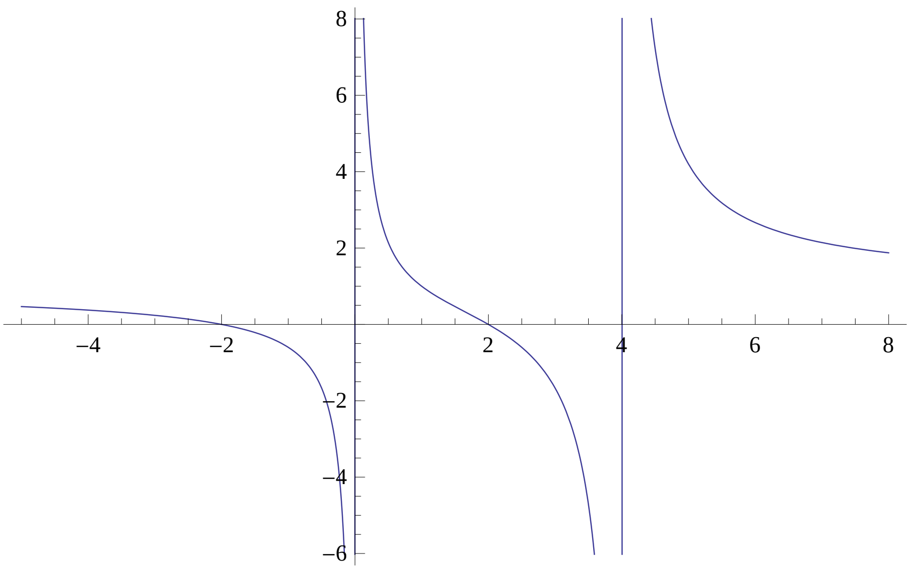
3.2.6 Racionalna funkcija

Racionalna funkcija je funkcija definirana s predpisom

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

kjer sta p in q polinoma.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x \mid q(x) = 0\}$.



Asimptota racionalne funkcije je kvocient, ki ga dobimo pri deljenju polinoma p s polinomom q.

Primer 22. *Skiciraj graf racionalne funkcije f in zapiši njeno asimptoto.*

a) $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$

b) $f(x) = \frac{2x-6}{x+2}$

c) $f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x+1}$

3.2.7 Eksponentna funkcija

Eksponentna funkcija je funkcija definirana s predpisom

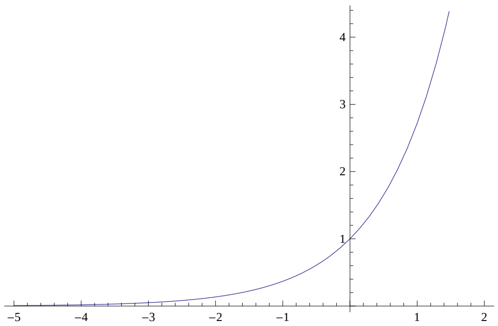
$$f(x) = a^x,$$

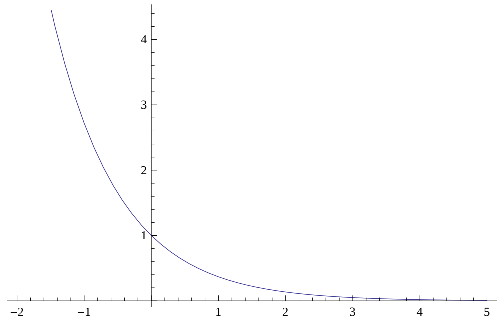
kjer je $a > 0$ in $a \neq 1$.

$D_f = \mathbb{R}, Z_f = \mathbb{R}^+$.

Če je $a \in (0,1)$, je funkcija f padajoča, sicer je naraščajoča.

Pogosta in za nas posebej zanimiva primera eksponentne funkcije sta $f_1(x) = e^x$ in $f_2(x) = e^{-x} = (e^{-1})^x$.





Pravila za računanje z eksponenti :

- $a^0 = 1$ in $a^1 = a$
- $a^x a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$

Primer 23. *Skiciraj graf funkcije f.*

a) $f(x) = 2^{x+1}$

b) $f(x) = 3e^x - 1$

c) $f(x) = (\frac{1}{3})^x$

3.2.8 Logaritemska funkcija

Logaritemska funkcija je funkcija definirana s predpisom

$$f(x) = \log_a(x),$$

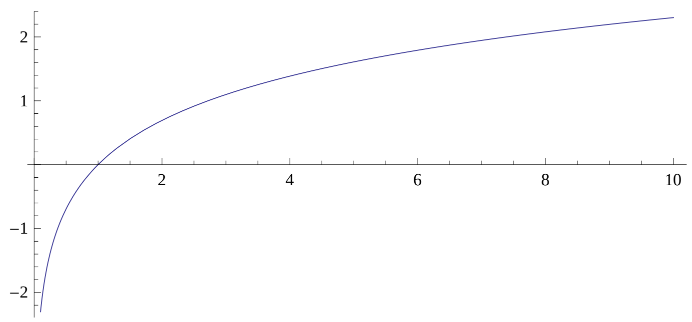
kjer je $a > 0$, $a \neq 1$.

$D_f = \mathbb{R}^+, Z_f = \mathbb{R}$.

Velja:

$$\log_a(x) = y \iff a^y = x$$

Če je $a \in (0, 1)$, je funkcija f padajoča, sicer je naraščajoča.



Opomba 3.7. *Logaritemska funkcija je inverzna eksponentni funkciji.*

Pravila za računanje z logaritmi:

- $\log_a(1) = 0$ in $\log_a(a) = 1$
- $\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(xy)$
- $\log_a(x) - \log_a(y) = \log_a(\frac{x}{y})$
- $\log_a(x^n) = n \log_a(x)$

Opomba 3.8.

- $\log_{10}(x)$ *imenujemo* **desetiški logaritem** *in ga označujemo z* $\log(x)$.
- $\log_e(x)$ *imenujemo* **naravni logaritem** *in ga označujemo z* $\ln(x)$.

Primer 24. *Skiciraj graf funkcije f.*

a) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$

b) $f(x) = \log_2(x + 1)$

c) $f(x) = 2\log(x)$

č) $f(x) = 1 - \ln(x)$

Primer 25. *Reši enačbe.*

a) $2^{x+6} = 32$

b) $9^{2x-5} = 27$

c) $5^{2x-3} = 18$

č) $8^{4x+1} = 205$

d) $5^{3x+7} = 311$

e) $25^{2x-1} = 125^{3x+4}$

Primer 26. *Reši enačbe.*

a) $\log_3(7x + 3) = \log_3(5x + 9)$

b) $\log_7(x - 3) + \log_7(x + 3) = \log_7(14)$

c) $\log_2(5x + 7) = 5$

č) $\ln(4x - 1) = 3$

d) $\log_3(9x + 2) = 4$

e) $\log_4(x) + \log_4(x - 12) = 3$

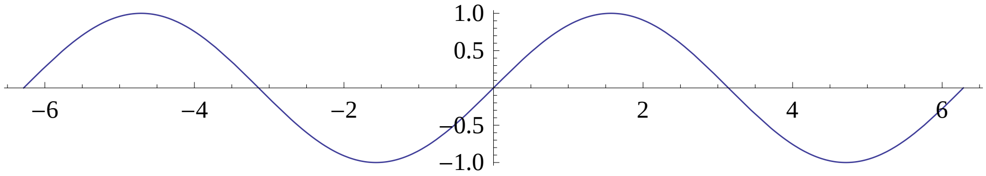
f) $\log_4(2x + 1) = \log_4(x + 2) - \log_4(3)$

g) $\log_2(x + 1) - \log_2(x - 4) = 3$

h) $\log_6(x + 4) + \log_6(x - 2) = \log_6(4x)$

3.2.9 Trigonometrične funkcije

Funkcija $f(x) = \sin(x)$



- $D_f = \mathbb{R}$
- $Z_f = [-1, 1]$
- $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ za $k \in \mathbb{Z}$
- Ničle: $\sin(x) = 0 \iff x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Max: $\sin(x) = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Min: $\sin(x) = -1 \iff x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

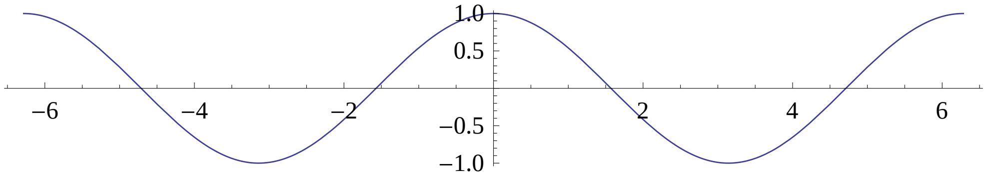
Primer 27. *Skiciraj graf funkcije f.*

a) $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$

b) $f(x) = \sin(3x - \frac{\pi}{2})$

c) $f(x) = \sin(5x + \pi)$

Funkcija $f(x) = \cos(x)$



- $D_f = \mathbb{R}$
- $Z_f = [-1, 1]$
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ za $k \in \mathbb{Z}$

- Ničle: $\cos(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Max: $\cos(x) = 1 \iff x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Min: $\cos(x) = -1 \iff x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

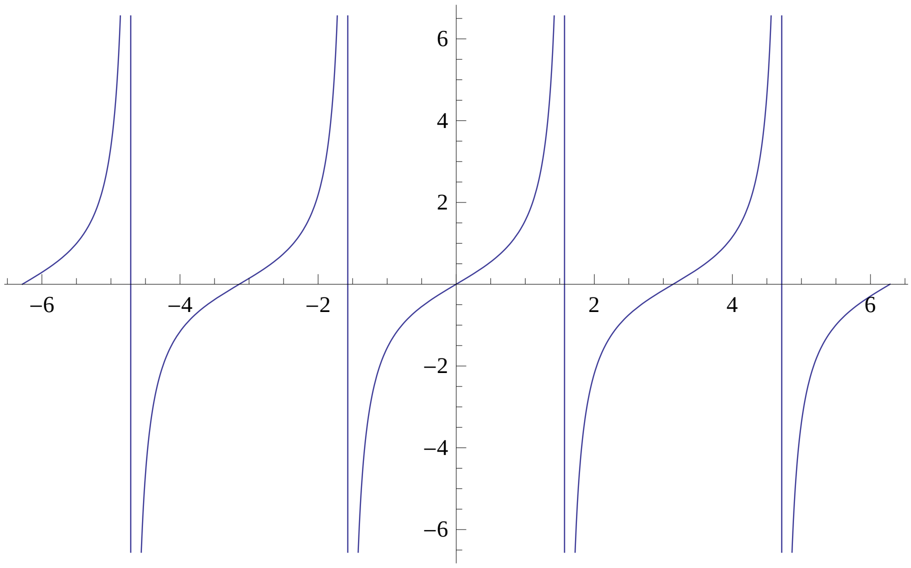
Primer 28. *Skiciraj graf funkcije f.*

a) $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$

b) $f(x) = \cos(3x - \frac{\pi}{2})$

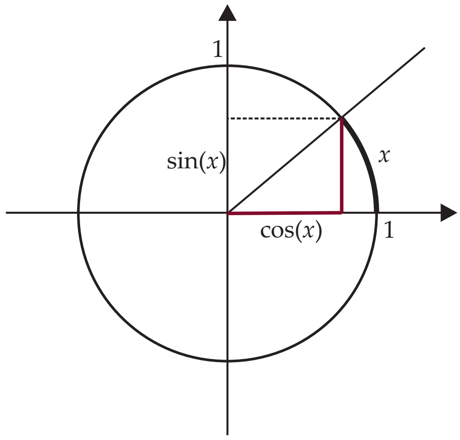
c) $f(x) = \cos(5x + \pi)$

Funkcija $f(x) = \tan(x)$



- $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
- $Z_f = \mathbb{R}$
- $\tan(x + k\pi) = \tan(x)$ za $k \in \mathbb{Z}$
- Ničle: $\tan(x) = 0 \iff \sin(x) = 0 \iff x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Lastnosti triginometričnih funkcij



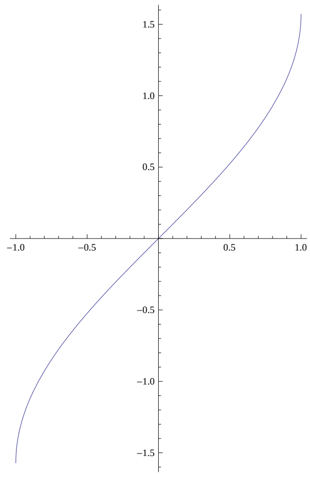
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\sin(x + y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$
- $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

x (rad)	x (deg)	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	30	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	60	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	90	1	0

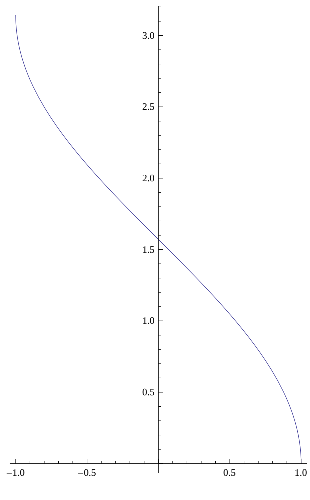
3.2.10 Krožne funkcije

Krožne funkcije so funkcije, ki so inverzne trigonometričnim funkcijam.

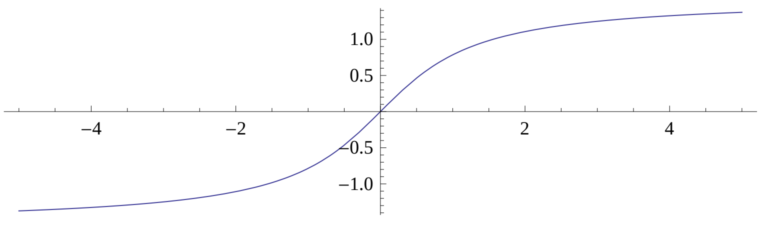
Funkcija $f(x) = \arcsin(x)$



Funkcija $f(x) = \arccos(x)$



Funkcija $f(x) = \arctan(x)$



3.3 Limita funkcije

Naj bo $a \in \mathbb{R}$. **Okolica** točke a je vsak odprti interval s središčem v točki a.

ε-okolica je množica

$$\mathcal{O}(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)\,,$$

kjer je $\varepsilon > 0$.

Punktirana ε-okolica točke a je okolica, ki ji odvzamemo središčno točko. To je množica

$$\mathcal{O}^{\cdot}(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \setminus \{a\}\,,$$

kjer je $\varepsilon > 0$.

Število $L \in \mathbb{R}$ je **limita funkcije** f, ko gre x proti a, če je $f(x)$ tako blizu L kakor hočemo, če je le x dovolj blizu a.

Natančneje:

Število $L \in \mathbb{R}$ je limita funkcije f, ko gre x proti a, če za vsako okolico $\mathcal{O}(L)$ števila L, obstaja punktirana okolica $\mathcal{O}^{\cdot}(a)$ točke a, tako da velja:

$$x \in \mathcal{O}^{\cdot}(a) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{O}(L)\,.$$

Oziroma:

Število $L \in \mathbb{R}$ je limita funkcije f, ko gre x proti a, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da velja

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\,.$$

Če je L je limita funkcije f, ko gre x proti a, to zapišemo kot

$$\lim_{x \to a} f(x) = L\,.$$

Primer 29. *S pomočjo definicije limite preveri, da velja*

$$\lim_{x \to 0}(kx + n) = n\,.$$

Primer 30. *Izračunaj limito.*

a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$

c) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}$

Izrek 3.9. *Naj bo $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ in $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$. Potem velja*

(i) $\lim\limits_{x \to a}(f(x) + g(x)) = A + B$.

(ii) $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$.

(iii) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, *če* $B \neq 0$.

Primer 31. *Izračunaj limito.*

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} + 3x \right)$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^4 - 1} \cdot 4x \right)$

3.4 Zvezne funkcije

Funkcija f je **zvezna** v točki a, če velja

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\,.$$

Oziroma:

Funkcija f je **zvezna** v točki a, če za vsako okolico $\mathcal{O}(f(a))$ točke $f(a)$ obstaja okolica $\mathcal{O}(a)$ točke a, tako da velja

$$x \in \mathcal{O}(a) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{O}(f(a))\,.$$

Opomba 3.10. *Iz definicije sledi, da je funkcija f zvezna v točki a, če se točke blizu a s preslikavo f preslikajo v točke blizu $f(a)$.*

Opomba 3.11. *Graf funkcije, ki je povsod zvezna, se nikjer ne pretrga.*

Izrek 3.12. *Naj bosta funkciji f in g zvezni v točki a. Potem so v tej točki zvezne tudi funkcije $f+g$, $f \cdot g$ in $\frac{f}{g}$, kjer je $g(a) \neq 0$.*

Izrek 3.13. *Naj bo funkcija g zvezna v točki a in funkcija f zvezna v točki $g(a)$. Potem je v točki a zvezen tudi kompozitum funkcij $f \circ g$.*

Izrek 3.14. *Naj bo funkcija f zvezna na zaprtem intervalu $[a, b]$. Potem velja:*

(i) Funkcija f na intervalu $[a, b]$ doseže maksimum M.

(ii) Funkcija f na intervalu $[a, b]$ doseže minimum m.

(iii) Funkcija f na intervalu $[a, b]$ doseže vse vrednosti med m in M.

Odvod

4.1 Definicija in geometrijska interpretacija

Odvod funkcije f **v točki** $x \in \mathbb{R}$ je tako število $f'(x)$, da velja

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} .$$

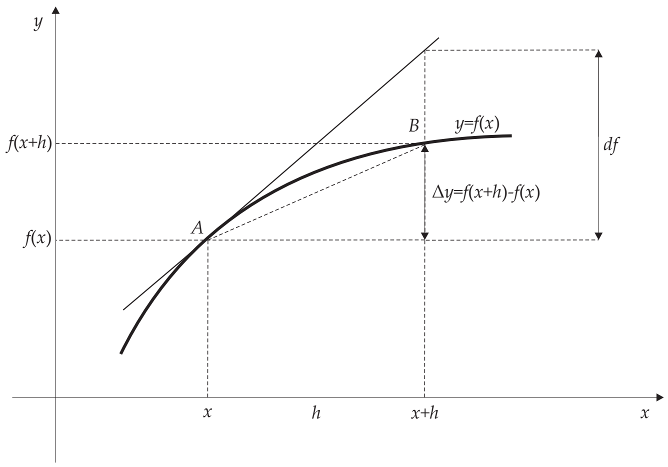
Če ta limita obstaja rečemo, da je funkcija f **odvedljiva v točki** x.

Funckija f je **odvedljiva na intervalu** (a, b), če je odvedljiva v vsaki točki tega intervala.

Diferenčni količnik, ki nastopa v definiciji odvoda

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

je enak smernemu koeficientu sekante na graf funkcije skozi točki $A(x, f(x))$ in $B(x+h, f(x+h))$.



Opomba 4.1. *Odvod $f'(x)$ je enak smernemu koeficientu tangente na graf funckije f v točki x.*

Diferencial funkcije f v točki x je definiran kot

$$dy = f'(x)\,dx\,.$$

Opomba 4.2. *Odvod funkcije f označujemo tudi z*

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}\,.$$

Primer 32. *S pomočjo definicije odvoda pokaži, da je* $\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$.

4.2 Lastnosti odvedljivih funkcij

Tabela odvodov pogostih elementarnih funkcij

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
a^x	$a^x \ln(a)$
e^x	e^x
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

Izrek 4.3. *Naj bosta f in g odvedljivi funkciji v točki x. Potem velja*

(i) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,

(ii) $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

(iii) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, *kjer je* $g(x) \neq 0$.

Iz zgornjega izreka (točka *(ii)*) sledi, da za vsak $c \in \mathbb{R}$ velja $(cf(x))' = cf'(x)$.

Izrek 4.4. *Naj bo funkcija g odvedljiva v točki x in naj bo f odvedljiva v točki $g(x)$. Potem velja*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)\,.$$

Primer 33. *Izračunaj odvod funkcije f:*

a) $f(x) = x^7 - 3x^2 + x - 3$

b) $f(x) = 3x^{-2} + \sqrt{x}$

c) $f(x) = x$

č) $f(x) = \frac{5x}{\ln x}$

d) $f(x) = \tan(x^2)$

e) $f(x) = (\tan x)^2$

Primer 34. *Zapiši enačbo tangente na graf funkcije $f(x) = x^5 + 3x - 2$ v točki $x_0 = 1$.*

Primer 35. *V kateri točki grafa funkcije $f(x) = \ln x$ je tangenta vzporedna premici $y = x + 3$?*

4.3 Višji odvodi funkcije

Naj bo f funkcija in f' njen odvod. Če je funkcija f' odvedljiva, potem njenemu odvodu rečemo **drugi odvod funkcije** f in pišemo

$$(f')' = f''\,.$$

Splošneje velja

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'\,,$$

kjer $f^{(n)}$ označuje n**-ti odvod funkcije** f za $n \geq 2$.

Primer 36. *Izračunaj prve tri odvode funkcije s predpisom $f(x) = \sin(x) + x^3$.*

4.4 L'Hospitalovo pravilo

Izrek 4.5 (L'Hospitalovo pravilo)**.** *Naj bosta funkciji f in g odvedljivi na neki okolici točke a. Recimo, da sta funkciji g in g' na tej okolici različni od 0 in da je*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

ali

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty.$$

Če obstaja $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *potem velja*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Primer 37. *S pomočjo L'Hospitalovega pravila izračunaj limito.*

a) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2-x^2}-x}{1-x}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{5^x}$

4.5 Lokalni ekstremi, naraščanje, padanje

Funkcija f ima v točki x_0 **lokalni maksimum**, če obstaja δ-okolica točke x_0, tako da velja

$$f(x) \leq f(x_0)$$

za vsak $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
Funkcija f ima v točki x_0 **lokalni minimum**, če obstaja δ-okolica točke x_0, tako da velja

$$f(x) \geq f(x_0)$$

za vsak $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Izrek 4.6. *Naj bo f odvedljiva funkcija v točki x_0 in naj ima v točki x_0 lokalni ekstrem. Potem velja*

$$f'(x_0) = 0.$$

Točko x_0, v kateri je $f'(x_0) = 0$, imenujemo ***stacionarna točka*** *funkcije f.*

Opomba 4.7. *Vsak lokalni ekstrem odvedljive funkcije je stacionarna točka. Obratno ne velja, stacionarna točka ni nujno ekstrem.*

Izrek 4.8 (Rolleov izrek)**.** *Naj bo funkcija f zvezna na intervalu $[a, b]$ in odvedljiva na (a, b). Če je $f(a) = f(b)$, potem obstaja točka $c \in (a, b)$, tako da velja*

$$f'(c) = 0.$$

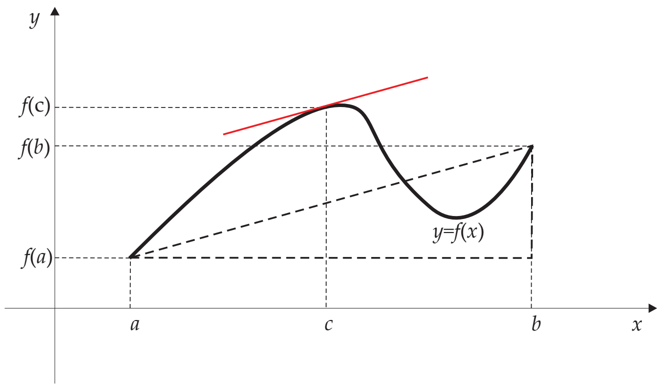
Izrek 4.9. *Naj bosta funkciji f in g zvezni na intervalu $[a, b]$ in odvedljivi na (a, b). Če je $g'(x) \neq 0$ za vsak $x \in (a, b)$, potem obstaja točka $c \in (a, b)$, tako da velja*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Poseben primer prejšnjega izreka je naslednji izrek.

Izrek 4.10 (Lagrangeov izrek)**.** *Naj bo funkcija f zvezna na intervalu $[a, b]$ in odvedljiva na (a, b). Tedaj obstaja točka $c \in (a, b)$, tako da velja*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$



Izrek 4.11. *Naj bo funkcija f odvedljiva na (a, b).*

(i) Če je $f'(x) \geq 0$ za vsak $x \in (a, b)$, potem je f naraščajoča na (a, b).

(ii) Če je $f'(x) \leq 0$ za vsak $x \in (a, b)$, potem je f padajoča na (a, b).

Izrek 4.12. *Naj bo funkcija f dvakrat odvedljiva na neki okolici točke x_0 in naj bo $f'(x_0) = 0$.*

(i) Če je $f''(x_0) > 0$, potem ima f v točki x_0 lokalni minimum.

(ii) Če je $f''(x_0) < 0$, potem ima f v točki x_0 lokalni maksimum.

Primer 38. *Naj bo $f(x) = x^3 - x^2$.*

a) Zapiši intervale naračanja in padanja funkcije f.

b) Zapiši koordinate lokalnih ekstremov funkcije f.

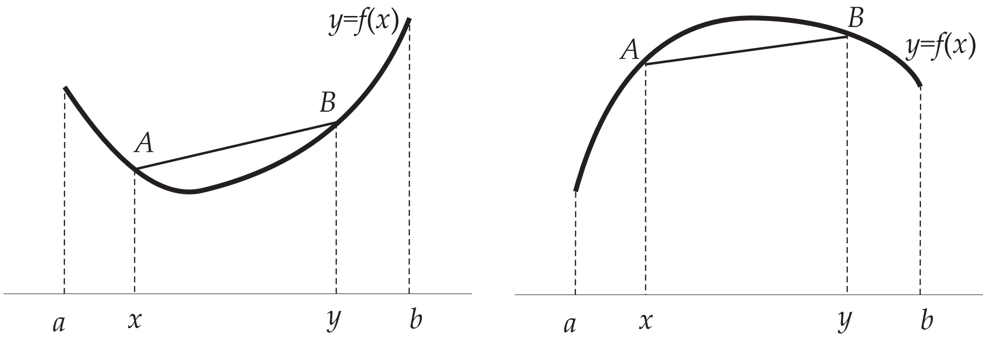
c) Skiciraj graf funkcije f.

4.6 Konveksnost, konkavnost in prevoji

Funkcija f je na intervalu $[a, b]$ **konveksna** oz. ima graf **ukrivljen navzgor**, če daljica, ki jo določata točki $A(x, f(x))$ in $B(y, f(y))$, leži nad grafom funkcije f za vsak $x, y \in [a, b]$.

Funkcija f je na intervalu $[a, b]$ **konkavna** oz. ima graf **ukrivljen navzdol**, če daljica, ki jo določata točki $A(x, f(x))$ in $B(y, f(y))$, leži pod grafom funkcije f za vsak $x, y \in [a, b]$.

Točko x_0, v kateri funkcija f spremeni ukrivljenost (iz konveksne v konkavno, ali obratno), imenujemo **prevoj** funkcije f.



Izrek 4.13. *Naj bo funkcija f dvakrat odvedljiva na (a, b).*

(i) Če je $f''(x) \geq 0$ za vsak $x \in (a, b)$, potem je f konveksna na (a, b).

(ii) Če je $f''(x) \leq 0$ za vsak $x \in (a, b)$, potem je f konkavna na (a, b).

Izrek 4.14. *Naj bo f dvakrat odvedljiva funkcija v točki x_0 in naj ima v točki x_0 prevoj. Potem velja*

$$f''(x_0) = 0.$$

Primer 39. *Naj bo $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$.*

a) Določi intervale konveksnosti in konkavnosti funkcije f.

b) Določi koordinate prevojev funkcije f.

Primer 40. *Naj bo $f(x) = x^2 e^x$.*

a) Določi intervale naračanja in padanja funkcije f.

b) Določi koordinate lokalnih ekstremov funkcije f.

c) Določi intervale konveksnosti in konkavnosti funkcije f.

č) Določi koordinate prevojev funkcije f.

d) Skiciraj graf funkcije f.

4.7 Taylorjeva formula

Naj bo funkcija f večkrat odvedljiva funkcija in $n \in \mathbb{N}$. Tedaj polinom

$$Q_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

imenujemo **Taylorjev polinom stopnje** n funkcije f (razvit okoli točke a).

Opomba 4.15. *Taylorjeve polinome uporabljajo kalkulatorji za računanje približkov funkcijskih vrednosti odvedljivih funkcij.*

Izrek 4.16. *Naj bo funkcija f $(n+1)$-krat odvedljiva funkcija na odprtem intervalu I in naj bo $a \in I$. Za vsak $x \in I$ obstaja $\xi \in I$, ki leži med a in x, tako da velja*

$$f(x) = Q_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,.$$

Členu

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

rečemo **ostanek Taylorjeve formule**.

Primer 41. *Zapiši Taylorjev polinom stopnje 5 funkcije*

$$f(x) = e^x$$

in približno izračunaj $\sqrt{e}$. Polinom razvij okoli točke $a = 0$.

Primer 42. *Zapiši Taylorjev polinom stopnje 5 funkcije*

$$f(x) = \sin(x)$$

in približno izračunaj $\sin(9^\circ)$. Polinom razvij okoli točke $a = 0$.

Primer 43. *Zapiši Taylorjev polinom stopnje 6 funkcije*

$$f(x) = \cos(x)$$

in približno izračunaj $\cos(18°)$. *Polinom razvij okoli točke* $a = 0$.

Če v Taylorjevi formuli

$$f(x) = Q_n(x) + R_n(x),$$

za neko okolico točke a velja $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ za vsak x iz te okolice, tedaj za te točke lahko pišemo

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

V tem primeru rečemo, da smo funkcijo f razvili v **Taylorjevo vrsto** okoli točke a.

Opomba 4.17. *Definicijsko območje Taylorjeve vrste funkcije f je simetričen interval oblike $(-R, R)$. Pri tem število R imenujemo konvergenčni polmer Taylorjeve vrste funkcije f.*

Primer 44. *Funkcijo* $f(x) = \cos(x)$ *razvij v Taylorjevo vrsto okoli točke* $a = 0$.

Primer 45. *Funkcijo* $f(x) = \frac{1}{1-x}$ *razvij v Taylorjevo vrsto okoli točke* $a = 6$.

Primer 46. *Funkcijo* $f(x) = \sqrt{1+x}$ *razvij v Taylorjevo vrsto okoli točke* $a = 0$.

Integral

5.1 Nedoločeni integral

Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}$. Funkcija F, za katero velja

$$F'(x) = f(x)$$

za vsak $x \in D$, se imenuje **nedoločeni integral** funkcije f. Označujemo ga z

$$F(x) = \int f(x)\,dx\,.$$

Izrek 5.1. *Če je $F(x)$ nedoločeni integral funkcije $f(x)$ je njen nedoločeni integral tudi funkcija $F(x) + C$, kjer je C poljubna konstanta.*

Tabela integralov pogostih elementarnih funkcij

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + C$
$-\frac{1}{\sin^2(x)}$	$\cot(x)$
e^x	$e^x + C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin(\frac{x}{a}) + C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$	$\ln\lvert x + \sqrt{x^2+a^2}\rvert + C$
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a}) + C$

Primer 47. *Pokaži, da je funkcija*

$$F(x) = x^3 + 6x^2 + \sin(x)$$

nedoločeni integral funkcije

$$f(x) = 3x^2 + 12x + \cos(x)\,.$$

Primer 48. *Izračunaj naslednje integrale.*

a) $\int x^3 \, dx$

b) $\int x^{11} \, dx$

c) $\int x^{-22} \, dx$

č) $\int x^{107,3} \, dx$

d) $\int \sqrt{x} \, dx$

e) $\int (x^3 + \sqrt{x}) \, dx$

f) $\int (x^7 + 5x^3 + 4x + 11) \, dx$

g) $\int 4 \, dx$

Trditev 5.2. *Za poljubni funkciji f in g velja*

$$\int f(x) + g(x) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx \, .$$

Trditev 5.3. *Konstanto, ki nastopa kot faktor pod integralskim znakom, lahko nesemo pred integral:*

$$\int cf(x) \, dx = c \int f(x) \, dx \, , \text{ za } c \in \mathbb{R}.$$

5.2 Integracijske metode

5.2.1 Uvedba nove spremenljivke (substitucija)

Trditev 5.4. *Naj bo $u = u(x)$ odvedljiva funkcija. Če ima funkcija $f(u)$ nedoločeni integral, potem obstaja tudi nedoločeni integral funkcije $f(u(x))u'(x)$ in velja*

$$\int f(u) \, du = \int f(u(x))u'(x) \, dx \, .$$

Primer 49. *Izračunaj naslednje integrale.*

a) $\int (x+5)^3 \, dx$

b) $\int (x-22)^{11} \, dx$

c) $\int x(x^2+4)^{10}\,dx$

č) $\int \sqrt{x+6}\,dx$

d) $\int x\sqrt{x^2+8}\,dx$

e) $\int \sin(x+3)\,dx$

f) $\int \cos(x+6)\,dx$

g) $\int \frac{x+5}{x-4}\,dx$

h) $\int \frac{x+3}{x-9}\,dx$

5.2.2 Integracija po delih (per partes)

Trditev 5.5 (formula per partes)**.** *Naj bosta $u(x)$ in $v(x)$ odvedljivi funkciji. Potem velja*

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx\,.$$

Opomba 5.6. *Formulo običajno zapišemo v obliki*

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du\,.$$

Primer 50. *Izračunaj naslednje integrale.*

a) $\int xe^x\,dx$

b) $\int (x+6)e^x\,dx$

c) $\int x\sin(x)\,dx$

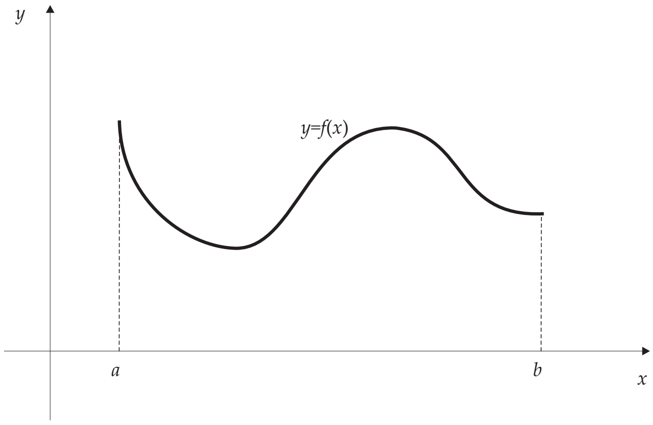
č) $\int x\cos(x)\,dx$

d) $\int x\ln(x)\,dx$

5.3 Določeni integral

Definirajmo določeni integral funkcije f na intervalu $[a, b]$.

Naj bo f omejena funkcija na $[a, b]$.

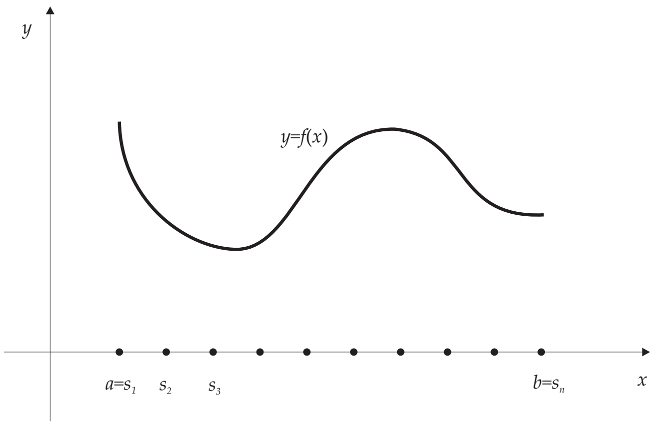


Interval $[a, b]$ razdelimo na majhne podintervale s točkami

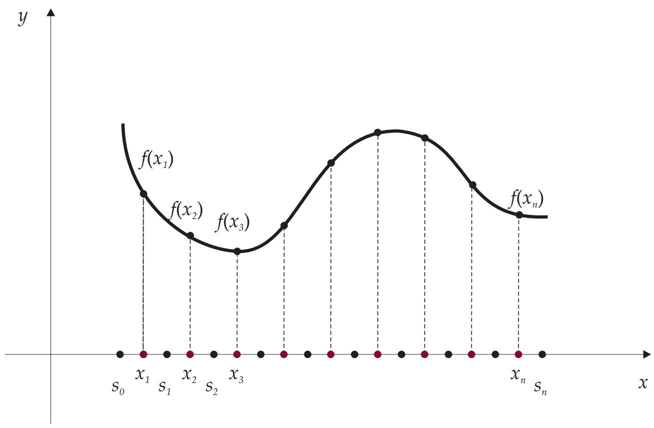
$$a = s_0, s_1, s_2 \ldots, s_{n-1}, s_n = b,$$

kjer je

$$s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{n-1} < s_n \,.$$

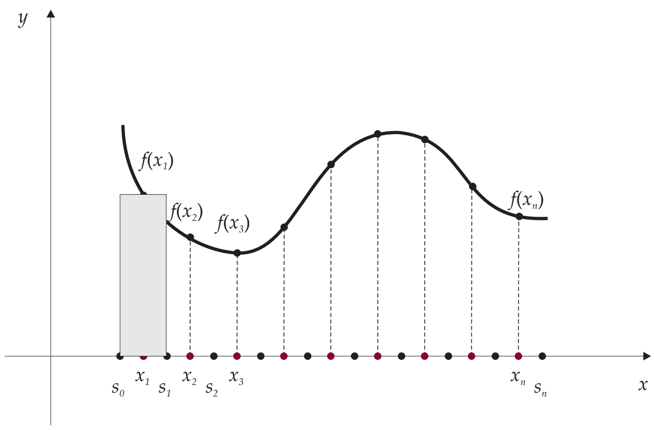


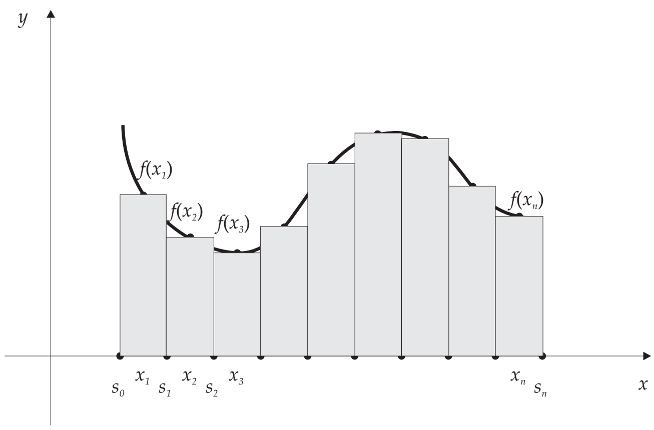
Na vsakem podintervalu $[s_{k-1}, s_k]$ izberimo točko x_k.



Definirajmo Riemannovo integralsko vsoto funkcije f glede na zgornjo delitev intervala $[a, b]$ in izbiro točk x_k:

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) d_k \,, \text{ kjer je } d_k = s_k - s_{k-1}.$$





Določeni integral funkcije f na intervalu $[a, b]$, označimo ga z $\int_a^b f(x)dx$, je limita integralske vsote, kjer pošljemo

$$\Delta = \max_{1 \leq k \leq n} \{d_k\}$$

proti 0.

Torej:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)d_k\,.$$

Izrek 5.7 (Newton-Leibnitzova formula)**.** *Naj bo f zvezna na $[a, b]$ in naj bo $F(x) = \int f(x)dx$. Potem velja*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.$$

Primer 51. *Izračunaj naslednje integrale.*

a) $\displaystyle\int_0^1 (x^3 + 3x^2 - 2x + 2)\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 (2x^4 + x^2 - x + 12)\,dx$

c) $\displaystyle\int_1^3 (x^2 + 8x - 2)\,dx$

č) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x)\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx$

e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3 + 3x^2 - 2x + 2}{x}\,dx$

f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^4 - 2x^2 + 6x + 5}{x}\,dx$

Izrek 5.8 (Izrek o srednji vrednosti)**.** *Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija in naj bo*

$$m = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \text{ in } M = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Potem obstaja $c \in [m, M]$, tako da velja

$$c = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

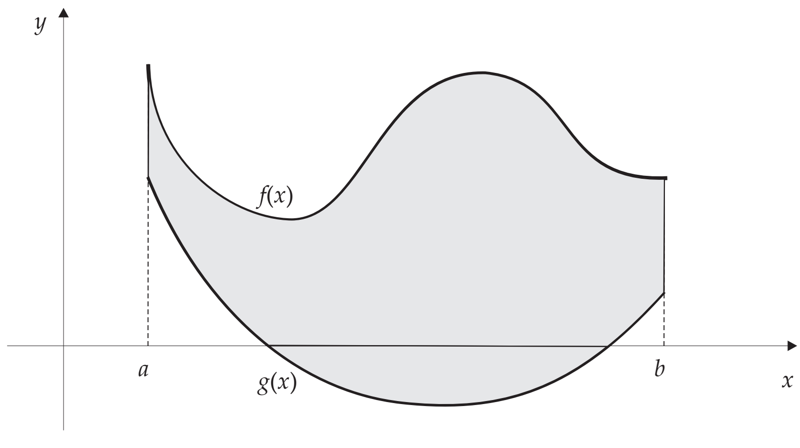
Izrek 5.9. *Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Potem je funkcija F, definirana z*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

odvedljiva in velja $F'(x) = f(x)$ za vsak $x \in [a, b]$.

Izrek 5.10. *Naj bosta $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezni in naj bo $g(x) \leq f(x)$ za vsak $x \in [a, b]$. Potem je ploščina lika, ki ga omejujeta premici $x = a$ in $x = b$ ter grafa funkcij f in g, enaka*

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$



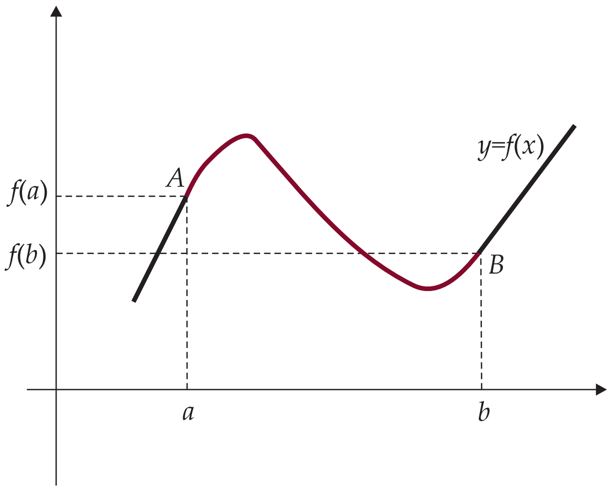
Primer 52. *Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta grafa funkcij $f(x) = \sqrt{x}$ in $g(x) = x^2$.*

Primer 53. *Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta grafa funkcij $f(x) = x + 1$ in $g(x) = xe^{-x^2}$ na intervalu $[0, 2]$.*

Primer 54. *Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta grafa funkcij* $f(x) = 4x+16$ *in* $g(x) = 2x^2 + 10$.

Trditev 5.11. *Naj bo* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *odvedljiva funkcija. Potem je dolžina loka krivulje* $y = f(x)$ *od točke* $A(a, f(a))$ *do točke* $B(b, f(b))$ *enaka*

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx\,.$$



Primer 55. *Izračunaj dolžino krivulje*

$$y = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$$

za $1 \leq x \leq 4$.

Primer 56. *Izračunaj dolžino krivulje*

$$y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^{-1}$$

od $x_1 = 1$ *do* $x_2 = 2$.

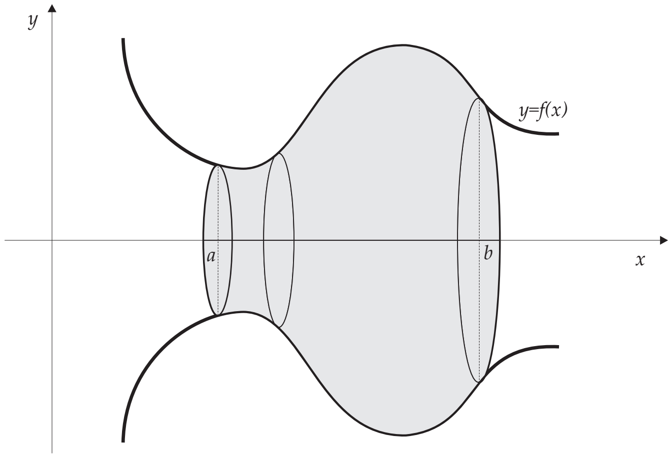
Primer 57. *Izračunaj dolžino krivulje*

$$y = \ln(\cos(x))$$

od točke $T_1(0, 0)$ *do točke* $T_2(\frac{\pi}{4}, \ln(\frac{\sqrt{2}}{2}))$.

Trditev 5.12. *Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna nenegativna funkcija. Potem je volumen vrtenine, ki nastane z vrtenjem grafa funkcije $y = f(x)$ okoli x-osi, enak*

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)\, dx\,.$$



Primer 58. *Izračunaj volumen vrtenine, ki nastane z vrtenjem grafa funkcije*

$$y = x^2 - 4x + 5$$

okoli x-osi na intervalu $1 \le x \le 4$.

Primer 59. *Izračunaj volumen vrtenine, ki nastane z vrtenjem grafa funkcije*

$$y = x^2 + 1$$

okoli x-osi na intervalu $-1 \le x \le 1$.

Funkcija je **zvezno odvedljiva**, če je odvedljiva in je njen odvod zvezen.

Trditev 5.13. *Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija. Potem je površina vrtenine, ki nastane z vrtenjem grafa funkcije $y = f(x)$ okoli x-osi, enaka*

$$P = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx\,.$$

Primer 60. *Izračunaj površino vrtenine, ki nastane z vrtenjem grafa funkcije*

$$y = \sqrt{9 - x^2}$$

okoli x-osi na intervalu $[-2, 2]$.

Primer 61. *Izračunaj površino vrtenine, ki nastane z vrtenjem grafa funkcije*

$$y = \frac{2}{5}x$$

okoli x-osi, za $2 \le x \le 5$.

Funkcije dveh spremenljivk

6.1 Definicija

Funkcija dveh spremenljivk je funkcija

$$f : D \to \mathbb{R},$$

kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Tudi v sledečih definicijah naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^2$.
Graf funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ je množica

$$\Gamma_f = \{(x, y, z) \mid z = f(x, y) \text{ za } (x, y) \in D\}.$$

Nivojnica funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ na nivoju $t \in \mathbb{R}$ je množica

$$N_t = \{(x, y) \mid f(x, y) = t\}.$$

Presek grafa funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ z xz-ravnino je množica

$$\{(x, z) \mid f(x, 0) = z\}.$$

Presek grafa funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ z yz-ravnino je množica

$$\{(y, z) \mid f(0, y) = z\}.$$

Primer 62. *S pomočjo nivojnic in presekov nariši graf funkcije f.*

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

6.2 Parcialni odvodi

Parcialni odvod funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ **po spremenljivki** x v točki (x_0, y_0) je

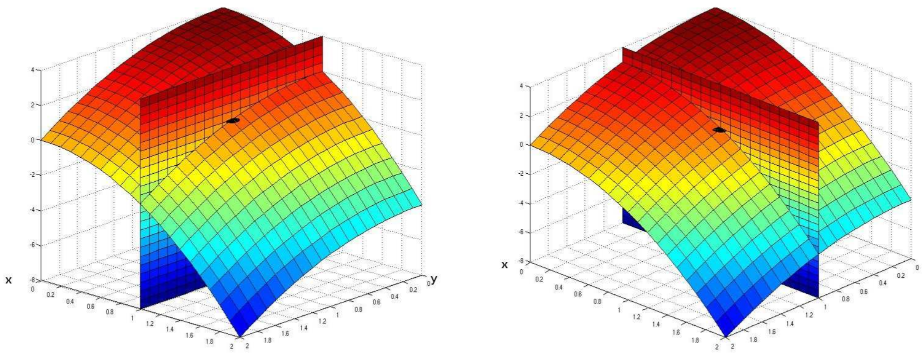
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} .$$

Opomba 6.1. *Parcialni odvod po spremenljivki x pove, kako hitro se funkcija f spreminja v x-smeri.*

Parcialni odvod funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ **po spremenljivki** y v točki (x_0, y_0) je

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} .$$

Opomba 6.2. *Parcialni odvod po spremenljivki y pove, kako hitro se funkcija f spreminja v y-smeri.*



Primer 63. *Izračunaj parcialna odvoda f_x in f_y funkcije f.*

a) $f(x, y) = 3x^3 + xy^3$

b) $f(x, y) = 4xy + e^x$

c) $f(x, y) = \ln(xy) + e^x - 3$

č) $f(x, y) = \sin(xy) + e^{x-y} - x$

d) $f(x, y) = \cos(x + y) + e^y - 3y + 1$

Totalni diferencial funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ v točki (x_0, y_0) je

$$df = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy\,.$$

Sprememba funkcijske vrednosti $f : D \to \mathbb{R}$ v točki (x_0, y_0) je

$$\Delta f = f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0)\,.$$

Opomba 6.3. *Za majhne vrednosti dx in dy je $df \approx \Delta f$ in zato*

$$f(x_0 + dx, y_0 + dy) \approx f(x_0, y_0) + df$$

Primer 64. *S pomočjo totalnega diferenciala približno izračunaj*

a) $3 \cdot 1,02^3 + 1,02 \cdot 2,95^3$

b) $4 \cdot 1,05 \cdot 2,98 + e^{1,05}$

Parcialni odvodi drugega reda so definirani s predpisi

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$
$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$
$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Primer 65. *Izračunaj vse parcialne odvode prvega in drugega reda funkcije $f(x, y) = 3x^3 + xy^3$.*

6.3 Lokalni ekstremi funkcije dveh spremenljivk

Točka (x_0, y_0) je **lokalni maksimum funkcije** $f : D \to \mathbb{R}$, če je

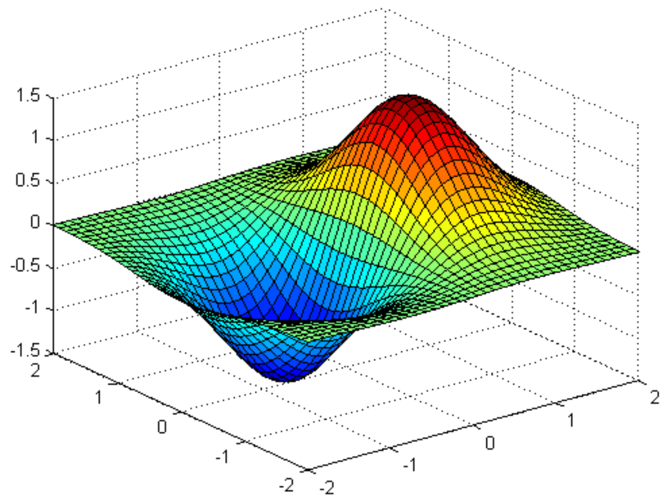
$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$$

za vsak (x, y) iz neke okolice točke (x_0, y_0).
Točka (x_0, y_0) je **lokalni minimum funkcije** $f : D \to \mathbb{R}$, če je

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$$

za vsak (x, y) iz neke okolice točke (x_0, y_0).
Točka (x_0, y_0) je **stacionarna točka funkcije** $f : D \to \mathbb{R}$, če je

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0\,.$$



Izrek 6.4. *Lokalni maksimum ali minimum parcialno odvedljive funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ lahko nastopi samo v stacionarni točki.*
Naj bo (x_0, y_0) stacionarna točka funkcije $f : D \to \mathbb{R}$ in naj bo

- $A = f_{xx}(x_0, y_0)$
- $B = f_{xy}(x_0, y_0)$
- $C = f_{yy}(x_0, y_0)$.

Potem velja:

(i) *Točka (x_0, y_0) je lokalni maksimum funkcije f, če je $AC - B^2 > 0$ in $A < 0$.*

(ii) *Točka (x_0, y_0) je lokalni minimum funkcije f, če je $AC - B^2 > 0$ in $A > 0$.*

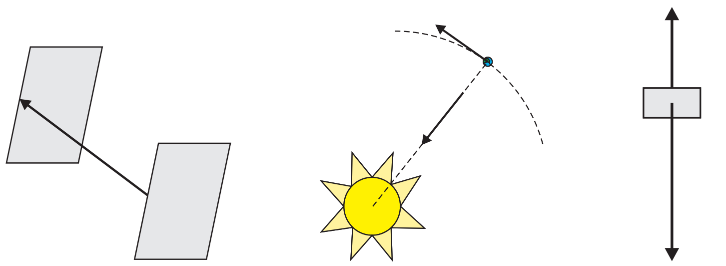
(iii) *Če je $AC - B^2 < 0$ potem (x_0, y_0) ni niti lokalni maksimum niti lokalni minimum.*

Primer 66. *Izračunaj koordinate vseh lokalnih ekstremov funkcije $f(x, y) = 2x^3 + 6xy^2 - 3y^3 - 150x$.*

Vektorji

7.1 Osnovni pojmi

Vektorje si predstavljamo kot usmerjene daljice.



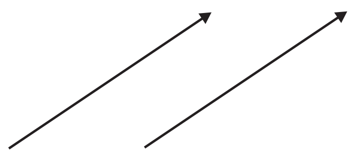
Začetna in končna točka vektorja sta določeni s krajiščema daljice. Končno točko na skici označimo s puščico. Skupaj določata **usmerjenost** vektorja.

Vektorja imata isto **smer**, če sta vzporedna.

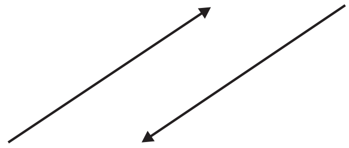
Dolžina vektorja $\vec{v}$ je razdalja od začetne do končne točke vektorja in jo označimo z $|\vec{v}|$.

Vektor dolžine 0 imenujemo **ničelni vektor** in ga označimo z $\vec{0}$.

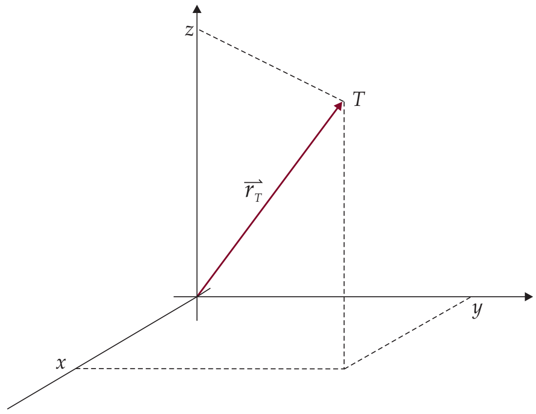
Vektorja, ki sta enako dolga in imata isto smer ter usmerjenost sta **enaka**.



Vektorja, ki sta enako dolga in imata isto smer ter obratno usmerjenost sta **nasprotna**.

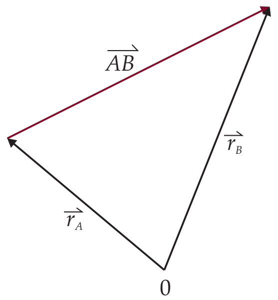


Vsaki točki $T(x, y, z)$ v prostoru $\mathbb{R}^3$ pripada vektor $\vec{r}_T = (x, y, z)$, ki ga imenujemo **krajevni vektor točke** $T(x, y, z)$. Vektor $\vec{r}_T$ je vektor z začetno točko $0(0, 0, 0)$ in končno točko $T(x, y, z)$.



Vektor z začetkom v točki A in koncem v točki B je

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A.$$

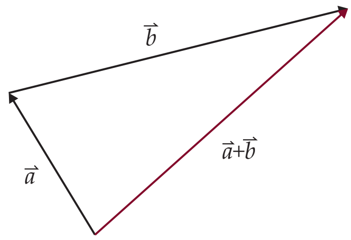


7.2 Računske operacije

7.2.1 Seštevanje vektorjev

Naj bo $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Tedaj je vsota vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ enaka *vektorju*

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3).$$



Lastnosti operacije seštevanja vektorjev

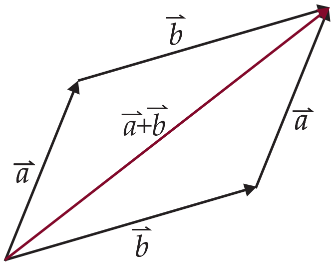
Za vse $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ veljajo naslednje lastnosti.

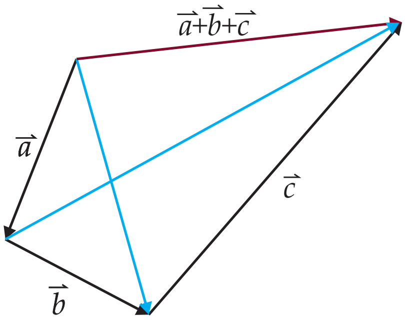
(i) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

(ii) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

(iii) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

(iv) $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$

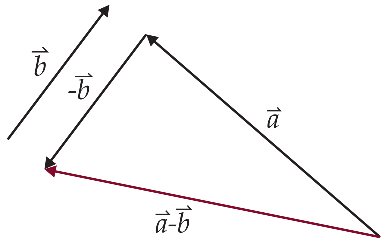




7.2.2 Odštevanje vektorjev

Naj bo $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Tedaj je razlika vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ enaka *vektorju*

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3).$$

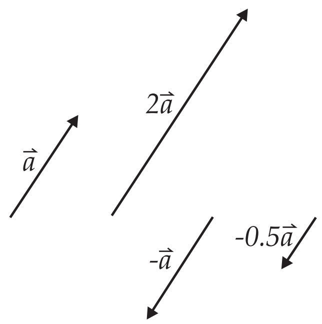


Opomba 7.1. *Odštevanje vektorja* $\vec{b}$ *je enako prištevanju vektorja* $-\vec{b}$*, torej* $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$*. Tako lastnosti odštevanja lahko enostavno izpeljemo iz lastnosti seštevanja.*

7.2.3 Množenje vektorja s skalarjem

Naj bo $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ in $k\in\mathbb{R}$. Tedaj je produkt vektorja $\vec{a}$ s skalarjem k enak *vektorju*

$$k\vec{a}=(ka_1,ka_2,ka_3).$$



Lastnosti operacije množenja vektorja s skalarjem

Za vse $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ in vse $m,n\in\mathbb{R}$ veljajo naslednje lastnosti.

(*i*) $m(n\vec{a})=(mn)\vec{a}$

(*ii*) $(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$

(*iii*) $m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$

(*iv*) $1\vec{a}=\vec{a}$

Primer 67. *Podana sta vektorja* $\vec{a}=(-3,5,2)$ *in* $\vec{b}=(2,-3,1)$*. Izračunaj koordinate vektorjev*

a) $\vec{a}+\vec{b}$

b) $2\vec{a}+3\vec{b}$

c) $3\vec{a}-5\vec{b}$

7.2.4 Skalarni produkt

Naj bosta $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorja. Skalarni produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je enak *številu*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Izrek 7.2. *Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ vektorja v $\mathbb{R}^3$ in φ kot, ki ga oklepata. Tedaj velja*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi.$$

Posledica 7.3. *Dolžina vektorja $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ je enaka*

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Posledica 7.4. *Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta pravokotna natanko tedaj, ko velja*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Posledica 7.5. *Kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je*

$$\varphi = \arccos \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right).$$

Primer 68. *Podana sta vektorja $\vec{a} = (-3, 4, 2)$ in $\vec{b} = (-2, 3, 1)$.*

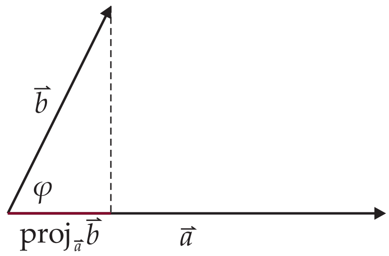
a) Izračunaj $|\vec{a}|$ in $|\vec{b}|$.

b) Izračunaj $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

c) Izračunaj kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

Trditev 7.6. *Naj bo $\mathrm{proj}_{\vec{a}}\vec{b}$ dolžina pravokotne projekcije vektorja $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$ in naj bo $\mathrm{proj}_{\vec{b}}\vec{a}$ dolžina pravokotne projekcije vektorja $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$. Če $\vec{a}$ in $\vec{b}$ oklepata kot φ, ki je manjši od $\frac{\pi}{2}$, tedaj velja*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \mathrm{proj}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}| \mathrm{proj}_{\vec{b}}\vec{a}.$$



Opomba 7.7. *Formula velja tudi v primeru, ko je kot φ med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ večji od $\frac{\pi}{2}$. V tem primeru $\mathrm{proj}_{\vec{a}}\vec{b}$ označuje negativno dolžino projekcije vektorja $\vec{b}$ na nosilko vektorja $\vec{a}$.*

Primer 69. *Podani so vektorji $\vec{a} = (-3, 4, 2), \vec{b} = (-4, 1, 3)$ in $\vec{c} = (-2, 1, 2)$.*

a) Izračunaj dolžino projekcije vektorja $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$.

b) Izračunaj dolžino projekcije vektorja $\vec{a}$ na vektor $\vec{c}$.

c) Izračunaj dolžino projekcije vektorja $\vec{c}$ na vektor $\vec{b}$.

Lastnosti skalarnega produkta

Za vse $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ in vsak $k \in \mathbb{R}$ veljajo naslednje lastnosti.

(*i*) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

(*ii*) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

(*iii*) $k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k\vec{a}) \cdot \vec{b}$

(*iv*) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0$

7.2.5 Vektorski produkt

Naj bo $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Tedaj je vektorski produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ enak *vektorju*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

Opomba 7.8. *Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ je pravokoten na $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Njegova usmerjenost je določena s pravilom desnosučnega vijaka.*

Primer 70. *Podani so vektorji $\vec{a} = (-3, 4, 2), \vec{b} = (-4, 1, 3)$, $\vec{c} = (5, 2, -3)$ in $\vec{d} = (-2, 1, 2)$.*

a) Izračunaj $\vec{a} \times \vec{b}$.

b) Izračunaj $\vec{a} \times \vec{c}$.

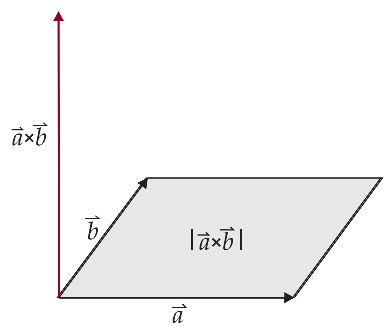
c) Izračunaj $\vec{c} \times \vec{b}$.

č) Določi kakšen vektor, ki je pravokoten na $\vec{c}$ in $\vec{d}$ in ima dolžino 1.

d) Določi kakšen vektor, ki je pravokoten na $\vec{a}$ in $\vec{d}$ in ima dolžino 2.

Izrek 7.9. *Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ vektorja, ki oklepata kot φ. Tedaj je dolžina vektorskega produkta $\vec{a} \times \vec{b}$ enaka ploščini paralelograma, ki ga oklepata $\vec{a}$ in $\vec{b}$:*

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi.$$



Primer 71. *Podani so vektorji $\vec{a} = (-3, 4, 2), \vec{b} = (-4, 1, 3)$ in $\vec{c} = (-2, 1, 2)$.*

a) Izračunaj ploščino paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

b) Izračunaj ploščino trikotnika, ki ga napenjata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{c}$.

Lastnosti operacije vektorskega produkta

Za vse $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ in vsak $k \in \mathbb{R}$ veljajo naslednje lastnosti.

(i) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

(ii) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

(iii) $k(\vec{a} \times \vec{b}) = (k\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b})$

Opomba 7.10. *$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ natanko tedaj, ko sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ vzporedna.*

7.2.6 Mešani produkt

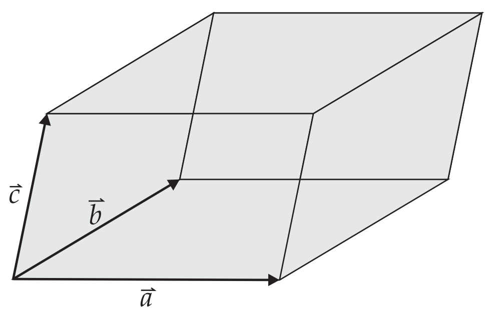
Naj bo $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ in $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Tedaj je mešani produkt vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ enak *številu*

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Opomba 7.11. *Za poljubne vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ v prostoru $\mathbb{R}^3$ velja:*

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}).$$

Trditev 7.12. *Mešani produkt vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ v prostoru $\mathbb{R}^3$ je po absolutni vrednosti enak volumnu paralelepipeda, ki ga oklepajo ti trije vektorji.*



Opomba 7.13. *Vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ so koplanarni (t.j. ležijo v isti ravnini) natanko tedaj, ko je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.*

Primer 72. *Podani so vektorji $\vec{a} = (-3, 4, 2), \vec{b} = (-4, 1, 3)$, $\vec{c} = (5, 2, -3)$ in $\vec{d} = (-2, 1, 2)$.*

a) *Izračunaj $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.*

b) *Izračunaj $(\vec{d}, \vec{b}, \vec{a})$.*

c) *Izračunaj volumen paralelepipeda, ki ga napenjajo vektorji $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$.*

č) *Ugotovi ali so vektorji $\vec{a}, \vec{c}$ in $\vec{d}$ koplanarni.*

7.3 Linearna odvisnost in neodvisnost vektorjev

Naj bodo $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots \vec{v_n}$ vektorji in $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ skalarji. Tedaj *vektorju*

$$\lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2} + \ldots + \lambda_n\vec{v_n}$$

pravimo **linearna kombinacija** vektorjev $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$.

Vektorji $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ so **linearno neodvisni**, če je

$$\lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2} + \ldots + \lambda_n\vec{v_n} = \vec{0}$$

natanko tedaj, ko je $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Vektorji so **linearno odvisni**, če niso linearno neodvisni.

Opomba 7.14. *Vektorji so linearno odvisni, če lahko enega izmed njih zapišemo kot linearno kombinacijo preostalih.*

Baza prostora $\mathbb{R}^n$ je vsaka množica n linearno neodvisnih vektorjev iz $\mathbb{R}^n$. Vsak vektor iz $\mathbb{R}^n$ lahko zapišemo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev.

Zgled 4. *Vektorji $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ in $\vec{k} = (0, 0, 1)$ so baza prostora $\mathbb{R}^3$. Imenujemo jo* **standardna baza** $\mathbb{R}^3$.

Opomba 7.15. *Vsak vektor $\vec{v} = (a, b, c)$ lahko zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev standardne baze:*

$$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$

Opomba 7.16. *Poljubna linearno neodvisna vektorja iz $\mathbb{R}^2$ predstavljata bazo ravnine $\mathbb{R}^2$. Poljubni trije vektorji v $\mathbb{R}^2$ so linearno odvisni.*

Opomba 7.17. *Poljubni trije linearno neodvisni vektorji iz $\mathbb{R}^3$ predstavljajo bazo prostora $\mathbb{R}^3$. Poljubni štirje vektorji v $\mathbb{R}^3$ so linearno odvisni.*

Primer 73. *Podani so vektorji $\vec{a} = (-3, 4, 2)$, $\vec{b} = (-4, 1, 3)$, $\vec{c} = (5, 2, -3)$ in $\vec{d} = (-2, 1, 2)$.*

a) Izračunaj linearno kombinacijo $3\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c} - 5\vec{d}$.

b) Pokaži, da so vektorji $\vec{v}_1 = (3, 4), \vec{v}_2 = (2, 5)$ in $\vec{v}_3 = (-1, 3)$ linearno odvisni.

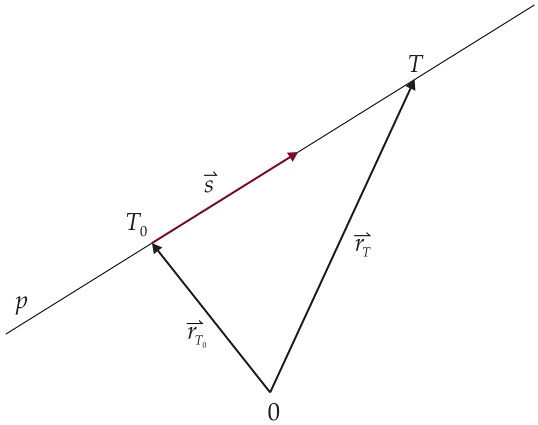
c) Ugotovi ali so vektorji $\vec{a}$, $\vec{c}$ in $\vec{d}$ linearno odvisni.

č) Preveri, ali vektorji $\vec{b}$, $\vec{c}$ in $\vec{d}$ sestavljajo bazo prostora $\mathbb{R}^3$.

7.4 Analitična geometrija v prostoru R^3

7.4.1 Enačba premice v $\mathbb{R}^3$

Premica v prostoru $\mathbb{R}^3$ je določena s smernim vektorjem $\vec{s}$ in točko T_0.



Opomba 7.18. *Do poljubne točke $T(x, y, z)$ na premici p pridemo tako, da preko krajevnega vektorja $\vec{r}_{T_0}$ najprej pridemo do točke T_0, nato pa se v smeri vektorja $\vec{s}$ premaknemo do točke T.*

Enačba premice p v smeri vektorja $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$, ki gre skozi točko $T_0(x_0, y_0, z_0)$ je (v različnih oblikah zapisa) sledeča.

Vektorska oblika.

$$\vec{r}_T = \vec{r}_{T_0} + t\vec{s},\ t \in \mathbb{R}$$

Parametrična oblika.

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ts_1 \\ y &= y_0 + ts_2,\ t \in \mathbb{R} \\ z &= z_0 + ts_3 \end{aligned}$$

Kanonična oblika.

$$\frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2} = \frac{z - z_0}{s_3}$$

Primer 74. *Podan je vektor $\vec{s} = (-3, 4, 2)$ in točke $T_0(-2, 1, 2)$, $A(0, 1, -2)$, $B(4, -1, 3)$, $C(1, -2, 5)$.*

a) Zapiši enačbo premice skozi točko T_0 v smeri vektorja $\vec{s}$.

b) Zapiši enačbo premice skozi točki A in B.

c) Zapiši enačbo premice skozi točki A in C.

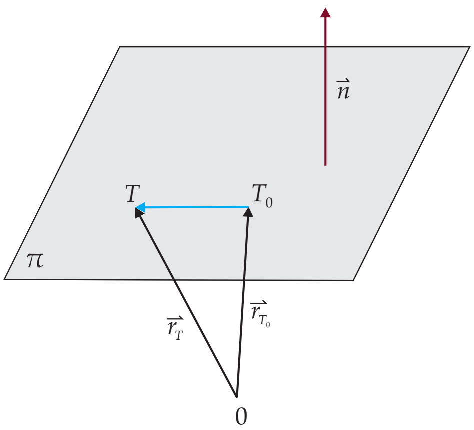
č) Zapiši enačbo premice skozi točki B in C.

Primer 75. *Kolikšen kot oklepa premica $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{5}$ s premico $q : \frac{x-2}{7} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{2}$?*

Primer 76. *Kolikšen kot oklepa premica $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{5}$ z abscisno osjo?*

7.4.2 Enačba ravnine v $\mathbb{R}^3$

Ravnina v prostoru $\mathbb{R}^3$ je določena z normalnim vektorjem $\vec{n}$ in točko T_0. Vektor $\vec{n}$ je pravokoten na ravnino, ki jo določa.



Enačba ravnine π, ki je pravokotna na vektor $\vec{n} = (a, b, c)$ in vsebuje točko $T_0(x_0, y_0, z_0)$ je sledeča.

Vektorska oblika.

$$(\vec{r}_T - \vec{r}_{T_0}) \cdot \vec{n} = 0$$

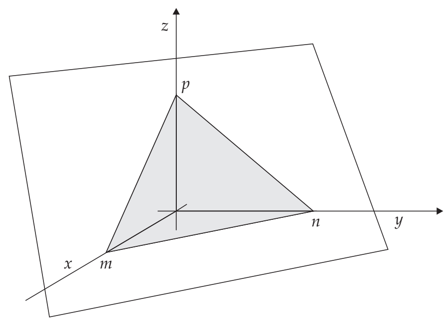
Splošna oblika.

$$ax + by + cz = d$$

Denimo, da ravnina π seka koordinatne osi v točah $(m,0,0),(0,n,0)$ in $(0,0,p)$. Tedaj enačbo ravnine π, lahko zapišemo v segmentni obliki.

Segmentna oblika.

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=1$$



Enačbo ravnine π, ki vsebuje točko $T_0(x_0,y_0,z_0)$ in je vzporedna z vektorjema $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ in $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ lahko enostavno zapišemo v parametrični obliki z dvema parametroma:

Parametrična oblika.

$$\vec{r}_T=\vec{r}_{T_0}+\alpha\vec{a}+\beta\vec{b},\ \ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\,.$$

Primer 77. *Zapiši enačbo ravnine z normalnim vektorjem $\vec{n}=(-3,4,2)$, ki vsebuje točko $T_0(-2,1,2)$.*

Primer 78. *Zapiši enačbo ravnine, ki je pravokotna na $\vec{n}=(-1,2,5)$ in vsebuje točko $T_0(3,8,1)$.*

Primer 79. *Zapiši parametrično obliko enačbe ravnine, ki vsebuje točko $T_0(3,8,1)$ in je vzporedna vektorjema $\vec{a}=(-2,1,-1)$ in $\vec{b}=(3,0,2)$.*

Primer 80. *Zapiši enačbo ravnine, ki vsebuje točke $A(3,8,1),B(2,4,-1)$ in $C(5,-1,4)$.*

Primer 81. *Poišči presek premice $\vec{r_T}=(5,3,-4)+t(5,1,2)$ z ravnino $3x-y+z-1=0$.*

Primer 82. *Kolikšen kot oklepa premica $p:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{5}$ z ravnino $x+y+z=1$?*

Primer 83. *Določi pravokotno projekcijo točke $A(5,3,-1)$ na ravnino $2x-y+z=2$.*

Enačba ravnine skozi tri nekolinearne točke

Naj bodo $T_1(x_1, y_1, z_1), T_2(x_2, y_2, z_2)$ in $T_3(x_3, y_3, z_3)$ tri nekolinearne točke, ki ležijo v ravnini π. Tedaj je pogoj, da točka $T(x, y, z)$ leži na ravnine π enak

$$(\vec{r}_T - \vec{r}_{T_1}, \vec{r}_{T_1} - \vec{r}_{T_2}, \vec{r}_{T_1} - \vec{r}_{T_3}) = 0,$$

oziroma

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Primer 84. *Zapiši enačbo ravnine, ki vsebuje točke* $A(3, 8, 1), B(2, 4, -1)$ *in* $C(5, -1, 4)$.

7.4.3 Razdalje v $\mathbb{R}^3$

Razdalja med dvema točkama

Naj bo $T_1(x_1, y_1, z_1)$ in $T_2(x_2, y_2, z_2)$. Razdalja med T_1 in T_2 je enaka

$$d(T_1, T_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Razdalja med točko in premico

Premica p naj bo dana z enačbo $\vec{r_T} = \vec{r_{T_0}} + t\vec{s}$. Tedaj je razdalja med točko A in premico p enaka

$$d(A, p) = \frac{|\vec{s} \times (\vec{r_A} - \vec{r_{T_0}})|}{|\vec{s}|}.$$

Razdalja med točko in ravnino

Razdalja med točko $T_0(x_0, y_0, z_0)$ in ravnino $\pi : ax + by + cz - d = 0$ je enaka

$$d(T_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Primer 85. *Izračunaj razdaljo med točkama* $A(3, 8, 1)$ *in* $B(2, 4, -1)$.

Primer 86. *Izračunaj razdaljo med točko* $A(3, 8, 1)$ *in premico* $\vec{r_T} = (2, 4, 1) + t(1, 4, 3)$.

Primer 87. *Izračunaj razdaljo med točko* $A(3, 8, 1)$ *in ravnino* $x - 2y + 4z + 6 = 0$.

Matrike

8.1 Definicija in posebni primeri

Matrika je pravokotna shema, ki vsebuje števila:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Matrika **razsežnosti (dimenzije)** $m \times n$ je matrika, ki ima m vrstic in n stolpcev. Element, ki leži v i-ti vrstici in j-tem stolpcu označimo a_{ij} oziroma $[A]_{ij}$

Opomba 8.1. *Prvi indeks je indeks vrstice, drugi indeks je indeks stolpca.*

Zgled 5.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & 7 & -8 & 11 \\ -9 & 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrika A je dimenzije 3×4, element $a_{23} = -8$.

Matrike, ki imajo ničle povsod ($a_{ij} = 0$ za vse i, j), se imenujejo **ničelne matrike**.

Zgled 6.

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrika, ki ima enako število vrstic in stolpcev ($n \times n$ matrika), se imenuje **kvadratna matrika**.

Zgled 7.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & -8 \\ -9 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Glavna diagonala kvadratne matrike A je diagonala, ki vsebuje elemente a_{ii}, kjer je $i = 1, 2, \ldots, n$.

Kvadratna matrika, ki je simetrična glede na glavno diagonalo ($a_{ij} = a_{ji}$ za vse i, j), se imenuje **simetrična matrika**

Zgled 8.

$$S = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 7 & -8 \\ 2 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

Kvadratna matrika, ki ima ničle povsod, razen na glavni diagonali ($a_{ij} = 0$ za vse $i \neq j$), se imenuje **diagonalna matrika**.

Zgled 9.

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Kvadratna matrika dimenzije $n \times n$, ki ima po glavni diagonali enice, povsod drugod pa ničle ($a_{ii} = 1$ in $a_{ij} = 0$ za vse $i \neq j$), se imenuje **identiteta** ali **identična matrika** dimenzije n. Označimo jo z I_n.

Zgled 10.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kvadratna matrika, ki ima pod glavno diagonalo same ničle ($a_{ij} = 0$ za vse $i > j$), se imenuje **zgornje trikotna matrika**.

Zgled 11.

$$Z = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -5 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Kvadratna matrika, ki ima nad glavno diagonalo same ničle ($a_{ij} = 0$ za vse $i < j$), se imenuje **spodnje trikotna matrika**.

Zgled 12.

$$S = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

8.2 Računske operacije

8.2.1 Seštevanje matrik

Seštevamo lahko le matrike istih dimenzij. Vsota dveh $m \times n$ matrik A in B je $m \times n$ *matrika* $A + B$, katere elementi so definirani na naslednji način:

$$[A+B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Zgled 13.

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+0 & -2+3 & 7+1 \\ 1+2 & 3+6 & -5-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 3 & 9 & -7 \end{bmatrix}$$

Opomba 8.2. *Na podoben način definiramo tudi odštevanje matrik.*

8.2.2 Množenje matrik s skalarjem

Produkt števila $k \in \mathbb{R}$ in $m \times n$ matrike A je $m \times n$ *matrika* kA, katere elementi so definirani na naslednji način:

$$[kA]_{ij} = k \cdot a_{ij}.$$

Zgled 14.

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -6 & 21 \\ 3 & 9 & -15 \end{bmatrix}$$

8.2.3 Množenje matrik

Produkt $m \times n$ matrike A in $n \times \ell$ matrike B je $m \times \ell$ *matrika* AB, katere elementi so definirani na naslednji način:

$$[AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

V formuli nastopajo produkti vrstic in stolpcev.

Zgled 15.

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 \cdot 5 + 6 \cdot 1 = 26$$

Zgled 16.

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & -15 \\ 9 & -7 & 19 \\ 26 & 10 & -2 \end{bmatrix}$$

Opomba 8.3. *Produkt matrik A in B je definiran samo v primeru, ko je število stolpcev matrike A enako številu vrstic matrike B.*

Opomba 8.4. *Naj bo I identiteta. Tedaj za poljubno matriko A velja $AI = IA = A$.*

8.2.4 Transponiranje matrike

Transponiranka $m \times n$ matrike A je $n \times m$ *matrika* A^T, katere elementi so definirani na naslednji način:

$$[A^T]_{ij} = a_{ji}.$$

Zgled 17.

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 7 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$$

Opomba 8.5. *Pri transponiranju zamenjamo vrstice s stolpci in obratno.*

Opomba 8.6. *Matrika S je simetrična natanko tedaj, ko velja*

$$S^T = S.$$

Primer 88. *Podane so matrike*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 3 & -4 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \text{ in } C = \begin{bmatrix} -9 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj:

a) $2A + 3B$

b) AB

c) BA

č) CB

Lastnosti računskih operacij matrik

Za poljubne matrike A, B, C in poljubni $k, l \in \mathbb{R}$ velja:

(i) $A + B = B + A$

(ii) $A + 0 = 0 + A = A$

(iii) $A + (-A) = -A + A = 0$

(iv) $k(A + B) = kA + kB$

(v) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(vi) $(k + l)A = kA + lA$

(vii) $(AB)C = A(BC)$

(viii) $AI = IA = A$

(ix) $(A + B)C = AC + BC$

(x) $(A^T)^T = A$

Opomba 8.7. *Množenje matrik v splošnem ni komutativno, t.j.* $AB \neq BA$*. Zato moramo pri množenju matrik paziti, da matrike množimo v pravilnem vrstnem redu.*

8.3 Determinanta matrike

Determinanta matrike je preslikava

$$\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R},$$

ki kvadratni matriki priredi število na spodaj opisan način.

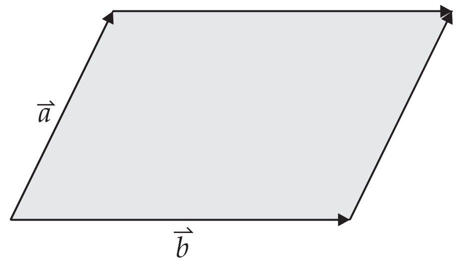
Naj bo A kvadratna matrika dimenzije $n \times n$. Determinanto matrike A označimo z $\det(A)$ ali $|A|$, in jo zapišemo tako:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Determinanto 2×2 matrike lahko izračunamo po formuli

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc\,.$$

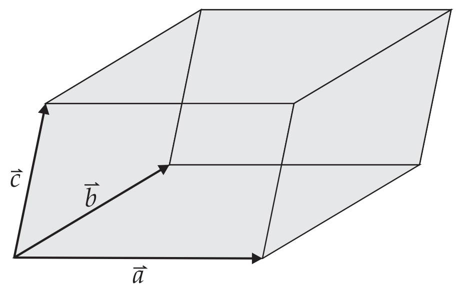
Opomba 8.8. *Absolutna vrednost determinante je enaka ploščini paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\vec{a} = (a, b)$ in $\vec{b} = (c, d)$.*



Determinanto 3×3 matrike lahko izračunamo s formulo

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3\,.$$

Opomba 8.9. *Absolutna vrednost determinante je enaka volumnu paralelepipeda, ki ga napenjajo vektorji $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ in $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$.*



Naj bo A kvadratna matrika dimenzije $n \times n$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Determinanto matrike A lahko izračunamo z razvojem po izbrani vrstici ali stolpcu.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Razvoj determinante po i-ti vrstici:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \,.$$

A_{ij} označuje matriko, dobljeno iz matrike A z brisanjem i-te vrstice in j-tega stolpca.

Opomba 8.10. *Determinanto matrike lahko razvijemo po katerikoli vrstici ali stolpcu. Zaradi enostavnega računanja navadno izberemo tisto vrstico ali stolpec, ki vsebuje največ ničel.*

Zgled 18. *Determinanto razvijmo po prvem stolpcu:*

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 36$$

Determinanto razvijmo po drugi vrstici:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 36$$

Lastnosti determinant

(i) Determinanta zgornje trikotne ali spodnje trikotne matrike je enaka produktu elementov na diagonali.

Zgled 19. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 18 & 5 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-3) \cdot (-1) \cdot 2 = 30$

(ii) Determinanta matrike se ne spremeni, če vrstici/stolpcu prištejemo večkratnik druge vrstice/stolpca.

(iii) Če v matriki med seboj zamenjamo dve vrstici/stolpca, njena determinanta spremeni predznak.

Zgled 20. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 18 \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 5 & 18 \\ -3 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$

(iv) Če v matriki A vrstico/stolpec pomnožimo s številom k, se vrednost determinante spremeni na $k \cdot \det A$.

Zgled 21. $\begin{vmatrix} 10 & 15 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \cdot 2 & 5 \cdot 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$

Primer 89. *Izračunaj determinante matrik A, B in C:*

a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 3 & -4 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} -9 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Primer 90. *Izračunaj ploščino paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\vec{v}_1 = (3, 4)$ in $\vec{v}_2 = (-4, 1)$.*

Primer 91. *Izračunaj volumen paralelepipeda, ki ga napenjajo vektorji $\vec{a} = (-1, 3, 4), \vec{b} = (-3, 1, 4)$ in $\vec{c} = (1, 0, 5)$*

8.4 Inverzna matrika

Naj bo A kvadratna matrika. Matrika B je **inverzna matrika** matrike A, če velja
$$AB = BA = I\,.$$
V tem primeru pišemo $B = A^{-1}$, oziroma $A = B^{-1}$.

Primer 92. *Preveri, ali sta si matriki A in B inverzni.*
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

8.4.1 Iskanje inverzne matrike s pomočjo razširjene matrike

Naj bo A poljubna matrika. Inverzno matriko A^{-1} poiščemo s pomočjo naslednjih korakov.

1. Zapišemo razširjeno matriko matrike A, t.j. $[\ A \mid I\ ]$.
2. Matriko $[\ A \mid I\ ]$ postopoma preoblikujemo v matriko $[\ I \mid A^{-1}\ ]$, pri čemer smemo uporabljati naslednje tri operacije:
   - Zamenjava dveh vrstic.
   - Množenje vrstice z neničelnih številom.
   - Seštevanje dveh vrstic.
3. Iz desne strani razširjene matrike $[\ I \mid A^{-1}\ ]$ preberemo iskano matriko A^{-1}.

Primer 93. *Podane so matrike*
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 3 & -4 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \text{ in } C = \begin{bmatrix} -9 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Poišči inverz matrike A.

b) Reši matrično enačbo $AX + B = C$.

8.4.2 Iskanje inverzne matrike s pomočjo adjungirane matrike

Naj bo A kvadratna matrika dimenzije $n \times n$. **Kofaktor** $A_{i,j}$ matrike A dobimo tako, da v matriki A izbrišemo i-to vrstico in j-ti stolpec, nato izračunamo determinanto dobljene matrike in jo pomnožimo z $(-1)^{i+j}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Adjungirana matrika $\tilde{A}$ matrike A je matrika, katere elementi so kofaktorji matrike A:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T$$

Izrek 8.11. *Če je matrika A obrnljiva (t.j. ima inverz), potem velja*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A} \, .$$

Primer 94. *S pomočjo adjungirane matrike poišči inverze matrik A, B in C.*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 3 & -4 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} -9 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

8.5 Sistemi linearnih enačb

Linearni sistem m **enačb z** n **neznankami** ima splošno obliko:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Neznanke v sistemu so $x_1, \ldots, x_n$, številom $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pa rečemo **koeficienti sistema**.

Rešitev sistema je množica števil $x_1, \ldots, x_n$, ki zadoščajo vsem m enačbam sistema.

Če so vsa števila $b_1, \ldots, b_m$ enaka 0, potem sistemu rečemo **homogen sistem**, sicer je sistem **nehomogen**.

Koeficiente a_{ij} sistema lahko zapišemo v matriko (imenujemo jo **matrika sistema**), števila $b_1, \ldots, b_m$, ter neznanke $x_1, \ldots, x_n$ pa v vektor (stolpec):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Tako lahko zapišemo **matrično obliko sistema**:

$$Ax = b\,.$$

Razširjena matrika sistema je matrika, kjer je na levi strani matrika koeficientov A na desni pa vektor b:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Zgled 22. *Sistemu enačb*

$$\begin{aligned} x + 3y - 5z &= 3 \\ 2x + 5y - 2z &= -1 \\ 2x - 4y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

priredimo razširjeno matriko sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 3 \\ 2 & 5 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & 3 & 2 \end{array}\right].$$

8.5.1 Gaussova eliminacija

Gaussova eliminacija je postopek reševanja sistemov linearnih enačb. Sistemu najprej priredimo razširjeno matriko sistema, nato pa na njej izvedemo postopek Gaussove eliminacije opisan spodaj, pri čemer nam je dovoljeno uporabljati naslednje tri operacije:

- Zamenjava vrtnega reda vrstic
- Prištevanje ene vrstice k drugi
- Množenje vrstice z neničelnim številom c

Opomba 8.12. *Zgornje operacije ustrezajo naslednjim operacijam na sistemu enačb:*

- *Zamenjava vrstnega reda enačb*
- *Prištevanje ene enačbe k drugi*
- *Množenje enačbe z neničelnim številom c*

Opomba 8.13. *Naštete operacije ne spreminjajo množice rešitev danega sistema.*

Postopek Gaussove eliminacije

Pri Gaussovi eliminaciji želimo pod glavno diagonalo razširjene matrike pridobiti ničle. To dosežemo z večkratno uporabo zgoraj naštetih operacij. Začnemo v prvem stolpcu razširjene matrike in s pomočjo elementa $a_{1,1} \neq 0$ eliminiramo (uničimo) vse elemente pod njim, to so $a_{21}, \dots a_{m1}$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & * & \dots & * & * \\ 0 & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & * & \dots & * & * \end{array}\right]$$

S postopkom nadaljujemo v drugem stolpcu, t.j. s pomočjo elementa v drugi vrstici eliminiramo vse elemente pod njim:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & * & * \end{array}\right]$$

S postopkom nadaljujemo vse do zadnjega stolpca, t.j. dokler ne dobimo zgornje trikotne matrike.

Dobljena matrika ima v končni fazi obliko:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \bar{a}_{22} & \dots & \bar{a}_{2n} & \bar{b}_2 \\ 0 & 0 & \dots & \bar{a}_{3n} & \bar{b}_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{a}_{mn} & \bar{b}_m \end{array}\right],$$

kjer je $\bar{a}_{ij}$ poljubno realno število (lahko tudi 0).

Oblika matrike, ki jo dobimo po končani Gaussovi eliminaciji se imenuje **stopničasta oblika matrike sistema**. V tej matriki nobeni dve vrstici nimata prvega neničelnega elementa na isti poziciji (v istem stolpcu).

Rešitve sistema sedaj preberemo iz matrike v stopničasti obliki z **vzvratno substitucijo**:
Iz zadnje neničelne vrstice izrazimo zadnjo spremenljivko, t.j. x_n. Iz predzadnje neničelne vrstice preberemo x_{n-1} in tako dalje vse do prve vrstice, iz katere preberemo spremenljivko x_1.

Rang matrike

Rang matrike A, označimo ga z $\text{rang}(A)$, je maksimalno število linearno neodvisnih vektorjev v vrsticah matrike A.

Izrek 8.14. *Rang matrike se ne spremeni, če na vrsticah matrike A izvajamo operacije, ki jih uporabljamo pri Gaussovi eliminaciji.*

Opomba 8.15. *Iz zgornjega izreka sledi, da je rang matrike A enak številu neničelnih vrstic v stopničasti obliki matrike A.*

Rang razširjene matrike $[A|b]$, označimo ga z $\text{rang}([A|b])$, je enak številu neničelnih vrstic v stopničasti obliki razširjene matrike sistema.

Izrek 8.16. *Linearni sistem enačb*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

ima rešitev natanko tedaj, ko je rang matrike A enak rangu razširjene matrike $[A|b]$.

(i) *Če je rang(A)=rang([A|b])= n, potem ima sistem natanko eno rešitev.*

(ii) *Če je rang(A)=rang([A|b])< n, potem ima sistem neskončno rešitev.*

Primer 95. *S pomočjo Gaussove eliminacije reši sistem enačb.*

a)

$$\begin{aligned} x + 3y - 5z &= 3 \\ 2x + 5y - 2z &= -1 \\ 2x - 4y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x + y - 4z &= 1 \\ 3x + 2y - z &= -3 \\ 2x - y + 5z &= 4 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x + y - z + t &= 1 \\ 3x - 2y - z - 2t &= -4 \\ -2x + y + 4z - 4t &= -2 \end{aligned}$$

č)

$$\begin{aligned} x + y - 4z &= 1 \\ 2x + 2y - z &= -3 \\ 4x + 4y - 2z &= 2 \end{aligned}$$

8.5.2 Cramerjevo pravilo

Cramerjevo pravilo je formula, ki izraža rešitev sistema n linearnih enačb z n neznankami, ki ima neničelno determinanto matrike sistema.

Vzemimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

in ga zapišimo v matrični obliki $Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Naj bo A_i matrika, ki jo dobimo tako, da v matriki A zamenjamo i-ti stolpec s stolpcem b:

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Izrek 8.17 (Cramerjevo pravilo)**.** *Naj bodo*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{in } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Če je $\det(A) \neq 0$*, ima sistem enačb* $Ax = b$ *natanko eno rešitev. Vrednosti spremenljivk* x_i *(za* $i = 1, \ldots, n$*) so določene s formulo*

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

Primer 96. *S pomočjo Cramerjevega pravila reši sistem enačb.*

a)

$$\begin{aligned} x + 3y - 5z &= 3 \\ 2x + 5y - 2z &= -1 \\ 2x - 4y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x + y - 4z &= 1 \\ 3x + 2y - z &= -3 \\ 2x - y + 5z &= 4 \end{aligned}$$

8.6 Matrika linearne preslikave

Linearna preslikava iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$ je preslikava

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

ki ohranja linearne kombinacije vektorjev, kar pomeni

$$\mathcal{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha\mathcal{A}(\vec{x}) + \beta\mathcal{A}(\vec{y})$$

za vsak $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

Opomba 8.18. *Linearne preslikave lahko opišemo z matrikami. Vsaki linearni preslikavi $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ pripada matrika dimenzije $m \times n$.*

Primer 97. *Preveri, ali je preslikava $\mathcal{A}$ linearna.*

a) $\mathcal{A}(x, y) = (2x - y, 3x + 2y)$

b) $\mathcal{A}(x, y) = (x + y, 5x)$

c) $\mathcal{A}(x, y) = (1 + y, x - y)$

Standardni primeri linearnih preslikav:

- Raztegi

- Rotacije
- Zrcaljenja
- Projekcije

Množico

$$\mathcal{K}er(\mathcal{A}) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{A}(\vec{x}) = \vec{0}\right\}$$

imenujemo **jedro** linearne preslikave $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Množico

$$\mathcal{I}m(\mathcal{A}) = \{\mathcal{A}(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

imenujemo **slika** linearne preslikave $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Primer 98. *Določi jedro linearne preslikave*

$$\mathcal{A}(x, y, z) = (2x + y - z, 3x + y, 2z - x).$$

Postopek iskanja matrike linearne preslikave $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

1. Izberemo bazo obeh prostorov. Naj bo $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ baza prostora $\mathbb{R}^n$ in $\mathcal{B}_2 = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ baza prostora $\mathbb{R}^m$.

2. S preslikavo $\mathcal{A}$ preslikamo vektorje iz baze $\mathcal{B}_1$. Tako dobimo slike $\mathcal{A}(e_1), \mathcal{A}(e_2), \ldots, \mathcal{A}(e_n)$, ki ležijo v prostoru $\mathbb{R}^m$.

3. Dobljene slike razvijemo po bazi $\mathcal{B}_2$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(e_1) &= a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \ldots + a_{m1}f_m \\
\mathcal{A}(e_2) &= a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + \ldots + a_{m2}f_m \\
&\vdots \\
\mathcal{A}(e_n) &= a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + \ldots + a_{mn}f_m
\end{aligned}$$

4. Koeficiente zgornjega razvoja zapišemo v stolpce matrike:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Zgled 23. *Zapišimo matriko linearne preslikave*

$$\mathcal{A}(x, y, z) = (2x + y - z, x + y, 3z - x - y)$$

glede na standardno bazo $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.
Slike baznih vektorjev izrazimo z bazo $\mathcal{B}$ *tako:*

$$\mathcal{A}(1, 0, 0) = (2, 1, -1) = 2(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) - 1(0, 0, 1)$$

$$\mathcal{A}(0, 1, 0) = (1, 1, -1) = 1(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) - 1(0, 0, 1)$$

$$\mathcal{A}(0, 0, 1) = (-1, 0, 3) = -1(1, 0, 0) + 0(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1)$$

Ko koeficiente zapišemo v stolpce, dobimo matriko :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Primer 99. *Zapiši matriko linearne preslikave* $\mathcal{A}$ *glede na standardno bazo prostora* $\mathbb{R}^3$.

a) $\mathcal{A}(x, y, z) = (2x + y - z, 3x + y, 2z - x)$

b) $\mathcal{A}(x, y, z) = (3x + y + 2z, x + y - z, x + 2y + 3z)$

Primer 100. *Zapiši matriko linearne preslikave, ki ravnino* $\mathbb{R}^2$

a) prezrcali preko premice $y = 2x$ *glede na standardno bazo prostora* $\mathbb{R}^2$.

b) zavrti v smeri urinega kazalca za kot $\frac{\pi}{2}$ *glede na standardno bazo prostora* $\mathbb{R}^2$.

Trditev 8.19. *Naj bosta* $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *in* $\mathcal{B} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *linearni preslikavi. Tedaj je tudi kompozitum* $\mathcal{BA} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *linearna preslikava.*

Trditev 8.20. *Naj bo* $A_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ *matrika, ki pripada linearni preslikavi* $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *in deluje iz baze* $\mathcal{B}_1$ *v bazo* $\mathcal{B}_2$ *ter* $B_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3}$ *matrika, ki pripada linearni preslikavi* $\mathcal{B} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *in deluje iz baze* $\mathcal{B}_2$ *v bazo* $\mathcal{B}_3$. *Tedaj je*

$$(BA)_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_3} = B_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3} \cdot A_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}.$$

Torej, produkt matrik linearnih preslikav $\mathcal{B}$ *in* $\mathcal{A}$ *(v ustreznih bazah) je matrika linearne preslikave kompozituma* $\mathcal{BA}$.

Primer 101. *Zapiši matriko linearne preslikave, ki ravnino $\mathbb{R}^2$ najprej zavrti za kot $\frac{\pi}{3}$ nato pa projicira na premico $y = -3x$ glede na standardno bazo prostora $\mathbb{R}^2$.*

Zapišimo nekaj matrik pogostih (splošnih) linearnih preslikav v ravnini.

Trditev 8.21. *Matrika rotacije ravnine $\mathbb{R}^2$ za kot φ v pozitivni smeri (v nasprotni smeri urinega kazalca) ima obliko*

$$R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Trditev 8.22. *Matrika pravokotne projekcije ravnine $\mathbb{R}^2$ na premico $y = kx$ ima obliko*

$$P_{y=kx} = \frac{1}{1+k^2}\begin{bmatrix} 1 & k \\ k & k^2 \end{bmatrix}.$$

Trditev 8.23. *Matrika pravokotnega zrcaljenja ravnine $\mathbb{R}^2$ čez premico $y = kx$ ima obliko*

$$Z_{y=kx} = \frac{1}{1+k^2}\begin{bmatrix} 1-k^2 & 2k \\ 2k & k^2-1 \end{bmatrix}.$$

Delovanje matrike linearne preslikave

Naj bo A matrika linearne preslikave $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ glede na bazi $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ in $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$. Če je

$$\vec{x} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$$

in

$$\mathcal{A}(\vec{x}) = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \ldots \beta_m f_m\,,$$

potem velja

$$A\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}.$$

Primer 102. *Zapiši matriko linearne preslikave, ki projicira točke na premico $y = -2x$ glede na standardno bazo prostora $\mathbb{R}^2$, nato pa izračunaj, kam se s to preslikavo preslika točka $T(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Smiselnost dobljenega rezultata grafično preveri.*

Univerza v Mariboru

Fakulteta za gradbeništvo,
prometno inženirstvo in arhitekturo