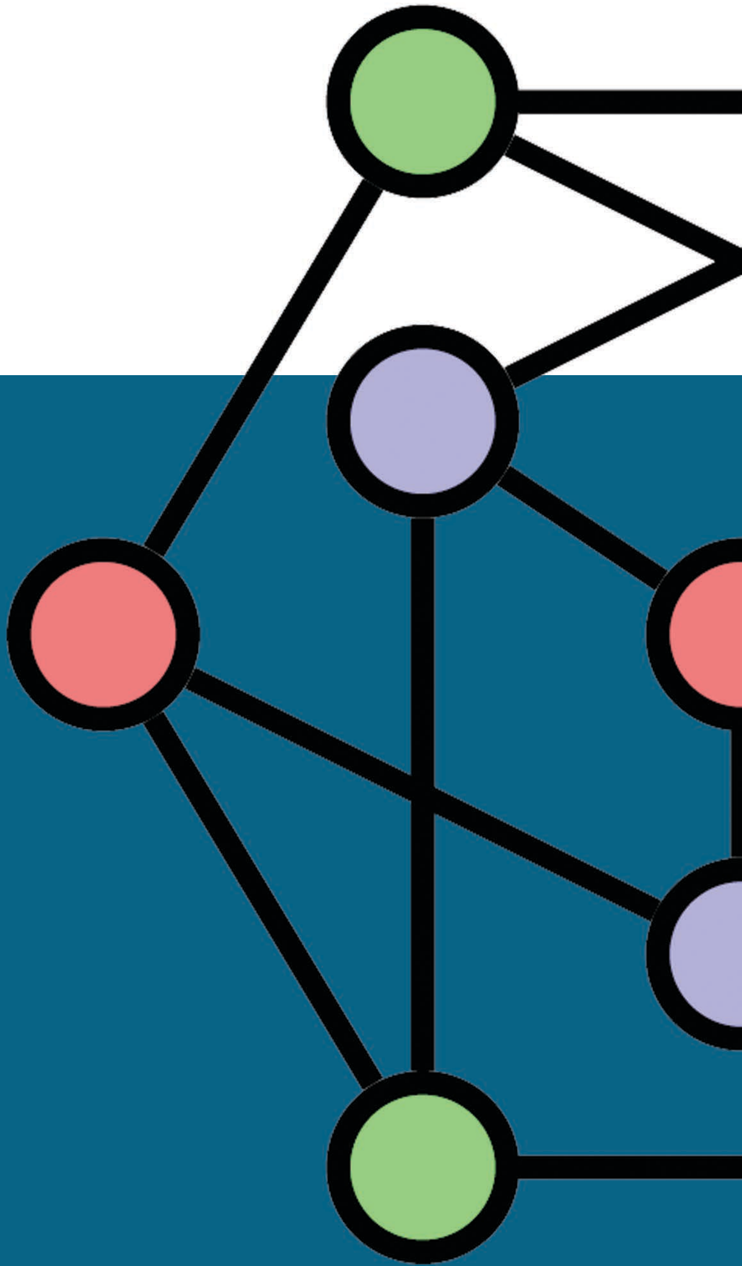
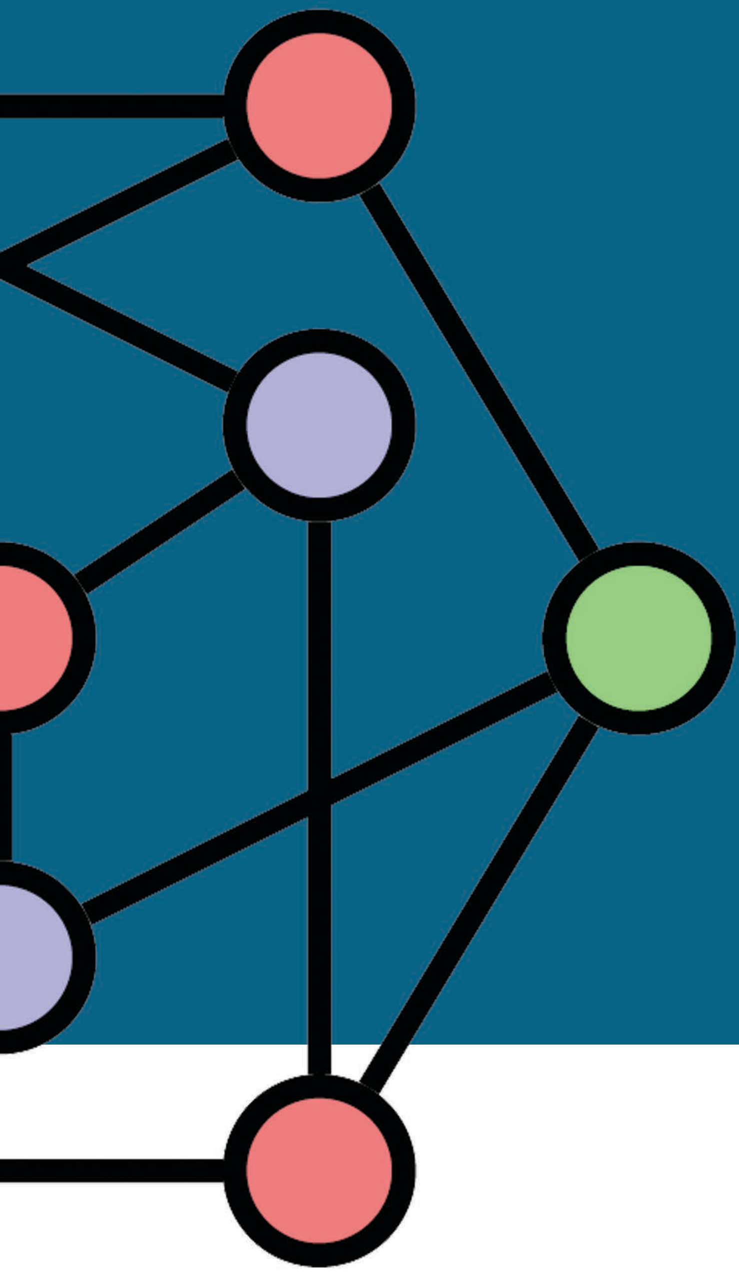
Univerza v Mariboru

Fakulteta za elektrotehniko,
računalništvo in informatiko



DISKRETNA MATEMATIKA



doc. dr. Aleksandra TEPEH
izr. prof. dr. Riste ŠKREKOVSKI

Univerzitetna založba
Univerze v Mariboru

Univerzitetna založba
Univerze v Mariboru

Diskretna matematika

Avtorja:
doc. dr. Aleksandra Tepeh
izr. prof. dr. Riste Škrekovski

April 2018

Naslov: Diskretna matematika

Avtorja: doc. dr. Aleksandra Tepeh
(Univerza v Mariboru, Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko),
izr. prof. dr. Riste Škrekovski
(Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko)

Strokovna recenzenta: izr. prof. dr. Petra Žigert Pleteršek
(Univerza v Mariboru, Fakulteta za kemijo in kemijsko tehnologijo),
izr. prof. dr. Iztok Peterin
(Univerza v Mariboru, Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko)

Tehnična urednica: doc. dr. Aleksandra Tepeh
(Univerza v Mariboru, Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko)

Oblikovanje ovitka: Jan Perša (Univerzitetna založba Univerze v Mariboru)

Grafične priloge: avtorja

Izdajateljica:
Univerza v Mariboru, Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko
Koroška cesta 46, 2000 Maribor, Slovenija
http://feri.um.si, feri@um.si

Založnik:
Univerzitetna založba Univerze v Mariboru
Slomškov trg 15, 2000 Maribor, Slovenija
http://press.um.si, zalozba@um.si

Izdaja: Prva izdaja
Vrsta publikacije: e-publikacija
Dostopno na: `http://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/323`
Izid: Maribor, februar 2018

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Univerzitetna knjižnica Maribor

51(075.8)

TEPEH, Aleksandra
Diskretna matematika [Elektronski vir] / avtorja Aleksandra Tepeh, Riste Škrekovski. - El. učbenik. - V Mariboru : Univerzitetna založba Univerze, 2018

Način dostopa
(URL): `http://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/323`

ISBN 978-961-286-152-0

doi: doi.org/10.18690/978-286-152-0
1. Škrekovski, Riste
COBISS.SI-ID 94296577

ISBN: 978-961-286-152-0 (PDF)
DOI: https://doi.org/10.18690/978-961-286-152-0
Cena: Brezplačen izvod
Odgovorna oseba založnika: red. prof. dr. Žan Jan Oplotnik, prorektor Univerze v Mariboru

DOI https://doi.org/10.18690/978-961-286-152-0 ISBN 978-961-286-152-0

Dostopno na: http://press.um.si

DISKRETNA MATEMATIKA
A.Tepeh in R. Škrekovski

Univerzitetna založba
Univerze v Mariboru

Diskretna Matematika

ALEKSANDRA TEPEH IN RISTE ŠKREKOVSKI

Povzetek

Učbenik je namenjen študentom visokošolskega študija računalništva in informatike. Predstavlja uvod v izbrana poglavja iz matematike, ki so potrebna za razumevanje in reševanje problemov, ki se pojavljajo v računalništvu. Poleg izjavnega računa, relacij in teorije grafov, ki sodijo v področje diskretne matematike, učbenik zajema tudi poglavji o geometrijskih vektorjih in matrikah. Poleg teoretične obravnave snovi učbenik vsebuje veliko zgledov za lažje razumevanje, kakor tudi naloge s postopki in rešitvami.

Ključne besede: • izjavni račun • matrika • vektor • relacija • graf •

NASLOVA AVTORJEV: dr. Aleksandra Tepeh, docentka, Univerza v Mariboru, Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko, Koroška cesta 46, 2000 Maribor, Slovenija, e-pošta: aleksandra.tepeh@um.si. dr. Riste Škrekovski, izredni profesor, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana, Slovenija; Fakulteta za informacijske študije v Novem mestu, Ljubljanska cesta 31 a, p.p. 603, 8000 Novo mesto, Slovenija, e-pošta: skrekovski@gmail.com.

DOI https://doi.org/10.18690/978-961-286-152-0 ISBN 978-961-286-152-0

Dostopno na: http://press.um.si

Predgovor

Učbenik Diskretna matematika je nastal na podlagi učnega načrta za istoimenski predmet 2. letnika visokošolskega študijskega programa na Fakulteti za elektrotehniko, računalništvo in informatiko Univerze v Mariboru. Slednje je tudi razlog za izbiro naslova, čeprav učbenik poleg izbranih poglavij iz *diskretne matematike* (izjavni in predikatni račun, relacije, teorija grafov) vsebuje poglavji (o vektorjih in matrikah), ki sodita k veji matematike, imenovani *linearna algebra*.

Prav zaradi raznolikosti vsebin predmeta so študentje pogosto spraševali po literaturi, ki bi zajemala vso snov predmeta, saj so jo lahko našli le razpršeno po drugi literaturi. Poleg vse snovi, zbrane na enem mestu, je prednost učbenika, da se vsake teme loteva od temeljev (razen osnovnega znanja o množicah in nekaj temeljnega srednješolskega znanja algebre, ni potrebno drugo predznanje) in vključuje podrobna pojasnila, ki smo jih sicer običajno bolj vajeni na predavanjih in vajah. Prav tako po vsaki zaokroženi celoti snovi sledi poglavje z naslovom *Preveri svoje znanje*, kjer lahko študent najprej preveri ali je osvojil teoretično podlago za naloge, ki sledijo. K prvim sklopom nalog so priložene rešitve s celotnimi postopki in nasveti za reševanje, nato pa v večini poglavij sledijo še naloge z rešitvami za samostojno reševanje.

Ker je učbenik v prvi vrsti namenjem študentom visokošolskega študija, so razlage včasih (predvsem v dokazih in težjih zgledih) obsežnejše, da bi dosegle svoj namen, težje dokaze pa tudi izpustimo in jih zahtevnejši bralec lahko najde v navedeni literaturi.

Avtorja se najlepše zahvaljujeva recenzentoma, izr. prof. dr. Petri Žigert Pleteršek in izr. prof. dr. Iztoku Peterinu za skrben pregled knjige. Nenazadnje gre zahvala asistentki Dragani Božović kakor tudi študentom, ki so s pridom uporabljali osnutke učbenika, ter pri tem opazili marsikatero tipkarsko napako. Včasih se žal še tako skrbnemu očesu kakšna napaka izmuzne, zato bo do naslednje izdaje seznam morebitnih popravkov dosegljiv na spletnih straneh Fakultete za elektrotehniko, računalništvo in informatiko Univerze v Mariboru: `https://feri.um.si/`.

doc. dr. Aleksandra Tepeh in izr. prof. dr. Riste Škrekovski

KAZALO

1

IZJAVNI IN PREDIKATNI RAČUN

V tem poglavju bomo najprej naredili kratko ponovitev osnov izjavnega računa, ki je začetna snov predmeta Matematika 1 iz prvega letnika. Tukaj jo podajamo v strnjeni obliki. Brez njenega razumevanja namreč ne moremo narediti nadgradnje znanja, katere glavni cilj je poglobljeno razumevanje tehnik dokazovanja. Pri tem ne mislimo le na dokazovanje matematičnih trditev in izrekov. Dokaz igra vse pomembnejšo vlogo v računalništvu, ko želimo potrditi, da bo neka programska oprema *vselej* delovala pravilno, česar ni mogoče trditi na osnovi še tako velikega števila testiranj.

1.1 PONOVITEV OSNOV

Izjava je smiselna poved, za katero lahko določimo, ali je resnična ali neresnična.

Tako vsaka poved ni izjava; primeri takih povedi so:

- "Poišči ključe."
- "Si bil danes na kosilu?"
- "Greva plesat!"

Izjave po vsebini delimo na **resnične** (**pravilne**) in **neresnične** (**nepravilne, lažne**). Če je izjava p resnična, pravimo, da ima logično vrednost 1 (kar krajše zapišemo $p \sim 1$), sicer je neresnična in ima logično vrednost 0 ($p \sim 0$). Glede na zgradbo pa izjave delimo na **osnovne** (to so izjave, sestavljene iz ene same trditve) in **sestavljene** izjave (tj. izjave, sestavljene iz več enostavnih izjav).

Primer 1 *Obravnavajmo naslednje povedi.*

(a) Izjava "Trinajst ni praštevilo." je enostavna in neresnična.

(b) Izjava "Če dežuje, so ceste mokre." je sestavljena resnična izjava.

(c) *"Slovenski košarkarji so aktualni evropski prvaki." je primer enostavne izjave. Njena resničnost je odvisna od trenutka, ko jo izrečemo.*

(d) *"Se učiš sproti?" ni izjava.*

Sestavljene izjave tvorimo s pomočjo **izjavnih povezav** (oz. **izjavnih veznikov**). Pri tem zahtevamo, da je resničnost sestavljene izjave enolično določena z resničnostjo njenih sestavnih delov. Izjavne povezave, ki jih navadno uporabljamo, so naslednje:

- **Negacija** izjave p je izjava $\neg p$ (beri "ne p"), ki je pravilna, če je p nepravilna in je nepravilna, če je p pravilna.
- **Konjunkcija** izjav p in q je izjava $p \wedge q$ ("p in (hkrati) q"), ki je pravilna, kadar sta obe izjavi pravilni in nepravilna, če je vsaj ena od izjav p, q nepravilna.
- **Disjunkcija** izjav p in q je izjava $p \vee q$ ("p ali q"), ki je pravilna, kadar je vsaj ena od izjav p, q pravilna, in nepravilna, če sta obe izjavi nepravilni.
- **Stroga** (ali **ekskluzivna**) **disjunkcija** izjav p in q je izjava $p \veebar q$, ki je pravilna, kadar je natanko ena od izjav p, q pravilna, sicer je nepravilna.
- **Implikacija** izjav p in q je izjava $p \Rightarrow q$, ki je nepravilna v primeru, ko je p pravilna in q nepravilna, in je pravilna v vseh ostalih primerih. (Beremo: "iz p sledi q" ali "če p, potem q".)
- **Ekvivalenca** izjav p in q je izjava $p \Leftrightarrow q$, ki je pravilna, če sta pravilni p in q ali če sta obe, p in q, nepravilni. V vseh ostalih primerih je nepravilna. (Beremo: "p natanko tedaj kot q" , "p tedaj in le tedaj kot q", "p če in samo če q".)
- **Shefferjeva povezava** je izjava $p \uparrow q$, ki je pravilna, če vsaj ena od izjav p, q ni pravilna.
- **Lukasiewicz-Piercova povezava** je izjava $p \downarrow q$, ki je pravilna, ko nobena od izjav p, q ni pravilna.

V primeru implikacije $p \Rightarrow q$ pravimo, da je p **zadosten pogoj** za q in da je q **potreben pogoj** za p. Za negacijo rečemo, da je **1-mestna** izjavna povezava, ostale pa prištevamo k **2-mestnim** izjavnim povezavam.

Naj bodo $p_1, p_2, \ldots, p_n$ **izjavne spremenljivke**. To so enostavne izjave, ki nastopajo v sestavljeni izjavi A. **Pravilnostna (resničnostna) tabela** izjave A je tabela z 2^n vrsticami, ki ustrezajo vsem naborom vrednosti spremenljivk $p_1, p_2, \dots, p_n$. Za posamezni nabor poiščemo logično vrednost izjave A in jo zapišemo v ustrezno vrstico. Zgornje definicije izjavnih povezav tako lahko povzamemo v naslednji pravilnostni tabeli:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \veebar q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$p \uparrow q$	$p \downarrow q$
1	1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1	1	1

Vrstni red delovanja izjavnih povezav razberemo z upoštevanjem oklepajev in spodnje **prioritetne tabele** izjavnih povezav:

$$\begin{gathered} \neg \\ \wedge, \uparrow, \downarrow \\ \vee, \veebar \\ \Rightarrow \\ \Leftrightarrow \end{gathered}$$

Tako npr. $\neg$ veže močneje kot $\wedge$, ta pa močneje kot $\Rightarrow$. Izjave, ki so v zgornji prioritetni tabeli zapisane v isti vrstici, so enakovredne. V kolikor z oklepaji ni določeno drugače, je potrebno upoštevati še, da levi nastop izjavne povezave veže močneje od desnega nastopa iste izjavne povezave.

Primer 2 *V naslednjih sestavljenih izjavah vrstni red izjavnih povezav poudari z oklepaji:*

(a) $p \wedge p \Rightarrow q \Rightarrow q$,

(b) $p \wedge \neg q \Rightarrow r \Leftrightarrow \neg q \vee r$.

Rešitev:

(a) $((p \wedge p) \Rightarrow q) \Rightarrow q$,

(b) $((p \wedge (\neg q) \Rightarrow r)) \Leftrightarrow ((\neg q) \vee r)$.

Primer 3 *Naslednje izraze poenostavi tako, da odstraniš oklepaje, ki niso potrebni:*

(a) $((\neg s) \wedge t) \Leftrightarrow (p \Rightarrow t)$,

(b) $((\neg) q \Rightarrow ((s \wedge t) \Leftrightarrow (p \veebar (\neg t))))$.

Rešitev:

(a) $\neg s \wedge t \Leftrightarrow p \Rightarrow t$,

(b) $\neg q \Rightarrow (s \wedge t \Leftrightarrow p \veebar \neg t)$.

Pri iskanju logične vrednosti izjave si običajno pomagamo tako, da glede na prednost izjavnih povezav izračunamo delne rezultate, ki jih podpisujemo pod izjavne povezave.

Primer 4 *Zapiši pravilnostno tabelo za sestavljeno izjavo* $p \wedge \neg q \Rightarrow r \Leftrightarrow \neg p \vee r$.

Rešitev:

p	q	r	p	$\wedge$	$\neg q$	$\Rightarrow$	r	$\Leftrightarrow$	$\neg p$	$\vee$	r
1	1	1		0	0	1		**1**	0	1	
1	1	0		0	0	1		**0**	0	0	
1	0	1		1	1	1		**1**	0	1	
1	0	0		1	1	0		**1**	0	0	
0	1	1		0	0	1		**1**	1	1	
0	1	0		0	0	1		**1**	1	1	
0	0	1		0	1	1		**1**	1	1	
0	0	0		0	1	1		**1**	1	1	

Če je izjava resnična ne glede na nabor vrednosti izjavnih spremenljivk, jo imenujemo **tavtologija** . Da je izjava A tavtologija, s simboli zapišemo takole:

$$\models A.$$

Izjavo imenujemo **protislovje** (ali laž ali kontradikcija), če je neresnična pri vseh naborih vrednosti izjavnih spremenljivk. Primer tavtologije je torej vsaka negacija protislovja in obratno. Izjava je **nevtralna**, če ni niti tavtologija niti protislovje.

Izjavi A in B sta **enakovredni**, če imata pri vseh naborih vrednosti izjavnih spremenljivk enako vrednost. Dejstvo, da sta izjavi enakovredni, na kratko zapišemo tako:

$$A \sim B.$$

V praksi tavtologijo označujemo z 1, laž pa z 0. Čeprav smo oznaki 0 in 1 uporabljali tudi za oznake logičnih vrednosti, bo iz konteksta vedno razviden njun pomen.

Primer 5 *S pravilnostno tabelo se prepričajmo, da sta $p \Rightarrow q$ in $\neg p \vee q$ enakovredni izjavi.*

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\vee$	q
1	1	**1**	0	**1**	
1	0	**0**	0	**0**	
0	1	**1**	1	**1**	
0	0	**1**	1	**1**	

Res imata pri vseh naborih vrednosti izjavnih spremenljivk izjavi enako logično vrednost, kar se odraža v enakih (poudarjeno označenih) stolpcih. Od tod tudi hitro vidimo, da je izjava $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ tavtologija.

Zadnja ugotovitev v zgornjem primeru ni naključje. Velja namreč naslednja trditev.

Izrek 6 *Velja: $A \sim B$ natanko tedaj, ko je $\models A \Leftrightarrow B$.*

Dokaz. Izjavi A in B sta enakovredni natanko tedaj, ko imata pri posameznem naboru vrednosti izjavnih spremenljivk enaki vrednosti (z drugimi besedami, v posameznih vrsticah pravilnostne tabele logični vrednosti izjav A in B sovpadata). Slednje pa je res natanko tedaj, ko ima $A \Leftrightarrow B$ logično vrednost 1 v vsaki vrstici tabele, torej ko je $A \Leftrightarrow B$ tavtologija. ∎

Premisli, da velja naslednji izrek.

Izrek 7 *Za enakovrednost izjavnih izrazov veljajo naslednje zveze:*

- *$A \sim A$,*
- *če je $A \sim B$, potem je tudi $B \sim A$,*
- *če je $A \sim B$ in $B \sim C$, potem je tudi $A \sim C$.*

Primer 8 *Prepričajmo se, da je $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$ tavtologija:*

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\Rightarrow$	$\neg p$
1	1	**1**	0	**1**	0
1	0	**0**	1	**0**	0
0	1	**1**	0	**1**	1
0	0	**1**	1	**1**	1

Primer 9 *Prepričajmo se, da je $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ tavtologija:*

p	q	r	p	$\vee$	$(q \vee r)$	$\Leftrightarrow$	$(p \vee q)$	$\vee$	r
1	1	1		1	1	**1**	1	1	
1	1	0		1	1	**1**	1	1	
1	0	1		1	1	**1**	1	1	
1	0	0		1	0	**1**	1	1	
0	1	1		1	1	**1**	1	1	
0	1	0		1	1	**1**	1	1	
0	0	1		1	1	**1**	0	1	
0	0	0		0	0	**1**	0	0	

Z zgornjima zgledoma smo že dokazali dve znani tavtologiji (ki ju poznamo pod imenom kontrapozicija oz. asociativnost disjunkcije). Na podoben način bi lahko dokazali enakovrednost naslednjih parov izjav, ki jim skupaj pravimo (osnovni) **zakoni izjavnega računa**. Tukaj so zbrani na enem mestu, A, B, C pa predstavljajo poljubne izjave:

- **Lastnosti** 0 **in** 1**:**

$$\begin{array}{rclcrclcrcl} A \wedge 0 & \sim & 0 & \quad & A \Rightarrow 0 & \sim & \neg A & \quad & A \Leftrightarrow 0 & \sim & \neg A \\ A \wedge 1 & \sim & A & & A \Rightarrow 1 & \sim & 1 & & A \Leftrightarrow 1 & \sim & A \\ A \vee 0 & \sim & A & & 0 \Rightarrow A & \sim & 1 & & \neg 0 & \sim & 1 \\ A \vee 1 & \sim & 1 & & 1 \Rightarrow A & \sim & A & & \neg 1 & \sim & 0 \end{array}$$

- **dvojna negacija:** $\neg\neg A \sim A$

- **idempotentnosti:**

$$\begin{array}{rclc} A \wedge A & \sim & A & \qquad A \Rightarrow A \sim 1 \\ A \vee A & \sim & A & \qquad A \Leftrightarrow A \sim 1 \end{array}$$

- **komutativnosti:**

$$\begin{array}{rcl} A \vee B & \sim & B \vee A \\ A \wedge B & \sim & B \wedge A \\ A \Leftrightarrow B & \sim & B \Leftrightarrow A \end{array}$$

- **asociativnosti:**

$$\begin{array}{rcl} (A \vee B) \vee C & \sim & A \vee (B \vee C) \\ (A \wedge B) \wedge C & \sim & A \wedge (B \wedge C) \\ (A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C & \sim & A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C) \end{array}$$

- **absorpciji:**

$$A \vee (A \wedge B) \sim A \qquad A \wedge (A \vee B) \sim A$$

- **distributivnosti:**

$$\begin{array}{rcl} A \wedge (B \vee C) & \sim & (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\ A \vee (B \wedge C) & \sim & (A \vee B) \wedge (A \vee C) \end{array}$$

- **De Morganova zakona:**

$$\neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B \qquad \neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$$

- **kontrapozicija:**

$$A \Rightarrow B \sim \neg B \Rightarrow \neg A \sim \neg A \vee B$$

- **ekvivalenca:**

$$A \Leftrightarrow B \sim (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

Vse zgoraj naštete enakovrednosti lahko s pomočjo pravilnostne tabele preverimo hitro, saj imamo le dve ali tri izjavne spremenljivke. Toda v splošnem n izjavnih spremenljivk pomeni pravilnostno tabelo z 2^n vrsticami, kar pomeni, da trud, ki ga vložimo v preverjanje, raste eksponentno z večanjem števila spremenljivk. Tako je v primeru 30 izjavnih spremenljivk potrebno preveriti že več kot bilijon vrstic! Pristop s pomočjo zgoraj naštetih zakonov tako predstavlja alternativo za preverjanje enakovrednosti. Oglejmo si preprost primer.

Primer 10 *V primeru 8 smo zakon kontrapozicije dokazali s pomočjo pravilnostne tabele. Ta zakon bi lahko z izpeljavo dokazali tudi takole (premisli, kateri zakon je uporabljen na posameznem koraku):*

$$p \Rightarrow q \sim \neg p \vee q \sim \neg p \vee \neg\neg q \sim \neg\neg q \vee \neg p \sim \neg q \Rightarrow \neg p\,.$$

Poenostavljanje logičnih izrazov ima v računalništvu praktičen pomen. Omogoča nam lažje branje in razumevanje programov[1]. Poenostavljeni programi so pogosto tudi hitrejši, saj zahtevajo manj operacij. Poenostavljanje logičnih izrazov je izrednega pomena tudi pri strojni opremi, saj zmanjšuje število logičnih vrat v čipu (digitalna vezja se dajo opisati z logičnimi formulami). Zmanjšanje števila logičnih vrat pa pomeni manjši čip, ki je manj energijsko potraten, se manj kvari in ga je ceneje izdelati.

1.1.1 *Preveri svoje znanje (osnove izjavnega računa)*

Vprašanja iz teorije

1. Kaj so izjave?
2. Podaj primera dveh povedi, od katerih je ena izjava, druga pa ne. Pojasni, zakaj posamična poved je oz. ni izjava.

1 Programski jezik Java namesto logičnih znakov $\wedge$ in $\vee$ uporablja "&&" oz. "||", načrtovalci vezij pa npr. uporabljajo "$\cdot$" oz. "$+$". Mi se bomo tudi v bodoče držali notacije, ki je standardna v matematiki.

3. Podaj primer enostavne in primer sestavljene izjave.

4. Naštej izjavne povezave in zapiši njihove pravilnostne tabele.

5. Kdaj sta izjavi enakovredni? Podaj primer enakovrednih izjav.

6. Zapiši De Morganova zakona in ju dokaži s pomočjo pravilnostne tabele.

7. S pomočjo pravilnostne tabele dokaži distributivnostna zakona.

8. Kateri izjavi pravimo tavtologija? Podaj primer tavtologije.

9. Naštej zakone izjavnega računa.

Rešene naloge

Primer 11 *Ali je naslednja izjava tavtologija, laž ali nevtralna izjava?*

(a) $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$,

(b) $\neg p \Rightarrow (q \veebar p \uparrow r \Leftrightarrow \neg r)$.

Rešitev:

(a) Izjava je tavtologija.

p	q	p	$\wedge$	$(p \Rightarrow q)$	$\Rightarrow$	q
1	1		1	1	**1**	
1	0		0	0	**1**	
0	1		0	1	**1**	
0	0		0	1	**1**	

(b) Izjava je nevtralna.

p	q	r	$\neg p$	$\Rightarrow$	$(q \veebar p$	$\uparrow$	r	$\Leftrightarrow$	$\neg r)$
1	1	1	0	1	1	0		0	0
1	1	0	0	1	0	1		0	1
1	0	1	0	1	0	0		1	0
1	0	0	0	1	1	1		1	1
0	1	1	1	1	0	1		1	0
0	1	0	1	0	0	1		0	1
0	0	1	1	0	1	1		0	0
0	0	0	1	1	1	1		1	1

Naloge za samostojno reševanje

Naloga 12 *Dokaži zakone izjavnega računa, katerih dokaze smo izpustili.*

Naloga 13 *S pravilnostno tabelo se prepričaj, da za implikacijo ne velja komutativnost, prav tako tudi ne asociativnost.*

Naloga 14 *Pri katerih logičnih vrednostih izjavnih spremenljivk p in q je dana sestavljena izjava nepravilna?*

(a) $p \vee q \Rightarrow \neg p \wedge q \vee p \wedge \neg q$,

(b) $(\neg p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q) \Rightarrow (q \vee \neg p)$.

Rešitev:

(a) $p \sim 1, q \sim 1$,

(b) $p \sim 1, q \sim 0$.

Naloga 15 *V naslednjih sestavljenih izjavah vrstni red izjavnih povezav poudari z oklepaji:*

(a) $\neg p \Rightarrow (q \vee p \downarrow r \Leftrightarrow \neg r)$,

(b) $\neg p \vee r \wedge s \wedge \neg t \Rightarrow p \wedge \neg r \uparrow t \uparrow \neg r \Rightarrow t \Leftrightarrow r$.

Rešitev:

(a) $(\neg p) \Rightarrow ((q \vee (p \downarrow r)) \Leftrightarrow (\neg r))$,

(b) $((((\neg p) \vee ((r \wedge s) \wedge (\neg t))) \Rightarrow (((p \wedge (\neg r)) \uparrow t) \uparrow (\neg r))) \Rightarrow t) \Leftrightarrow r$.

Naloga 16 *Z uporabo zakonov izjavnega računa naslednje izjave preoblikuj v enakovredno izjavo take oblike, ki bo vsebovala samo izjavne povezave $\neg, \wedge, \vee$ in bo negacija $\neg$ stala neposredno pred enostavnimi izjavami (tako obliko izjave imenujemo **izbrana oblika**).*

(a) $p \uparrow q$,

(b) $p \uparrow ((p \Rightarrow q) \vee \neg r)$,

(c) $p \uparrow q \downarrow r$.

Rešitev:

(a) $\neg(p \vee q)$,

(b) $\neg q \wedge r \vee \neg p$,

(c) $p \wedge q \wedge \neg r$.

Naloga 17 *Pomen nove oznake za izjavno povezavo* $\not\Rightarrow$ *definiramo tako:* $A \not\Rightarrow B \sim \neg(A \Rightarrow B)$.

(a) Izjavno povezavo $\not\Rightarrow$ *izrazi le z izjavno povezavo* $\downarrow$.

(b) Izjavno povezavo $\not\Rightarrow$ *izrazi le z izjavno povezavo* $\uparrow$.

Rešitev:

(a) $A \not\Rightarrow B \sim (A \downarrow A) \downarrow B$,

(b) $A \not\Rightarrow B \sim (A \uparrow (B \uparrow B)) \uparrow (A \uparrow (B \uparrow B))$.

Naloga 18 *Dokaži, da sta izjavi* $\neg(p \Rightarrow q)$ *in* $p \wedge \neg q$ *logično enakovredni. Dokazano logično enakovrednost uporabi, da z besedami zapišeš negacijo izjave: "Če Miha dobi štipendijo, gre študirat."*

Rešitev: *"Miha dobi štipendijo in ne gre študirat."*

1.2 SKLEPANJE V IZJAVNEM RAČUNU

Pričnimo z zgledom. Ali je naslednji sklep pravilen?

Žival na sliki leže ikre ali pa ni riba.
Če je naslikana žival riba, potem živi v vodi.
Žival na sliki ne leže iker.
Torej žival na sliki ne živi v vodi.

Preden pojasnimo pravilnost oz. nepravilnost tega sklepa, si oglejmo, kako sklep zapišemo v formalni obliki. V primeru bolj zapletenih sklepov se pogosto zgodi, da šele s pomočjo formalnega zapisa znamo presoditi ali sklep drži ali ne. Za zgornji primer vpeljimo naslednje oznake za enostavne izjave:

- $i \equiv$ *žival na sliki leže ikre,*
- $r \equiv$ *žival na sliki je riba,*

- $v \equiv$ *žival na sliki živi v vodi.*

Predpostavka je mnenje ali trditev, ki se v danem primeru sprejme za izhodišče ne glede na resničnost. V zgornjem primeru so predpostavke prve tri izjave, označimo jih z A_1, A_2, A_3, zaključek sklepa pa označimo z B. Torej se zgornji sklep v formalni obliki glasi takole:

$$\begin{array}{ll} A1. & i \vee \neg r \\ A2. & r \Rightarrow v \\ A3. & \neg i \\ \hline B. & \neg v \end{array}$$

Kaj je sklep, intuitivno že razumemo. Formalna definicija *pravilnega (veljavnega)* sklepa pa se glasi:

> Zaporedje izjavnih izrazov $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ je **pravilen sklep** s **predpostavkami** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ in **zaključkom** B, če je zaključek resničen pri vseh tistih naborih vrednosti izjavnih spremenljivk, pri katerih so resnične vse predpostavke.

Sklep zapišemo

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n\ \models\ B$$

in beremo:

"Iz predpostavk $A_1, A_2, \ldots, A_n$ logično sledi zaključek B".

Primer 19 *Formalno preverimo veljavnost sklepa iz uvoda tega razdelka:*

$$i \vee \neg r,\ r \Rightarrow v,\ \neg i\ \models\ \neg v.$$

Tvorimo pravilnostno tabelo:

i	r	v	$i \vee \neg r$	$r \Rightarrow v$	$\neg i$	$\neg v$
1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0
0	0	0	1	1	1	1

Pri naboru iz zadnjih dveh vrstic je izpolnjen pogoj, da so vse predpostavke resnične, zato nas za ugotavljanje, ali sklep drži, zanimata le ti dve vrstici. Toda pri naboru iz predzadnje vrstice, za katerega velja $i \sim 0, r \sim 0, v \sim 1$, *ima zaključek sklepa logično vrednost* 0. *To pomeni, da sklep ni pravilen (rečemo tudi, da sklep ne drži, je napačen), saj smo z omenjenim naborom našli protiprimer. Seveda, žival z lastnostmi, ki ustrezajo omenjenemu naboru obstaja: delfin je žival, ki ne leže iker (samica namreč koti žive mladiče), ni riba (delfini spadajo med sesalce) in živi v vodi.*

Naslednji izrek (karakterizacija pravilnega sklepa) nam zagotavlja, da lahko problem sklepanja prevedemo na problem ugotavljanja, ali gre za tavtologijo. Pri dokazu izreka bodite pozorni na njegovo strukturo, ki jo bomo skušali posebej poudariti, saj je tudi sam dokaz dobra vaja za razumevanje snovi, ki jo pravkar obravnavamo [2].

Izrek 20 *Sklep*

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$$

velja natanko tedaj, ko

$$\models A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B.$$

Dokaz. Dokazati je potrebno ekvivalenco. To naredimo tako, da dokažemo dve implikaciji (glej zadnjega izmed prej naštetih zakonov izjavnega računa).

($\Rightarrow$) Najprej dokažimo, da iz veljavnosti sklepa $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$ sledi, da je $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$ tavtologija. Naj bo $\mathcal{A} = A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$ (novo oznako vpeljemo, da si skrajšamo zapis). Pri dokazu te implikacije najprej predpostavimo, da je sklep veljaven. Iz definicije veljavnosti sklepa izhaja: če je zaključek B lažen, potem je lažna vsaj ena od predpostavk A_i. Torej v tem primeru velja:

$$\mathcal{A} \Rightarrow B \sim 0 \Rightarrow 0 \sim 1\,.$$

2 V bodoče bodo dokazi napisani v običajni, strnjeni obliki, kot je to običajno v matematičnih tekstih, ko se od bralca pričakuje osnovno znanje logike in pravil sklepanja.

V nasprotnem primeru, ko je zaključek B resničen, pa vedno velja

$$\mathcal{A} \Rightarrow B \;\sim\; \mathcal{A} \Rightarrow 1 \;\sim\; 1\,.$$

Tako pridemo do zaključka, da je izjava $\mathcal{A} \Rightarrow B$ tavtologija. Res, ločili smo dve (edini) možnosti: ali je $B \sim 0$ ali pa $B \sim 1$. V obeh primerih se je izkazalo, da ima $\mathcal{A} \Rightarrow B$ logično vrednost 1.

($\Rightarrow$) Sedaj bomo dokazali obratno implikacijo, torej, da iz tega, da je $\mathcal{A} \Rightarrow B$ tavtologija, sledi veljavnosti sklepa $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$ (pri tem ima $\mathcal{A}$ enak pomen kot zgoraj). Naj bo $\models \mathcal{A} \Rightarrow B$ (kar pomeni, da je $\mathcal{A} \Rightarrow B$ tavtologija) in naj bodo vse predpostavke A_i resnične (to lahko predpostavimo, saj je sklep pravilen le, če iz pravilnosti vseh predpostavk sledi tudi pravilnost zaključka sklepa). Tedaj je resnična tudi izjava $\mathcal{A}$. Ker je $\mathcal{A} \Rightarrow B \sim 1$ sledi, da je $B \sim 1$ (za razumevanje tega se spomni, kdaj ima implikacija logično vrednost 1). To pa pomeni, da je sklep $\mathcal{A} \models B$ veljaven. ■

Primer 21 *Iz zgornjega izreka torej sledi, da bi lahko veljavnost sklepa iz začetka tega razdelka*

$$i \vee \neg r,\; r \Rightarrow v,\; \neg i \;\models\; \neg v$$

preverili tudi s pomočjo ugotavljanja, ali je

$$(i \vee \neg r) \wedge (r \Rightarrow v) \wedge \neg i \Rightarrow \neg v$$

tavtologija. Pravilnostna tabela pokaže (za vajo jo sestavi sam), da temu ni tako, kar je v skladu z našo ugotovitvijo iz primera 19.

Ali je preverjanje veljavnosti sklepov s pomočjo ugotavljanja pravilnostne tabele učinkovito? Spomnimo se, da taka tabela vsebuje 2^n vrstic, ki ustrezajo vsem naborom izjavnih spremenljivk, kar je ogromno pri velikih n. Kot alternativo smo že omenili izpeljavo z uporabo zakonov izjavnega računa. V nadaljevanju bomo spoznali pravila sklepanja, ki nam lahko prihranijo veliko časa.

Naštejmo osnovna pravila sklepanja in njihova imena:

$A, A \Rightarrow B \models B$	**modus ponens (MP)**
$A \Rightarrow B, \neg B \models \neg A$	**modus tollens (MT)**
$A \vee B, \neg B \models A$	**disjunktivni silogizem (DS)**
$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C$	**hipotetični silogizem (HS)**
$A, B \models A \wedge B$	**združitev (Zd)**
$A \wedge B \models A$	**poenostavitev (Po)**
$A \models A \vee B$	**pridružitev (Pr)**

Preverimo pravilnost prvega sklepa (modus ponens):

A	B	$A \Rightarrow B$	B
1	1	**1**	**1**
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	0

Spomnimo se: sklep je pravilen če je zaključek resničen pri vseh tistih naborih vrednosti izjavnih spremenljivk, pri katerih so resnične vse prepodstavke. Predpostavki A in $A \Rightarrow B$ sta obe resnični le v prvi vrstici, takrat je pa resničen tudi zaključek sklepa B. Tako je dokazano pravilo modus ponens.

Dokažimo še veljavnost hipotetičnega silogizma. Tokrat si bomo pri dokazu pomagali z izrekom 20, po katerem je dovolj dokazati, da je $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ tavtologija. V to se prepričamo s pomočjo spodnje tabele.

A	B	C	$(A \Rightarrow B)$	$\wedge$	$(B \Rightarrow C)$	$\Rightarrow$	$(A \Rightarrow C)$
1	1	1	1	1	1	**1**	1
1	1	0	1	0	0	**1**	0
1	0	1	0	0	1	**1**	1
1	0	0	0	0	1	**1**	0
0	1	1	1	1	1	**1**	1
0	1	0	1	0	0	**1**	1
0	0	1	1	1	1	**1**	1
0	0	0	1	1	1	**1**	1

Pravili pridružitev (Pr) in poenostavitev (Po) dokažimo s pomočjo izpeljave. Pri tem bomo uporabili izrek 20, po katerem zadošča dokazati ustrezno tavtologijo, in osnovne zakone izjavnega računa.

Pridružitev:

$$\begin{aligned} A \Rightarrow A \vee B &\sim \neg A \vee (A \vee B) \\ &\sim (\neg A \vee A) \vee B \\ &\sim 1 \vee B \sim 1. \end{aligned}$$

Poenostavitev:

$$\begin{aligned} A \wedge B \Rightarrow A &\sim \neg(A \wedge B) \vee A \\ &\sim (\neg A \vee \neg B) \vee A \\ &\sim (\neg B \vee \neg A) \vee A \\ &\sim \neg B \vee (\neg A \vee A) \\ &\sim \neg B \vee 1 \sim 1. \end{aligned}$$

Dokazali smo torej pravila (MP), (HS), (Pr) in (Po), pravilnost preostalih pa za vajo preverite samostojno.

Do sedaj smo sklepe dokazovali po definiciji ali s pomočjo tavtologije (oz. izreka 20). Ob poznavanju zgoraj naštetih osnovnih pravil sklepanja, pa pravilnost sklepa

$$A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_n \;\models\; B$$

lahko dokažemo tudi tako, da sestavimo zaporedje izjavnih izrazov

$$I_1,\, I_2,\, I_3, \ldots, I_{m-1}, I_m$$

kjer je $I_m = B$ in za $i = 1, \ldots, m$ velja:

(a) I_i je ena od predpostavk ali

(b) I_i je tavtologija ali

(c) I_i je enakovreden enemu od predhodnih izrazov v zaporedju ali

(d) I_i logično sledi iz predhodnih izrazov v zaporedju po enem od osnovnih pravilnih sklepov.

Rečemo tudi, da smo s tem izvedli dokaz izjave B ob predpostavkah $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Primer 22 *Dokažimo naslednji sklep:* $\neg q,\, \neg(p \downarrow q),\, r \Rightarrow \neg p \;\models\; \neg r$.

1.	$\neg q$	predpostavka
2.	$\neg(p \downarrow q)$	predpostavka
3.	$r \Rightarrow \neg p$	predpostavka
4.	$\neg(\neg(p \vee \neg q))$	(~ 2)
5.	$p \vee q$	(~ 4)
6.	p	DS$(1,5)$
7.	$\neg r$	MT$(3,6)$

Pojasnimo, kako smo dobili zgornje zaporedje izjavnih izrazov. Najprej smo zapisali predpostavke, vsako v svojo vrstico, ki smo jih oštevilčili. Velikokrat se izkaže za koristno, če jih zapišemo v enakovredni obliki (kjer uporabimo osnovne zakone izjavnega računa). To smo z 2. predpostavko naredili v 4. vrstici. Izjava v 4. vrstici je enakovredna izjavi v 5. vrstici. Sedaj imamo v 5. vrstici $p \vee q$, pri čemer iz predpostavke v 1. vrstici vidimo, da velja tudi $\neg p$, zato mora po pravilu (DS), kjer smo za to uporabili 1. in 5. vrstico, veljati p. Ker torej velja p, kar je ravno negacija desne strani implikacije $r \Rightarrow \neg p$, lahko uporabimo modus tollens, da dobimo negacijo leve strani omenjene implikacije, torej $\neg r$. Na koncu vsake vrstice označimo, od kod in na kakšen način smo izpeljali sklep. Npr. MT(3,6) tako pomeni, da smo uporabili pravilo modus tollens, kar sta omogočili 3. in 6. vrstica.

Kako pa pokažemo, da *sklep NI pravilen*? Iz definicije pravilnega sklepa izhaja, da v takem primeru poiščemo protiprimer, t.j. nabor vrednosti izjavnih spremenljivk, pri katerem so vse predpostavke resnične, zaključek pa ne. Spomnimo se, da smo to že naredili v primeru 19 (sklep z ribami in delfinom). Oglejmo si še kakšen primer.

Primer 23 *Ovrži naslednji sklep:* $p \vee q,\ \neg p,\ \neg q \vee r,\ s \Rightarrow \neg r \ \models\ s$.

V tem sklepu nastopajo štiri izjavne spremenljivke, kar pomeni že šestnajst vrstic v pravilnostni tabeli, če bi želeli preveriti vse. Toda za dokaz tega, da je sklep nepravilen, je dovolj najti že en protiprimer, zato si delo olajšamo tako, da sam sklep zapišemo v eni vrstici, nato pa pod predpostavke in zaključek sklepa že nastavimo logično vrednost, ki jo želimo dobiti. To pomeni enice pod predpostavke in 0 *pod zaključek sklepa. Sedaj želimo najti nabor vrednosti enostavnih izjav, pri katerem se bo ravno izšlo, kar smo nastavili. Prvi korak v razmišljanju bi torej izgledal tako:*

p	$\vee$	$q,$	$\neg$	$p,$	$\neg$	q	$\vee$	$r,$	s	$\Rightarrow$	$\neg r$	$\models$	s
	1		**1**				**1**			**1**			**0**

Sedaj skušamo podpisati še manjkajoče logične vrednosti. Tako iz tega, da ima $\neg p$ *vrednost* 1, *sklepamo, da ima* p *vrednost* 0. *Toda potem mora imeti* q *vrednost* 1, *da bo res* $p \vee q \sim 1$. *Potem je pa* $\neg q \sim 0$ *in zato* $r \sim 1$. *Naša tabela bo na koncu izgledala tako*

p	$\vee$	$q,$	$\neg$	$p,$	$\neg$	q	$\vee$	$r,$	s	$\Rightarrow$	$\neg$	r	$\models$	s
0	**1**	1	**1**	0	0	1	**1**	1	0	**1**	0	1		**0**

Tako smo dobili nabor $p \sim 0, q \sim 1, s \sim 0, r \sim 1$, *ki predstavlja protiprimer za veljavnost sklepa. Sklep torej ne drži.*

Pri sklepanju si lahko pomagamo še s t.i. **pomožnimi sklepi**. Mednje spada pogojni sklep, ki ga uporabimo, kadar ima zaključek sklepa obliko implikacije. Tako v naslednjem izreku kot pri karakterizacijah preostalih pomožnih sklepov vpeljemo krajšo oznako $\mathcal{A}$ za konjunkcijo predpostavk $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Do konca poglavja bo torej veljalo $\mathcal{A} = A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$.

Pogojni sklep (PS)

Trditev 24 *Sklep* $\mathcal{A} \ \models\ B \Rightarrow C$ *velja natanko tedaj, ko velja sklep* $\mathcal{A},\ B \ \models\ C$.

Dokaz. Dokazujemo torej (glej izrek 20), da je $\mathcal{A} \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ tavtologija natanko tedaj, ko je $\mathcal{A} \wedge B \Rightarrow C$ tavtologija. Da bi to dokazali, zadošča pokazati, da sta $\mathcal{A} \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ in $\mathcal{A} \wedge B \Rightarrow C$ enakovredni izjavi (takrat bo namreč veljalo $(\mathcal{A} \Rightarrow (B \Rightarrow C) \sim 1) \Rightarrow (\mathcal{A} \wedge B \Rightarrow C \sim 1)$, kakor tudi obratna implikacija). V enakovrednost izjav se hitro prepričamo s pomočjo zakonov izjavnega računa:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} \Rightarrow (B \Rightarrow C) \quad &\sim \quad \neg\mathcal{A} \vee (B \Rightarrow \vee C) \\
&\sim \quad \neg\mathcal{A} \vee (\neg B \vee C) \\
&\sim \quad (\neg\mathcal{A} \vee \neg B) \vee C \\
&\sim \quad \neg(\mathcal{A} \wedge B) \vee C \\
&\sim \quad (\mathcal{A} \wedge B) \Rightarrow C.
\end{aligned}
$$

■

Zgornji izrek pove, da če dokazujemo implikacijo (v desno), potem lahko levo stran implikacije prenesemo med predpostavke (to v postopku dokazovanja opišemo kot "predpostavka pogojnega sklepa", ali na kratko: predpostavka PS). Nato pa dokazujemo, da iz predpostavk (vključno s to novo) sledi desna stran implikacije. Oglejmo si ta postopek na zgledu, pri katerem bodimo pozorni na posebno vrsto označevanja oz. številčenja, ki se uporablja pri pomožnih sklepih.

Primer 25 *Dokažimo naslednji sklep:* $p \Rightarrow q \vee r,\ q \Rightarrow \neg p,\ \neg(s \wedge r) \models p \Rightarrow \neg s\,.$

1.	$p \Rightarrow q \vee r$	predpostavka
2.	$q \Rightarrow \neg p$	predpostavka
3.	$\neg(s \wedge r)$	predpostavka
4.1.	$\quad p$	predpostavka PS
4.2.	$\quad q \vee r$	MP(1, 4.1)
4.3.	$\quad \neg q$	MT(2, 4.1)
4.4.	$\quad r$	DS(4.2, 4.3)
4.5.	$\quad \neg s \vee \neg r$	(~ 3)
4.6.	$\quad \neg s$	DS(4.4, 4.5)
4.	$p \Rightarrow \neg s$	PS(4.1, 4.6)

Sklepanje s protislovjem - reduction ad absurdum (RA)

Trditev 26 *Sklep* $\mathcal{A} \models B$ *velja natanko tedaj, ko velja sklep* $\mathcal{A}, \neg B \models 0$.

Dokaz. Trditev bo (glede na izrek 20) dokazana, če pokažemo, da sta izjavi $\mathcal{A} \Rightarrow B$ in $\mathcal{A} \wedge \neg B \Rightarrow 0$ enakovredni. To drži, saj je

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \Rightarrow B &\sim \neg\mathcal{A} \vee B \\ &\sim \neg(\mathcal{A} \wedge \neg B) \\ &\sim \neg(\mathcal{A} \wedge \neg B) \vee 0 \\ &\sim \mathcal{A} \wedge \neg B \Rightarrow 0. \end{aligned}$$

■

Način sklepanja s protislovjem lahko uporabimo kadarkoli. Zgornji izrek pove, da lahko neko izjavo B iz predpostavk izpeljemo tako, da dejansko predpostavimo njeno negacijo $\neg B$, a nas ta predpostavka pripelje v protislovje. Torej lahko to novo predpostavko $\neg B$ "okrivimo" za dobljeno protislovje, zato je dejansko pravilna njena negacija $\neg\neg B \sim B$. Tudi pri redukciji na absurd bodimo pozorni na posebno številčenje znotraj osnovnega številčenja.

Primer 27 *Z uporabo redukcije na absurd dokažimo, da velja:*

$$p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r),\ s \wedge q \Rightarrow r,\ s \models \neg p.$$

1.	$p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r)$	predpostavka
2.	$s \wedge q \Rightarrow r$	predpostavka
3.	s	predpostavka
4.1.	$\quad p$	predpostavka RA
4.2.	$\quad \neg(q \Rightarrow r)$	$\mathrm{MP}(1, 4.1)$
4.3.	$\quad \neg(\neg q \vee r)$	(~ 4.2)
4.4.	$\quad q \wedge \neg r$	(~ 4.3)
4.5.	$\quad \neg r$	$\mathrm{Po}(4.4)$
4.6.	$\quad \neg(s \wedge q)$	$\mathrm{MT}(2, 4.5)$
4.7.	$\quad q$	$\mathrm{Po}(4.4)$
4.8.	$\quad s \wedge q$	$\mathrm{Zd}(3, 4.7)$
4.9.	$\quad \neg(s \wedge q) \wedge (s \wedge q)$	$\mathrm{Zd}(4.6, 4.8)$
4.10.	$\quad 0$	(~ 4.9)
4.	$\neg p$	$\mathrm{RA}(4.1, 4.10)$

Analiza primerov (AP)
Analizo primerov uporabljamo, kadar ima ena od predpostavk obliko disjunkcije.

Trditev 28 *Sklep $\mathcal{A}$, $B_1 \vee B_2 \models C$ velja natanko tedaj, ko veljata oba sklepa $\mathcal{A}$, $B_1 \models C$ in $\mathcal{A}$, $B_2 \models C$.*

Dokaz. Sedaj zadošča dokazati, da je $\mathcal{A} \wedge (B_1 \vee B_2) \Rightarrow C$ tavtologija natanko tedaj, ko sta $\mathcal{A} \wedge B_1 \Rightarrow C$ in $\mathcal{A} \wedge B_2 \Rightarrow C$ tavtologiji, kar je pa ekvivalentno temu, da je $(\mathcal{A} \wedge B_1 \Rightarrow C) \wedge (\mathcal{A} \wedge B_2 \Rightarrow C)$ tavtologija. Slednje drži, saj lahko izpeljemo:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \wedge (B_1 \vee B_2) \Rightarrow C &\sim \neg(\mathcal{A} \wedge (B_1 \vee B_2)) \vee C \\ &\sim \neg(\mathcal{A} \wedge B_1 \vee \mathcal{A} \wedge B_2) \vee C \\ &\sim (\neg(\mathcal{A} \wedge B_1) \wedge \neg(\mathcal{A} \wedge B_2)) \vee C \\ &\sim (\neg(\mathcal{A} \wedge B_1) \vee C) \wedge (\neg(\mathcal{A} \wedge B_2)) \vee C) \\ &\sim (\mathcal{A} \wedge B_1 \Rightarrow C) \wedge (\mathcal{A} \wedge B_2 \Rightarrow C)\,. \end{aligned}$$

∎

Primer 29 *Uporabimo analizo primerov in dokažimo naslednji sklep:*

$$s \Rightarrow t,\ u \Rightarrow t,\ s \vee u \models t.$$

1.	$s \Rightarrow t$	predpostavka
2.	$u \Rightarrow t$	predpostavka
3.	$s \vee u$	predpostavka
4.1.1.	$\quad s$	predpostavka AP
4.1.2.	$\quad t$	$\mathrm{MP}(1, 4.1.1)$
4.2.1.	$\quad u$	predpostavka AP
4.2.2.	$\quad t$	$\mathrm{MP}(2, 4.2.1)$
4.	t	$\mathrm{AP}(3, 4.1.2, 4.2.2)$

Kako lahko analizo primerov posplošimo v primeru disjunkcije večih členov (v predpostavki), nam pove spodnja trditev. Dokaz le-te naj bo vaja za samostojno reševanje.

Trditev 30 *Sklep* $\mathcal{A}, B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_m \models C$ *velja natanko tedaj, ko velja vsak od sklepov* $\mathcal{A}, B_1 \models C$ *in* $\mathcal{A}, B_2 \models C$ *in* $\cdots$ *in* $\mathcal{A}, B_m \models C$.

1.2.1 *Preveri svoje znanje (sklepanje v izjavnem računu)*

Vprašanja iz teorije

1. Kako je sestavljen sklep in kako ga zapišemo?
2. Kdaj je sklep pravilen?
3. Kako dokažemo, da sklep ni pravilen?
4. Kako pravilen sklep karakteriziramo s pomočjo tavtologije?
5. Naštej pravila sklepanja ter njihova imena.
6. Dokaži disjunktivni silogizem.
7. Kaj pomeni pogojni sklep in kdaj ga uporabimo?
8. Pojasni redukcijo na absurd.
9. Kdaj uporabimo analizo primerov?

Rešene naloge

Naloga 31 *Katero pravilo sklepanja je uporabljeno v spodnjih sklepih?*

1. *Luka je športnik. Torej je Luka športnik ali računalničar.*
2. *Goran je košarkaš in evropski prvak. Zato je Goran evropski prvak.*
3. *Če dežuje, je kopališče zaprto. Dežuje. Torej je kopališče zaprto.*
4. *Če bo danes močno snežilo, bodo šole zaprte. Šole niso bile zaprte. Torej danes ni močno snežilo.*
5. *Če grem plavat, ostanem predolgo na soncu. Če sem predolgo na soncu, me opeče. Torej, če grem plavat, me opeče.*
6. *Vsak dan grem na sprehod ali na fitnes. Danes nisem šla na fitnes. Torej sem šla na sprehod.*

Rešitev:

1. *pridružitev,*
2. *poenostavitev,*
3. *modus ponens,*
4. *modus tollens,*
5. *hipotetični silogizem,*
6. *disjunktivni silogizem.*

Naloga 32 *Dokažimo naslednji sklep:*

$$u \Rightarrow v,\, u \vee r,\, v \Rightarrow s,\, r \Rightarrow t,\, \neg s \;\models\; t.$$

Rešitev:

1.	$u \Rightarrow v$	predpostavka
2.	$u \vee r$	predpostavka
3.	$u \Rightarrow s$	predpostavka
4.	$r \Rightarrow t$	predpostavka
5.	$\neg s$	predpostavka
6.	$u \Rightarrow s$	$\mathrm{HS}(1,3)$
7.	$\neg u$	$\mathrm{MT}(5,6)$
8.	r	$\mathrm{DS}(2,7)$
9.	t	$\mathrm{MP}(4,8)$

Naloga 33 *Ali drži sklep: $s \Rightarrow q \vee t,\, \neg t \;\models\; s \Rightarrow q$?*

Rešitev: *Sklep je pravilen, kot kaže naslednji dokaz:*

1.	$s \Rightarrow q \vee t$	predpostavka
2.	$\neg t$	predpostavka
3.1.	$\quad s$	predpostavka PS
3.2.	$\quad q \vee t$	$\mathrm{MP}(1,3.1)$
3.3.	$\quad q$	$\mathrm{DS}(3.2,2)$
3.	$s \Rightarrow q$	$\mathrm{PS}(3.1,3.3)$

Naloga 34 *Ali velja naslednji sklep:*

> *Če naj ne zamudim v službo, moram vstati dovolj zgodaj. A če grem nocoj na tekmo, grem v posteljo pozno. Če grem pozno v posteljo in dovolj zgodaj vstanem, bom premalo spal. Ne morem si privoščiti premalo spanja. Torej bom moral zamuditi v službo ali ne iti na tekmo.*

Rešitev: *Enostavne izjave, ki nastopajo v sklepu, bomo označili tako, da bomo pravilnost sklepa lažje formalno preverili. Vpeljimo naslednje oznake:*

- $s \equiv$ *ne zamudim v službo,*
- $z \equiv$ *vstanem dovolj zgodaj,*
- $t \equiv$ *nocoj grem na tekmo,*
- $p \equiv$ *nocoj grem pozno v posteljo,*
- $m \equiv$ *premalo bom spal.*

Potem sklep zapišemo takole:

$$s \Rightarrow z,\ t \Rightarrow p,\ p \wedge z \Rightarrow m,\ \neg m \ \models\ \neg s \vee \neg t\,.$$

Preden se lotimo dokazovanja, opazimo, da se po De Morganovem pravilu zaključek sklepa da zapisati v obliki $\neg(s \wedge t)$, kar je priročnejša oblika za uporabo redukcije na absurd. Tako bomo med predpostavke postavili negacijo te izjave, torej $s \wedge t$.

1.	$s \Rightarrow z$	predpostavka
2.	$t \Rightarrow p$	predpostavka
3.	$p \wedge z \Rightarrow m$	predpostavka
4.	$\neg m$	predpostavka
5.1.	$\quad s \wedge t$	predpostavka RA
5.2.	$\quad s$	Po(5.1)
5.3.	$\quad z$	MP(5.1, 5.2)
5.4.	$\quad t$	Po(5.1)
5.5.	$\quad p$	MP(2, 5.4)
5.6.	$\quad p \wedge z$	Zd(5.3, 5.5)
5.7.	$\quad m$	MP(3, 5.6)
5.8.	$\quad \neg m \wedge m \sim 0$	Zd(4, 5.7)
5.	$\neg(s \wedge t)$	RA(5.1, 5.8)

Naloga 35 *Dokaži ali ovrži veljavnost sklepa:*

$$\neg(p \vee \neg r) \Rightarrow \neg(r \vee q), q \vee t, r \Leftrightarrow t \models \neg q \Rightarrow p.$$

Rešitev: *Sklep je pravilen, kot kaže naslednji dokaz:*

1.	$\neg(p \vee \neg r) \Rightarrow \neg(r \vee q)$	predpostavka
2.	$q \vee t$	predpostavka
3.	$r \Leftrightarrow t$	predpostavka
4.1.	$\neg q$	predpostavka PS
4.2.	t	DS$(2, 4.1)$
4.3.	$(r \Rightarrow t) \wedge (t \Rightarrow r)$	(~ 3)
4.4.	$t \Rightarrow r$	Po(4.3)
4.5.	r	MP$(4.2, 4.4)$
4.6.	$r \vee q$	Pr(4.5)
4.7.	$p \vee \neg r$	MT$(1, 4.6)$
4.8.	p	DS$(4.5, 4.7)$
4.	$\neg q \Rightarrow p$	PS$(4.1, 4.8)$

Naloga 36 *Ali velja naslednji sklep:*

$$\neg p \vee r,\ \neg p \vee t,\ t \vee s \Rightarrow \neg q\ \models\ \neg p \vee \neg q?$$

Rešitev: *Sklep je pravilen, kot kaže naslednje zaporedje:*

1.	$\neg p \vee r$	predpostavka
2.	$\neg p \vee t$	predpostavka
3.	$t \vee s \Rightarrow \neg q$	predpostavka
4.1.	$p \wedge q$	predpostavka RA
4.2.	q	Po(4.1)
4.3.	$\neg(t \vee s)$	MT$(3, 4.2)$
4.4.	$\neg t \wedge \neg s$	(~ 4.3)
4.5.	$\neg t$	Po(4.4)
4.6.	p	Po(4.1)
4.7.	t	DS$(2, 4.6)$
4.8.	$\neg t \wedge t$	Zd$(4.5, 4.7)$
4.9.	0	(~ 4.8)
4.	$\neg p \vee \neg q$	RA$(4.1, 4.9)$

Naloga 37 *Ali velja naslednji sklep:* $p \Rightarrow (q \Rightarrow r),\ \neg p \Rightarrow \neg q,\ p\ \models\ r$*?*

Rešitev: *Sklep ni pravilen. Protiprimer je:* $p \sim 1, q \sim 0, r \sim 0$.

Naloge za samostojno reševanje

Naloga 38 *Dokaži ali ovrži pravilnost naslednjega sklepa:*
$\neg s \vee p, p \vee q \Rightarrow r \wedge s, u \Rightarrow q, r \vee t \Rightarrow u \models p \Leftrightarrow u$.

Rešitev: *Sklep je pravilen. Namig: ekvivalenco v zaključku sklepa zapiši kot konjunkcijo dveh implikacij, za vsako posebej uporabi pogojni sklep in na koncu naredi združitev, da dobiš željeni zaključek sklepa.*

Naloga 39 *Ali velja naslednji sklep:* $p \Rightarrow q, \neg(r \vee \neg q) \models \neg(p \vee r)$?

Rešitev: *Sklep ni pravilen. Protiprimer je:* $p \sim 1, q \sim 1, r \sim 0$.

Naloga 40 *Dokažimo, da je izjava* $((p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)) \Rightarrow (p \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow s))$ *tavtologija.*

Rešitev: *Namig: da se izognemo preverjanju s pomočjo velike tabele (s 16 vrsticami!) uporabimo karakterizacijo iz trditve 24, da izjavo pretvoriš v sklep* $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s), p, q \Rightarrow r \models s$, *katerega pravilnost se hitro dokaže.*

Naloga 41 *Ali je pravilen naslednji sklep:*

> *Izpit iz diskretne matematike bom naredil ali padel. Če izpit naredim, bom vesel. Torej, če padem, ne bom vesel.*

Rešitev: *Sklep ni pravilen.*

Naloga 42 *Ali je pravilen naslednji sklep:*

> *Če na vajah sodelujem, si me profesorica zapomni. Če ne sodelujem, sem vesel in si me profesorica ne zapomni. Če sodelujem, nisem vesel. Torej sem vesel natanko tedaj, ko si me profesorica ne zapomni.*

Rešitev: *Sklep je pravilen.*

Naloga 43 *Ali velja naslednji sklep:* $t \vee s \Rightarrow \neg q, p \Rightarrow t \wedge r \models q \uparrow p$?

Rešitev: *Sklep je pravilen. Namig: uporabi redukcijo na absurd.*

Naloga 44 *Dokaži trditev 30.*

1.3 KVANTIFIKATORJI

Kvantifikatorje smo srečali že pri predmetu Matematika 1 kot oznake, ki nam povedo za koliko objektov nekega "področja" izjava velja. Rekli smo, da oznako:

- $\forall$ beremo "za vsak",
- $\exists$ beremo "obstaja (vsaj en)",

Tako zapis $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ pomeni, da "za vsako realno število velja, da je njegov kvadrat večji ali enak 0", kar je seveda pravilna izjava.

Tudi pravilnosti naslednjih izjav ni težko določiti:

- $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0$ je pravilna izjava, saj obstaja (vsaj eno) realno število, ki je rešitev te enačbe, namreč $x = 1$ ali $x = -1$,
- ni pa pravilna izjava $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0$, saj vsako realno število ni rešitev dane enačbe.

V zgornjih primerih smo torej opazovali elemente x, ki imajo neko določeno lastnost. V splošnem dejstvo, da ima element x lastnost P, označimo s $P(x)$ in P imenujemo **predikat**. Spremenljivka x je v primerih zgoraj predstavljala neko realno število, zato rečemo, da je *področje pogovora* v teh primerih množica realnih števil.

Področje pogovora je množica objektov, iz katere lahko izbiramo *spremenljivke* in *konstante*. Pod spremenljivko si lahko predstavljamo katerikoli element, s konstanto pa mislimo na točno določen element iz te množice.

Da bolje pojasnimo te pojme, si oglejmo še kak zgled. Naj bo področje pogovora sedaj množica študentov 2. letnika, ki poslušajo predavanja iz diskretne matematike. $P(x)$ naj pomeni, da se študent x diskretno matematiko uči sproti (x je tukaj spremenljivka). Ali je $P(x)$ pravilna izjava? No, tole je seveda zavajajoče vprašanje, saj $P(x)$ sploh ni izjava. Dokler ne vemo, koga mislimo z x, pravilnosti oz. nepravilnosti $P(x)$ ne moremo določiti. Postane pa izjava, če pred njo postavimo kvantifikator ali pa x nadomestimo s konkretno osebo iz razreda (konstanto). Na primer,

- $\exists x : P(x)$ je izjava, ki pomeni, da v razredu obstaja *vsaj en* študent, ki se diskretno matematiko uči sproti,
- $\forall x : P(x)$ je izjava, katere pomen je, da se *vsi* študenti iz razreda diskretno matematiko učijo sproti,
- $P(\text{Miha})$ je izjava, saj bi lahko preverili pravilnost trditve "Miha se diskretno matematiko uči sproti".

V tem primeru je P bila oznaka za lastnost x-a (da se x uči sproti), torej je P predikat.

Predikati pa lahko poleg lastnosti opisujejo tudi odnos oz. relacijo med spremenljivkami in konstantami.

Še nekaj zgledov predikatov:

- $P(x) \equiv x$ je pameten,
- $L(x) \equiv x$ je lep,
- $Q(x) \equiv x$ je sodo število,
- $R(x, y) \equiv x$ ima rad y,
- $S(x, y, z) \equiv x$ leži na intervalu med y in z.

Številu spremenljivk, ki nastopajo v predikatu, rečemo **mestnost predikata**.

Zgornji predikati P, L in Q so enomestni, R je dvomesten, S pa trimesten predikat. Predikate lahko združujemo s pomočjo izjavnih povezav. Ob zgoraj definiranih predikatih

- $P(x) \vee L(x)$ pomeni: x je pameten ali lep,
- $Q(x) \wedge S(x, 2, 10)$ pomeni: x je sodo število in leži na intervalu med 2 in 10,
- $\neg R(x, y)$ v običajni jezik prevedemo: x nima rad y.

Predikati spadajo med tako imenovane *izjavne formule*. Kaj vse še spada pod izjavne formule nam pove naslednja induktivna definicija **množice izjavnih formul:**

1. Če je P nek m-mestni predikat ter $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spremenljivke ali konstante nad področjem pogovora $\mathcal{D}$, potem je $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ izjavna formula.
2. Če je A izjavna formula, je tudi $\neg A$ izjavna formula.
3. Če sta A in B izjavni formuli, potem je tudi $A * B$ izjavna formula, kjer $*$ pomeni eno izmed 2-mestnih izjavnih povezav.
4. Če je A izjavna formula v kateri nastopa spremenljivka x, sta tudi $\forall x : A(x)$ in $\exists x : A(x)$ izjavni formuli.

Izjavno formulo, ki sledi kvantifikatorju, imenujemo **območje delovanja kvantifikatorja**. V sestavljeni izjavni formuli je to najkrajše nadaljevanje, ki je samo zase izjavna formula.

Velja naslednji dogovor:

- kvantifikatorji vežejo močneje kot izjavni vezniki;
- dvopičje pred kvantifikatorjem opuščamo (glej primer tretje alineje v spodnjem primeru).

Primer 45 *V naslednjih primerih je območje delovanja kvantifikatorja podčrtano.*

- $\forall x : \underline{P(x)} \wedge S(x)$,

- $\forall x : \underline{(P(x) \land S(x))}$,
- $\forall x\, \underline{\exists y : \underline{R(x,y)}}$,
- $\exists x : \underline{(S(x,y) \Rightarrow \forall y : \underline{R(y)})}$,
- $\forall x : \underline{(R(x) \land \exists t : \underline{S(x,t)} \Rightarrow \exists y : \underline{P(x,y)})} \lor S(x,y)$.

Če v izjavni formuli opustimo področje pogovora $\mathcal{D}$, pomen konstant in predikatov, dobimo **izjavno shemo**. Če pa naredimo obratno, t.j. k izjavni shemi podamo področje pogovora, pomen vsakega predikata in konstant, dobimo nazaj izjavno formulo. Rrečemo, da smo s tem naredili **interpretacijo izjavne sheme**.

Ko je interpretacija izjavne sheme določena, lahko ugotavljamo, ali gre za pravilno ali nepravilno izjavo. Čeprav smo naslednje pravilo že uporabili v prvih zgledih, ni odveč posebej poudariti, da upoštevamo naslednje:

Izjava $\forall x : P(x)$ je pravilna natanko tedaj, ko je izjava $P(a)$ pravilna za vsak element a iz področja pogovora $\mathcal{D}$. Izjava $\exists x : P(x)$ je pravilna natanko tedaj, ko obstaja element a iz področja pogovora $\mathcal{D}$, za katerega je izjava $P(a)$ pravilna.

Primer 46 *Naslednji primeri nam povedo, da je ista izjavna formula lahko v eni interpretaciji resnična, v drugi pa neresnična. Oglejmo si izjavno formulo $\forall x\, \exists y : R(x,y)$ v različnih interpretacijah:*

1. *V prvem primeru naj bo $\mathcal{D} = \mathbb{N}$ in $R(x,y) \equiv x > y$. Potem $\forall x\, \exists y : R(x,y)$ pomeni, da za vsako naravno število obstaja manjše naravno število, kar seveda ne drži.*
2. *Naj bo sedaj $\mathcal{D} = \mathbb{Z}$ in $R(x,y) \equiv x > y$. Potem $\forall x\, \exists y : R(x,y)$ pomeni: za vsako celo število obstaja manjše celo število. Ta izjava je pravilna.*

Videli smo, da lahko posamezna izjavna shema v neki interpretaciji preide v pravilno izjavo, v drugačni interpretaciji pa v nepravilno izjavo.

Za izjavno shemo S, ki preide v pravilno izjavo pri vsaki interpretaciji, rečemo, da je **splošno veljavna** in označimo

$$\models S.$$

Primer 47 *Prepričajmo se, da je izjavna shema*

$$\forall x : P(x) \Rightarrow \neg\exists x : \neg P(x)$$

splošno veljavna: če imajo vsi objekti iz področja pogovora $\mathcal{D}$ lastnost P, potem gotovo ne obstaja objekt iz $\mathcal{D}$, ki nima lastnosti P.

Kadar želimo dokazati, da neka izjavna shema ni splošno veljavna, moramo najti interpretacijo, pri kateri izjavna shema preide v nepravilno izjavo. Takšni interpretaciji pravimo **protiprimer za dano izjavno shemo**.

Primer 48 *Dokažimo, da izjavna shema $\forall x \forall y : (P(x,y) \Rightarrow P(y,x))$ ni splošno veljavna. Treba je najti protiprimer, torej interpretacijo, za katero dana shema preide v nepravilno izjavo. Če za področje pogovora vzamemo $\mathcal{D} = \mathbb{N}$ in predikat $P(x,y)$ pomeni, da je $x \leq y$, potem shema preide v trditev, da "za poljubni naravni števili x in y, za kateri je $x \leq y$, velja tudi obratno, torej $y \leq x$". To pa seveda ni res.*

Če za izjavni shemi S in T velja $\models S \Leftrightarrow T$, rečemo, da sta **enakovredni**, in pišemo

$$S \sim T.$$

Če velja $\models S \Rightarrow T$ pa pravimo, da je shema T **logična posledica** sheme S, kar na kratko zapišemo

$$S \rightarrow T.$$

Naštejmo nekaj enakovrednih izjavnih shem in logičnih posledic izjavnih shem. Zapisane so urejeno glede na izjavne povezave, ki v njih nastopajo.

Zakoni predikatnega računa

1. **Negacija**.

$$\begin{aligned} \neg\forall x : P(x) &\sim \exists x : \neg P(x) \\ \neg\exists x : P(x) &\sim \forall x : \neg P(x) \end{aligned}$$

2. **Konjunkcija**.

$$\begin{aligned} \forall x : (P(x) \wedge Q(x)) &\sim \forall x : P(x) \wedge \forall x : Q(x) \\ \exists x : (P(x) \wedge Q(x)) &\rightarrow \exists x : P(x) \wedge \exists x : Q(x) \end{aligned}$$

3. **Disjunkcija**.

$$\begin{aligned} \exists x : P(x) \vee \exists x : Q(x) &\sim \exists x : (P(x) \vee Q(x)) \\ \forall x : P(x) \vee \forall x : Q(x) &\rightarrow \forall x : (P(x) \vee Q(x)) \end{aligned}$$

4. **Implikacija**.

$$\begin{aligned} \forall x : (P(x) \Rightarrow Q(x)) &\rightarrow (\forall x : P(x) \Rightarrow \forall x : Q(x)) \\ \forall x : (P(x) \Rightarrow Q(x)) &\rightarrow (\exists x : P(x) \Rightarrow \exists x : Q(x)) \end{aligned}$$

5. Ekvivalenca.

$$\forall x : (P(x) \Leftrightarrow Q(x)) \quad \to \quad (\forall x : P(x) \Leftrightarrow \forall x : Q(x))$$

Še nekaj zakonov:

$$\begin{array}{rcl} \forall x\, \forall y : P(x,y) & \sim & \forall y\, \forall x : P(x,y) \\ \exists x\, \exists y : P(x,y) & \sim & \exists y\, \exists x : P(x,y) \\ \exists x\, \forall y : P(x,y) & \to & \forall y\, \exists x : P(x,y) \end{array}$$

Vseh zakonov ne bomo dokazovali, za zgled pa utemeljimo naslednje:

- $\neg\forall x : P(x) \sim \exists x : \neg P(x)$.

  Premislimo, kdaj je izjava $\neg\forall x : P(x)$ pravilna pri poljubni interpretaciji. To velja če in samo če, ko je izjava $\forall x : P(x)$ nepravilna, kar pa se zgodi natanko tedaj, ko najdemo kak element a iz področja pogovora, za katerega je $P(a)$ nepravilna izjava. V nasprotnem primeru bi namreč veljalo $P(a)$ za vse elemente, s tem pa tudi $\forall x : P(x)$. Potem je za element a izjava $\neg P(a)$ pravilna, kar pa pomeni, da je $\exists x : \neg P(x)$ pravilna izjava.

- $\exists x\, \forall y : P(x,y) \;\to\; \forall y\, \exists x : P(x,y)$.

  Leva stran, torej $\exists x\, \forall y : P(x,y)$ je pravilna trditev, če na področju pogovora obstaja nek element a, za katerega pri poljubnem drugem elementu y velja $P(a,y)$. To pomeni, da lahko za poljuben element y najdemo element x za katega velja $P(x,y)$, to je namreč kar element $x = a$. S simboli to zapišemo kot $\forall y\, \exists x : P(x,y)$.

- $\forall x : P(x) \vee \forall x : Q(x) \;\to\; \forall x : (P(x) \vee Q(x))$.

  Tukaj dokazujemo pravilnost (pri vsaki interpretaciji) implikacije $\forall x : P(x) \vee \forall x : Q(x) \;\Rightarrow\; \forall x : (P(x) \vee Q(x))$. Če je trditev na desni strani implikacije pravilna, potem implikacija seveda velja. Zato si oglejmo še primer, ko ima $\forall x : (P(x) \vee Q(x))$ logično vrednost 0. To pa pomeni, da obstaja element a iz področja pogovora, za katerega je $P(a) \vee Q(a) \sim 0$. Od tod sledi $P(a) \sim 0$ in $Q(a) \sim 0$ in posledično $\forall x : P(x) \sim 0$ in $\forall x : Q(x) \sim 0$. Tako je v tem primeru tako na levi kot na desni strani implikacije trditev, ki ima logično vrednost 0, zato ima sama implikacija logično vrednost 1.

1.3.1 *Preveri svoje znanje (kvantifikatorji)*

Vprašanja iz teorije

1. Katere kvantifikatorje poznamo?

2. Kaj so predikati? Kakšne vrste predikatov poznamo?
3. Ali je $\forall x : P(x) \vee \forall x : Q(x)$ izjavna shema?
4. Kdaj izjavna shema postane izjavna formula?
5. Kdaj sta pravilni izjavi $\forall x : P(x)$ in $\exists x : P(x)$?
6. Kaj pomeni, da je izjavna shema splošno veljavna?
7. Kako dokažemo, da izjavna shema ni splošno veljavna?
8. Kdaj sta izjavni shemi enakovredni?

Rešene naloge

Naloga 49 *Naj predikat $P(x)$ pomeni "x je praštevilo", področje pogovora pa naj bo množica naravnih števil. V običajni jezik prevedi naslednje izjavne sheme:*

$$\exists x : P(x),\ \forall x : P(x),\ \neg\exists x : P(x),\ \forall x : \neg P(x),\ \neg\forall x : P(x),\ \exists x : \neg P(x).$$

Rešitev:

$\exists x : P(x)$	*Ostaja vsaj eno naravno število, ki je praštevilo.*
$\forall x : P(x)$	*Vsako naravno število je praštevilo.*
$\neg\exists x : P(x)$	*Ne velja, da obstaja vsaj eno praštevilo.*
$\forall x : \neg P(x)$	*Nobeno naravno število ni praštevilo.*
$\neg\forall x : P(x)$	*Ni res, da je vsako naravno število praštevilo.*
$\exists x : \neg P(x)$	*Obstaja vsaj eno naravno število, ki ni praštevilo.*

Naloga 50 *V jezik predikatnega računa prevedi naslednje stavke:*

- *Vsi športniki trenirajo vsak dan.*
- *Noben športnik ne trenira vsak dan.*
- *Nekateri športniki trenirajo vsak dan.*
- *Nekateri športniki ne trenirajo vsak dan.*

Rešitev:
Uvedimo oznaki za predikata:

$S(x) \equiv x$ *je športnik;* $T(x) \equiv x$ *trenira vsak dan.*

Vsi športniki trenirajo vsak dan.	$\forall x : (S(x) \Rightarrow T(x))$
Noben športnik ne trenira vsak dan.	$\forall x : (S(x) \Rightarrow \neg T(x))$
Nekateri športniki trenirajo vsak dan.	$\exists x : (S(x) \wedge T(x))$
Nekateri športniki ne trenirajo vsak dan.	$\exists x : (S(x) \wedge \neg T(x))$

Naloga 51 *Pokaži, da izjavni shemi* $\forall x : (P(x) \vee Q(x))$ *in* $\forall x : P(x) \vee \forall x : Q(x)$ *nista ekvivalentni.*

Rešitev: *Poiščimo protiprimer. Naj bo* $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, $P(x) \equiv x$ *je sodo število,* $Q(x) \equiv x$ *je liho število. Potem izjavna formula*

- $\forall x : (P(x) \vee Q(x))$ *trdi, da je vsako naravno število sodo ali liho, kar je pravilna izjava.*
- $\forall x : P(x) \vee \forall x : Q(x)$ *trdi, da so vsa naravna števila soda ali pa so vsa naravna števila liha, kar pa ne drži.*

Naloga 52 *Naj bo* $S(x, y)$ *predikat, katerega pomen je "x skrbi za y". V jezik predikatnega računa prevedi naslednje izjave:*

1. *Vsak skrbi za vsakogar.*
2. *Vsakdo skrbi za koga.*
3. *Za vsakogar nekdo skrbi.*
4. *Nekdo skrbi za vse.*
5. *Vsi skrbijo za nekoga (vsi za isto osebo).*
6. *Nekdo skrbi za nekoga.*

Rešitev:

1. $\forall x \, \forall y : S(x, y)$ *ali* $\forall y \, \forall x : S(x, y)$
2. $\forall x \, \exists y : S(x, y)$
3. $\forall y \, \exists x : S(x, y)$
4. $\exists x \, \forall y : S(x, y)$
5. $\exists y \, \forall x : S(x, y)$
6. $\exists x \, \exists y : S(x, y)$ *ali* $\exists y \, \exists x : S(x, y)$

Naloga 53 *Pokaži, da izjavna shema*

$$\forall y \, \exists x : P(x,y) \;\Rightarrow\; \exists x \, \forall y : P(x,y)$$

ni splošno veljavna.

Rešitev: *Tukaj se sprašujemo ali pri poljubni interpretaciji iz $\forall y \, \exists x : P(x,y)$ sledi $\exists x \, \forall y : P(x,y)$. Izkaže se, da ne, saj lahko najdemo naslednji protiprimer: za področje pogovora vzemimo množico $\mathbb{N}$, za predikat $P(x,y)$ relacijo $y < x$. Potem je trditev $\forall y \, \exists x : P(x,y)$ pravilna (saj trdi, da za vsako naravno število obstaja neko drugo naravno število, ki je od njega večje). Trditev na desni strani implikacije pa pravi, da obstaja neko naravno število, ki je večje od vsakega drugega naravnega števila, kar pa je nepravilna izjava.*

Naloga 54 *Pokaži, da izjavna shema*

$$\exists x : P(x) \land \exists x : Q(x) \;\Rightarrow\; \exists x : (P(x) \land Q(x))$$

ni splošno veljavna.

Rešitev: *Dana izjavna shema preide v nepravilno izjavo npr. pri naslednji interpretaciji: področje pogovora $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, $P(x) \equiv x^2 - 1 \leq 0$, $Q(x) \equiv x - 5 > 0$.*

2

MATRIKE

Matrike, ki jih bomo spoznali v tem poglavju, predstavljajo pomembno matematično orodje, na kar kaže že samo dejstvo, da si bomo z njimi pomagali pri prav vseh preostalih poglavjih, ki še sledijo. Seveda pa njihova uporaba daleč presega le uporabo v matematiki, nanje naletimo na skoraj vseh področjih, tako v znanosti kot inženirstvu. NASA je npr. uporabila matrike pri prenosu podatkov iz vesoljske sonde, poslane na Mars. Informacije so tam zakodirali s pomočjo t.i. Haddamardovih matrik in jih nato na Zemlji dekodirali. Ko smo že pri kodah, QR kode, ki jih srečujemo na vsakem koraku, so matrične oz. dvodimenzionalne črtne kode. Gre za mrežo kvadratkov, kjer je vsak kvadratek črne ali bele barve (prevedeno v računalniški jezik: kvadratki imajo vrednost 0 ali 1). Za to mrežo se skriva matrika, kakor matrike stojijo tudi za predstavitvijo slik v digitalni obliki, ki si jih prav tako lahko predstavljamo kot zelo goste mreže kvadratkov, kjer vsak od njih predstavlja določen del slike in je zato določene barve. Matrike so tako med drugim nepogrešljiv del računalniške grafike.

2.1 UVOD

Matrika razsežnosti (oz. velikosti) $m \times n$ je pravokotna shema števil, ki so razporejena v m vrstic in n stolpcev:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Velikosti matrike rečemo tudi **red matrike**. Matrike bomo označevali z velikimi tiskanimi črkami $(A, B, C, X, ...)$. Število a_{ij}, ki leži v i-ti vrstici in j-tem stolpcu matrike, imenujemo (i, j)-ti **element matrike**. Elementom matrike pravimo tudi **koeficienti**.

Primer 55 *Primera matrik:*

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & i & -8 & \sqrt{3} \\ -3.6 & -4i+2 & -6 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Izpišimo nekaj elementov: $b_{21} = 0$, $b_{22} = 5$, $c_{21} = -3.6$, $c_{14} = \sqrt{3}$.

Včasih namesto a_{ij} pišemo tudi $(A)_{ij}$, kadar imamo v mislih (i,j)-ti element matrike A (tako je npr. za matriki iz zgornjega zgleda $(B)_{12} = 1$ in $(C)_{12} = i$). Ta vrsta zapisa bo koristna predvsem v nekaterih dokazih.

V nadaljevanju se bomo osredotočili na *realne matrike*, torej take, katerih koeficienti so realna števila. Množico vseh realnih matrik z m vrsticami in n stolpci označimo z $\mathbb{R}^{m \times n}$. Za matriko B iz zgornjega zgleda torej velja $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, matrika C pa je primer *kompleksne matrike*.

Matrika je znana, če poznamo njene elemente ter njihov položaj v matriki. Dve matriki sta **enaki**, če sta enakih razsežnosti in se ujemata v istoležnih elementih.

2.2 OSNOVNE RAČUNSKE OPERACIJE Z MATRIKAMI

Seštevanje matrik je definirano le za matrike istega reda.

Za matriki $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ definiramo **vsoto matrik** $A + B$ takole: če je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix},$$

potem je

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Spodnja definicija pove, da matriko množimo s skalarjem tako, da vsak koeficient matrike pomnožimo s tem skalarjem.

Za matriko $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in število $\lambda \in \mathbb{R}$ definiramo **produkt matrike s skalarjem**. Če je A kot zgoraj, je

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Primer 56 *Podani sta matriki* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ *in* $B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. *Izračunaj matrike* $A+B, A-B, B-A, 5A$ *in* $2A-5B$.

Rešitev:

$$\begin{aligned}
A+B &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \\
A-B &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \\
B-A &= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \\
5A &= 5\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ -10 & 15 \end{bmatrix}, \\
2A-5B &= 2\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & -15 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & 15 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Na osnovi zgornjih zgledov in še kakšnega bi hitro uganili lastnosti seštevanja matrik in množenja matrik s skalarjem. Naštejmo jih:

- *asociativnost seštevanja*:

  $(A+B)+C = A+(B+C)$ za vse $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$,

- *komutativnost seštevanja*:

  $A+B = B+A$ za vse $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$,

- *obstoj nevtralnega elementa za seštevanje*:

  za ničelno matriko $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ velja $A+0 = A$ za vsak $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$,

- *obstoj nasprotnega elementa za seštevanje*:

  za matriko $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ obstaja nasprotna matrika $-A = (-1)A$, da velja $A+(-A) = 0$,

- *distributivnost v skalarnem faktorju*:

  $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$ za vse $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

- *distributivnost v matričnem faktorju*:

  $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ za vse $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $\lambda \in \mathbb{R}$,

- *multiplikativnost v skalarnem faktorju*:
  $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ za vse $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

- *množenje s skalarjem* 1:
  $1 \cdot A = A$ za vse $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Dokaze naštetih lastnosti lahko mirno izpustimo, saj hitro vidimo, da so podedovane od lastnosti realnih števil. Tako npr. velja asociativnostni zakon za seštevanje matrik, ker velja asociativnost za seštevanje realnih števil.

Če ima matrika A toliko stolpcev kot ima matrika B vrstic, lahko matriko A zmnožimo z matriko B. Natančneje, produkt $A \cdot B$ matrik $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{r\times p}$ torej obstaja, če je $n = r$. V spodnji definiciji bomo matriko

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

na kratko zapisali tako:

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n},$$

prav tako pa zaradi enostavnejšega zapisa opuščamo piko v produktu $A \cdot B$ in pišemo kar AB.

Naj bo $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ in $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n,p}$. **Produkt matrik** A in B je matrika $C = AB$ reda $m \times p$, katere elementi so

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

za $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, p\}$.

Z drugimi besedami, (i, j)-ti element matrike $C = AB$, torej element c_{ij}, lahko opišemo tudi kot "skalarni produkt"[1] i-te vrstice matrike A in j-tega stolpca matrike B. Kaj natanko mislimo s tem produktom, pojasnimo na naslednjih zgledih:

Primer 57 *Podani sta matriki* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ *in* $B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. *Izračunajmo produkta matrik* AB *in* BA.

1 V naslednjem poglavju bomo izvedeli, da tukaj množimo na enak način kot pri skalarnem produktu dveh vektorjev. Na omenjeno vrstico in stolpec namreč gledamo kot na koordinate vektorjev, ki ju skalarno množimo.

Rešitev: *Najprej si oglejmo produkt* $C = AB$:

$$C = AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Če želimo dobiti element c_{11} *matrike* C*, moramo upoštevati le prvo vrstico prve matrike* A *in prvi stolpec druge matrike* B*. Tako pomnožimo 1. element 1. vrstice s 1. elementom 1. stolpca, nato 2. element 1. vrstice z 2. elementom 1. stolpca, na koncu pa oba produkta seštejemo. Podobno velja pri računanju elementa* c_{12}*: tokrat opazujemo 1. vrstico 1. matrike in 2. stolpec 2. matrike (katero vrstico in kateri stolpec opazujemo, je razvidno iz vrstnega reda števil v indeksu elementa* c_{12}*). Na enak način se lotimo še računanja manjkajočih elementov* c_{21} *in* c_{22}*. Postopek računanja bo torej izgledal takole:*

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 4 + 0\cdot 0 & 2\cdot(-3) + 0\cdot 2 \\ -2\cdot 4 + 3\cdot 0 & -2\cdot(-3) + 3\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -8 & 12 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo še produkt BA.

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -9 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Zgornji zgled nam pove, da množenje matrik **NI komutativno**. V splošnem torej ne velja $AB = BA$. Rečemo tudi, da je množenje matrik **nekomutativno**. Kot že vemo, se lahko zgodi celo, da sta razsežnosti matrik A in B taki, da obstaja le eden od produktov AB in BA. Množenje matrik je komutativno le v posebnih primerih matrik in kadar torej velja $AB = BA$, rečemo, da matriki A in B **komutirata**.

Množenje matrik pa zadošča naslednjim pogojem:

- *asociativnost*:

  $(AB)C = A(BC)$ za vse $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ in $C \in \mathbb{R}^{p\times q}$. Opomba: ker torej velja asociativnost, si lahko privoščimo zapis kar brez oklepajev: $(AB)C = A(BC) = ABC$.

- *obstoj enote za množenje*:

  $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$. Za vsako matriko $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ velja $I_m A = A I_n = A$. Kvadratno matriko I_n imenujemo **enotska matrika**. Pogosto namesto I_n pišemo kar I, ko je iz besedila razvidno, kakšne razsežnosti je.

- *leva distributivnost*:

  $(A + B)C = AC + BC$ za vse $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $C \in \mathbb{R}^{n\times p}$,

- *desna distributivnost*:
  $A(B+C) = AB + AC$ za vse $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B, C \in \mathbb{R}^{n\times p}$,
- *homogenost*:
  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ za vse $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ in $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dokažimo asociativnost in desno distributivnost. Premislek, da veljajo ostale lastnosti, je dobra vaja za samostojno reševanje.

Dokaz, da velja asociativnost:

$$\begin{aligned}((AB)C)_{ij} &= \textstyle\sum_{k=1}^{n}(AB)_{ik}c_{kj}\\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n}(\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk})c_{kj}\\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk}c_{kj}\\ &= \textstyle\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{il}b_{lk}c_{kj}\\ &= \textstyle\sum_{l=l}^{n} a_{il}(\sum_{k=1}^{n} b_{lk}c_{kj})\\ &= \textstyle\sum_{l=1}^{n} a_{il}(BC)_{lj}\\ &= (A(BC))_{ij}.\end{aligned}$$

Asociativnost tako velja, saj sta $(AB)C$ in $A(BC)$ matriki enakih dimenzij ($m \times q$), ki se ujemata v istoležnih elementih.

Sledi dokaz, da velja desna distributivnost:

$$\begin{aligned}(A(B+C))_{ij} &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(B+C)_{kj}\\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})\\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}\\ &= (AB)_{ij} + (AC)_{ij}\\ &= (AB+AC)_{ij}.\end{aligned}$$

Ker sta tako $A(B+C)$ in $AB+AC$ matriki enakih dimenzij (namreč $m \times p$), ki se ujemata v istoležnih elementih, je desna distributivnost dokazana.

S tem, ko imamo definirano množenje matrik, lahko sedaj definiramo tudi **potenco** kvadratne matrike. Za **kvadratno matriko** velja, da ima enako število vrstic in stolpcev.

> Za $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in $k \in \mathbb{N}$ je
>
> $$A^0 = I \quad \text{in} \quad A^{k+1} = AA^k.$$

Kot pri realnih številih gre torej za produkt enakih faktorjev. A bodimo pozorni pri potenciranju.

Lastnosti potenciranja matrik so:

- $AA^k = A^kA$,
- $A^mA^k = A^kA^m$,
- $(A^k)^m = A^{km}$,
- če je $AB = BA$, potem velja $(AB)^k = A^kB^k$,
- če je $AB = BA$, potem velja $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Ni pa odveč ponovno poudariti, da množenje matrik ni komutativno: če za dani matriki velja $AB \neq BA$, potem je $(AB)^3 = ABABAB \neq A^3B^3$. Pazimo tudi pri kvadriranju vsote matrik: če $AB \neq BA$, potem je $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

Poleg nekomutativnosti množenja matrik lahko opazimo še naslednje lastnosti, ki ne veljajo za realna števila:

- Oglejmo si matriko $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Kljub temu, da $A \neq 0$ (A ni ničelna matrika), velja $A^2 = 0$.
- Naj bosta $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Čeprav $A \neq 0$ in $B \neq 0$, je $AB = 0$.

Če v matriki A zamenjamo vlogi vrstic in stolpcev, dobimo **transponirano matriko** matrike A, ki jo označimo z A^T, njeni elementi pa so $(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$.

Če je $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, potem je $A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Matriko A z lastnostjo $A^T = A$ imenujemo **simetrična matrika**. Enotska matrika spada med simetrične matrike.

Primer 58 *Transponirana matrika k matriki*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & -6 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

je matrika

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & -6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Za transponiranje matrik velja

- $(A^T)^T = A$ za vse $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$,
- $(A+B)^T = A^T + B^T$ za vse $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$,
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ za vse $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $\lambda \in \mathbb{R}$,
- $(AB)^T = B^T A^T$ za vse $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$.

Prve tri lastnosti so takojšnja posledica definicije transponirane matrike in seštevanja matrik oz. množenja matrike s skalarjem. Premislimo, da velja tudi enakost $(AB)^T = B^T A^T$. Najprej izrazimo (i,j)-ti element matrike $(AB)^T$:

$$\begin{aligned}((AB)^T)_{ij} &= (AB)_{ji} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}.\end{aligned}$$

Prepričajmo se, da je temu enak tudi (i,j)-ti element matrike $B^T A^T$:

$$\begin{aligned}(B^T A^T)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} b^T_{ik} a^T_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}.\end{aligned}$$

Matriki $(AB)^T$ in $B^T A^T$, ki sta enakih dimenzij, se ujemata v istoležnih členih, zato je enakost dokazana.

2.2.1 *Kvadratne matrike*

Posebej si oglejmo kvadratne matrike. Nekatere izmed njih imajo posebna imena:

- **diagonalna matrika** ima lahko neničelne elemente le na glavni diagonali. Torej je oblike $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}$,
- **zgornje trikotna matrika** ima pod glavno diagonalo le ničle, torej je oblike $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}$,

- elementi **spodnje trikotne matrike**, ki ležijo nad glavno diagonalo, so enaki 0: $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}$.

Inverzna matrika k matriki $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ je matrika A^{-1}, za katero velja

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Matrika, za katero obstaja inverzna matrika, se imenuje **obrnljiva** (ali **regularna**). Matriko, katere inverz ne obstaja, imenujemo **singularna** matrika.

Primer 59 *Prepričajmo se, da je matrika* $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *inverzna matrika matrike* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Preveriti je torej treba, da velja* $BA = I$, *kakor tudi* $AB = I$:

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I,$$
$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Primer 60 *Oglejmo si še primer matrike, ki ni obrnljiva. Matrika* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *je singularna: namreč, če bi obstajala matrika* B *z lastnostjo* $AB = I$, *bi veljalo tudi* $A^2B = A$ *(to enačbo dobimo tako, da tako levo kot desno stran enačbe* $AB = I$ *iz leve strani pomnožimo z* A*). Ker pa je* $A^2 = 0$, *iz enačbe* $A^2B = A$ *sledi, da je tudi* $A = 0$, *s čemer smo dobili protislovje.* [2]

Kdaj inverzna matrika obstaja in kako se jo izračuna, bomo spoznali kasneje. Z znanjem, ki ga imamo doslej, lahko dokažemo naslednje lastnosti.

Trditev 61 *Če je* A *obrnljiva matrika, je matrika* A^{-1} *enolično določena.*

Dokaz. Recimo, da sta B in C inverzni matriki matrike A. Potem velja $AB = BA = I$ in $AC = CA = I$. Sedaj lahko izpeljemo:

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C,$$

iz česar sledi, da je $B = C$. ■

2 Opazimo, da smo obenem ponovili tudi del prejšnje snovi, saj smo uporabili dokaz s pomočjo redukcije na absurd.

Trditev 62 *Če sta A in B obrnljivi matriki, je obrnljiv tudi produkt in velja*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Inverz obrnljive matrike je tudi obrnljiva matrika in velja

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Dokaz. Z uporabo dejstva, da je množenje matrik asociativno, lahko izpeljemo

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I,\\ (B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I,\end{aligned}$$

kar pomeni, da je

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Iz same definicije inverzne matrike, torej iz dejstva, da je $A^{-1}A = AA^{-1} = I$, takoj vidimo, da je $(A^{-1})^{-1} = A$. Namreč, A je matrika, s katero iz leve strani pomnožimo matriko A^{-1} in s tem dobimo I, enako pa velja tudi, če množimo iz desne strani. ∎

Trditev 63 *Če je A obrnljiva matrika, je obrnljiva tudi matrika A^T in velja*

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Dokaz. Po pravilih za transponiranje po transponiranju enakosti $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ dobimo $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = I$. Torej je $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. ∎

2.2.2 *Preveri svoje znanje (osnovno o matrikah)*

Vprašanja iz teorije

1. Kdaj sta matriki enaki?
2. Kdaj lahko seštejemo matriki?
3. Katere lastnosti veljajo za seštevanje matrik in množenje matrike s skalarjem?
4. Kdaj je definirano množenje matrik? Podaj primer matrik A in B tako, da bo produkt AB obstajal, produkt BA pa ne.
5. Naštej lastnosti, ki veljajo za množenje matrik.
6. Pojasni pojme: simetrična, transponirana, diagonalna, kvadratna, zgornje trikotna, singularna matrika in za vsako podaj zgled.
7. Katere lastnosti veljajo za transponiranje matrik?

8. Kako je definirana inverzna matrika?
9. Dokaži, da je inverzna matrika enolično določena.
10. Kaj lahko povemo o obrnljivosti produkta AB glede na obrnljivost matrik A in B?
11. Kdaj je transponirana matrika obrnljiva?
12. Naštej lastnosti potenciranja matrik.

Naloge za samostojno reševanje

Naloga 64 *Izračunaj produkta AB in BA, če je*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad in \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ -7 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Rešitev: *Izpišimo le elemente prve vrstice matrike $C = AB$, za ostale bomo navedli le rezultat:*

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 6 + 3 \cdot (-7) = -13, \\ c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 3 \cdot 0 = 11, \\ c_{13} &= a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) = -5. \end{aligned}$$

Končna rešitev je:

$$AB = \begin{bmatrix} -13 & 11 & -5 \\ -48 & -5 & -20 \\ 10 & 25 & 6 \end{bmatrix} \ in \ BA = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 22 \\ 22 & 5 & 50 \\ -29 & -13 & -24 \end{bmatrix}.$$

Naloga 65 *Če produkta AB in BA obstajata, ju izračunaj:*

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 9 \\ 8 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ *in* $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ *in* $B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -1 \end{bmatrix}$.

Rešitev:

(a) $AB = \begin{bmatrix} -6 & 20 \\ -9 & 42 \\ 23 & 6 \end{bmatrix}$, *produkt BA ne obstaja.*

(b) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 8 & 28 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ in $BA = \begin{bmatrix} 30 \end{bmatrix}$.

Naloga 66 *Izračunaj $-3A + 2BC$, če je $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ \frac{4}{3} & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ in $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.*

Rešitev: $-3A + 2BC = \begin{bmatrix} 18 & 29 \\ -4 & -14 \\ -2 & -11 \end{bmatrix}$.

Naloga 67 *Dokaži, da je matrika*

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{19} & \frac{5}{38} & \frac{1}{76} \\ \frac{5}{38} & -\frac{3}{38} & \frac{7}{76} \\ \frac{11}{76} & \frac{1}{76} & -\frac{15}{152} \end{bmatrix}$$

inverzna matrika matrike $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 8 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & -4 \end{bmatrix}$.

Rešitev: *Izračunajmo produkta AB in BA. V obeh primerih moramo kot rezultat dobiti enotsko matriko dimenzije 3×3.*

Naloga 68 *Poišči matriko X, če je $X^T + A = 2B$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ in $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$.*

Rešitev: $X = \begin{bmatrix} 3 & 14 & -1 \\ 8 & -1 & 8 \end{bmatrix}$.

Naloga 69 *Poišči $f(A)$, če je $f(x) = x^2 + 3x + 2$ in $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.*

Rešitev: $f(A) = A^2 + 3A + 2I = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 14 & 20 \end{bmatrix}$.

Naloga 70 *Reši enačbo $-3X + A = -2B$, če je $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.*

Rešitev: $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} & 1 & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$.

Naloga 71 *Dani sta matriki*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) *Preveri, da je matrika* $X = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & -9 \end{bmatrix}$ *rešitev enačbe* $AX = B + X$.

(b) *Izračunaj* $f(B)$, *če je* $f(x) = x^2 - x - 2$.

Rešitev: *Najprej rešimo primer* (a):

$$AX = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \\ -1 & -4 & -9 \end{bmatrix}.$$

$$B + X = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \\ -1 & -4 & -9 \end{bmatrix}.$$

Matrika na levi strani enačbe je torej res enaka matriki na desni strani enačbe.

Rešitve naloge (b): *izračunajmo najprej matriko* B^2:

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -7 & 1 \\ -4 & 12 & 4 \\ -19 & 12 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sedaj dobimo:

$$f(B) = B^2 - B - 2I = \begin{bmatrix} 10 & -7 & 1 \\ -4 & 12 & 4 \\ -19 & 12 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -9 & 0 \\ -8 & 12 & 4 \\ -20 & 17 & -1 \end{bmatrix}.$$

2.2.3 *Determinanta matrike*

Za ugotavljanje obstoja inverzne matrike in njen izračun bomo potrebovali pojem determinante[3]. Determinanta bo predstavljala število, ki ga na določen način priredimo kvadratnim matrikam. Determinanto matrike A označujemo z $\det(A)$.

Determinanta matrike razsežnosti 1×1 je po definiciji enaka kar (edinemu) elementu te matrike. Torej, če je $A = [a_{11}]$, je $\det(A) = a_{11}$.

Determinanto matrike A razsežnosti 2×2 (na kratko determinanto **reda** 2) definiramo kot produkt elementov glavne diagonale, od katerih odštejemo produkt preostalih elementov. Torej, če imamo matriko $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, potem je

3 Determinante so se pojavile že v 16. stoletju. Vpeljal jih je italijanski matematik, zdravnik, astrolog, filozof, fizik in astronom Gerolamo Cardano in jih uporabljal za določanje rešitev sistema dveh linearnih enačb z dvema neznankama.

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Kadar imamo matriko podano z elementi, lahko determinanto označimo z navpičnima črtama, kot smo naredili v zgornjem primeru.

Primer 72 *Izračunajmo determinanto matrike* $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$.

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-3) - 1 \cdot 2 = -14.$$

Determinanto reda 3 definiramo tako:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$\begin{aligned} = \quad & (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ & -(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}). \end{aligned}$$

Zgornje formule se seveda ne bomo učili na pamet, temveč si bomo pomagali s **Sarrusovim pravilom**. Po tem pravilu si k determinanti najprej pripišemo prva dva stolpca:

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$$

Nato zmnožimo elemente na glavni diagonali (zamišljamo si daljico, ki v determinanti poteka od zgoraj levo do spodaj desno in zajema elemente a_{11}, a_{22}, a_{33}) ter na vzporednicah desno od glavne diagonale. Ko vse te produkte seštejemo, dobimo izraz, ki je v zgornji definiciji v prvem oklepaju: $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$. Od dobljene vsote odštejemo produkt na obratni diagonali (ki poteka od spodaj levo do zgoraj desno in zajema elemente a_{31}, a_{22}, a_{13}) ter produkta na njenih vzporednicah desno. Tako dobimo končno vrednost determinante:

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}).$$

Sarrusovo pravilo velja samo za izračun determinant matrik razsežnosti 3×3. Metoda za splošen n, $n \neq 3$, **ne drži** in je tudi ni možno ustrezno prirediti. Zato si bomo ogledali še en način za izračun determinante matrike razsežnosti 3×3, ki pa ga bo možno posplošiti na večje razsežnosti. Za to potrebujemo naslednje pojme.

Naj bo A kvadratna matrika razsežnosti $n \times n$, kjer je $n \geq 2$. **Poddeterminanto** $\det(A_{ij})$ iz determinante $\det(A)$ dobimo tako, da zanemarimo i-to vrstico in j-ti stolpec determinante $\det(A)$. Če poddeterminanto $\det(A_{ij})$ pomnožimo z $(-1)^{i+j}$, dobimo **kofaktor** A_{ij}:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}).$$

Primer 73 *Poddeterminanta* $\det(A_{12})$ *determinante* $\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ *je* $\det(A_{12}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2$, *kofaktor* A_{12} *pa* $A_{12} = (-1)^{1+2} \det(A_{12}) = 2$.

Izračun determinante reda 3 *z razvojem po prvi vrstici* izgleda takole: vsak element iz prve vrstice pomnožimo s pripadajočim kofaktorjem, nakar dobljene produkte seštejemo.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1} \det(A_{11}) + a_{12}(-1)^{1+2} \det(A_{12}) + a_{13}(-1)^{1+3} \det(A_{13}).$$

Če bi desno stran zgornje enačbe izpisali do konca, bi dobili enak izraz kot po Sarrusovem pravilu (to ostaja kot naloga za samostojno reševanje, glej nalogo 81).

Primer 74 *Determinanto matrike* $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *najprej izračunajmo s Sarrusovim pravilom:*

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-3) \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - (4 \cdot (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 5 + 0 \cdot 1 \cdot 2) = 13.$$

Determinanto izračunajmo še z razvojem po 1. vrstici:

$$\det(A) = 5 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 13.$$

Če *razvijamo po 2. vrstici*, vsak element iz druge vrstice pomnožimo s pripadajočim kofaktorjem in dobljene produkte seštejemo. Podobno bi veljalo za razvoj po 3. vrstici oz. po kateremkoli stolpcu. Dokaz, da v vseh primerih dobimo enak rezultat, izpustimo.

Primer 75 *Determinanto matrike A iz prejšnjega primera izračunajmo še z razvojem po tretjem stolpcu:*

$$\det(A) = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} = 13.$$

Kofaktorjev A_{23} in A_{33} tokrat nismo računali, saj nastopata kot faktorja v produktu z 0.

Postopek računanja determinante s pomočjo razvoja lahko posplošimo na kvadratne matrike poljubnega reda.

Naj bo A kvadratna matrika reda n. Če determinanto matrike A izračunamo z **razvojem po i-ti vrstici** (kjer je i katerokoli število med 1 in n), potem za vsak $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ element a_{ir} pomnožimo s pripadajočim kofaktorjem $A_{ir} = (-1)^{i+r} \det(A_{ir})$. Determinanto matrike A tako dobimo kot vsoto produktov elementov i-te vrstice s pripadajočimi kofaktorji:

$$\det(A) = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} A_{ir}.$$

Podobno se glasi **razvoj po j-tem stolpcu**, ko determinanto matrike dobimo kot vsoto produktov elementov j-tega stolpca s pripadajočimi kofaktorji:

$$\det(A) = \sum_{r=1}^{n} a_{rj} A_{rj}.$$

Lastnosti determinant

Poleg že omenjene lastnosti determinant, da dobimo enak rezultat ne glede na to, po kateri vrstici ali stolpcu razvijamo, nam pri praktičnem računanju (predvsem pri večjih determinantah) pridejo prav še druge lastnosti. Naštejmo jih, nekatere tudi utemeljimo, ter si oglejmo zglede.

1. *Matrika A in njej transponirana matrika A^T imata enako determinanto:*

$$\det(A) = \det(A^T).$$

Zaradi te lastnosti je vseeno, ali determinanto matrike računamo z razvojem po vrstici ali z razvojem po stolpcu. V nalogi 82 se prepričamo, da lastnost velja za determinante reda 2, splošen dokaz pa izpustimo.

2. *Če v determinanti dve vrstici (ali stolpca) zamenjamo med sabo, determinanta spremeni predznak.*

   Dokaz izpustimo, si pa oglejmo zgled:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

3. *Če ima determinanta kako ničelno vrstico (stolpec), je njena vrednost enaka* 0.

   Lastnost velja, saj determinanto lahko razvijemo po ničelni vrstici (oz. stolpcu).

4. *Če imajo v determinanti v kakšni vrstici (stolpcu) vsi elementi skupen faktor, lahko le-tega izpostavimo iz determinante.*

   Zgornjo trditev lahko preoblikujemo tudi tako: če matriko A iz matrike B dobimo tako, da v matriki B eno od vrstic (recimo i-to) pomnožimo z realnim številom k, potem velja $\det(A) = k\det(B)$. V to se prepričamo z razvojem matrike A po i-ti vrstici:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \\ &= kb_{i1}B_{i1} + kb_{i2}B_{i2} + \cdots + kb_{in}B_{in} \\ &= k\det(B). \end{aligned}$$

   Zgled:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 6 & 8 & 12 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

5. *Če sta v determinanti dve vrstici enaki (ali dva stolpca enaka), je vrednost determinante enaka* 0.

   V determinanti zamenjajmo med seboj vrstici z enakimi elementi. Po 2. lastnosti se predznak determinante spremeni. Po drugi strani pa kljub zamenjavi vrstic dobimo enako determinanto, torej z enako vrednostjo in s tem tudi z enakim predznakom. Oboje hkrati je seveda možno le, če je vrednost determinante enaka 0.

   Zgled:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

6. *Vrednost determinante se ne spremeni, če k eni vrstici prištejemo večkratnik druge vrstice (ali če k enemu stolpcu prištejemo večkratnik drugega stolpca).*

Zgled: V prvi determinanti prvi stolpec pomnožimo z -2 in ga prištejemo k tretjemu stolpcu

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}.$$

Premislimo, zakaj lastnost velja v splošnem. Naj bo A matrika, ki jo iz matrike B dobimo tako, da v matriki B i-to vrstico pomnožimo s številom k in jo prištejemo k j-ti vrstici ($i \neq j$). Pokažimo, da je $\det(A) = \det(B)$.

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \cdots + a_{jn}A_{jn} \\ &= a_{j1}B_{j1} + a_{j2}B_{j2} + \cdots + a_{jn}B_{jn} \\ &= (kb_{i1} + b_{j1})B_{j1} + (kb_{i2} + b_{j2})B_{j2} + \cdots + (kb_{in} + b_{jn})B_{jn} \\ &= kb_{i1}B_{j1} + b_{j1}B_{j1} + kb_{i2}B_{j2} + b_{j2}B_{j2} + \cdots + kb_{in}B_{jn} + b_{jn}B_{jn} \\ &= k(b_{i1}B_{j1} + b_{i2}B_{j2} + \cdots + b_{in}B_{jn}) + (b_{j1}B_{j1} + b_{j2}B_{j2} + \cdots + b_{jn}B_{jn}) \\ &= 0 + \det(B) \\ &= \det(B). \end{aligned}$$

V zgornji izpeljavi smo upoštevali, da je $b_{i1}B_{j1} + b_{i2}B_{j2} + \cdots + b_{in}B_{jn} = 0$, saj je leva stran te enakosti enaka determinanti matrike, v kateri sta i-ta in j-ta vrstica enaki[4].

7. *Determinanta zgornje trikotne matrike je enaka produktu elementov na diagonali. Enako velja za spodnje trikotno matriko.*

   Zgled:
   $$\begin{vmatrix} 1 & 12 & 4 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 5 = 10.$$

   Lastnost velja v splošnem, saj lahko determinanto take matrike računamo z razvojem po prvem stolpcu (oz. vrstici), kjer z enakim postopkom nadaljujemo, saj vsakič kot poddeterminanto dobimo zgornje (oz. spodnje) trikotno obliko matrike.

8. *Determinanta produkta dveh matrik je enaka produktu determinant posameznih matrik:*
   $$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Oglejmo si nekaj zgledov uporabe zgornjih pravil.

4 To lastnost bomo v nadaljevanju srečali še enkrat v lemi 91, kjer bo zaradi potreb dokaza izreka 92 zapisana v drugačni obliki.

Primer 76 *Izračunaj determinanto*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}.$$

Rešitev: *Spomnimo se izračuna determinante iz zgleda 75. Determinanto smo tam računali z razvojem po zadnjem stolpcu, v katerem so bili vsi elementi, razen enega, enaki* 0*. Tako smo dejansko morali izračunati le eno poddetermninanto. Preden se torej lotimo razvoja, si je smiselno izbrati vrstico ali stolpec s čim več ničlami. S pomočjo zgornjih pravil, pa si lahko ničle tudi pridobimo. To bomo v primeru naše determinante storili v prvi vrstici. Zadnji stolpec (pomnožimo z* 1 *in ga) prištejemo k prvemu, nato pa zadnji stolpec pomnožimo z* 2 *in ga prištejemo k drugemu stolpcu. Šesta lastnost izmed zgoraj naštetih nam zagotavlja, da vrednost tako dobljene determinante ostane nespremenjena. Dobljeno determinanto bo (z razvojem po 1. vrstici) sedaj enostavneje izračunati. Tako dobimo naslednji izračun (zadnji korak v izračunu je izveden s pomočjo Sarrusovega pravila, ki ga lahko uporabimo, saj gre za determinanto reda* 3*):*

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & 4 & -1 \end{vmatrix} &= (-1) \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 7 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 56 - 12 + 8 - 14 + 8 - 48 = -2. \end{aligned}$$

2.2.4 *Preveri svoje znanje (determinanta)*

Vprašanja iz teorije

1. Kako izračunamo determinanto reda 2?
2. Kaj pravi Sarrusovo pravilo in kdaj ga lahko uporabimo?
3. Pojasni pojma poddeterminanta in kofaktor.
4. Pojasni postopek računanja determinante z razvojem po i-ti vrstici.
5. Naštej lastnosti determinant.
6. Kaj lahko poveš o determinanti produkta dveh matrik?
7. Kakšna je zveza med determinanto matrike in njej transponirane matrike?
8. Naštej operacije nad matrikami, ki jih lahko naredimo, da se vrednost determinante pri tem ne spremeni.

Rešene naloge

Naloga 77 *Izračunaj determinanto* $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -7 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

Rešitev:

$$\det(A) = 1\cdot(-2)\cdot 2 + 5\cdot 3\cdot 0 + 2\cdot(-7)\cdot(-1) - 2\cdot(-2)\cdot 0 - 1\cdot 3\cdot(-1) - 5\cdot(-7)\cdot 2 = 83.$$

Naloga 78 *Izračunaj determinanto matrike* $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Rešitev: *Nalogo bomo rešili na dva načina.*

1. način: *Pri prvem načinu bomo determinanto preoblikovali tako, da dobimo determinanto zgornje trikotne matrike. Najprej prvo vrstico pomnožimo z* -2 *in jo prištejemo k tretji, nato prvo vrstico prištejemo k četrti. Tako dobimo determinanto:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & -5 & 4 \\ 0 & 7 & 6 & 0 \end{vmatrix}.$$

Sedaj drugo vrstico pomnožimo s 3 *in jo prištejemo k tretji, nato drugo vrstico pomnožimo z* $-\frac{7}{2}$ *in jo prištejemo k četrti, s čemer dobimo:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & 7 \\ 0 & 0 & 13 & -\frac{7}{2} \end{vmatrix}.$$

V zadnjem koraku tretjo vrstico pomnožimo s $\frac{13}{11}$ *in jo prištejemo k četrti. Tako dobimo determinanto zgornje trikotne matrike, katere vrednost dobimo z množenjem diagonalnih elementov:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{105}{22} \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot(-11)\cdot\frac{105}{22} = -105.$$

2. način: *Pri drugem načinu bomo determinanto razvili po prvem stolpcu. V ta namen lahko na enak način kot zgoraj pridobimo tri ničle, da determinanto preoblikujemo v*

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & -5 & 4 \\ 0 & 7 & 6 & 0 \end{vmatrix}.$$

Z razvojem po prvem stolpcu tako dobimo

$$\det(A) = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -6 & -5 & 4 \\ 7 & 6 & 0 \end{vmatrix}.$$

Tako preostane izračunati 3×3 *determinanto, ki jo lahko izračunamo s pomočjo Sarrusovega pravila:*

$$2 \cdot (-5) \cdot 0 + (-2) \cdot 4 \cdot 7 + 1 \cdot (-6) \cdot 6 - 1 \cdot (-5) \cdot 7 - 2 \cdot 4 \cdot 6 - (-2) \cdot (-6) \cdot 0 = -105.$$

Naloga 79 *Reši enačbo*

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & x & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ x & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Rešitev: *Najprej poiščemo vrednost vsake determinante posebej, nato pa rešitve enačbe, ki jo dobimo z množenjem obeh determinant. V prvi determinanti zamenjamo 2. in 3. vrstico, ter z* -1 *pomnožimo 5. vrstico, ki jo prištejemo k 4. vrstici. Tako dobimo:*

$$-\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & x-1 & 6 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 12x - 12.$$

Drugo determinanto izračunamo s pomočjo Sarrusovega pravila:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ x & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 1 \\ x & 1 \\ -2 & 3 \end{matrix} = 25 - 2 + 6x + 4 - 15 - 5x = x + 12.$$

Tako preostane rešiti enačbo $(12x - 12)(x + 12) = 0$*, za katero dobimo rešitvi:* $x_1 = 1$ *in* $x_2 = -12$.

Naloga 80 *Določi x tako, da bo*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -x & 0 \\ 2 & x & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Rešitev: *Determinanto rešimo npr. z razvojem po zadnjem stolpcu. Tako dobimo:*

$$\det(A) = (-1) \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & -x \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -x \\ 2 & x & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}.$$

Posebej izračunamo determinanti, ki nastopata v zgornji vsoti. To lahko naredimo ponovno z razvojem ali s Sarrusovim pravilom. Vrednost prve determinante je

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -x \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{matrix} = 2 + 2 + 2x + 1 = 5 + 2x.$$

Druga determinanta je enaka

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -x \\ 2 & x & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & x \\ 1 & 2 \end{matrix} = -2x - 3 - 4x + x^2 - 6 - 4 = x^2 - 6x - 13.$$

Tako je $\det(A) = -5 - 2x + x^2 - 6x - 13 = x^2 - 8x - 18 = 0$. *Po formuli za rešitve kvadratne enačbe dobimo* $x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64+72}}{2} = 4 \pm \sqrt{34}$.

Naloge za samostojno reševanje

Naloga 81 *Prepričaj se, da za matriko* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ *dobiš enako vrednost determinante ne glede na to, ali jo izračunaš jo po Sarrusovem pravilu ali z razvojem po 1. vrstici ali z razvojem po 2. stolpcu.*

Naloga 82 *Za determinante reda* 2 *se prepričaj, da velja lastnost* $\det(A^T) = \det(A)$.

Naloga 83 *Izračunaj determinanti:*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} \quad \textit{in} \quad \det(B) = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin y \\ \sin x & \cos y \end{vmatrix}.$$

Rešitev: $\det(A) = \cos(2x)$, $\det(B) = \cos(y - x)$.

Naloga 84 *Izračunaj determinanto* $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$.

Rešitev: $\det(A) = -45$.

Naloga 85 *Prepričaj se, da je* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -1$.

Naloga 86 *Izračunaj determinanto* $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & -6 & 1 \end{vmatrix}$.

Rešitev: $\det(A) = 22$.

Naloga 87 *Izračunaj determinanto* $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Rešitev: $\det(A) = 8$.

Naloga 88 *Določi x tako, da bo*

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -x & 3 \\ 1 & 3 & 1 & x \\ -1 & 2 & -1 & x \end{vmatrix} = 12.$$

Rešitev: $x_{1,2} = \frac{-9\pm\sqrt{57}}{4}$, $x_3 = 1$.

2.2.5 *Inverzna matrika*

V tem razdelku bomo spoznali, kako lahko s pomočjo determinante ugotovimo, kdaj je matrika obrnljiva. Ob tem bomo spoznali tudi način, kako izračunamo inverzno matriko, kadar le-ta obstaja. V ta namen najprej potrebujemo definicijo prirejenke[5].

Matrika $\widehat{A}$ je **prirejenka matrike** A, če je njen (i,j)-ti element $\widehat{a}_{i,j}$ enak

$$\widehat{a}_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ji}).$$

Iz definicije opazimo, da bi prirejenko lahko opisali tudi kot transponirano matriko kofaktorjev, saj je $\widehat{a}_{ij} = A_{ji}$.

Primer 89 *Izračunaj prirejenko $\widehat{A}$ matrike* $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ *ter produkt $A\widehat{A}$ in* $\det(A)$.

Rešitev: *Kofaktorji so $A_{11} = 3$, $A_{12} = -1$, $A_{21} = 3$, $A_{22} = 2$, s čemer dobimo matriko kofaktorjev:*

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Transponirana matrika kofaktorjev (oz. prirejenka matrike A) je torej

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

5 V nekaterih virih prirejenki rečejo tudi adjungiranka.

Izračunajmo še produkt $A\widehat{A}$:

$$A \cdot \widehat{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = 9 \cdot I$$

Determinanta matrike A je $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9.$

Primer 90 *Izračunaj prirejenko $\widehat{A}$ matrike* $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ *ter produkt $A\widehat{A}$ in* $\det(A)$.

Rešitev: *Najprej izračunajmo kofaktorje:*

$$\begin{aligned}
A_{11} &= (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1, & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 6, & A_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \\
A_{21} &= (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1, & A_{22} &= \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, & A_{23} &= -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \\
A_{31} &= (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2, & A_{32} &= -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12, & A_{33} &= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4.
\end{aligned}$$

Matrika kofaktorjev je torej: $\begin{bmatrix} -1 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 12 & -4 \end{bmatrix}$ *in ko jo transponiramo, dobimo* $\widehat{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 12 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$. *Produkt matrik $A\widehat{A}$ je enak*

$$A\widehat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 12 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = 6 \cdot I.$$

Determinanta matrike A je

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -2 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - (-2) \cdot 4 \cdot 0 - 1 \cdot 2 \cdot (-1) \\
&= 6.
\end{aligned}$$

V obeh zgornjih primerih opazimo, da je produkt matrik $A\widehat{A} = \det(A) \cdot I$. Kmalu se bo izkazalo, da to ni naključje in da nam prav ta lastnost da odgovor na vprašanje, kdaj je matrika obrnljiva in kako tedaj izračunati njen inverz. Preden pa dokažemo izrek, ki govori o tem, pokažimo, da velja naslednja lema[6], ki jo bomo potrebovali v njegovem dokazu.

6 Lema je v matematiki običajno manj pomembna pravilna izjava (tehnične narave), ki jo potrebujemo, da bi dokazali pomembnejšo trditev, ki jo imenujemo izrek.

Lema 91 *Za $j \neq i$ je*

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} \cdot a_{ik} \cdot \det(A_{jk}) = 0.$$

Dokaz. Naj bo A' matrika, ki jo dobimo iz matrike $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tako, da namesto j-te vrstice zapišemo i-to vrstico, ostalih vrstic pa ne spreminjamo. Tako ima matrika A' dve enaki vrstici iz zato je njena determinanta enaka 0. Determinanto matrike A' razvijmo po j-ti vrstici (v kateri so torej elementi $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$). Tako dobimo željeno enačbo:

$$0 = \det(A') = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (-1)^{j+k} \cdot \det(A_{jk}).$$

■

Izrek 92 *Matrika A je obrnljiva natanko tedaj, ko je* $\det(A) \neq 0$.

Dokaz. Najprej predpostavimo, da je matrika A obrnljiva in pokažimo, da je njena determinanta različna od 0. Ker je A obrnljiva, obstaja A^{-1}, pri čemer je $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. Tako dobimo

$$1 = \det(I) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}),$$

od tukaj pa je razvidno, da je $\det(A) \neq 0$.

Dokažimo še implikacijo v drugo smer: predpostavimo, da je $\det(A) \neq 0$ in ob tem izpeljimo, da je matrika obrnljiva. To bomo storili tako, da najprej dokažemo, da velja

$$A \cdot \widehat{A} = \det(A) \cdot I,$$

kjer je $\widehat{A}$ prirejenka matrike A. Z $(A\widehat{A})_{ij}$ označimo element i-te vrstice in j-tega stolpca matrike $A\widehat{A}$. Po definiciji prirejenke dobimo

$$(A\widehat{A})_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\widehat{a}_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (-1)^{i+k} \cdot \det(A_{ik}) = \det(A).$$

Za $i \neq j$ pa po zgornji lemi dobimo

$$(A\widehat{A})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\widehat{a}_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (-1)^{j+k} \cdot \det(A_{jk}) = 0.$$

S tem smo dokazali, da velja

$$A \cdot \widehat{A} = \det(A) \cdot I.$$

Torej je $A \cdot (\frac{1}{\det(A)} \cdot \widehat{A}) = I$, od koder sledi, da je $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \widehat{A}$. ■

Iz dokaza izreka 92 sledi naslednja posledica.

Posledica 93 *Če je A obrnljiva matrika, tedaj je*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \widehat{A}.$$

Primer 94 *Poišči inverzno matriko matrike* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Rešitev: *Najprej izračunajmo determinanto. To lahko storimo npr. z razvojem po tretji vrstici, pri čemer pred tem skušamo pridobiti še kakšno ničlo. To lahko dosežemo tako, da prvi stolpec prištejemo k drugemu:*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -16.$$

Izračunajmo kofaktorje:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3, & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3, & A_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4, \\
A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -4, & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4, & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \\
A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -11, & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5, & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4.
\end{aligned}$$

Sedaj imamo vse potrebno za izračun inverzne matrike po formuli:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \widehat{A} = \frac{1}{-16} \begin{bmatrix} 3 & -4 & -11 \\ 3 & -4 & 5 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} & \frac{11}{16} \\ -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} & -\frac{5}{16} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

2.2.6 *Preveri svoje znanje (inverzna matrika)*

Vprašanja iz teorije

1. Kako je definirana prirejenka matrike?

2. Kaj je rezultat množenja matrike z njeno prirejenko?

3. Kdaj je matrika obrnljiva?

4. Kako izračunamo inverzno matriko obrnljive matrike?

Rešene naloge

Naloga 95 *Reši matrično enačbo* $(A-2I)X^T = A+I$*, če je* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Rešitev: *Najprej izrazimo neznano matriko* X*:*

$$\begin{aligned} X^T &= (A-2I)^{-1}(A+I) \\ X &= ((A-2I)^{-1}(A+I))^T. \end{aligned}$$

Sedaj poračunamo potrebni matriki:

$$A+I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \textit{in} \quad A-2I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determinanta zadnje matrike je

$$\det(A-2I) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2+4-2+2 = 6.$$

Ko izračunamo še kofaktorje, dobimo

$$(A-2I)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 12 & -4 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 12 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Naredimo še končni izračun:

$$X = ((A-2I)^{-1}(A+I))^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 6 & -1 \end{bmatrix}.$$

Naloge za samostojno reševanje

Naloga 96 *Izračunaj inverzno matriko matrike* $A = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Rešitev: $A^{-1} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Naloga 97 *Izračunaj inverzno matriko matrike* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

Rešitev: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{5} & \frac{11}{5} & -\frac{13}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Naloga 98 *Reši matrično enačbo*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: $X = \begin{bmatrix} -\frac{74}{21} & \frac{33}{7} & 0 \\ -\frac{17}{7} & -\frac{15}{7} & 0 \\ \frac{4}{21} & \frac{9}{7} & 0 \end{bmatrix}.$

Naloga 99 *Reši matrično enačbo $B^{-1} - X = XA + A$, kjer je*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textit{in} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: $X = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -8 & 27 & -116 \\ -5 & 27 & -95 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

2.3 SISTEMI LINEARNIH ENAČB

Za uvod si oglejmo nekaj sistemov dveh linearnih enačb z dvema neznankama (na kratko 2×2 sisteme). Te smo na različne načine znali reševati že v srednji šoli. Tokrat jih bomo rešili z *metodo nasprotnih koeficientov*.

Primer 100 *Reši naslednje sisteme:*

(a) $\begin{aligned} 2x + 5y &= 1 \\ 3x + 7y &= 2, \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} 2x - 3y &= 4 \\ 4x - 6y &= 10, \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} 4x + 5y &= 2 \\ 8x + 10y &= 4. \end{aligned}$

Rešitev:

(a) Prvo enačbo zmnožimo z -3, drugo z 2 in ju seštejemo. S tem najprej dosežemo nasprotna koeficienta, ki stojita pred x, zato se člena, ki vsebujeta x, pri seštevanju enačb uničita. Tako dobimo, da je $-y = 1$, torej $y = -1$. Vrednost $y = -1$ sedaj vstavimo v katerokoli od začetnih enačb, npr. v prvo in tako dobimo še vrednost za x, ki je 3. Sistem ima torej eno samo rešitev $x = 3, y = -1$. Rešitve sistema navadno zapišemo v obliki množice rešitev R, katere členi so urejeni pari, ki jih uredimo glede na nastop spremenljivke v urejenem sistemu enačb. V našem primeru to pomeni en urejen par, kjer na prvem mestu nastopa vrednost neznanke x, na drugem pa vrednost neznanke y: $R = \{(3, -1)\}$.

(b) *Če zmnožimo prvo enačbo z* -2 *in jo prištejemo drugi enačbi, dobimo* $0 = 2$*, kar ne drži. To pomeni, da sistem nima rešitev. Množica rešitev je prazna:* $R = \emptyset$.

(c) *Prvo enačbo pomnožimo z* 2 *in od nje odštejmo drugo. Dobimo* $0 = 0$*, kar drži, pa tudi ne preseneča, saj je druga enačba ravno* 2*-kratnik prve. To pomeni, je množica urejenih parov, ki ustrezajo prvi enačbi, enaka kot množica urejenih parov, ki ustrezajo drugi. Tako dobimo neskončno rešitev, saj lahko* x *poljubno izberemo, in ko je* x *izbran, je njemu ustrezen* y *enak* $y = \frac{2-4x}{5}$*, kar dobimo, ko* y *izrazimo iz ene (katerekoli) od enačb. Tako imamo množico rešitev* $R = \{(x, \frac{2-4x}{5}); x \in \mathbb{R}\}$. *Druga možnost je, da poljubno izbiramo* y*. S konkretno izbiro vrednosti za* y *je v tem primeru* x *enolično določen. Na ta način dobimo sicer drugačen zapis za množico rešitev* $R = \{(\frac{2-5y}{4}, y); y \in \mathbb{R}\}$*, ki pa predstavlja enako množico urejenih parov kot prejšnja.*

V zgornjih zgledih so glede na število rešitev nastopile tri možnosti: nobena, natanko ena ali neskončno rešitev. Da je možno le to troje (ne bi mogli dobiti npr. 5 rešitev), je jasno takoj, ko pomislimo na geometrijsko interpretacijo zgornjih sistemov. Točke (x, y), katerih koordinate ustrezajo linearni enačbi $ax + by = c$, kjer so a, b, c konstante, ležijo na premici v ravnini. Tako smo z zgornjim rešitvami dejansko poiskali presečišča danih premic. V primeru (a) sta se premici sekali v eni točki, v primeru (b) se je izkazalo, da sta premici vzporedni, v primeru (c) sta premici sovpadali, zato je bila rešitev kar vsaka točka te premice. Izkaže se, da tudi v primeru večjega sistema nastopijo natanko te tri možnosti glede števila rešitev[7].

Cilj tega poglavja je posplošiti metodo, ki smo jo uporabili za 2×2 sisteme, na večje sisteme in spoznati, od česa je odvisna njihova rešljivost. Pri tem nam bodo v pomoč matrike, saj lahko vsak sistem linearnih enačb predstavimo v obliki matrike. Prvi sistem iz zgornjega zgleda bi v obliki matrike zapisali takole:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Res, če pomnožimo matriki na levi strani, dobimo

$$\begin{bmatrix} 2x + 5y \\ 3x + 7y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

in če upoštevamo še dejstvo, da sta matriki enaki, ko se ujemata v istoležnih elementih, dobimo nazaj začetni sistem.

Zapis iz enačbe 1 še bolj strnemo tako:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{array}\right].$$

7 O geometrijskem pomenu rešitev v primeru treh enačb s tremi neznankami bomo govorili v naslednjem poglavju.

V prvem stolpcu se torej nahajajo koeficienti, ki v sistemu stojijo pred x, v drugem pa tisti, ki sicer v sistemu stojijo pred y. Za navpično črto, ki ponazarja enačaj, zapišemo še koeficienta, ki v sistemu igrata vlogo konstant na desni strani enačb.

Enako naredimo v primeru večjih sistemov (m linearnih enačb z n neznankami), ki jih v splošnem zapišemo tako:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m,$$

kjer so $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ (ali $\mathbb{C}$), $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, dana števila in so $x_1, \ldots, x_n$ neznanke. Zgornji sistem, bi ob vpeljavi simbolov

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

v matrični obliki na kratko zapisali tako:

$$Ax = b.$$

Pri tem matriki A pravimo **matrika sistema**, matriki x pa rečemo kar **stolpec neznank** [8]. Kot v zgornjem primeru, bi lahko sistem zapisali tudi v obliki matrike, ki ji pravimo **razširjena matrika sistema**:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Če je $b = 0$ (kar je ekvivalentno $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$), pravimo, da je sistem **homogen**, sicer je **nehomogen**.

8 Matriki x in b sta tukaj zaradi svoje dimenzije $n \times 1$ oz. $m \times 1$ označeni z malo črko, čeprav za oznake matrik navadno uporabljamo velike tiskane črke.

2.3.1 *Cramerjevo pravilo*

Sprva se osredotočimo le na sisteme, pri katerih je število enačb enako številu neznank. Oglejmo si torej sistem $Ax = b$, ki bi ga izpisali tako:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right].$$

Izrek 101 *Sistem n linearnih enačb z n neznankami, $Ax = b$, je enolično rešljiv natanko tedaj, ko je $\det(A) \neq 0$. Rešitve so tedaj*

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)},$$

za $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, kjer je $\det(A)$ determinanta matrike sistema, $\det(A_i)$ pa determinanta matrike A_i, ki jo dobimo tako, da v matriki A zamenjamo i-ti stolpec z elementi stolpca matrike b.

Dokaz. Po izreku 92 je $\det(A) \neq 0$ natanko tedaj, ko je matrika A obrnljiva. Zato je z enoličnostjo matrike A^{-1} zagotovljena enolična rešitev sistema x, ki jo dobimo tako: enačbo $Ax = b$ iz leve strani pomnožimo z A^{-1}, kar nam da $x = A^{-1}b$. Premislimo še, kako se rešitev x izraža:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1}b = \frac{1}{\det(A)}\widehat{A}\, b = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \widehat{a}_{11} & \widehat{a}_{12} & \dots & \widehat{a}_{1n} \\ \widehat{a}_{21} & \widehat{a}_{22} & \dots & \widehat{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \widehat{a}_{n1} & \widehat{a}_{n2} & \dots & \widehat{a}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Ob upoštevanju kdaj sta dve matriki enaki in enakosti $\widehat{a}_{ik} = (-1)^k \det(A_{ki})$ (glej definicijo prirejenke) dobimo:

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} \sum_{k=1}^{n} \widehat{a}_{ik} b_k = \frac{1}{\det(A)} \sum_{k=1}^{n} b_k (-1)^{k+i} \det(A_{ki}) = \frac{1}{\det(A)} \det(A_i),$$

kjer zadnja enakost velja, saj je $\sum_{k=1}^{n} b_k (-1)^{k+i} \det(A_{ki})$ ravno razvoj determinante $\det(A_i)$ po i-tem stolpcu. ■

V zgornjem izreku torej vidimo pravilo (imenovano **Cramerjevo pravilo**), kako direktno izračunamo posamezno neznanko sistema. Ne smemo pa pozabiti, da to pravilo lahko uporabimo le v primeru, ko je število neznank enako številu enačb in je izpolnjen pogoj, da je determinanta sistema različna od 0.

Primer 102 *Reši sistem:*

$$\begin{aligned} 2x+y+z &= 2 \\ x+2y+z &= 4 \\ x+y+2z &= 6. \end{aligned}$$

Rešitev: *Razširjena matrika sistema je:*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right].$$

Nato izračunamo determinanto matrike sistema

$$\left|\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} = 8+1+1-2-2-2 = 4.$$

Vrednosti neznank sedaj dobimo z naslednjimi izračuni:

$$x = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det(A_1) = \frac{1}{4} \cdot \left|\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \end{array}\right| = \frac{1}{4} \cdot (-4) = -1,$$

$$y = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det(A_2) = \frac{1}{4} \cdot \left|\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \end{array}\right| = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1,$$

$$z = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det(A_3) = \frac{1}{4} \cdot \left|\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \end{array}\right| = \frac{1}{4} \cdot 12 = 3.$$

Tako je rešitev sistema $R = \{(-1,1,3)\}$.

2.3.2 *Gaussova eliminacija*

V uvodnih primerih smo sisteme linearnih enačb reševali tako, da smo nad njimi izvedli operacije, ki ne vplivajo na rešitve sistema. Tudi v primeru večjih sistemov spreminjamo enačbe do oblike, iz katere je mogoče kar razbrati rešitev. Operacije, ki na rešitve ne vplivajo, so:

- dve enačbi lahko zamenjamo med sabo,
- enačbo lahko pomnožimo z neničelnim številom,
- eno enačbo lahko prištejemo k drugi enačbi (posebej seštejemo levi oz. desni strani enačb in ju enačimo).

Na razširjeni matriki sistema $Ax = b$, ki jo bomo v tem razdelku na kratko označevali z $\widetilde{A}$, se omenjene operacije odražajo takole:

- vrstici v razširjeni matriki sistema $\widetilde{A}$ lahko zamenjamo med sabo,
- vrstico v matriki $\widetilde{A}$ lahko pomnožimo z neničelnim številom,
- eno vrstico matrike $\widetilde{A}$ lahko prištejemo k drugi vrstici.

Naštete operacije se imenujejo **elementarne vrstične transformacije**. Matriki A in A' sta **vrstično ekvivalentni**, če eno iz druge dobimo z zaporedjem elementarnih vrstičnih transformacij. Da sta matriki A in A' vrstično ekvivalentni s simboli zapišemo:

$$A \sim A'.$$

Tako vrstično ekvivalentni razširjeni matriki A in A' predstavljata sistema, katerih množici rešitev sta enaki.

Primer 103 *Oglejmo si še enkrat sistem iz primera 100 (a):*

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 1 \\ 3x + 7y &= 2. \end{aligned}$$

Dani sistem smo rešili tako, da smo prvo enačbo zmnožili z -3*, drugo pa z* 2 *in ju sešteli. Vse tri so elementarne vrstične transformacije in ne vplivajo na rešitve sistema. Tako velja*

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right],$$

saj je prva matrika razširjena matrika sistema, drugo matriko pa smo iz prve dobili tako, da smo prvo vrstico prepisali, v drugo pa zapisali koeficiente, ki jih dobimo po izvedenih omenjenih transformacijah. V bodoče bomo pojasnila, kako iz neke matrike dobimo naslednjo, zapisali takole[9]*:*

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{-3V1+2V2 \to V2} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Če sedaj zadnjo matriko pretvorimo nazaj v sistem, se le-ta glasi

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 1 \\ -y &= 1. \end{aligned}$$

Od tod iz druge enačbe dobimo $y = -1$ *in nato iz prve* $x = 3$.

Če primerjamo način reševanja sistema iz primera 100(a) (kjer smo uporabili metodo nasprotnih koeficientov) z zgornjim načinom z uporabo matrik, vidimo,

9 Zapis $-3V1 + 2V2 \to V2$ torej pomeni, da prvo vrstico (označeno z $V1$) pomnožimo z -3, drugo vrstico z 2, ju seštejemo, nato pa rezultat vpišemo v drugo vrstico ($\to V2$).

da temu, da se pri prvem načinu želimo znebiti spremenljivke x, ustreza pridobljena ničla v matriki na mestu elementa, ki leži v prvem stolpcu in drugi vrstici. Podobno postopamo pri večjih sistemih, kjer je cilj transformirati razširjeno matriko sistema v **stopničasto matriko**, to pomeni v matriko, v kateri so vrstice s samimi ničlami (če obstajajo) na koncu, neničelne vrstice pa so urejene tako, da ima vsaka nadaljnja vrstica na začetku več ničel v primerjavi s predhodno vrstico. V spodnjem primeru stopničaste matrike $*$ označuje poljubno število:

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 3 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 2 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Postopku preoblikovanja (s pomočjo elementarnih vrstičnih transformacij) razširjene matrike sistema v stopničasto obliko rečemo **Gaussova eliminacija**. Pojasnimo njeno delovanje na zgledih.

Primer 104 *Poiščimo rešitve sistema:*

$$\begin{aligned} x+y-z &= 9 \\ y+3z &= 3 \\ -x-2z &= 2. \end{aligned}$$

Zapišemo razširjeno matriko sistema, nad katero izvajamo elementarne vrstične transformacije, da dobimo stopničasto matriko (pri tem bo oznaka $V2 \leftrightarrow V3$ pomenila zamenjavo 2. in 3. vrstice):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{V2 \leftrightarrow V3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{V1+V2 \to V2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{V2-V3 \to V3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & -6 & 8 \end{array}\right].$$

Iz zadnje vrstice sledi, da je $-6z = 8$, od koder je $z = -\frac{4}{3}$. To lahko uporabimo v drugi vrstici, iz katere sledi $y - 3z = 11$. Ko v omenjeno enačbo vstavimo $z = -\frac{4}{3}$, sledi, da je $y = 7$. Sedaj v prvo enačbo, ki jo izpišemo iz prve vrstice, torej $x + y - z = 9$, vstavimo izračunani vrednosti za z in y, ter tako dobimo še $x = \frac{2}{3}$. Množica rešitev vsebuje eno urejeno trojico: $R = \{(\frac{2}{3}, 7, -\frac{4}{3})\}$.

V zgornjem zgledu smo se ustavili, ko smo sistem prevedli na stopničasto matriko. To je bilo dovolj, da smo nato postopoma znali izpisati vrednost vsake od neznank. Lahko bi pa postopek nadaljevali tako, da bi ničle (s pomočjo elementarnih vrstičnih transformacij) pridobili tudi nad glavno diagonalo matrike sistema, na diagonali pa bi na koncu nastopale samo enice. Ta postopek v literaturi običajno najdemo pod imenom **Gauss-Jordanova metoda**. Ta metoda sicer zahteva še nekaj dodatnega dela, a v tem primeru lahko rešitve sistema kar preberemo iz matrike. Nadaljujmo s prejšnjim zgledom.

Primer 105 *Stopničasto matriko iz primera 104 nadalje preoblikujmo s pomočjo Gauss-Jordanove metode. V primeru 104 smo s postopkom pridobivanja ničel pričeli tako, da smo jih najprej pridobili v prvem stolpcu pod glavno diagonalo, šele nato v drugem stolpcu. Sedaj bomo naredili obratno: prvi korak je tako pridobiti ničlo v zadnjem stolpcu na mestih, kjer sta sedaj -3 in -1, šele nato bomo pridobili ničlo na mestu elementa prve vrstice in drugega stolpca. Pridobivanja ničel se lotimo na ta način, da si ne bi pokvarili že pridobljenih ničel.*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & -6 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow[-2V2+V3\to V2]{-6V1+V3\to V1} \left[\begin{array}{ccc|c} -6 & -6 & 0 & -46 \\ 0 & -2 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & -6 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{-3V2+V1\to V1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & -6 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{\frac{V1}{-6}\to V1 \\ \frac{V2}{-2}\to V2 \\ \frac{V3}{-6}\to V3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{array}\right].$$

Zadnjo matriko smo iz predzadnje dobili tako, da smo vrstice delili z elementi, ki ležijo na glavni diagnali matrike sistema. Iz zadnje matrike sedaj razberemo rešitev: $x = \frac{2}{3}$, $y = 7$ in $z = -\frac{4}{3}$.

Oglejmo si še nekaj zgledov.

Primer 106 *Poišči rešitve sistema:*

$$\begin{aligned} x + 2y + z + t &= 7 \\ x + 2y + 2z - t &= 12 \\ 2x + 4y + 6t &= 4. \end{aligned}$$

Rešitev:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[-2V1+V3\to V3]{V1-V2\to V2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -10 \end{array}\right] \xrightarrow{-2V2+V3\to V3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Čeprav matrika sistema tokrat ni bila kvadratna, smo jo prav tako preoblikovali v stopničasto matriko. Če iz nje izpišemo sistem enačb, se ta glasi:

$$\begin{aligned} x + 2y + z + t &= 7 \\ -z + 2t &= -5 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Tako imamo dejansko sistem dveh enačb s štirimi neznankami. To pomeni, da sta dve izmed neznank prosti (njuni vrednosti lahko poljubno izbiramo), preostali dve sta pa enolično določeni z njima. Neznankam, ki jih lahko prosto izbiramo, rečemo tudi ***parametri****. Iz druge vrstice vidimo, da je vrednost z določena, kakor hitro izberemo vrednost za t (t je torej parameter), in z je tedaj* $z = 2t + 5$. *Upoštevajmo to v enačbi iz prve vrstice* $x + 2y + z + t = 7$. *Tako dobimo* $x + 2y + 2t + 5 + t = 7$ *oz.* $x = 2 - 2y - 3t$. *V zadnji enačbi smo x izrazili s pomočjo t in y, torej smo poleg t za parameter izbrali tudi y. Vrednosti parametrov t in y so torej poljubna realna števila, x in z pa potem izračunamo glede na enačbi* $x = 2 - 2y - 3t$ *in* $z = 2t + 5$. *Množica rešitev bo tako množica urejenih četveric:* $R = \{(2 - 2y - 3t, y, 2t + 5, t); y, t \in \mathbb{R}\}$. *Sistem ima v tem primeru neskončno rešitev.*

Rešitev v zgornjem primeru je **2-parametrična**, saj v njej nastopata dva parametra. Kadar nastopa le en parameter, govorimo o 1-parametrični rešitvi, v primeru k parametrov pa o k**-parametrični** rešitvi.

Primer 107 *Poišči množico rešitev sistema:*

$$\begin{aligned} 4x - 2y + 5z &= 6 \\ 3x + 3y + 8z &= 4 \\ x - 5y - 3z &= 5. \end{aligned}$$

Rešitev: *V postopku Gaussove eliminacije najprej zamenjamo prvo in tretjo vrstico, saj je s pomočjo enice v levem zgornjem kotu matrike najlažje pridobiti ničle v prvem stolpcu pod njo.*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 8 & 4 \\ 1 & -5 & -3 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{V1 \leftrightarrow V3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -3 & 5 \\ 3 & 3 & 8 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[-4V1+V3 \to V3]{-3V1+V2 \to V2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -3 & 5 \\ 0 & 18 & 17 & -11 \\ 0 & 18 & 17 & -14 \end{array}\right] \xrightarrow{V2-V3 \to V3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -3 & 5 \\ 0 & 18 & 17 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right].$$

V zadnji vrstici matrike piše: $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 3$ *oz.* $0 = 3$, *kar je protislovje, zato je množica rešitev prazna:* $R = \emptyset$.

2.3.3 *Rang matrike in rešljivost sistemov*

V razdelku o Cramerjevem pravilu smo se že naučili, da je sistem **enolično rešljiv** (ima natanko eno rešitev) natanko tedaj, ko je determinanta sistema različna od 0. Če je determinanta sistema enaka 0, lahko nastopi le ena od možnosti: ali rešitev sploh ni (rečemo, da je sistem **protisloven**) ali jih je pa neskončno (v tem primeru govorimo o **parametrični rešitvi sistema**). Katera izmed teh možnosti bo nastopila, lahko sklepamo iz oblike stopničaste matrike, ki jo dobimo po končani Gaussovi eliminaciji. Za natančnejši opis potrebujemo definicijo naslednjega pojma.

Rang matrike A, $\operatorname{rang}(A)$, je število neničelnih vrstic stopničaste matrike, ki je vrstično ekvivalentna matriki A.

Izkaže se, da je rang matrike neodvisen od zaporedja elementarnih vrstičnih transformacij, s katerimi smo dano matriko prevedli na stopničasto, dokaz izpustimo.

Primer 108 *Rang razširjene matrike*

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 8 & 4 \\ 1 & -5 & -3 & 5 \end{array}\right],$$

ki se je v primeru 107 izkazala za vrstično ekvivalentno matriki

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -3 & 5 \\ 0 & 18 & 17 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

je tako enak $\operatorname{rang}(\widetilde{A}) = 3$. *Če opazujemo le matriko sistema*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 0 & 18 & 17 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

vidimo, da je $\operatorname{rang}(A) = 2$.

Očitno je, da rang razširjene matrike ne more biti manjši od ranga osnovne matrike, lahko je pa večji ali enak. Tako ločimo naslednje možnosti, od katerih je odvisna rešljivost sistema.

1. Če je rang razširjene matrike enak rangu osnovne matrike sistema:

   $$\operatorname{rang}(\widetilde{A}) = \operatorname{rang}(A) = r,$$

   je sistem *rešljiv*. Znotraj tega nastopita dve možnosti:

   a) če je $r = n$ (kjer je n število neznank), je sistem *enolično rešljiv*,

   b) če je $r < n$, je rešitev neskončno (sistem ima $(n-r)$*-parametrično rešitev*).

2. Če je rang razširjene matrike večji od ranga osnovne matrike,

   $$\operatorname{rang}(\widetilde{A}) > \operatorname{rang}(A),$$

   je sistem *protisloven*.

Primer 109 *Za sistem iz primera 107 smo v primeru 108 videli, da je* $\operatorname{rang}(\widetilde{A}) > \operatorname{rang}(A)$*, kar je v skladu z ugotovitvijo, da je sistem protisloven.*

Primer 110 *Določi parameter* t *tako, da bo sistem*

$$\begin{aligned} tx - 4y &= 7 \\ 3x - ty &= 1 \end{aligned}$$

protisloven.

Rešitev: *Najprej obravnavajmo možnost, ko je* $t = 0$*. V tem primeru takoj vidimo, da bo sistem imel natanko eno rešitev. Zato lahko predpostavimo, da je* $t \neq 0$ *in razširjeno matriko sistema preoblikujemo v vrstično ekvivalentno stopničasto matriko*

$$\left[\begin{array}{cc|c} t & -4 & 7 \\ 3 & -t & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-3V1+tV2\to V2} \left[\begin{array}{cc|c} t & -4 & 7 \\ 0 & 12-t^2 & t-21 \end{array}\right].$$

Poudarimo, da smo 2. vrstico lahko množili s t*, saj smo predpostavili, da je* $t \neq 0$ *(možnost, ko je* $t = 0$ *pa že prej obravnavali posebej). Vrstico namreč lahko v postopku Gaussove eliminacije množimo le z neničelnim številom (glej prej naštete elementarne vrstične transformacije). Iz stopničaste matrike sedaj razberemo, da sistem ne bo imel rešitev, če bo* $12 - t^2 = 0$ *in* $t - 21 \neq 0$*. Iz prvega pogoja dobimo* $(2\sqrt{3} - t)(2\sqrt{3} + t) = 0$ *oz.* $t_1 = 2\sqrt{3}$ *ali* $t_2 = -2\sqrt{3}$*. V obeh primerih je* $t - 21 \neq 0$*. Če je torej* $t_1 = 2\sqrt{3}$ *ali* $t_2 = -2\sqrt{3}$*, je rang osnovne matrike* 1*, rang razširjene pa* 2*, zato je sistem protisloven.*

Primer 111 *Razišči, kako parameter* s *vpliva na rešitve sistema:*

$$\begin{array}{rcl} x - 3z &=& -3 \\ 2x + sy - z &=& -2 \\ x + 2y + sz &=& 1. \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & s & -1 & -2 \\ 1 & 2 & s & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[V1-V3\to V3]{-2V1+V2\to V2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & s & 5 & 4 \\ 0 & -2 & -3-s & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{2V2+sV3\to V3}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & s & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 10-3s-s^2 & 8-4s \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & s & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -(s+5)(s-2) & 4(2-s) \end{array}\right].$$

Pred obravnavo stopničaste matrike poudarimo, da smo v postopku preoblikovanja matrike do stopničaste oblike na drugem koraku 3. vrstico množili z s*. Toda to smemo narediti le, če je* $s \neq 0$*. Zato moramo možnost, ko je* $s = 0$ *obravnavati posebej. V tem primeru se matrika sistema glasi*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[V1-V3\to V3]{-2V1+V2\to V2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{array}\right],$$

od koder razberemo enolično rešitev $R = \{(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{5})\}$.

Sedaj se lahko (ob predpostavki, da je $s \neq 0$*) vrnemo k prej dobljeni stopničasti matriki. Glede na 3. vrstico v zadnji matriki vidimo, da bo smiselno posebej obravnavati tri možnosti:*

1. *Ko je* $s = 2$*, se razširjena matrika glasi:*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

   Ker so v zadnji vrstici razširjene matrike same ničle, je sistem ali protisloven ali ima neskončno rešitev. Iz prvih dveh vrstic se izkaže slednje: iz druge vrstice dobimo $2y + 5z = 4$ *oz.* $y = \frac{4-5z}{2}$*. Ker smo* y *izrazili s pomočjo* z*, smo s tem* z *izbrali za parameter. Zato tudi enačbo iz prve vrstice preoblikujemo na enak način: iz* $x - 3z = -3$ *izrazimo* x *s pomočjo parametra* z*, tj.* $x = 3z - 3$*. V primeru* $s = 2$*, imamo torej neskončno rešitev:* $R = \{(3z - 3, 2 - \frac{5}{2}z, z); z \in \mathbb{R}\}$.

2. *V primeru, ko je* $s = -5$ *je razširjena matrika sistema:*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & -5 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 28 \end{array}\right],$$

   iz tretje vrstice pa sledi $0 = 28$*, kar pomeni, da je* $R = \emptyset$.

3. *Posebej smo že obravnavali primere, ko je* $s = 0$*,* $s = 2$ *ali* $s = -5$*. Tako preostane poiskati rešitve za vsak preostali* $s \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 0, 2\}$*. Pri tem iz zadnje vrstice dobljene stopničaste matrike*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & s & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -(s+5)(s-2) & 4(2-s) \end{array}\right]$$

   sledi, da je $-(s+5)(s-2)z = 4(2-s)$*. Od tod dobimo*

$$z = \frac{4(2-s)}{-(s+5)(s-2)} = \frac{4}{s+5}.$$

   Iz druge vrstice te matrike dobimo $sy + 5 \cdot \frac{4}{s+5} = 4$*, od koder izpeljemo*

$$y = \frac{4}{s+5}.$$

   (Opomba: da bi izrazili y*, smo zgornjo enačbo morali deliti z* s*. Ta korak ni problematičen, saj je* s *po predpostavki različen od* 0*.) Ko v enačbo iz prve vrstice* $x - 3z = -3$ *vstavimo prej izračunano vrednost za* z*, dobimo*

$$x = \frac{-3(1+s)}{s+5}.$$

Torej, pri izbranem $s \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 0, 2\}$, dobimo natanko eno rešitev:

$$R = \left\{ \left(\frac{-3(s+1)}{s+5}, \frac{4}{s+5}, \frac{4}{s+5} \right) \right\}.$$

V zadnji nalogi smo si pri proučevanju vpliva parametra na rešljivost sistema pomagali z rangom. Naloge bi se bilo možno lotiti tudi drugače, s pomočjo determinante. Vemo že (glej izrek 101), da je sistem (z enakim številom neznank kot je enačb) enolično rešljiv, ko je determinanta sistema različna od 0. Oglejmo si determinanto sistema $\det(A)$ iz zgornje naloge:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & s & -1 \\ 1 & 2 & s \end{vmatrix} = s^2 + 3s - 10 = (s+5)(s-2).$$

Ko je $s = -5$ ali $s = 2$, je determinanta sistema enaka 0, zato ima v teh primerih sistem neskončno rešitev ali jih sploh nima. Katera od teh možnosti nastopi, smo se zgoraj že prepričali (glej 1. in 2. točko zgornjega postopka). Če je $s \neq -5$ in $s \neq 2$, je $\det(A) \neq 0$, zato ima sistem enolično rešitev. Tudi to je v skladu z ugotovitvijo od prej, tokrat pa jo izračunajmo s pomočjo Cramerjevega pravila (ki ga ob predpostavki $s \neq -5$ in $s \neq 2$ lahko uporabimo):

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} -3 & 0 & -3 \\ -2 & s & -1 \\ 1 & 2 & s \end{vmatrix} = \tfrac{-3(s-2)(s+1)}{(s+5)(s-2)} = \tfrac{-3(s+1)}{s+5}, \\ y &= \tfrac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & s \end{vmatrix} = \tfrac{4(s-2)}{(s+5)(s-2)} = \tfrac{4}{s+5}. \end{aligned}$$

Nazadnje iz poljubne izmed enačb sistema (ali pa s Cramerjevim pravilom) dobimo še $z = \frac{4}{s+5}$.

Homogeni sistemi

Poseben primer sistemov so homogeni sistemi linearnih enačb. Omenili smo že, da gre za sisteme oblike $Ax = 0$. Takoj lahko vidimo, da ima vsak homogeni sistem vsaj eno rešitev, to je $x = 0$ (ali z drugimi besedami, če je x stolpec neznank $[x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$, potem je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ zagotovo (ena od) rešitev sistema). Tej rešitvi pravimo **trivialna rešitev** homogenega sistema linearnih enačb. Včasih pa poleg te rešitve obstajajo še druge, ki jih imenujemo **netrivialne rešitve**. Kdaj natanko se to zgodi, nam pove naslednji izrek.

Izrek 112 *Homogeni sistem linearnih enačb $Ax = 0$ je netrivialno rešljiv natanko tedaj, ko je $\det(A) = 0$.*

Dokaz. Izrek 101 (Cramerjevo pravilo) pravi, da je sistem $Ax = 0$ enolično rešljiv natanko tedaj, ko je $\det(A) \neq 0$. Ker je trivialna rešitev vedno rešitev homogenega sistema linearnih enačb, v primeru, ko je $\det(A) \neq 0$, ne more obstajati nobena druga rešitve poleg trivialne. Torej, če želimo netrivialno rešitev, mora biti $\det(A) = 0$. ∎

Primer 113 *Rešimo homogeni sistem:*

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \\ 6y - 3z &= 0 \\ x - 2y - z &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev: *Izračunajmo determinanto homogenega sistema:*

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & -2 \\ 0 & 6 \\ 1 & -2 \end{matrix} = -6 + 6 + 0 - 6 - 6 - 0 = -12.$$

Ker je determinanta sistema različna od 0*, je rešitev le trivialna:* $R = \{(0,0,0)\}$.

Primer 114 *Rešimo homogeni sistem:*

$$\begin{aligned} 4x + 2y + 3z &= 0 \\ 3y + 6z &= 0 \\ 4x + 5y + 9z &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev: *Izračunajmo determinanto:*

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \end{vmatrix}\begin{matrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 5 \end{matrix} = 108 + 48 + 0 - 36 - 120 - 0 = 0.$$

Ker je determinanta sistema enaka 0*, obstajajo netrivialne rešitve. Do njih si pomagamo z Gaussovo eliminacijo, kjer pa je dovolj zapisovati le osnovno matriko sistema (ne razširjene), saj stolpec ničel na desni ostaja enak ne glede na to, katero elementarno vrstično transformacijo uporabimo.*

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{V1-V3\to V3} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{V2+V3\to V3} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iz druge vrstice sledi $3y + 6z = 0$ *oz.* $y = -2z$*, iz prve pa* $4x + 2y + 3z = 0$*, od koder ob upoštevanju, da je* $y = -2z$*, dobimo* $x = \frac{z}{4}$*. Tako dobimo množico rešitev* $R = \{(\frac{z}{4}, -2z, z); z \in \mathbb{R}\}$*. Opazimo, da je v tej množici rešitev vključena tudi trivialna (ki jo dobimo, če za* z *izberemo* 0*).*

Naloga 115 *Določi parameter t tako, da bo sistem*

$$\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ tx+4y+z &= 0 \\ 6x+(t+2)y+2z &= 0 \end{aligned}$$

netrivialno rešljiv in poišči rešitve.

Rešitev: *Izračunajmo determinanto sistema:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t & 4 & 1 \\ 6 & t+2 & 2 \end{vmatrix} = 8+6+t^2+2t-24-t-2-2t$$
$$= t^2-t-12 = (t-4)(t+3).$$

Sistem je homogen, zato je vedno rešljiv. Če je determinanta različna od 0*, torej če je* $t \in \mathbb{R} \setminus \{-3,4\}$*, ima sistem le trivialno rešitev* $(0,0,0)$*. Če je* $t=-3$ *ali* $t=4$*, je determinanta sistema enaka* 0 *in sistem ima netrivialne rešitve.*

1. *Če je* $t=-3$*, dobimo sistem:*

$$\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ -3x+4y+z &= 0 \\ 6x-y+2z &= 0. \end{aligned}$$

Rešitve poiščimo z Gaussovo eliminacijo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[-6V1+V3\to V3]{3V1+V2\to V2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & -7 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{V2+V3\to V3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iz druge vrstice dobimo enačbo $7y+4z=0$*. Če* z *izberemo za parameter, se* y *z njim izraža kot* $y=-\frac{4}{7}z$*. Iz prve vrstice, ki predstavlja enačbo* $x+y+z=0$*, sledi* $x=-y-z=\frac{4}{7}z-\frac{7}{7}z=-\frac{3}{7}z$*. Tako dobimo* 1*-parametrično rešitev:*

$$R = \left\{ \left(-\frac{3z}{7}, -\frac{4z}{7}, z \right); z \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. *Za* $t=4$ *dobimo sistem:*

$$\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ 4x+4y+z &= 0 \\ 6x+6y+2z &= 0. \end{aligned}$$

Od tod dobimo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 6 & 6 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[-6V1+V3\to V3]{-4V1+V2\to V2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{4V2-3V3\to V3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iz druge vrstice sledi enačba $-3z=0$*, zato je* $z=0$*. Ob upoštevanju tega in enačbe iz prve vrstice pa lahko* x *izrazimo s pomočjo* y *kot* $x=-y$*. Tako je rešitev v tem primeru neskončno:*

$$R = \{(-y,y,0); y \in \mathbb{R}\}.$$

Računanje inverzne matrike s pomočjo Gaussove eliminacije

Inverzno matriko že znamo poiskati s pomočjo formule iz posledice 93. Lahko si pa pri računanju inverzne matrike pomagamo z Gauss-Jordanovo metodo. Namreč, če iščemo inverz A^{-1} matrike $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, lahko na to gledamo kot na iskanje neznane matrike $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, za katero velja $AX = I$, kjer je I enotska matrika dimenzije $n \times n$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Ob vpeljanih novih oznakah x_i za i-ti stolpec matrike X, ter b_i za i-ti stolpec matrike I, lahko v zgornji matrični enačbi opazimo n sistemov enačb oblike $Ax_i = b_i$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$). Sama matrika sistema je za vsakega od teh sistemov enačb enaka (razlikujejo pa se njihove razširjene matrike), kar nam omogoča, da lahko rešujemo vse sisteme hkrati. To storimo tako, da matriki A pripišemo enotsko matriko, nato pa na ta način razširjeno matriko sistema s pomočjo elementarnih vrstičnih transformacij preoblikujemo tako, da se na mestu matrike A pojavi enotska matrika, kar pa pri tem nastane namesto enotske matrike, je ravno iskana matrika X, torej matrika A^{-1}. Opisani postopek bi lahko shematično povzeli tako:

$$[A|I] \quad \sim \quad \cdots \quad \sim \quad [I|A^{-1}].$$

Oglejmo si še zgled. V njem bomo kot običajno v prejšnjih nalogah namesto oznake $\sim$ raje zapisali postopek, kako dobimo matriko, ki je vrstično ekvivalentna prejšnji.

Primer 116 *Izračunaj inverzno matriko matrike* $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Rešitev:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{V1 \leftrightarrow V3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[2V1+V3\to V3]{-2V1+V2\to V2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{V2-V3\to V3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 1 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[V2-V3\to V2]{6V1+V3\to V1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 1 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{V3}{6}\to V3]{\frac{V1}{6}\to V1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{array}\right].$$

Torej je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

2.3.4 *Preveri svoje znanje (sistemi linearnih enačb)*

Vprašanja iz teorije

1. Naštej elementarne vrstične transformacije.
2. Kaj pomeni, da sta matriki vrstično ekvivalentni?
3. Kaj je stopničasta matrika?
4. Kako je rešljivost sistema odvisna od ranga?
5. Kako je rešljivost sistema odvisna od determinante?
6. Kaj lahko poveš o rešljivosti homogenega sistema?
7. Kako izračunamo inverzno matriko s pomočjo Gauss-Jordanove metode?

Rešene naloge

Naloga 117 *Reši matrično enačbo $AX - X = B + BX$, če je $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.*

Rešitev: *Na obeh straneh enačbe najprej odštejemo BX in tako dobimo enačbo $AX - X - BX = B$. Sedaj X izpostavimo (na desni): $(A - I - B)X = B$. Če dobljeno enačbo zmnožimo z leve strani z matriko $(A - I - B)^{-1}$, dobimo*

$$X = (A - I - B)^{-1}B.$$

Izračunajmo inverz $(A - I - B)^{-1}$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array}\right].$$

Torej

$$(A - I - B)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

in od tukaj dobimo

$$X = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Naloga 118 *Poišči rešitev sistema linearnih enačb:*

$$\begin{aligned} x-y+z &= 2 \\ x-y-2z &= -1. \end{aligned}$$

Rešitev: *Matriko sistema pretvorimo v ekvivalentno stopničasto:*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right].$$

Tako iz druge vrstice najprej preberemo $3z = 3$ oz. $z = 1$. Ob upoštevanju še prve vrstice dobimo $x - y + 1 = 2$. Ker imamo tako eno enačbo, neznanki sta pa dve, eno izrazimo z drugo, npr. x izrazimo z y, ali z drugimi besedami, y izberemo za parameter. Za parameter se pogosto uporablja tudi zapis $y = a, a \in \mathbb{R}$. Potem je $x = 1 + y = 1 + a$. Tako dobimo rešitev: $R = \{(1 + a, a, 1); a \in \mathbb{R}\}$.

Naloga 119 *Poišči rešitev sistema linearnih enačb:*

$$\begin{aligned} 3x-y+3z &= 4 \\ 6x-2y+6z &= 2 \\ 5x+4y &= 2. \end{aligned}$$

Rešitev: *Zapišimo razširjeno matriko sistema, prvo vrstico pomnožimo z -2 in jo prištejmo k drugi:*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 3 & 4 \\ 6 & -2 & 6 & 2 \\ 5 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 5 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Iz druge vrstice tako sledi $0 = -6$, kar ne drži, zato je sistem protisloven.

Naloga 120 *Reši homogeni sistem linearnih enačb:*

$$\begin{aligned} 3x+2y+5z &= 0 \\ 6x+4y+7z &= 0 \\ 3x+2y-z &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev: *Z Gaussovo eliminacijo dobimo:*

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iz druge vrstice razberemo $3z = 0$, zato je $z = 0$. Iz prve vrstice sledi najprej $3x + 2y + 5z = 0$. Ker je $z = 0$, je $3x + 2y = 0$ oz. $y = -\frac{3}{2}x$, $x \in \mathbb{R}$. Tako ima sistem netrivialne rešitve $R = \{(x, -\frac{3}{2}x, 0); x \in \mathbb{R}\}$.

Naloga 121 *Določi realno število a tako, da bo sistem linearnih enačb*

$$\begin{aligned} x - y - z &= 0 \\ 2x - 3y + az &= 0 \\ (a-2)x + y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

imel netrivialne rešitve. Katere so te rešitve?

Rešitev: *Ker je sistem homogen, bo imel netrivialne rešitve, ko bo determinanta sistema enaka* 0*:*

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & a \\ a-2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -12 - a^2 + 2a - 2 - 3a + 6 - a + 8 = -a(a+2) = 0. \end{aligned}$$

Torej $a = 0$ *ali* $a = -2$*. Primera obravnavajmo vsakega posebej.*

1. *Najprej naj bo* $a = 0$*. Potem je*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

kjer smo drugo matriko dobili tako, da smo 1. vrstico pomnožili z -2 *in jo prišteli k 2. vrstici, ter 1. vrstico pomnožili z* 2 *in jo prišteli k 3. vrstici. Tretjo matriko smo iz druge dobili z odštevanjem 2. in 3. vrstice. Iz zadnje vrstice zadnje matrike sledi* $-y + 2z = 0$ *in od tod* $y = 2z$*. Iz prve vrstice izpišemo enačbo* $x - y - z = 0$*, od koder izrazimo* x *in dobimo* $x = y + z = 3z$*. Torej je množica rešitev enaka* $R = \{(3z, 2z, z); z \in \mathbb{R}\}$*.*

2. *Naj bo sedaj* $a = -2$*. Spet se lotimo matrike sistema.*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Od tod najprej razberemo, da je $y = 0$ *in nato še* $x = z$*, torej je množica rešitev enaka* $R = \{(z, 0, z); z \in \mathbb{R}\}$*.*

Naloga 122 *Razišči rešitve sistema linearnih enačb:*

$$\begin{aligned} (t-2)x + (t^2-4)y &= t^2 + 2t \\ (t-2)x - (t-2)y &= 3. \end{aligned}$$

Rešitev: *Najprej poiščimo determinanto sistema:*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} t-2 & t^2-4 \\ t-2 & 2-t \end{vmatrix} = -(t-2)^2 - (t-2)^2(t+2) = -(t-2)^2(t+3).$$

1. *Za $t \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$ je $\det(A) \neq 0$, zato za katerikoli t iz omenjene množice po Cramerjevem pravilu obstaja natako ena rešitev:*

$$
\begin{aligned}
x =& \frac{\begin{vmatrix} t^2+2t & t^2-4 \\ 3 & -t+2 \end{vmatrix}}{-(t-2)^2(t+3)} = \frac{-t^3-2t^2+2t^2+4t-3t^2+12}{-(t-2)^2(t+3)} \\
=& \frac{-t^2(t+3)+4(t+3)}{-(t-2)^2(t+3)} = \frac{t+2}{t-2}, \\
y =& \frac{3-(t-2)\frac{t+2}{t-2}}{-(t-2)} = \frac{-(t-1)}{-(t-2)} = \frac{t-1}{t-2}.
\end{aligned}
$$

Torej, za $t \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$ je

$$R = \left\{ \left(\frac{t+2}{t-2}, \frac{t-1}{t-2} \right) \right\}.$$

2. *Če je $t = -3$, se obe enačbi sistema glasita enako: $-5x + 5y = 3$. Zato lahko y izberemo za parameter, $y \in \mathbb{R}$, x se pa z njim izrazi kot $x = \frac{5y-3}{5}$. V tem primeru je rešitev neskončno: $R = \{(\frac{5y-3}{5}, y); y \in \mathbb{R}\}$.*

3. *Če je $t = 2$, iz druge enačbe sistema dobimo protislovno enačbo $0x + 0y = 3$, zato je v tem primeru $R = \emptyset$.*

Naloge za samostojno reševanje

Naloga 123 *Reši sistem linearnih enačb:*

$$
\begin{aligned}
x + 3y + z =& \; 10 \\
x - 2y - z =& \; -6 \\
2x + y + 2z =& \; 10.
\end{aligned}
$$

Rešitev: $R = \{(1, 2, 3)\}$.

Naloga 124 *Reši sistem linearnih enačb:*

$$
\begin{aligned}
s + 2t + 3u - 4v &= 11 \\
3s + 2t + u + 2v &= -1 \\
2s + t + 5u + v &= 3 \\
s + t + 5u + v &= 5.
\end{aligned}
$$

Rešitev: $R = \{(-2, 3, 1, -1)\}$.

Primer 125 *Poišči vse rešitve sistema linearnih enačb*

$$
\begin{gathered}
u_1 + 7u_4 + 9u_5 + 3u_2 + 5u_3 - 1 = 0 \\
2u_1 + 11u_2 = 4 - 12u_3 - 25u_4 - 22u_5 \\
u_1 - 2u_2 + 3u_3 - 4u_4 + 5u_5 = 2.
\end{gathered}
$$

Rešitev: *Izkaže se, da je* $\operatorname{rang}(\widetilde{A}) = 3 > \operatorname{rang}(A) = 2$, *zato je sistem protisloven. (Preden se lotiš Gaussove eliminacije, ne pozabi sistema urediti glede na njegove spremenljivke.)*

Naloga 126 *S pomočjo Gauss-Jordanove metode izračunaj inverzno matriko matrike* $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Rešitev: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Naloga 127 *Reši enačbo* $XA = B$, *kjer je* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ *in* $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

Rešitev: $X = BA^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Naloga 128 *Reši matrično enačbo* $AX + 2X = D - DX$, *kjer je* $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ *in* $D = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Rešitev: $X = (A + 2I + D)^{-1}D = \begin{bmatrix} 0.28 & 0.08 \\ 0.24 & 0.14 \end{bmatrix}$.

3

VEKTORJI

Vektorje najdemo na vseh področjih, kjer se pojavi potreba po modeliranju s količinami, ki poleg informacije o velikosti nosijo tudi informacijo o smeri. Tako se v večini z vektorji najprej srečamo pri fiziki, ko z njimi opisujemo fizikalne količine kot so sila, hitrost, pospešek itd. Razen v fiziki vektorje najdemo tudi v drugih vejah znanosti in inženirstva, med drugim v elektrotehniki, navigaciji, logistiki, ekonomiji, itd. V računalništvu nanje naletimo kot na enodimenzionalna polja, v računalniški grafiki pa eno od temeljnih vlog igrajo geometrijski vektorji in operacije z njimi, ki si jih bomo podrobneje ogledali.

3.1 GEOMETRIJSKI VEKTORJI

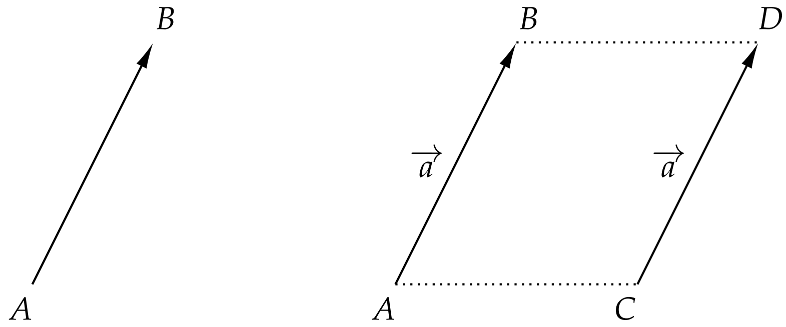
Vektor je urejen par točk v prostoru. Vektor, ki ga določa urejen par (A, B) označimo z $\overrightarrow{AB}$.

Vektor $\overrightarrow{AB}$ ponazorimo z usmerjeno daljico od (**začetne**) točke A do (**končne**) točke B, pri čemer smer vektorja označimo s puščico. **Dolžina vektorja** $\overrightarrow{AB}$ je dolžina daljice AB. Označimo jo z $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Kadar ni potrebe po tem, da poudarimo začetno in končno točko vektorja, ga na kratko označimo tudi z malo črko in puščico nad njo, npr. $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$. Vektor v prostoru tudi ni togo umeščen. To pomeni, da ga lahko vzporedno prenesemo v poljubno začetno točko.

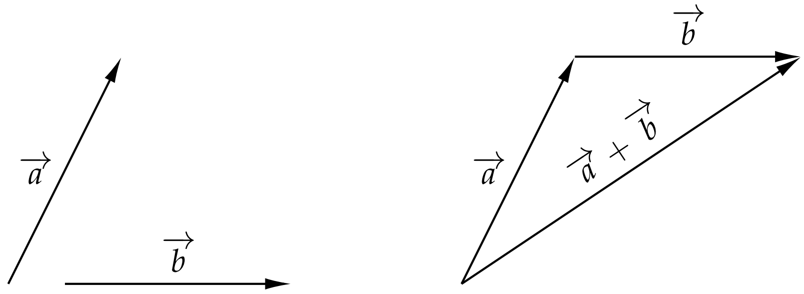
Usmerjeni daljici $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{CD}$ **določata isti vektor** $\overrightarrow{a}$ natanko tedaj, ko sta vzporedni, enako dolgi in enako orientirani (usmerjeni), glej sliko 1.

Naj bosta $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ poljubna vektorja, ki ju premaknemo tako, da konec vektorja $\overrightarrow{a}$ sovpada z začetkom vektorja $\overrightarrow{b}$. Potem je **vsota vektorjev** $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$



Slika 1: Usmerjeni daljici.

vektor $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, ki ga dobimo kot usmerjeno daljico, ki poteka od začetne točke vektorja $\overrightarrow{a}$ do končne točke vektorja $\overrightarrow{b}$, glej sliko 2.



Slika 2: Vsota vektorjev.

Vsoto vektorjev bi lahko opisali tudi s pomočjo *paralelogramskega pravila*: če imata vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ skupno začetno točko, je njuna vsota $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ usmerjena diagonala paralelograma, ki ima vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ za stranici in ima začetek v skupni točki vektorjev $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$, glej sliko 3. Od tod sledi, da je

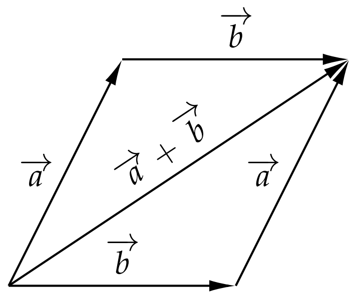
$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}.$$

Vsoto treh vektorjev dobimo tako, da vsoti dveh vektorjev prištejemo tretjega. Prepričamo se lahko (v pomoč naj bo slika 4), da vrstni red seštevanja ni pomemben, saj za seštevanje vektorjev velja asociativnostni zakon:

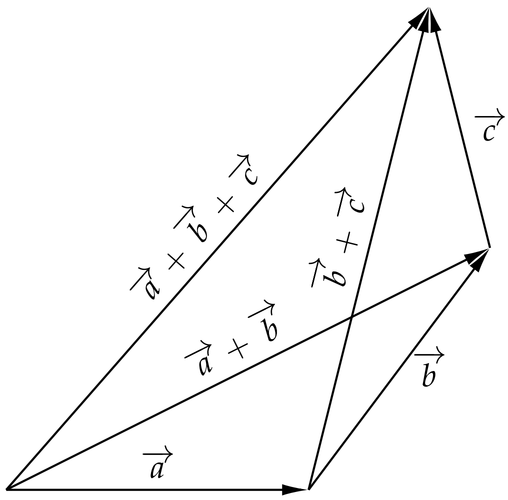
$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}).$$

Zato si lahko privoščimo zapis brez oklepajev:

$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}.$$



Slika 3: Paralelogramsko pravilo.



Slika 4: Vsota treh vektorjev.

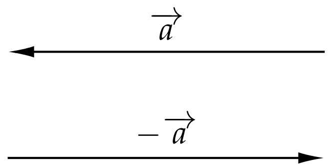
Vektor, ki se začne in konča v isti točki, imenujemo **ničelni vektor** in ga označimo z $\overrightarrow{0}$. Tako za poljuben vektor $\overrightarrow{a}$ velja $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{a}$. Vektor $\overrightarrow{BA}$ je **nasprotni vektor** k vektorju $\overrightarrow{AB}$, glej sliko 5. Nasprotni vektor k vektorju $\overrightarrow{a}$ označimo z $-\overrightarrow{a}$. Za nasprotna vektorja velja:

$$\overrightarrow{a}+(-\overrightarrow{a})=\overrightarrow{0}.$$

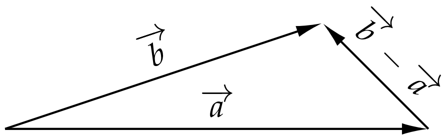
Na **razliko vektorjev** $\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}$ gledamo kot na prištevanje nasprotnega vektorja:

$$\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}+(-\overrightarrow{a}).$$

Če sta vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ postavljena v skupno izhodišče, potem lahko razliko $\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}$ opišemo kot vektor, ki ima začetno točko v končni točki vektorja $\overrightarrow{a}$ in končno točko v končni točki vektorja $\overrightarrow{b}$, glej sliko 6.



Slika 5: Nasprotni vektor.

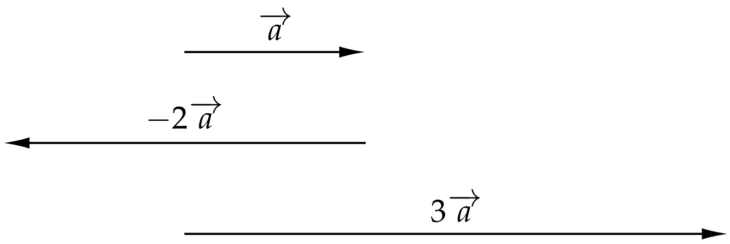


Slika 6: Razlika vektorjev.

Množenje vektorja s skalarjem.
Naj bo $\lambda \in \mathbb{R}$. Produkt $\lambda \overrightarrow{a}$ je vektor, določen z naslednjimi lastnostmi:

- $\lambda \overrightarrow{a}$ je vzporeden vektorju $\overrightarrow{a}$,
- dolžina vektorja $\lambda \overrightarrow{a}$ je $|\lambda| \| \overrightarrow{a} \|$,
- če je $\lambda > 0$, ima vektor $\lambda \overrightarrow{a}$ enako smer kot vektor $\overrightarrow{a}$; če je $\lambda < 0$, je vektor $\lambda \overrightarrow{a}$ usmerjen nasprotno kot $\overrightarrow{a}$; če je $\lambda = 0$, je $\lambda \overrightarrow{a}$ ničelni vektor.

Na sliki 7 vidimo vektorje $\overrightarrow{a}$, $-2\overrightarrow{a}$ in $3\overrightarrow{a}$.



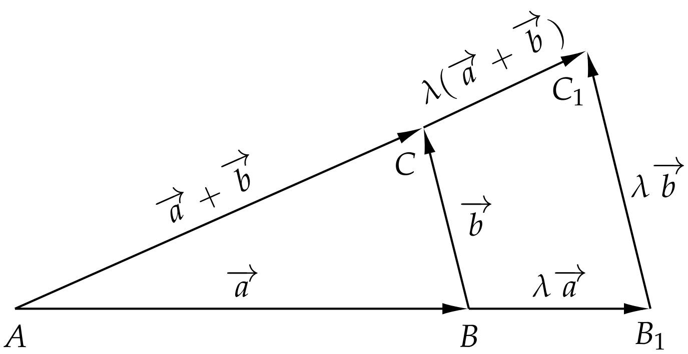
Slika 7: Množenje vektorja s skalarjem.

Enotski vektor $\overrightarrow{e_a}$ v smeri vektorja $\overrightarrow{a}$ je vektor $\overrightarrow{e_a} = \frac{1}{\|\overrightarrow{a}\|}\overrightarrow{a}$.

Lastnosti seštevanja vektorjev in množenja vektorjev s skalarjem lahko sedaj strnemo v spodnja pravila, kjer so $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{c}$ poljubni vektorji, λ in μ pa poljubna skalarja:

- komutativnost seštevanja: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$,
- asociativnost seštevanja:
$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$,
- obstoj nevtralnega elementa za seštevanje: obstaja vektor $\overrightarrow{0}$, da za vsak vektor $\overrightarrow{a}$ velja $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a}$,
- obstoj nasprotnega elementa za seštevanje: za vsak vektor $\overrightarrow{a}$ obstaja vektor $-\overrightarrow{a}$, da je $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$,
- asociativnost v skalarnem faktorju: $(\lambda\mu)\overrightarrow{a} = \lambda(\mu\overrightarrow{a})$,
- distributivnost v skalarnem faktorju: $(\lambda + \mu)\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{a}$,
- distributivnost v vektorskem faktorju: $\lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \lambda\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b}$,
- obstoj enote za množenje: $1 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$.

Lastnosti seštevanja smo že utemeljili. Iz definicije množenja vektorja s skalarjem takoj sledijo tudi lastnosti te operacije. Manj očitna je le lastnost distributivnosti v vektorskem faktorju, v katero se lahko prepričamo s pomočjo podobnosti trikotnikov.



Slika 8: Podobna trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle AB_1C_1$.

Na sliki 8 vidimo podobna trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle AB_1C_1$. Za dolžine njunih stranic velja:

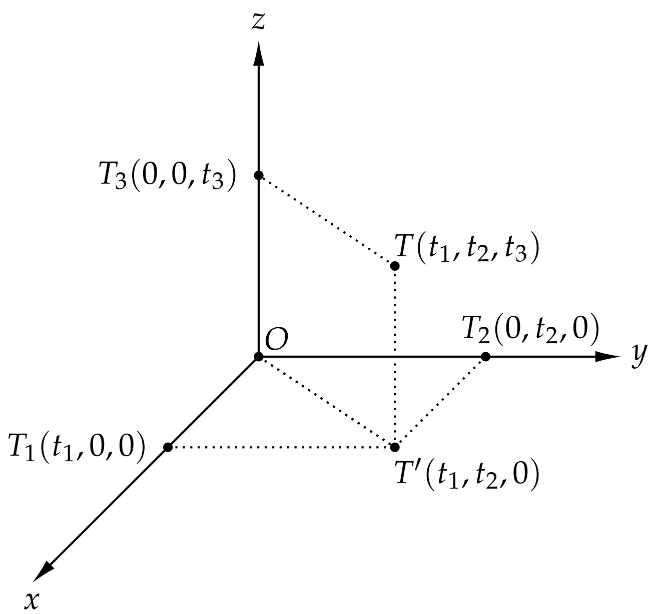
$$\|\overrightarrow{AB_1}\| : \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{B_1C_1}\| : \|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{AC_1}\| : \|\overrightarrow{AC}\| = \lambda.$$

Če vpeljemo naslednji oznaki za vektorja $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{BC}$, velja torej $\overrightarrow{AB_1} = \lambda \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{B_1C_1} = \lambda \overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{AC_1} = \lambda \overrightarrow{AC}$. Ker je $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \lambda \overrightarrow{a} + \lambda \overrightarrow{b}$, od tod sledi $\lambda \overrightarrow{a} + \lambda \overrightarrow{b} = \lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$.

3.1.1 *Koordinatni sistem v prostoru*

Tridimenzionalni pravokotni kartezični sistem (na kratko ga bomo v nadaljevanju imenovali koordinatni sistem) sestavljajo tri paroma pravokotne premice, ki jim pravimo **koordinatne osi**. Osi imenujemo **abscisna os** (ali os x), **ordinatna os** (ali os y) in **aplikatna** os (ali os z) [1]. **Koordinatno izhodišče** imenujemo točko, ki je presečišče osi koordinatnega sistema. Označevali ga bomo z O.

Za poljubno točko T v prostoru naj bodo T_1, T_2 in T_3 pravokotne projekcije točke T na koordinatne osi x, y in z (v tem vrstnem redu). Točki T_1 ustreza realno število t_1, točki T_2 ustreza realno število t_2, točki T_3 pa ustreza realno število t_3. Torej smo točki T priredili trojico realnih števil (t_1, t_2, t_3), ki jo imenujemo **koordinate točke** T (glej sliko 9). Koordinata t_1 je **abscisa**, t_2 je **ordinata** točke, t_3 pa **aplikata** točke T. Ker je vsaka točka prostora torej enolično določena s trojico realnih števil (koordinat), je prostor opremljen s kartezičnim koordinatnim sistemom enakovreden kartezičnemu produktu $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z); x, y, z \in \mathbb{R}\}$, ki ga na kratko pišemo tudi $\mathbb{R}^3$.



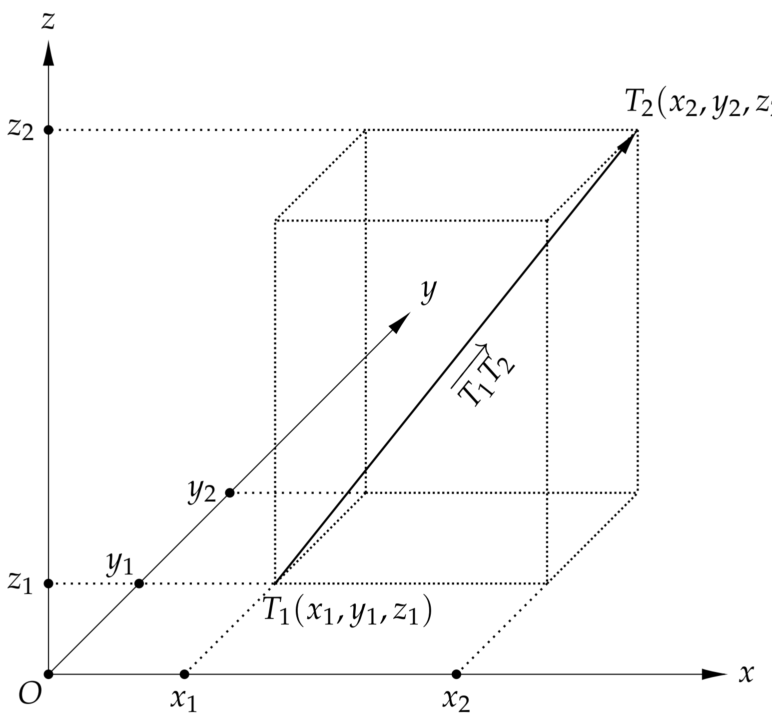
Slika 9: Koordinate točke.

1 Merska enota je za vse tri osi ista (le v tem primeru veljajo nekatere matematične formule, ki jih bomo spoznali v nadaljevanju).

Za točki $T_1(x_1, y_1, z_1)$ in $T_2(x_2, y_2, z_2)$ je razdalja med njima $d(T_1, T_2)$ enaka

$$d(T_1, T_2) = \|\overrightarrow{T_1T_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{2}$$

Razdaljo med točkama T_1 in T_2 izpeljemo s pomočjo Pitagorovega izreka, saj nanjo lahko gledamo kot na dolžino diagonale v kvadru (glej sliko 10). Preprosta izpeljava formule (2) je naloga za samostojno reševanje bralca.



Slika 10: Razdalja med točkama v prostoru.

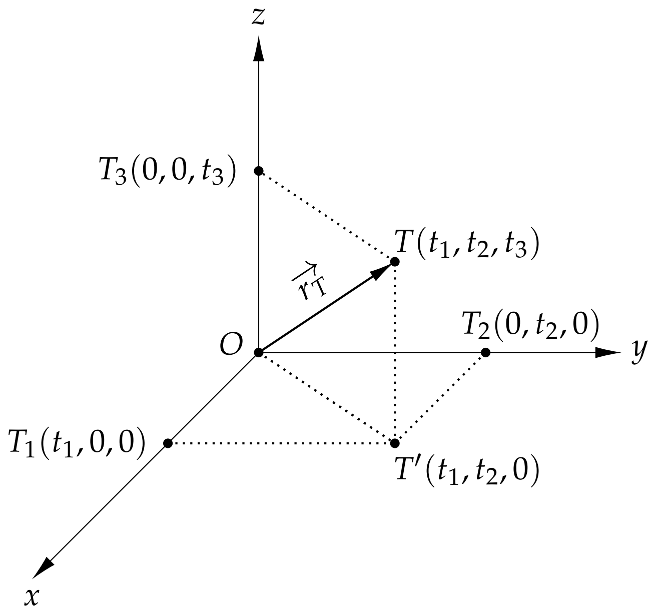
Vektorje, ki smo jih obravnavali do sedaj, smo obravnavali kot *proste vektorje* (lega takega vektorja v prostoru je nepomembna, saj je popolnoma določen s svojo velikostjo in smerjo). Sedaj bomo vpeljali še pojem *krajevnega vektorja*, katerega začetna točka zmeraj sovpada z izhodiščem koordinatnega sistema.

Krajevni vektor točke T je usmerjena daljica od točke O do točke T. Označimo ga z $\vec{r_T}$:

$$\vec{r_T} = \overrightarrow{OT}.$$

Vemo že, da je točka T enolično določena s trojico (t_1, t_2, t_3), zato je s temi koordinatami tudi enolično določen krajevni vektor točke T, glej sliko 11. Tako pišemo $\vec{r_T} = (t_1, t_2, t_3)$. Krajevni vektor koordinatnega izhodišča je ničelni vektor $\overrightarrow{0} = (0,0,0)$. Sedaj lahko iz formule (2) izpeljemo razdaljo med točko T in koordinatnim izhodiščem O, tj. dolžino krajevnega vektorja $\overrightarrow{r_T}$, ki je enaka:

$$\|\overrightarrow{r_T}\| = d(T,O) = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}.$$



Slika 11: Krajevni vektor.

Kot rečeno, lahko poljuben prosti vektor $\overrightarrow{v}$ premaknemo tako, da se začne v izhodišču koordinatnega sistema, s čemer dobimo krajevni vektor (slika 12). Letega označimo z $\overrightarrow{OP}$ oz. $\overrightarrow{r_P}$. Naj ima točka P koordinate (a,b,c). Potem rečemo, da je (a,b,c) **algebraična reprezentacija geometrijskega vektorja** $\overrightarrow{v}$.

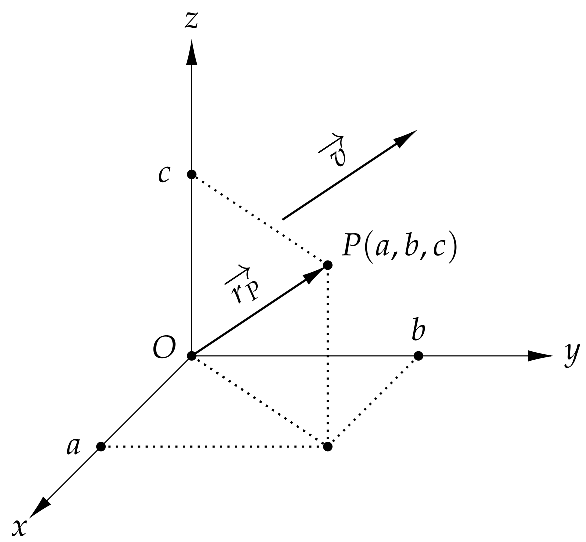
Baza prostora $\mathbb{R}^3$

Naj bo $\overrightarrow{i} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$ in $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$. To so vektorji dolžine 1, ki kažejo v pozitivnih smereh koordinatnih osi (slika 13). Vektorje $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ in $\overrightarrow{k}$ imenujemo **standardni bazni vektorji** prostora $\mathbb{R}^3$.

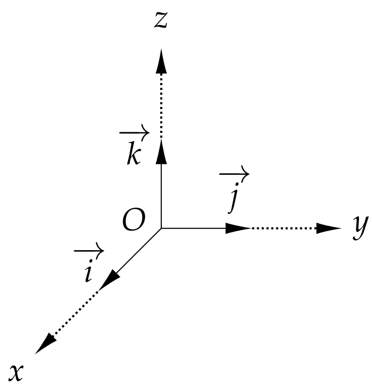
Za poljubno točko T naj bo $\overrightarrow{r_T} = (t_1,t_2,t_3)$ njen krajevni vektor. Dobiti ga je mogoče (glej sliko 14) kot vsoto naslednjih vektorjev

$$\overrightarrow{r_T} = (t_1,t_2,t_3) = t_1\overrightarrow{i} + t_2\overrightarrow{j} + t_3\overrightarrow{k}.$$

Enako velja za vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ z algebraičnima reprezentacijama $\overrightarrow{a} = (x_1,y_1,z_1)$ in $\overrightarrow{b} = (x_2,y_2,z_2)$:



Slika 12: Prosti in krajevni vektor.



Slika 13: Bazni vektorji.

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$$

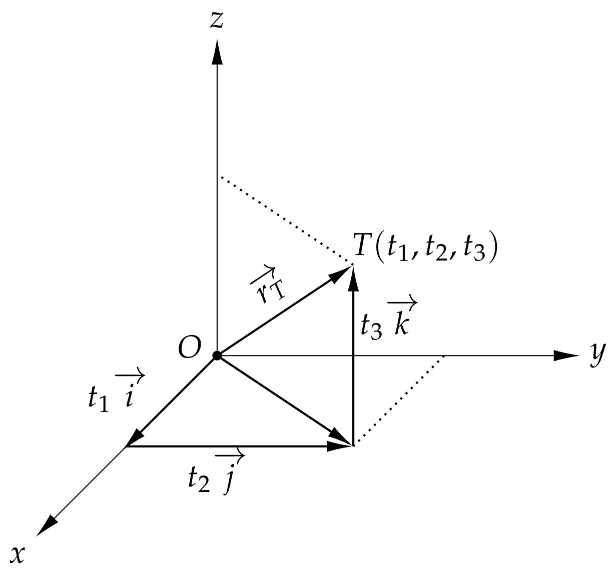
in

$$\vec{b} = (x_2, y_2, z_2) = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}.$$

Sedaj lahko izpeljemo

$$\begin{aligned}
\vec{a} + \vec{b} &= (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \\
&= x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} + x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k} \\
&= (x_1 + x_2) \vec{i} + (y_1 + y_2) \vec{j} + (z_1 + z_2) \vec{k} \\
&= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).
\end{aligned}$$

Podobno bi lahko izpeljali spodaj povzeta pravila za vektorske operacije v koordinatnem zapisu, kjer sta $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ in $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ poljubna vektorja:



Slika 14: Krajevni vektor kot vsota vektorjev.

- $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$,
- $\lambda \overrightarrow{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$,
- $-\overrightarrow{a} = (-x_1, -y_1, -z_1)$,
- $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$.

Ni odveč poudariti, da sta $\overrightarrow{a} = (x_1, y_1, z_1)$ in $\overrightarrow{b} = (x_2, y_2, z_2)$ enaka natanko tedaj, ko se ujemata v istoležnih koordinatah, tj. $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ in $z_1 = z_2$. Hitro lahko vidimo tudi naslednje: za poljuben vektor $\overrightarrow{AB}$ velja $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A}$.

Primer 129 *Izračunaj* $5\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$, *če je* $\overrightarrow{a} = (2, 0, -1)$ *in* $\overrightarrow{b} = (-3, 4, 2)$.

Rešitev:

$$\begin{aligned} 5\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} &= 5(2,0,-1) + 2(-3,4,2) \\ &= (10,0,-5) + (-6,8,4) \\ &= (4,8,-1). \end{aligned}$$

Primer 130 *Določi vektorja* $\overrightarrow{a}$ *in* $\overrightarrow{b}$, *če je* $\overrightarrow{a} - 5\overrightarrow{b} = (0,1,2)$ *in* $3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = (5,1,2)$.

Rešitev: *Najprej izrazimo vektor* $\overrightarrow{a}$ *iz prve enačbe, dobimo* $\overrightarrow{a} = 5\overrightarrow{b} + (0,1,2)$, *in ga vstavimo v drugo enačbo:*

$$3(5\overrightarrow{b} + (0,1,2)) - \overrightarrow{b} = (5,1,2).$$

Nato poenostavljamo kot sledi:

$$\begin{aligned}
15\overrightarrow{b} + (0,3,6) - \overrightarrow{b} &= (5,1,2)\\
14\overrightarrow{b} &= (5,1,2) - (0,3,6)\\
14\overrightarrow{b} &= (5,-2,-4)\\
\overrightarrow{b} &= \tfrac{1}{14}(5,-2,-4) = \left(\tfrac{5}{14}, -\tfrac{1}{7}, -\tfrac{2}{7}\right).
\end{aligned}$$

Sedaj lahko izračunamo še koordinate vektorja $\overrightarrow{a}$*:*

$$\overrightarrow{a} = 5\overrightarrow{b} + (0,1,2) = 5\left(\frac{5}{14}, -\frac{1}{7}, -\frac{2}{7}\right) + (0,1,2) = \left(\frac{25}{14}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right).$$

3.1.2 *Linearna odvisnost in neodvisnost*

Naj bodo $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ vektorji v prostoru, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ pa skalarji. Izraz

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{a_n}$$

imenujemo **linearna kombinacija vektorjev** $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$.

V prejšnjem razdelku smo pokazali, da se vsak vektor da zapisati kot linearna kombinacija baznih vektorjev $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$.

Primer 131 *Vektor* $\overrightarrow{a} = (5,9,13)$ *lahko zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev* $\overrightarrow{b} = (1,2,3)$ *in* $\overrightarrow{c} = (3,5,7)$*, saj je* $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$.

Linearno kombinacijo, v kateri so vsi skalarji $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ enaki 0, imenujemo **trivialna linearna kombinacija**. Vrednost trivialne kombinacije je vselej $\overrightarrow{0}$. Če je vsaj eden izmed skalarjev λ_i različen od 0, govorimo o **netrivialni** linearni kombinaciji.

Vektorji $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ so **linearno neodvisni**, če iz enakosti

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{0}$$

sledi

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Linearno neodvisnost lahko pojasnimo tudi tako: vektorji iz množice $\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}\}$ so linearno neodvisni, če se nobenega vektorja iz te množice ne da zapisati kot linearno kombinacijo drugih vektorjev iz te množice.

Primer linearno neodvisnih vektorjev so standardni bazni vektorji: iz $\lambda_1 \overrightarrow{i} + \lambda_2 \overrightarrow{j} + \lambda_3 \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$ dobimo $\lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(0,1,0) + \lambda_3(0,0,1) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \overrightarrow{0}$, od koder sledi $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Če vektorji iz množice $\{\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}\}$ niso linearno neodvisni, rečemo, da so *linearno odvisni*.

Vektorji $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ so **linearno odvisni**, če obstajajo skalarji $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, ki niso vsi enaki 0, da je

$$\lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \overrightarrow{a_2} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{0}.$$

To pomeni, da se vsaj eden izmed njih da izraziti kot linearna kombinacija preostalih.

Primer 132 *Ali so vektorji* $\overrightarrow{a} = (1,2,3)$, $\overrightarrow{b} = (3,5,7)$, $\overrightarrow{c} = (0,1,2)$ *linearno neodvisni?*

Rešitev: *Iz enačbe* $\alpha(1,2,3) + \beta(3,5,7) + \gamma(0,1,2) = \overrightarrow{0}$ *sledi*

$$(\alpha, 2\alpha, 3\alpha) + (3\beta, 5\beta, 7\beta) + (0, \gamma, 2\gamma) = \overrightarrow{0},$$

od koder dobimo sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} \alpha + 3\beta &= 0 \\ 2\alpha + 5\beta + \gamma &= 0 \\ 3\alpha + 7\beta + 2\gamma &= 0, \end{aligned}$$

ki ga lahko rešimo s pomočjo matrik in Gaussove eliminacije:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ta sistem ima neskončno množico rešitev $R = \{(-3y, y, y); y \in \mathbb{R}\}$. *Pri izbiri* $y = 0$ *sicer dobimo, da je* $\alpha = \beta = \gamma = 0$, *toda pri izbiri* $y = 1$, *dobimo netrivialno rešitev* $(-3, 1, 1)$, *kar pomeni, da so vektorji linearno odvisni. Spomnimo se, da to pomeni, da se da en vektor izraziti z drugima dvema. Res, iz enačbe* $-3\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$, *za katero sedaj vemo, da velja, lahko izrazimo npr. vektor* $\overrightarrow{c}$ *kot linearno kombinacijo vektorjev* $\overrightarrow{a}$ *in* $\overrightarrow{b}$, *tj.* $\overrightarrow{c} = 3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$.

Primer 133 *Ali so vektorji* $(5,1,3)$, $(1,0,-1)$, $(0,1,2)$ *linearno neodvisni?*

Rešitev: *Iz enačbe* $\alpha(5,1,3) + \beta(1,0,-1) + \gamma(0,1,2) = \overrightarrow{0}$ *sledi*

$$(5\alpha, \alpha, 3\alpha) + (\beta, 0, -\beta) + (0, \gamma, 2\gamma) = \overrightarrow{0},$$

od koder dobimo sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} 5\alpha + \beta &= 0 \\ \alpha + \gamma &= 0 \\ 3\alpha - \beta + 2\gamma &= 0, \end{aligned}$$

ki ga rešimo s pomočjo Gaussove eliminacije:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Od tukaj dobimo $\alpha = \beta = \gamma = 0$, kar pomeni, da so vektorji linearno neodvisni.

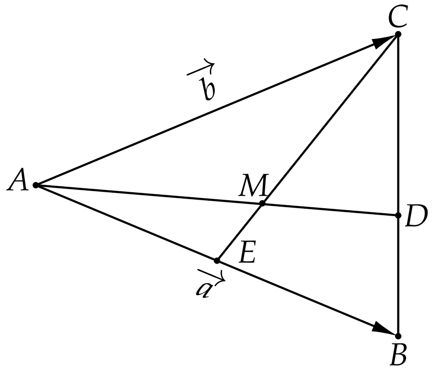
Primer 134 *Vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ sta linearno neodvisna. Kolikšna je vrednost skalarjev x in y, če velja $(\overrightarrow{b} - 3\overrightarrow{a})y + 3\overrightarrow{a} = (2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})x$?*

Rešitev: *Enačbo preoblikujemo kot sledi:*

$$\begin{aligned} &y\overrightarrow{b} - 3y\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{a} = 2x\overrightarrow{a} - x\overrightarrow{b}, \\ &3\overrightarrow{a} - 3y\overrightarrow{a} - 2x\overrightarrow{a} + x\overrightarrow{b} + y\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}, \\ &(3 - 3y - 2x)\overrightarrow{a} + (x + y)\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}. \end{aligned}$$

Ker sta $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ linearno neodvisna, mora biti $3 - 3y - 2x = 0$ in $x + y = 0$. Od tod pa sledi, da je $y = 3$ in $x = -3$.

Primer 135 *Naj bo v trikotniku $\triangle ABC$ točka E razpolovišče stranice AB. Točka D naj razdeli stranico BC tako, da je $|BD| : |DC| = 2 : 3$. Presečišče daljic AD in EC označimo z M. V kakšnem razmerju točka M razdeli daljico AD?*



Rešitev: *Naloga sprašuje po razmerju dolžin daljic $|AM| : |MD|$ ali $|AM| : |AD|$ (če poznamo eno, poznamo tudi drugo razmerje). Enakovredno lahko postavimo vprašanje o razmerju dolžin vektorjev $\|\overrightarrow{AM}\| : \|\overrightarrow{AD}\|$. Najprej opazimo, da sta $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AC}$ linearno neodvisna vektorja. Vektor $\overrightarrow{AM}$ izrazimo kot linearno kombinacijo vektorjev $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ na dva različna načina:*

(1) $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AD} = m(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) = m(\overrightarrow{a} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}) = m(\overrightarrow{a} + \frac{2}{5}(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a})) = m\overrightarrow{a} + \frac{2}{5}m\overrightarrow{b} - \frac{2}{5}m\overrightarrow{a} = \frac{3}{5}m\overrightarrow{a} + \frac{2}{5}m\overrightarrow{b}$.

(2) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{a} + k(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{a} - \frac{1}{2}k\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b}$.

Tako mora veljati enakost

$$\frac{3}{5}m\overrightarrow{a} + \frac{2}{5}m\overrightarrow{b} = \frac{1}{2}\overrightarrow{a} - \frac{1}{2}k\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b},$$

ki jo preoblikujemo tako:

$$\overrightarrow{a}\left(\frac{3}{5}m - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k\right) + \overrightarrow{b}\left(\frac{2}{5}m - k\right) = \overrightarrow{0}.$$

Ker sta vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ linearno neodvisna, je $\frac{3}{5}m - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k = 0$ in $\frac{2}{5}m - k = 0$, od koder (če iz druge enačbe izrazimo k in ga vstavimo v prvo) sledi $m = \frac{5}{8}$. Tako je $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AD}$, od koder sledi $\|\overrightarrow{AM}\| : \|\overrightarrow{AD}\| = 5 : 8$, oziroma $\|\overrightarrow{AM}\| : \|\overrightarrow{MD}\| = 5 : 3$.

3.1.3 *Preveri svoje znanje (osnovno o geometrijskih vektorjih)*

Vprašanja iz teorije

1. Kaj je vektor? Pojasni razliko med prostim in krajevnim vektorjem.
2. Pojasni, kako geometrijsko seštejemo dva vektorja.
3. Pojasni geometrijski pomen množenja vektorja s skalarjem.
4. Naštej lastnosti seštevanja vektorjev in množenja vektorja s skalarjem.
5. Kako v prostoru $\mathbb{R}^3$ izračunamo razdaljo med dvema točkama?
6. Naštej lastnosti baznih vektorjev.
7. Kaj je linearna kombinacija vektorjev?
8. Pojasni linearno odvisnost in neodvisnost vektorjev.

Naloge za samostojno reševanje

Naloga 136 *Naj bo $ABCD$ paralelogram.*

(a) *Izrazi vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AD}$ z vektorjema $\overrightarrow{AC}$ in $\overrightarrow{BD}$.*

(b) *Naj bo S presečišče diagonal paralelograma. Poišči vektor $\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{SB}$.*

Rešitev: (*a*) $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$, (*b*) $\overrightarrow{0}$.

Naloga 137 *V pravilnem šestkotniku $ABCDEF$ naj bo R razpolovišče stranice AB, točka S pa razpolovišče daljice CD. Vektorje $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{RS}$ in $\overrightarrow{FS}$ izrazi le s pomočjo vektorjev $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AF}$.*

Rešitev: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{DF} = -2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{RS} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$, $\overrightarrow{FS} = 2\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}$.

Naloga 138 *Naj bodo $\overrightarrow{r_A}$, $\overrightarrow{r_B}$ in $\overrightarrow{r_C}$ krajevni vektorji do točk A, B in C. Izrazi z njimi krajevni vektor težišča trikotnika.*

Rešitev: $\overrightarrow{r_T} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C})$.

Naloga 139 *Poenostavi izraz* $\overrightarrow{a} - (2\overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{c} - (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + (-\overrightarrow{c}) + 3\overrightarrow{a}) + 2\overrightarrow{c}) - \overrightarrow{b}$.

Rešitev: $5\overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b} - 5\overrightarrow{c}$.

Naloga 140 *Dan je vektor $\overrightarrow{a} \neq 0$. Kolikšno vrednost ima skalar m, če je*

$$2(m-2)\overrightarrow{a} - (m+4)\overrightarrow{a} = -6\overrightarrow{a}?$$

Rešitev: $m = 2$.

Naloga 141 *Iz enačbe izračunaj neznani vektor $\overrightarrow{x}$:*

$$3(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{a}) = 2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{x} - 2\overrightarrow{c}).$$

Rešitev: $\overrightarrow{x} = \frac{2}{5}(-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c})$.

Naloga 142 *Podana sta vektorja $\overrightarrow{a} = (-3,2,1)$ in $\overrightarrow{b} = (1,1,-2)$. Izračunaj koordinate vektorja $\overrightarrow{c} = \frac{1}{3}\overrightarrow{a} - \frac{1}{2}\overrightarrow{b}$, dolžino vektorja $\overrightarrow{a}$, ter zapiši enotski vektor v smeri vektorja $\overrightarrow{a}$ (označimo ga z $\overrightarrow{e_a}$).*

Rešitev: $\overrightarrow{c} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{6}, \frac{4}{3}\right)$, $\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{14}$, $\overrightarrow{e_a} = \left(-\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right)$.

Naloga 143 *Vektorjema $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$ in $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$ poišči enotski vektor $\overrightarrow{e}$, ki je vzporeden vektorju $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$.*

Rešitev: $\overrightarrow{e} = \frac{3}{\sqrt{43}}\overrightarrow{i} + \frac{3}{\sqrt{43}}\overrightarrow{j} - \frac{5}{\sqrt{43}}\overrightarrow{k}$.

Naloga 144 *Dane so točke $A(3,1,0)$, $B(-1,3,2)$, $C(4,1,5)$. Določi točko D tako, da bo $ABCD$ paralelogram.*

Rešitev: *Najprej poiščimo krajevni vektor točke D, torej $\overrightarrow{OD}$. Velja $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}$, pri čemer je $\overrightarrow{OA} = (3,1,0)$ in $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_C} = (4-(-1), 1-3, 5-2) = (5,-2,3)$. Sedaj dobimo $\overrightarrow{OD} = (3,1,0) + (5,-2,3) = (8,-1,3)$. Ker se koordinate krajevnega vektorja točke D ujemajo s koordinatami končne točke D, dobimo $D(8,-1,3)$.*

Naloga 145 *Ali sta vektorja* $\overrightarrow{a} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j} + \frac{4}{3}\overrightarrow{k}$ *in* $\overrightarrow{b} = \frac{9}{8}\overrightarrow{i} - \frac{9}{2}\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ *vzporedna?*

Rešitev: *Namig: ugotovi ali obstaja skalar m, da velja* $\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{b}$*. Izkaže se, da obstaja: velja* $\overrightarrow{a} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{b}$*, zato sta vektorja* $\overrightarrow{a}$ *in* $\overrightarrow{b}$ *vzporedna.*

Naloga 146 *Dokaži: če so* $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{z}$ *linearno neodvisni vektorji, potem so linearno neodvisni tudi vektorji* $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{z}$ *in* $\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}$.

Naloga 147 *Dan je paralelogram ABCD. Iz središča S stranice AB načrtaj daljico SD, ki seka diagonalo AC v točki F. V kakšnem razmerju deli točka F diagonalo AC?*

Rešitev: $|AF| : |FC| = 1 : 2$.

3.2 PRODUKTI VEKTORJEV

V prejšnjem razdelku smo že spoznali operacijo množenja vektorja s skalarjem. V tem si bomo ogledali, kako lahko vektorje množimo med sabo. To je mogoče s skalarnim, vektorskim in mešanim produktom. Ogledali si bomo definicije omenjenih produktov, njihove lastnosti in geometrijski pomen.

3.2.1 *Skalarni produkt vektorjev*

Skalarni produkt vektorjev $\overrightarrow{a} = (x_1, y_1, z_1)$ in $\overrightarrow{b} = (x_2, y_2, z_2)$ je število $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$, definirano s predpisom

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

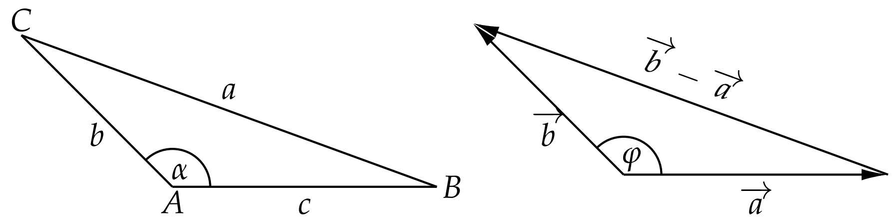
Lastnosti skalarnega produkta so:

1. rezultat skalarnega množenja vektorjev $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ je skalar,
2. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$,
3. $(\lambda\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \cdot (\lambda\overrightarrow{b}) = \lambda(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})$,
4. $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}$,
5. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} \geq 0$,
6. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = 0$ natanko tedaj, ko je $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$,
7. $\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}}$ oz. $\|\overrightarrow{a}\|^2 = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}$,

8. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\| \cos\varphi$, pri čemer je φ **vmesni kot** med vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ (tj. kot φ z lastnostjo $0 \leq \varphi \leq \pi$, ki ga vektorja oklepata, če izhajata iz skupne začetne točke),

9. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$ natanko tedaj, ko je $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ ali $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ ali sta vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ pravokotna ($\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$).

Prvih sedem lastnosti izhaja neposredno iz definicije skalarnega produkta (in lastnosti realnih števil). Premislek, da veljajo, je dobra vaja za preverjanje razumevanja. Pokažimo pa, da veljata zadnji dve lastnosti. Najprej se spomnimo kosinusnega izreka: v poljubnem trikotniku $\triangle ABC$ velja $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.



Slika 15: Kosinusni izrek.

Naj bo φ kot med vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$, glej sliko 15. Potem v trikotniku z dolžinami stranic $\|\overrightarrow{a}\|$, $\|\overrightarrow{b}\|$ in $\|\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\|$ po kosinusnem izreku dobimo:

$$\|\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\|^2 = \|\overrightarrow{a}\|^2 + \|\overrightarrow{b}\|^2 - 2\|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\| \cos\varphi.$$

Po drugi strani pa velja

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\|^2 &= (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) \cdot (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) \\
&= \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b} - \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a} - \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} \\
&= \|\overrightarrow{b}\|^2 + \|\overrightarrow{a}\|^2 - 2\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}.
\end{aligned}$$

Z enačenjem obeh izrazov tako sledi $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\| \cos\varphi$.

S pomočjo izpeljane formule se lahko sedaj prepričamo, da velja tudi 9. lastnost: če je $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$ in sta oba vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ neničelna, mora biti $\cos\varphi = 0$, zato je $\varphi = \frac{\pi}{2}$ oz. vektorja sta pravokotna. Če je kateri izmed vektorjev $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ enak $\overrightarrow{0}$, potem je seveda $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$. Če sta vektorja pravokotna, pa je vmesni kot med njima enak $\varphi = \frac{\pi}{2}$, od koder sledi $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\| \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Primer 148 *Za standardne bazne vektorje $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ velja*

$$\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{k} = 1$$

in
$$\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{k} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} = 0.$$
Torej so enotski in paroma pravokotni.

Primer 149 *Izračunaj skalarni produkt vektorjev* $\overrightarrow{a} = (1,1,5)$ *in* $\overrightarrow{b} = (-2,1,3)$.

Rešitev: $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = (1,1,5) \cdot (-2,1,3) = -2+1+15 = 14.$

Primer 150 *Poišči kot med vektorjema* $\overrightarrow{a} = (-2,6,0)$ *in* $\overrightarrow{b} = (24,8,5)$.

Rešitev: *Kot* φ *med vektorjema, katerih koordinate poznamo, izračunamo s pomočjo formule* $\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\|}$. *Ker dobimo* $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = -48+48+0 = 0$, *sledi da je* $\varphi = \frac{\pi}{2}$. *Torej sta vektorja pravokotna.*

Primer 151 *Poišči kot med vektorjema* $\overrightarrow{a} = (4,-10,-2)$ *in* $\overrightarrow{b} = (5,2,-3)$.

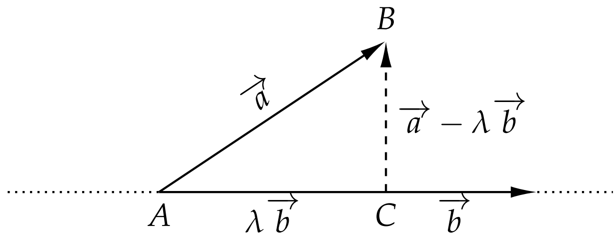
Rešitev: *Najprej izračunamo* $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 20 - 20 + 6 = 6$, *ter dolžini vektorjev* $\overrightarrow{a}$ *in* $\overrightarrow{b}$, $\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{16+100+4} = \sqrt{120}$, $\|\overrightarrow{b}\| = \sqrt{25+4+9} = \sqrt{38}$. *Tako dobimo*
$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\|} = \frac{6}{\sqrt{120}\sqrt{38}}$$
in od tod
$$\varphi = \arccos\left(\frac{6}{\sqrt{120}\sqrt{38}}\right) = 84,9^\circ.$$

Primer 152 *Vektorja* $\overrightarrow{a}$ *in* $\overrightarrow{b}$ *oklepata kot* $\frac{\pi}{3}$. *Izračunaj* $(3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) \cdot (2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$, *če je* $\|\overrightarrow{a}\| = 4$ *in* $\|\overrightarrow{b}\| = 5$.

Rešitev: *Najprej ugotovimo, da je*
$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\|\cos\varphi = 4 \cdot 5 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 20\frac{1}{2} = 10.$$
Nato lahko izpeljemo
$$\begin{aligned}(3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) \cdot (2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) &= 6\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} - 2\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b} \\ &= 6\|\overrightarrow{a}\|^2 - \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} - \|\overrightarrow{b}\|^2 \\ &= 6 \cdot 16 - 10 - 25 = 61.\end{aligned}$$

Primer 153 *Izračunaj pravokotno projekcijo vektorja* $\overrightarrow{a} = (2,1,1)$ *na vektor* $\overrightarrow{b} = (3,0,4)$.

Rešitev: *Pri izračunu nam bo pomagal naslednji premislek. Vektorja* $\overrightarrow{a}$ *in* $\overrightarrow{b}$ *premaknemo tako, da se začneta v isti začetni točki A. Nato končno točko B vektorja* $\overrightarrow{a}$ *projiciramo pravokotno na nosilko vektorja b (tj. na premico, na kateri leži vektor* $\overrightarrow{b}$*),*



Slika 16: Projekcija vektorja na drug vektor.

glej sliko 16. Projekcijo točke B označimo s C. Projekcija vektorja $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$ je tako vektor $\overrightarrow{AC}$, ki ga lahko izrazimo kot $\overrightarrow{AC} = \lambda\vec{b}$ za nek $\lambda \in \mathbb{R}$. Naš cilj je poiskati vrednost λ.
Vektorja $\overrightarrow{CB}$ in $\vec{b}$ sta pravokotna, zato je $\overrightarrow{CB} \cdot \vec{b} = 0$. Vektor $\overrightarrow{CB}$ lahko izrazimo kot $\overrightarrow{CB} = \vec{a} - \lambda\vec{b}$. Tako sledi

$$\begin{aligned}
(\vec{a} - \lambda\vec{b}) \cdot \vec{b} &= 0 \\
\vec{a} \cdot \vec{b} - \lambda\vec{b} \cdot \vec{b} &= 0 \\
\vec{a} \cdot \vec{b} &= \lambda \cdot \|\vec{b}\|^2 \\
\lambda &= \tfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}.
\end{aligned}$$

Sedaj dobimo

$$\lambda = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} = \frac{6+0+4}{9+16} = \frac{10}{25}$$

in zato

$$\overrightarrow{AC} = \frac{10}{25}(3,0,4) = \left(\frac{6}{5}, 0, \frac{8}{5}\right).$$

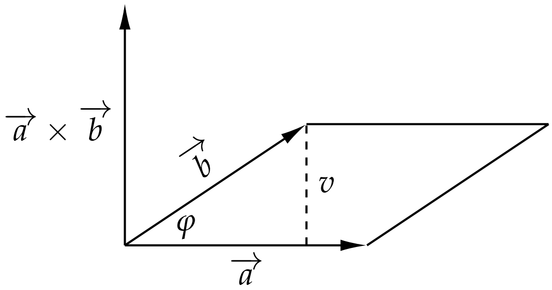
3.2.2 *Vektorski produkt vektorjev*

Vektorski produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je enolično določen vektor $\vec{a} \times \vec{b}$, za katerega velja:

1. vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ je pravokoten na vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$,
2. njegova dolžina $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ je enaka ploščini paralelograma, ki ga oklepata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$,
3. usmerjenost vektorskega produkta $\vec{a} \times \vec{b}$ je določena po **pravilu desnosučnega vijaka**: če vrtimo vektor $\vec{a}$ po krajši poti k vektorju $\vec{b}$,

> se bo usmerjenost vektorja $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ ujemala z gibanjem desnosučnega vijaka pri tej rotaciji.

Rečemo tudi, da vektorji $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ tvorijo **pozitivno orientirano trojico** v $\mathbb{R}^3$: če imajo vektorji $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ skupno začetno točko in gledamo v smeri vektorja $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, se vidi najkrajše vrtenje vektorja $\overrightarrow{a}$ proti vektorju $\overrightarrow{b}$ v smeri gibanja kazalcev na uri.



Slika 17: Vektorski produkt.

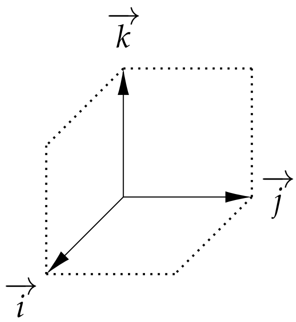
Dolžina vektorskega produkta je torej enaka ploščini paralelograma, ki ga oklepata vektorja v vektorskem produktu. Spomnimo se, da se ploščina paralelograma izračuna kot produkt dolžine osnovnice paralelograma in višine paralelograma. Glede na sliko 17 je dolžina osnovnice enaka $\|\overrightarrow{a}\|$, višina v paralelograma pa je enaka $v = \|\overrightarrow{b}\| \sin\varphi$, od koder sledi

$$\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\| = \|\overrightarrow{a}\| \|\overrightarrow{b}\| \sin\varphi.$$

Iz zgornje enakosti sledi, da za neničelna vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ velja $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ natanko tedaj, ko je $\varphi = 0$ ali $\varphi = \pi$. To velja v primeru, ko sta vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ vzporedna, oziroma, ko sta $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ linearno odvisna. Posebej tako velja: $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ za vsak vektor $\overrightarrow{a}$. Zato tudi za standardne bazne vektorje $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ in $\overrightarrow{k}$ velja:

$$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}.$$

Vektorji $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ so enotski in paroma pravokotni, zato lahko izpeljemo $\|\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j}\| = \|\overrightarrow{i}\| \cdot \|\overrightarrow{j}\| \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Torej je $\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j}$ enotski vektor v smeri vektorja $\overrightarrow{k}$, kar pomeni dejansko $\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$. Podobno lahko izpeljemo tudi ostale spodnje enakosti:



$$\begin{aligned}
\vec{i} \times \vec{j} &= -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k}, \\
\vec{j} \times \vec{k} &= -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i}, \\
\vec{k} \times \vec{i} &= -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}.
\end{aligned}$$

Primerjajmo vektorja $mn(\vec{i} \times \vec{j})$ in $m\vec{i} \times n\vec{j}$. Dolžina prvega je očitno $|mn|$, prav tako pa tudi drugega:

$$\|m\vec{i} \times n\vec{j}\| = \|m\vec{i}\|\|n\vec{j}\| \sin\frac{\pi}{2} = |m|\|\vec{i}\||n|\|\vec{j}\| \sin\frac{\pi}{2} = |mn|.$$

Oglejmo si še smeri opazovanih vektorjev. Glede na predznaka skalarjev m in n ločimo dve možnosti.

1. Če sta skalarja m in n oba pozitivna ali oba negativna, je produkt mn pozitivno število, zato vektor $mn(\vec{i} \times \vec{j})$ kaže v smeri vektorja $\vec{k}$. Enako velja za vektor $m\vec{i} \times n\vec{j}$, v kar se lahko prepričamo po pravilu desnosučnega vijaka.

2. Če pa je eden izmed skalarjev m in n negativen, drugi pa pozitiven, je mn negativno število, zato vektor $mn(\vec{i} \times \vec{j})$ kaže v smeri vektorja $-\vec{k}$. Uporabimo pravilo desnosučnega vijaka, da se prepričamo, da v teh dveh primerih enako velja tudi za vektor $m\vec{i} \times n\vec{j}$.

Vektorja $mn(\vec{i} \times \vec{j})$ in $m\vec{i} \times n\vec{j}$ sta torej enako dolga in kažeta v isto smer, zato sta enaka:

$$m\vec{i} \times n\vec{j} = mn(\vec{i} \times \vec{j}).$$

Na podoben način bi se lahko prepričali, da velja analogna formula za preostale produkte: če najprej vsakega od dveh standardnih baznih vektorjev pomnožimo z nekim skalarjem, nato pa dobljena vektorja vektorsko množimo, dobimo enak vektor, kot če produkt teh dveh baznih vektorjev pomnožimo s produktom skalarjev. To dejstvo bomo uporabili pri spodnji izpeljavi. Prav tako bomo za standardne bazne vektorje uporabili distributivnost vektorskega množenja glede na seštevanje, dokaz česar pa izpustimo.

Naj bosta vektorja $\overrightarrow{a} = (x_1, y_1, z_1)$ in $\overrightarrow{b} = (x_2, y_2, z_2)$. Kot že vemo, ju lahko zapišemo kot $\overrightarrow{a} = x_1 \overrightarrow{i} + y_1 \overrightarrow{j} + z_1 \overrightarrow{k}$ in $\overrightarrow{b} = x_2 \overrightarrow{i} + y_2 \overrightarrow{j} + z_2 \overrightarrow{k}$. Potem je

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} &= x_1x_2(\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i}) + x_1y_2(\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j}) + x_1z_2(\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k}) \\ &+ y_1x_2(\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{i}) + y_1y_2(\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j}) + y_1z_2(\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k}) \\ &+ z_1x_2(\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i}) + z_1y_2(\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{j}) + z_1z_2(\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k}), \end{aligned}$$

od koder sledi

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} &= x_1y_2\overrightarrow{k} - x_1z_2\overrightarrow{j} - y_1x_2\overrightarrow{k} + y_1z_2\overrightarrow{i} + z_1x_2\overrightarrow{j} - z_1y_2\overrightarrow{i} \\ &= (y_1z_2 - z_1y_2)\overrightarrow{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\overrightarrow{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\overrightarrow{k}. \end{aligned}$$

S tem smo izpeljali formulo za izračun vektorskega produkta, če imamo podane koordinate vektorjev, ki ju vektorsko množimo:

$$\boxed{\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1y_2 - y_1x_2).}$$

Formule si ne rabimo zapomniti na pamet, saj že znamo (s Sarrusovim pravilom) izračunati determinante reda 3. Velja namreč:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \\ &= y_1z_2\overrightarrow{i} + z_1x_2\overrightarrow{j} + x_1y_2\overrightarrow{k} - x_2y_1\overrightarrow{k} - y_2z_1\overrightarrow{i} - z_2x_1\overrightarrow{j} \\ &= (y_1z_2 - y_2z_1)\overrightarrow{i} + (z_1x_2 - z_2x_1)\overrightarrow{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\overrightarrow{k} \\ &= (y_1z_2 - y_2z_1, z_1x_2 - z_2x_1, x_1y_2 - x_2y_1). \end{aligned}$$

Primer 154 *Izračunaj vektorski produkt vektorjev* $\overrightarrow{a} = (1, 0, 3)$ *in* $\overrightarrow{b} = (-1, 1, 2)$.

Rešitev:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= 0\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} - 0\overrightarrow{k} - 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} \\ &= -3\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} \\ &= (-3, -5, 1). \end{aligned}$$

Postopek računanja vektorskega produkta si lahko še poenostavimo, če si zgornjo determinanto predstavljamo razvito po prvi vrstici. Tako so skalarji, ki stojijo pred vektorji $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ *dejansko kofaktorji k tem elementom v pripadajoči determinanti. Tako je prvi element urejene trojice, tj. skalar poleg* $\overrightarrow{i}$, *enak* $0 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = -3$, *drugi element* $-(1 \cdot 2 - (-1) \cdot 3) = -5$, *tretji pa* $1 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 = 1$.

Primer 155 *Določi ploščino trikotnika $\triangle ABC$, če je $A(1,2,0), B(3,1,-1)$ in $C(0,2,1)$.*

Rešitev: *Ploščina p trikotnika $\triangle ABC$ je enaka polovici ploščine paralelograma, ki ga oklepata vektorja $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, le-ta pa je enaka dolžini vektorskega produkta $\vec{a} \times \vec{b}$. Tako velja*

$$p = \frac{1}{2}\|\vec{a} \times \vec{b}\|.$$

Najprej izračunajmo koordinate vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \vec{r_B} - \vec{r_A} = (2,-1,-1) \quad \text{in} \quad \vec{b} = \overrightarrow{AC} = \vec{r_C} - \vec{r_A} = (-1,0,1).$$

Tako je

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-1,-1)$$

in od tukaj $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$. Zato je $p = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Za poljubne vektorje $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ in $\vec{d}$ ter poljuben skalar λ velja:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$,
2. $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$,
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$,
4. $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$,
5. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$,
6. $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}$ (Jacobijeva identiteta),
7. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$ (Lagrangeova identiteta).

Vse zgornje lastnosti lahko dokažemo tako, da vektorje zapišemo v splošnem kot linearne kombinacije standardnih baznih vektorjev (npr. $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, itd.), nato pa pokažemo, da na obeh straneh enačaja dobimo enak vektor. Dokaze prepuščamo bralcu kot nalogo za samostojno reševanje. Ker velja 2. lastnost, lahko oklepaje tudi opustimo:

$$(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \lambda\vec{a} \times \vec{b}.$$

Primer 156 *Podana sta vektorja* $\overrightarrow{a} = (-1,1,0)$ *in* $\overrightarrow{b} = (1,1,-2)$. *Izračunaj* $(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}) \times (5\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b})$.

Rešitev: *Naloge se lahko lotimo na dva načina. Pri prvem načinu najprej izračunamo koordinate vektorjev* $3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$ *in* $5\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$*:*

$$3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} = (-3,3,0) - (2,2,-4) = (-5,1,4),$$

$$5\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} = (-5,5,0) + (2,2,-4) = (-3,7,-4).$$

Sedaj izračunamo še produkt

$$(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}) \times (5\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -5 & 1 & 4 \\ -3 & 7 & -4 \end{vmatrix} = (-32,-32,-32).$$

Pri drugem načinu najprej poenostavimo izraz, nato pa izračunamo $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$*:*

$$\begin{aligned} (3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}) \times (5\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}) &= 15\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} + 6\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} - 10\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{b} \\ &= 6\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + 10\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \\ &= 16\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = 16(-2,-2,-2) = (-32,-32,-32). \end{aligned}$$

Primer 157 *Vektorja* $\overrightarrow{a}$ *in* $\overrightarrow{b}$ *oklepata kot* $\varphi = \frac{\pi}{3}$. *Izračunaj ploščino p paralelograma, ki ga določata vektorja* $2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ *in* $4\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}$, *če je* $\|\overrightarrow{a}\| = 4$ *in* $\|\overrightarrow{b}\| = 5$.

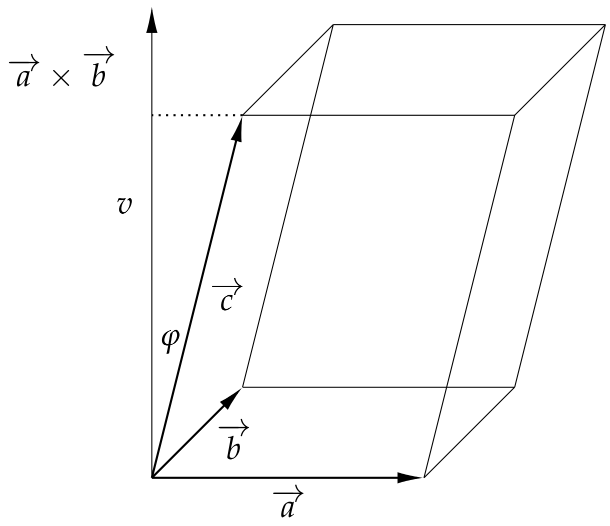
Rešitev:

$$\begin{aligned} p &= \|(2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times (4\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b})\| \\ &= \|8\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} - 6\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + 4\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{b}\| \\ &= \|10\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}\| = 10\|\overrightarrow{b}\|\|\overrightarrow{a}\| \sin\varphi \\ &= 10 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \sin\frac{\pi}{3} = 200 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{3}. \end{aligned}$$

3.2.3 *Mešani produkt vektorjev*

> **Mešani produkt vektorjev** $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{c}$ je skalar $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}$, ki ga označimo z $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.

Oglejmo si geometrijski pomen mešanega produkta. **Paralelepiped** je geometrijsko telo, ki spada med prizme[2], njegova osnovna ploskev pa je paralelogram. Vsak rob paralelepipeda je vzporeden in skladen trem drugim, vsaka ploskev je



Slika 18: Paralelepiped.

vzporedna in skladna nasprotni ploskvi. V prostoru je določen s tremi vektorji, rečemo tudi, da vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *napenjajo* paralelepiped, glej sliko 18.

Izkaže se, da je absolutna vrednost mešanega produkta $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ enaka prostornini V paralelepipeda, napetega na vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$:

$$\boxed{V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.}$$

Premislimo, zakaj to velja. Naj bo φ kot med vektorjema $\vec{c}$ in $\vec{a} \times \vec{b}$, z v pa označimo višino paralelepipeda. Potem je $\cos\varphi = \frac{v}{\|\vec{c}\|}$ in zato $v = \|\vec{c}\| \cos\varphi$ oz. natančneje $v = \|\vec{c}\| |\cos\varphi|$ (v primeru topega kota φ namreč velja $\cos(\pi - \varphi) = \frac{v}{\|\vec{c}\|}$, od koder sledi $v = \cos(\pi - \varphi)\|\vec{c}\| = -\cos\varphi\|\vec{c}\|$, kar je enako $v = |\cos\varphi|\|\vec{c}\|$, saj je $\cos\varphi$ negativen). Ploščina osnovne ploskve (paralelograma) je, kot že vemo, enaka $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$. Ker se volumen vsake prizme (in s tem tudi paralelepipeda) izračuna kot produkt ploščine osnovne ploskve in višine, tako izpeljemo:

$$\begin{aligned} V = O \cdot v &= \|\vec{a} \times \vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \cdot |\cos\varphi| \\ &= |\|\vec{a} \times \vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \cdot \cos\varphi| = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|. \end{aligned}$$

Predzadnjo enakost smo dobili z upoštevanjem, da je skalarni produkt vektorjev enak produktu njegovih dolžin s kosinusom vmesnega kota.

2 Prizma je oglato geometrijsko telo, omejeno z dvema osnovnima ploskvama (ki sta skladna in vzporedna n-kotnika) in plaščem (ki je sestavljen iz n paralelogramov, ki povezujejo obe osnovni ploskvi).

Iz izpeljane formule $V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$ vidimo, da je mešani produkt enak 0 natanko tedaj, ko je volumen paralelepipeda enak 0. Slednje se v primeru, ko so vsi vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ neničelni, zgodi natanko tedaj, ko $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ležijo v isti ravnini. Zato si bomo z mešanim produktom lahko pomagali pri preverjanju ali dani trije vektorji ležijo v isti ravnini. Ugotovljeno lastnost zapišimo še v obliki trditve.

Trditev 158 *Neničelni vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ležijo v isti ravnini natanko tedaj, ko je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.*

Privzemimo sedaj, da neničelni vektorji $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$ ne ležijo v isti ravnini. Potem je mešani produkt vektorjev $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ pozitiven natanko tedaj, ko le-ti tvorijo pozitivno orientirano trojico v prostoru. Takrat je namreč $\cos\varphi \geq 0$ (kjer je φ kot med vektorjema $\vec{c}$ in $\vec{a} \times \vec{b}$) in tako dobimo

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \cdot \cos\varphi \geq 0.$$

Za uporabno se bo izkazala tudi naslednja lastnost mešanega produkta.

Izrek 159 *(Cikličnost mešanega produkta) Za poljubne vektorje $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$ velja*

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) =$$
$$= -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}).$$

Dokaz. Naj bodo $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$. Potem je

$$\begin{aligned}
(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot (x_3, y_3, z_3) \\
&= (y_1z_2 - y_2z_1, -(x_1z_2 - x_2z_1), x_1y_2 - x_2y_1) \cdot (x_3, y_3, z_3) \\
&= y_1z_2x_3 - y_2z_1x_3 - x_1z_2y_3 + x_2z_1y_3 + x_1y_2z_3 - x_2y_1z_3.
\end{aligned} \tag{3}$$

Enak izraz dobimo tudi, če izračunamo

$$\begin{aligned}
(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \cdot (x_1, y_1, z_1) \\
&= (y_2z_3 - y_3z_2, -(x_2z_3 - x_3z_2), x_2y_3 - x_3y_2) \cdot (x_1, y_1, z_1) \\
&= x_1y_2z_3 - x_1y_3z_2 - x_2z_3y_1 + x_3z_2y_1 + x_2y_3z_1 - x_3y_2z_1.
\end{aligned}$$

Tako smo dokazali enakost $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$, na podoben način se lahko prepričamo tudi v vse ostale enakosti. ∎

Izračunajmo determinanto

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3 - x_3y_2z_1 - y_3z_2x_1 - z_3x_2y_1.$$

Tudi tokrat smo dobili enak izraz kot v zgornjem dokazu (glej izpeljavo (3)). Zato za vektorje $\overrightarrow{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\overrightarrow{c} = (x_3, y_3, z_3)$ velja

$$\boxed{(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.}$$

Primer 160 *Izračunaj prostornino paralelepipeda, napetega na vektorje* $\overrightarrow{a} = (0, 2, 3)$, $\overrightarrow{b} = (1, -1, 2)$ *in* $\overrightarrow{c} = (5, 2, 1)$.

Rešitev:

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 20 + 6 - (-15 + 0 + 2) = 39.$$

Torej je $V = |(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})| = 39$.

Primer 161 *Volumen paralelepipeda, napetega na vektorje* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *in* $\overrightarrow{c}$ *je* $4\ cm^3$. *Kolikšen je volumen V paralelepipeda, napetega na vektorje* $3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}, 2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}, 2\overrightarrow{b} + 3\overrightarrow{c}$?

Rešitev: *Izračunajmo mešani produkt:*

$$\begin{aligned}
& (3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}, 2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}, 2\overrightarrow{b} + 3\overrightarrow{c}) \\
= \ & ((3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}) \times (2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c})) \cdot (2\overrightarrow{b} + 3\overrightarrow{c}) \\
= \ & (6\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} - 4\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) \cdot (2\overrightarrow{b} + 3\overrightarrow{c}) \\
= \ & 6(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{b} - 8(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} - 4(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{b} \\
& +9(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{c} - 12(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{c} - 6(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{c} \\
= \ & 6(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}) - 12(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) \\
= \ & 6(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}) - 12(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}) = -6(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}).
\end{aligned}$$

Od tod sedaj dobimo

$$V = |-6(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b})| = 6|(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})| = 6 \cdot 4 = 24\ cm^3.$$

Primer 162 *Kolikšna mora biti vrednost parametra λ, da bodo vektorji $\vec{a} = (3, 1, -1)$, $\vec{b} = (0, 1, \lambda)$ in $\vec{c} = (\lambda, 2, 0)$ ležali v isti ravnini?*

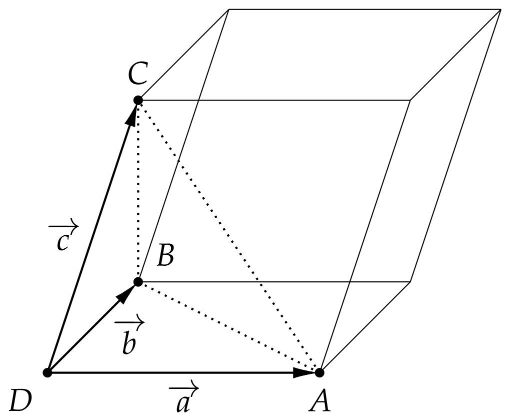
Rešitev: *Vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ležijo v isti ravnini natanko takrat, ko je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.*

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda \\ \lambda & 2 & 0 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6\lambda = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5) = 0,$$

od koder dobimo $\lambda_1 = 0$ ali $\lambda_2 = 5$.

Brez dokaza navedimo naslednjo lastnost: prostornina tristrane piramide, ki jo določajo trije vektorji, je enaka $\frac{1}{6}$ prostornine paralelepipeda, določenega s temi vektorji. Torej prostornino tristrane piramide z oglišči A, B, C in D lahko izračunamo po formuli:

$$V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|.$$



Slika 19: Tristrana piramida znotraj paralelepipeda.

Primer 163 *Izračunaj prostornino piramide z oglišči v točkah $A(-1, 4, 3)$, $B(-1, 0, 0)$, $C(1, 1, -3)$ in $D(2, -1, 1)$.*

Rešitev: *Najprej izračunajmo koordinate vektorjev med točkami: $\vec{a} = \overrightarrow{DA} = (-3, 5, 2)$, $\vec{b} = \overrightarrow{DB} = (-3, 1, -1)$, $\vec{c} = \overrightarrow{DC} = (-1, 2, -4)$. Prostornina piramide je $\frac{1}{6}$ prostornine paralelepipeda, napetega na vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, torej $V = \frac{1}{6}|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$. Zato najprej izračunajmo mešani produkt in njegovo absolutno vrednost.*

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 12 + 5 - 12 - (-2 + 6 + 60) = -59.$$

Torej je $V = \frac{1}{6}|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \frac{1}{6}|-59| = \frac{59}{6}$.

3.2.4 *Preveri svoje znanje (o produktih vektorjev)*

Vprašanja iz teorije

1. Kako je definiran skalarni produkt?
2. Naštej lastnosti skalarnega produkta.
3. Kako je definiran kot med vektorjema in kako ga izračunamo?
4. Kako s pomočjo produktov vektorjev preverimo, ali sta vektorja pravokotna oz. ali sta vzporedna?
5. Kako izračunamo pravokotno projekcijo nekega vektorja na drug vektor?
6. Kako je definiran vektorski produkt?
7. Pojasni geometrijski pomen vektorskega produkta.
8. Kaj je pozitivno orientirana trojica vektorjev?
9. Kako izračunamo vektorski produkt dveh vektorjev, če poznamo njune koordinate?
10. Kako lahko s pomočjo vektorjev izračunamo ploščino trikotnika določenega s tremi točkami v prostoru?
11. Kako je definiran mešani produkt?
12. Pojasni geometrijski pomen mešanega produkta.
13. Kako je s komutativnostjo vseh treh vrst produktov vektorjev?
14. Kako s pomočjo vektorjev preverimo, ali dane štiri točke ležijo v isti ravnini?
15. Pojasni lastnost mešanega produkta, ki ji pravimo cikličnost mešanega produkta.
16. Kako s pomočjo vektorjev izračunamo volumen tristrane piramide?

Rešene naloge

Naloga 164 *Poišči kot med vektorjema $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ in $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$.*

Rešitev: *Velja $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} = (1,1,0)$ in $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k} = (0,1,1)$. Ker je $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\varphi$, velja $\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$. Sedaj poračunamo $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1,1,0) \cdot (0,1,1) = 0+1+0 = 1$, $\|\vec{a}\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ in $\|\vec{b}\| = \sqrt{2}$. Tako dobimo $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ in $\varphi = \arccos\frac{1}{2} = 60^\circ$.*

Naloga 165 *Naj bosta* $\overrightarrow{e} = 3\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ *in* $\overrightarrow{f} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - 6\overrightarrow{k}$ *diagonali paralelograma. Pokaži, da je ta paralelogram romb, izračunaj dolžino njegove stranice in en notranji kot.*

Rešitev: *Da pokažemo, da je paralelogram dejansko romb (torej paralelogram z vsemi štirimi stranicami skladnimi), zadošča pokazati, da se diagonali sekata pod pravim kotom. Res,* $\overrightarrow{e}$ *in* $\overrightarrow{f}$ *sta pravokotna vektorja, saj je* $\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{f} = 6 - 12 + 6 = 0$.

Če v paralelogramu oglišča označimo z A, B, C, D *in je* $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{DB}$ *ter* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ *in* $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AD}$, *potem velja* $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ *in* $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$. *Če zadnji enačbi seštejemo, lahko iz dobljene enačbe izrazimo:* $\overrightarrow{a} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{e} + \overrightarrow{f}) = \frac{1}{2}(5, -1, -7)$. *Od tod pa sledi, da je* $\|\overrightarrow{a}\| = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Za izračun kota φ *med vektorjema* $\overrightarrow{a}$ *in* $\overrightarrow{b}$ *najprej potrebujemo vektor* $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{e} - \overrightarrow{a} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$. *Sedaj lahko izračunamo* $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = -\frac{23}{4}$. *Tako imamo vse potrebne podatke, ki jih vstavimo v formulo* $\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|\|\overrightarrow{b}\|} = -\frac{23}{75}$. *Tako dobimo* $\varphi = \arccos(-\frac{23}{75}) = 107.86°$.

Naloga 166 *Naj bo* $\overrightarrow{a} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{b} = (-1, 2, 3)$, $\overrightarrow{c} = (1, 2, 3)$. *Izračunaj*

(*a*) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ *ter* $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$,

(*b*) $(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$,

(*c*) $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}) \times (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c})$.

Rešitev:

(*a*)

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (1, -4, 3), \ \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} = (-1, 4, -3),$$

(*b*)

$$(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 8 & 11 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-5, 20, -15),$$

(*c*)

$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}) \times (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -(0+8), +6) = (0, -8, 6).$$

Naloga 167 *Izračunaj naslednje vektorske in skalarne produkte, kjer je* $\overrightarrow{a} = (1, 2, 1)$, $\overrightarrow{b} = (1, -1, 0)$, $\overrightarrow{c} = (1, 1, -1)$:

(a) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$,

(b) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$,

(c) $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$,

(d) $(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{a}$,

(e) $(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})\overrightarrow{c}$,

(f) $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}$,

(g) $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{b})$.

Rešitev:

(a) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = (1,2,1) \cdot (1,-1,0) = 1 - 2 = -1$,

(b) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1,1,-3)$,

(c) $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = (1,2,1) \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1,2,1) \cdot (1,1,2) = 1 + 2 + 2 = 5$,

(d) $(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{a} = ((1,-1,0) \cdot (1,1,-1))\,(1,2,1) = (1-1)(1,2,1) = \overrightarrow{0}$,

(e) $(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})\overrightarrow{c} = -1 \cdot (1,1,-1) = (-1,-1,1)$,

(f) $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot (1,1,-1) = (1,1,-3) \cdot (1,1,-1) = 1 + 1 + 3 = 5$,

(g) $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{b}) = (1,2,1) \cdot \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 - 2 - 2 = -5$.

Naloge za samostojno reševanje

Naloga 168 *Določi x tako, da bosta vektorja $\overrightarrow{a} = (2, x, 1)$ in $\overrightarrow{b} = (x + 1, x - 1, -2)$ pravokotna.*

Rešitev: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$.

Naloga 169 *Dan je enakostranični trkotnik ABC s stranico 4 cm. Izračunaj skalarni produkt* $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Rešitev: $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} = -8$. *(Namig: spomnimo se, da kot med vektorjema lahko razberemo, če sta vektorja postavljena s skupno izhodišče.)*

Naloga 170 *Poišči kot med vektorjema* $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{m} + \overrightarrow{n}$ *in* $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{m} - \overrightarrow{n}$, *če je* $\|\overrightarrow{m}\| = \|\overrightarrow{n}\|$.

Rešitev: *Iskani kot je* $\frac{\pi}{2}$.

Naloga 171 *Dana je kocka ABCDEFGH. Naj bo M razpolovišče roba GH in N razpolovišče roba CG. Izračunaj kot* φ *med vektorjema* $\overrightarrow{AM}$ *in* $\overrightarrow{AN}$.

Rešitev: $\varphi \doteq 27°16'$.

Naloga 172 *Izračunaj* $\|\overrightarrow{a} \times 2\overrightarrow{b}\|$, *če je* $\|\overrightarrow{a}\| = 6$, $\|\overrightarrow{b}\| = 5$, *kot med vektorjema* $\overrightarrow{a}$ *in* $\overrightarrow{b}$ *pa je enak* $\frac{\pi}{4}$.

Rešitev: $\|\overrightarrow{a} \times 2\overrightarrow{b}\| = 30\sqrt{2}$.

Naloga 173 *Stranici paralelograma merita 3 cm in 4 cm, ploščina pa 6 cm*^{2}. *Izračunaj kot med stranicama. Koliko rešitev je možnih?*

Rešitev: *Možni sta dve rešitvi:* $30°$ *in* $150°$.

Naloga 174 *Izračunaj ploščino p trikotnika z oglišči* $A(1,3,2)$, $B(2,-1,1)$, $C(-1,2,3)$.

Rešitev: $p = \frac{1}{2}\sqrt{107}$.

Naloga 175 *Izračunaj ploščino p paralelograma, katerega vektorja na diagonali sta enaka* $\overrightarrow{d_1} = 4\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$ *ter* $\overrightarrow{d_2} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 7\overrightarrow{k}$.

Rešitev: $p = \frac{3\sqrt{43}}{2}$.

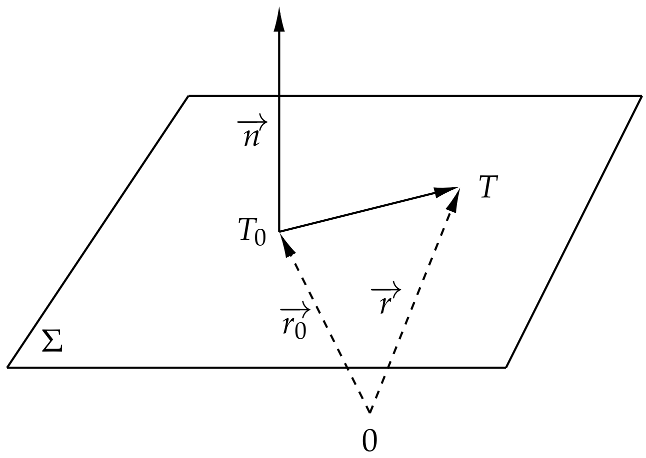
3.3 RAVNINA IN PREMICA V PROSTORU

3.3.1 *Ravnina v prostoru*

Naj bo $T_0(x_0, y_0, z_0)$ dana točka v ravnini Σ in $\overrightarrow{n} = (a,b,c) \neq \overrightarrow{0}$ vektor, ki je pravokoten na ravnino Σ (takemu vektorju rečemo **normalni vektor**). Poiskati enačbo ravnine v prostoru pomeni poiskati zvezo med koordinatami poljubne točke $T(x,y,z)$ v ravnini. Z $\overrightarrow{r_0}$ označimo krajevni vektor (dane) točke T_0, z $\overrightarrow{r}$ pa krajevni vektor (poljubne) točke T v ravnini Σ, glej sliko 20. Vektor $\overrightarrow{T_0T} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}$ leži v ravnini Σ in je zato pravokoten na normalni vektor $\overrightarrow{n}$, zato je njun skalarni produkt enak 0. Tako smo izpeljali naslednje.

Vektorska oblika enačbe ravnine je:

$$(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}) \cdot \overrightarrow{n} = 0.$$



Slika 20: Ravnina v prostoru.

Vektorsko obliko enačbe ravnine postopoma izpišimo kot sledi:

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}) \cdot \overrightarrow{n} &= 0 \\
((x,y,z) - (x_0,y_0,z_0)) \cdot (a,b,c) &= 0 \\
(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a,b,c) &= 0 \\
ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 &= 0 \\
ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) &= 0.
\end{aligned}$$

Ker so x_0, y_0, z_0 in a, b, c konstante, določene z dano točko v ravnini oz. normalnim vektorjem, je konstanta tudi izraz $ax_0 + by_0 + cz_0$, ki ga lahko preimenujemo. Naj bo d enako $ax_0 + by_0 + cz_0$. Tako dobimo $ax + by + cz - d = 0$. S tem smo izpeljali naslednjo obliko enačbe ravnine.

Splošna oblika enačbe ravnine je

$$ax + by + cz = d,$$

kjer so a, b, c koordinate normalnega vektorja.

Splošno obliko enačbe ravnine bomo v literaturi našli tudi pod imenom **standardna** oziroma **normalna** oblika enačbe ravnine. Premislimo, da z drugo izbiro normalnega vektorja in točke v ravnini sicer dobimo drugačno enačbo, ki pa predstavlja isto ravnino. Naj bo T_1 točka v ravnini Σ (in $\vec{r_1}$ njen krajevni vektor), ki jo določata vektorja $\vec{r_0}$ in $\vec{n}$, $\vec{n_1}$ pa nek drug normalni vektor na ravnino Σ, kar pomeni, da je $\vec{n_1} = \lambda \vec{n}$ za nek skalar $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potem je

$$\begin{aligned}
(\vec{r} - \vec{r_1}) \cdot \vec{n_1} &= (\vec{r} - \vec{r_0} + \vec{r_0} - \vec{r_1}) \cdot \lambda \vec{n} \\
&= \lambda(\vec{r} - \vec{r_0}) \cdot \vec{n} + \lambda(\vec{r_0} - \vec{r_1}) \cdot \vec{n} \\
&= \lambda(\vec{r} - \vec{r_0}) \vec{n},
\end{aligned}$$

saj je $\vec{r_0} - \vec{r_1}$ vektor v ravnini Σ in zato pravokoten na $\vec{n}$, kar pomeni, da je $(\vec{r_0} - \vec{r_1}) \cdot \vec{n} = 0$. Torej smo izpeljali, da je enačba $(\vec{r} - \vec{r_1}) \cdot \vec{n_1} = 0$ le λ-kratnik enačbe $(\vec{r} - \vec{r_0}) \cdot \vec{n} = 0$.

Primer 176 *Zapiši enačbo ravnine, ki gre skozi točko $T_0 = (4, -1, 1)$ in je pravokotna na vektor $\vec{n} = (-1, 2, 1)$.*

Rešitev: *Enačbo ravnine izračunajmo na dva načina.*

- *Če upoštevamo vektorsko obliko, dobimo:*

$$\begin{aligned}
(\vec{r} - \vec{r_0}) \cdot \vec{n} &= 0 \\
((x, y, z) - (4, -1, 1)) \cdot (-1, 2, 1) &= 0 \\
(x - 4, y + 1, z - 1) \cdot (-1, 2, 1) &= 0 \\
-x + 4 + 2y + 2 + z - 1 &= 0 \\
-x + 2y + z + 5 &= 0 \\
x - 2y - z &= 5.
\end{aligned}$$

- *Če v splošno obliko $ax + by + cz = d$ najprej vstavimo podatke o koordinatah normalnega vektorja, dobimo enačbo $-x + 2y + z = d$. Tako nam v enačbi ravnine manjka le še konstanta d. Ker točka T_0 leži v ravnini, morajo njene koordinate ustrezati tej enačbi. Če torej vstavimo koordinate točke T_0 v enačbo $-x + 2y + z = d$, sledi $-4 - 2 + 1 = d$, od koder dobimo $d = -5$. Tako smo še na drugi način dobili enačbo $-x + 2y + z = -5$ oz. $x - 2y - z = 5$.*

Primer 177 *Zapiši enačbo ravnine, ki gre skozi točke $A = (1, 1, 1), B(-1, 1, 1)$ in $C(0, 0, 1)$.*

Rešitev: *Videli smo, da v primeru, ko hočemo enačbo ravnine zapisati v vektorski ali splošni obliki, potrebujemo eno točko iz ravnine in normalni vektor ravnine. Tako nam manjka normalni vektor, ki pa ga bomo dobili kot vektorski produkt med dvema vektorjema med danimi tremi točkami (spomnimo se, da je vektorski produkt vektor, ki je pravokoten na oba vektorja v faktorjih, s tem pa tudi na ravnino, v kateri ta vektorja ležita). Vzemimo npr. vektorja $\vec{AB} = \vec{r_B} - \vec{r_A} = (-2, 0, 0)$ in $\vec{AC} = \vec{r_C} - \vec{r_A} = (-1, -1, 0)$. Tako je normalni vektor lahko vektor*

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 2),$$

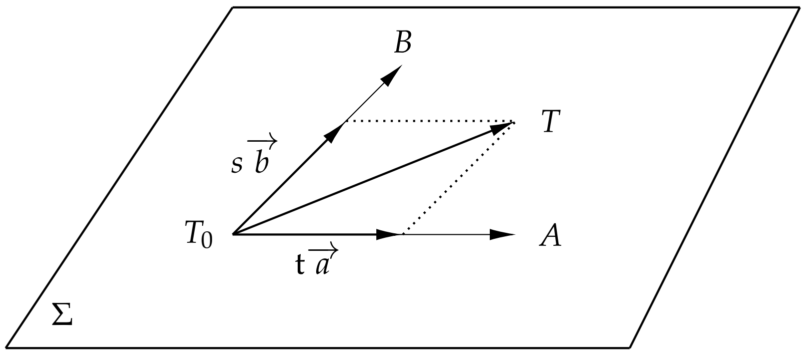
seveda pa lahko za normalni vektor vzamemo tudi katerikoli skalarni večkratnik tega vektorja, saj je bistvena lastnost normalnega vektorja le pravokotnost na ravnino. Tako lahko npr. za normalni vektor vzamemo tudi $\overrightarrow{n}_1 = (0, 0, 1)$*, kar nam v splošni obliki enačbe ravnine* $ax + by + cz = d$ *da* $1 \cdot z = d$ *oz.* $d = 1$*. Tako dobimo enačbo ravnine* $z = 1$ *(to je ravnina, ki je vzporedna xy-ravnini, le da je glede na to ravnino premaknjena za eno enoto navzgor).*

Točkam (oz. vektorjem), ki ležijo v isti ravnini, pravimo **komplanarne točke** (oz. **komplanarni vektorji**). Točke, ki ležijo na isti premici, so **kolinearne točke**. V nasprotnem primeru jih imenujemo **nekolinearne točke**. Prav tako so vektorji **kolinearni**, če jih lahko premaknemo tako, da ležijo na isti premici.

Izpeljimo še *parametrično obliko* enačbe ravnine. Naj bodo T_0, A in B dane nekolinearne točke v ravnini Σ. Potem sta vektorja $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{T_0A}$ in $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{T_0B}$ nekolinearna v ravnini Σ. Vektor $\overrightarrow{T_0T}$ (kjer je $T \in \Sigma$ poljubna točka ravnine) lahko razstavimo v smeri vektorjev $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ (glej sliko 21). S tem sta enolično določena taka parametra t in s, da je $\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0} = t\,\overrightarrow{a} + s\,\overrightarrow{b}$. Od tod sledi *parametrična oblika* enačbe ravnine.

Parametrična oblika enačbe ravnine je

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + s\,\overrightarrow{a} + t\,\overrightarrow{b}, s, t \in \mathbb{R}.$$



Slika 21: Ravnina, določena s tremi točkami.

Ob podanih treh nekolinearnih točkah $T_0(x_0, y_0, z_0)$, $A(x_1, y_1, z_1)$ in $B(x_2, y_2, z_2)$ lahko do enačbe ravnine pridemo tudi z naslednjim premislekom: vektorji $\overrightarrow{T_0A}$, $\overrightarrow{T_0B}$ in $\overrightarrow{T_0T}$ so komplanarni, torej je prostornina (izrojenega) paralelepipeda, ki ga ti vektorji določajo, enaka 0. Torej mora biti mešani produkt $(\overrightarrow{T_0T}, \overrightarrow{T_0A}, \overrightarrow{T_0B})$ enak 0. Koordinate vektorjev tega mešanega produkta so:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{T_0T} &= (x - x_0, y - y_0, z - z_0), \\
\overrightarrow{T_0A} &= (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0), \\
\overrightarrow{T_0B} &= (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0).
\end{aligned}$$

Kot že vemo, lahko mešani produkt vektorjev izračunamo s pomočjo determinante. Tako dobimo naslednjo formulo za enačbo ravnine.

Enačba ravnine skozi točke $T_0(x_0, y_0, z_0)$, $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$:

$$(\overrightarrow{T_0T}, \overrightarrow{T_0A}, \overrightarrow{T_0B}) = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

S pomočjo izpeljane formule poiščimo enačbo ravnine iz prejšnjega primera:

Primer 178 *Zapiši enačbo ravnine, ki gre skozi točke $A = (1, 1, 1), B(-1, 1, 1)$ in $C(0, 0, 1)$.*

Rešitev:

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y - 0 & z - 1 \\ 1 - 0 & 1 - 0 & 1 - 1 \\ -1 - 0 & 1 - 0 & 1 - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z - 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (z - 1) + (z - 1) = 0,$$

od koder sledi enačba ravnine $z = 1$.

3.3.2 *Premica v prostoru*

Naj bo $T_0(x_0, y_0, z_0)$ dana točka na premici p in $\overrightarrow{r_0}$ njen krajevni vektor. Naj bo $\overrightarrow{s} = (s_1, s_2, s_3)$ dani (neničelni) vektor, ki leži na premici p, glej sliko 22. Imenujemo ga **smerni vektor premice**. S točko T_0 in vektorjem $\overrightarrow{s}$ je premica p enolično določena. Naj bo $T(x, y, z)$ katerakoli točka na premici p in $\overrightarrow{r}$ njen krajevni vektor. Potem velja $\overrightarrow{T_0T} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0} = \lambda \overrightarrow{s}$ za nek $\lambda \in \mathbb{R}$ (vektorja $\overrightarrow{T_0T}$ in $\overrightarrow{s}$ sta namreč kolinearna) in

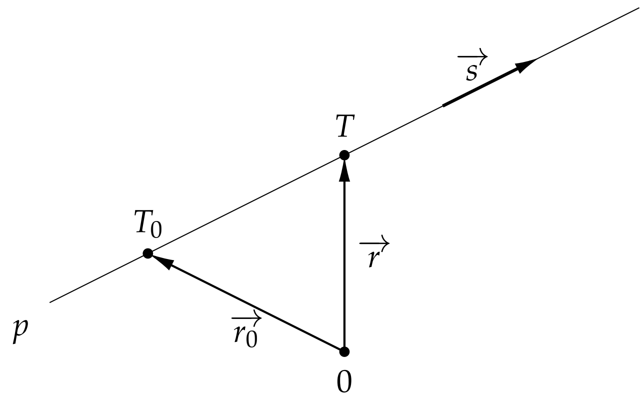
$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + \lambda \overrightarrow{s},$$

kjer sta $\overrightarrow{r}$ in $\overrightarrow{r_0}$ krajevna vektorja točk T oz. T_0. Poljubni točki na premici p ustreza natanko en λ in ko le-ta preteče vsa realna števila, dobimo vse točke na premici p. Tako dobimo *vektorsko obliko* enačbe premice.

Enačba

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + \lambda \overrightarrow{s}, \lambda \in \mathbb{R}$$

je **vektorska oblika enačbe premice**.



Slika 22: Premica v ravnini.

V vektorsko obliko enačbe premice sedaj vstavimo dane podatke. Tako dobimo:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r} &= \overrightarrow{r_0} + \lambda \overrightarrow{s} \\ (x, y, z) &= (x_0, y_0, z_0) + \lambda(s_1, s_2, s_3) \\ (x, y, z) &= (x_0 + \lambda s_1, y_0 + \lambda s_2, z_0 + \lambda s_3). \end{aligned}$$

Z upoštevanjem, da sta dva vektorja enaka, če se ujemata v istoležnih koordinatah, dobimo:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda s_1, \\ y &= y_0 + \lambda s_2, \\ z &= z_0 + \lambda s_3. \end{aligned}$$

S tem smo izpeljali *parametrično obliko* enačbe premice.

Parametrična oblika enačbe premice, ki vsebuje točko $T_0(x_0, y_0, z_0)$ in vektor $\overrightarrow{s} = (s_1, s_2, s_3)$ je

$$x = x_0 + \lambda s_1, \quad y = y_0 + \lambda s_2, \quad z = z_0 + \lambda s_3, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Iz prve izmed enačb iz zgornje parametrične oblike enačbe premice sledi, da je $x - x_0 = \lambda s_1$. Ob pogoju, da je $s_1 \neq 0$, dobimo $\lambda = \frac{x-x_0}{s_1}$. Podobno, če predpostavimo, da je $s_2 \neq 0$ in $s_3 \neq 0$, dobimo $\lambda = \frac{y-y_0}{s_2}$ ter $\lambda = \frac{z-z_0}{s_3}$. Z enačenjem dobljenih ulomkov (ki so vsi enaki λ), tako izpeljemo *normalno obliko* enačbe premice[3].

Če predpostavimo, da vektor $\overrightarrow{s} = (s_1, s_2, s_3)$ na premici p ne leži v nobeni od koordinatnih ravnin (tj. $s_1 s_2 s_3 \neq 0$), lahko zapišemo **normalno obliko enačbe premice**, ki vsebuje točko $T_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2} = \frac{z - z_0}{s_3}.$$

Primer 179 *Zapišimo enačbo premice p, ki gre skozi točki $T_1(1,0,1)$ in $T_2(1,-1,0)$. Ali točki $A(1,2,5)$ in $B(1,4,5)$ ležita na premici p?*

Rešitev: *Najprej poiščimo smerni vektor premice p:*

$$\overrightarrow{s} = \overrightarrow{T_1 T_2} = (0, -1, -1).$$

Koordinate tega vektorja in ene izmed točk, npr. točke T_1 vstavimo v vektorsko obliko enačbe premice $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_1} + \lambda \cdot \overrightarrow{s}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Tako dobimo

$$\overrightarrow{r} = (1,0,1) + \lambda \cdot (0,-1,-1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Če koordinate vektorja $\overrightarrow{s}$ in točke T_1 vstavimo v parametrično obliko enačbe premice, dobimo

$$\begin{aligned} x &= 1, \\ y &= -\lambda, \\ z &= 1 - \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Normalne oblike ne moremo zapisati, saj ni izpolnjen pogoj $s_1 s_2 s_3 \neq 0$. Lahko pa z enačenjem parametra λ iz zadnjih dveh enačb parametrične oblike dobimo naslednji zapis enačbe premice:

$$x = 1, \quad -y = -z + 1,$$

oz.

$$x = 1, \quad y = z - 1.$$

Prva koordinata točke $A(1,2,5)$ je sicer res enaka 1, toda drugi dve koordinti ne zadoščata zvezi $y = z - 1$, zato točka A ne leži na premici p, kar zapišemo $A \notin p$. Ali točka

3 To obliko enačbe premice najdemo v literaturi tudi pod imenom *kanonska* ali *kanonična* oblika enačbe premice.

$B(1,4,5)$ leži na premici p, preverimo npr. s pomočjo parametrične oblike. Če velja $B \in p$, mora veljati

$$\begin{aligned} 1 &= 1, \\ 4 &= -\lambda, \\ 5 &= 1-\lambda, \end{aligned}$$

za nek $\lambda \in \mathbb{R}$. Res, iz druge enačbe dobimo $\lambda = -4$, kar pa ustreza tudi zadnji enačbi. Zato $B \in p$.

Primer 180 *Zapišimo enačbo premice p, ki gre skozi točko $A(2,1,3)$ in vsebuje vektor $\overrightarrow{s} = (0,0,3)$.*

Rešitev: *Ker je $s_1 s_2 s_3 = 0$, ne moremo uporabiti normalne oblike enačbe premice. Če dane podatke vstavimo v parametrično obliko enačbe premice, dobimo*

$$\begin{aligned} x =& 2 + \lambda \cdot 0 \\ y =& 1 + \lambda \cdot 0 \\ z =& 3 + \lambda \cdot 3 \end{aligned}$$

za $\lambda \in \mathbb{R}$, od koder sledi končna rešitev

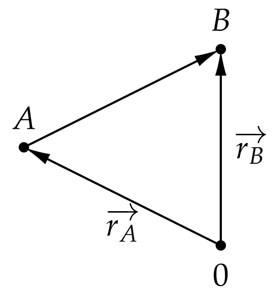
$$x = 2, \quad y = 1, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Namreč, ko λ preteče vsa realna števila, jih s tem tudi z, kar vidimo iz tretje enačbe parametrične oblike.

3.3.3 *Razdalje med točkami, premicami in ravninami*

Razdalja med točkama

Če imata točki A in B krajevna vektorja $\overrightarrow{r_A}$ in $\overrightarrow{r_B}$, je razdalja med njima enaka $d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A}\|$, glej sliko 23.



Slika 23: Razdalja med točkama.

Primer 181 *Izračunajmo razdaljo med točkama* $A(6,1,-3)$ *in* $B(2,0,-4)$.

Rešitev: *Vektor* $\overrightarrow{AB}$ *med točkama* A *in* B *je enak* $\overrightarrow{AB} = (2,0,-4) - (6,1,-3) = (-4,-1,-1)$, *od tod pa dobimo*

$$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{16+1+1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

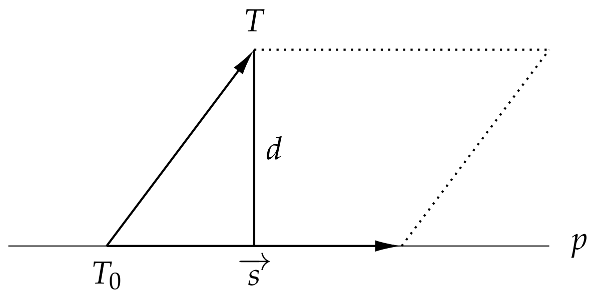
Razdalja med točko in premico

Naj bo p premica v prostoru, ki je določena s točko T_0 in smernim vektorjem $\overrightarrow{s}$, T pa poljubna točka v prostoru. Razdalja od točke T do premice p, ki jo označimo $d(T,p)$ oz. na kratko kar d, je definirana kot najkrajša razdalja med dano točko T in neko točko na premici. To pomeni, da je d razdalja med T in njeno pravokotno projekcijo na premico p. Če je $T \in p$, je seveda $d = 0$, zato sedaj predpostavimo, da točka T ne leži na premici p. Smerni vektor $\overrightarrow{s}$ premice p postavimo tako, da njegova začetna točka sovpada z začetno točko vektorja $\overrightarrow{T_0T}$. Tako vektorja $\overrightarrow{s}$ in $\overrightarrow{T_0T}$ določata paralelogram, katerega višina je ravno enaka d (glej sliko 24). Po eni strani tako lahko njegovo ploščino dobimo kot produkt osnovnice in višine $\|\overrightarrow{s}\| \cdot d$, po drugi strani pa tudi kot dolžino vektorskega produkta $\overrightarrow{s} \times \overrightarrow{T_0T}$. Tako velja

$$\|\overrightarrow{s}\| \cdot d = \|\overrightarrow{s} \times \overrightarrow{T_0T}\|,$$

od koder izpeljemo formulo za izračun razdalje od točke T do premice p:

$$d(T,p) = \frac{\|\overrightarrow{s} \times \overrightarrow{T_0T}\|}{\|\overrightarrow{s}\|}.$$



Slika 24: Razdalja med točko in premico.

Primer 182 *Izračunajmo razdaljo točke* $T(1,-3,4)$ *do premice* $\frac{2x-1}{4} = \frac{-3y+1}{7} = \frac{2z+3}{5}$.

Rešitev: *Enačba premice spominja na normalno obliko. Toda podatke o točki in vektorju na njej, ki jih potrebujemo pri izračunu razdalje, bomo lahko razbrali šele po ustreznem krajšanju ulomkov. Doseči namreč želimo, da so konstante pred* x, y *in* z *v* *zgornjih ulomkih enake* 1*. Tako prvi ulomek okrajšamo z* 2*, drugega z* -3 *in tretjega z* 2*. Tako dobimo*

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{2}=\frac{y-\frac{1}{3}}{-\frac{7}{3}}=\frac{z+\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}}.$$

Od tod sedaj lahko iz števcev razberemo koordinate točke T_0 *na premici, ki so* $(\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{3}{2})$ *(v zadnjem števcu si namesto* $z+\frac{3}{2}$ *predstavljamo* $z-(-\frac{3}{2})$ *in dobljeno enačbo premice primerjamo z normalno obliko premice). Iz imenovalcev so razvidne koordinate vektorja na premici:* $\vec{s}=(2,-\frac{7}{3},\frac{5}{2})$*. Opazimo naslednje: če vektor* $\vec{s}$ *pomnožimo s 6 (z namenom, da se znebimo ulomkov), s tem dobimo vektor* $\vec{s_1}=6\cdot\vec{s}=(12,-14,15)$*, ki prav tako leži na premici* p*, zato ga lahko uporabimo pri računanju razdalje* $d(T,p)$*, ki jo bomo dobili po formuli*

$$d(T,p)=\frac{\|\vec{s}_1\times\overrightarrow{T_0T}\|}{\|\vec{s}_1\|}.$$

Najprej potrebujemo koordinate vektorja $\overrightarrow{T_0T}$*:*

$$\overrightarrow{T_0T}=(1,-3,4)-\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},-\frac{10}{3},\frac{11}{2}\right).$$

Sedaj lahko izračunamo

$$\vec{s}_1\times\overrightarrow{T_0T}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 12 & -14 & 15\\ \frac{1}{2} & -\frac{10}{3} & \frac{11}{2}\end{vmatrix}=\left(-27,-\frac{117}{2},-33\right).$$

Vse je pripravljeno za izračun končnega rezultata

$$d(T,p)=\frac{\sqrt{(-27)^2+(-\frac{117}{2})^2+(-33)^2}}{\sqrt{12^2+(-14)^2+15^2}}\approx 3.045.$$

Razdalja med točko in ravnino

Dana je točka A s krajevnim vektorjem $\vec{r_A}$ in ravnina Σ. Razdaljo med točko in ravnino $d(A,\Sigma)$ izračunamo tako, da točko A pravokotno projiciramo na ravnino (s tem dobimo točko A') ter izračunamo razdaljo med točkama A in A', glej sliko 25.

Naj bo p pravokotnica na ravnino Σ, ki vsebuje točko A. Normalni vektor $\vec{n}$ ravnine Σ je ravno enak smernemu vektorju premice p, ki poteka skozi točko A in ima zato enačbo

$$\vec{r}=\vec{r_A}+\lambda\cdot\vec{n},\lambda\in\mathbb{R}.$$

Ker točka A' leži na premici p, tej enačbi zadošča, torej je

$$\vec{r_{A'}}=\vec{r_A}+k\cdot\vec{n}, \tag{5}$$

za nek določen $k \in \mathbb{R}$. Ravnina Σ naj bo podana z enačbo $ax + by + cz = d$. To pomeni, da so a, b, c, d znani koeficienti, pri čemer a, b, c predstavljajo koordinate normalnega vektorja $\vec{n}$. Opazimo, da lahko enačbo $ax + by + cz = d$ zapišemo tudi kot $\vec{n} \cdot \vec{r} = d$, kjer je $\vec{r}$ krajevni vektor do poljubne točke $T(x, y, z)$ v ravnini Σ. Ker je $A' \in \Sigma$, sledi

$$\vec{n} \cdot \vec{r_{A'}} = d. \tag{6}$$

Če v enačbi (6) upoštevamo enakost (5), izpeljemo

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot (\vec{r_A} + k\vec{n}) &= d, \\ \vec{n} \cdot \vec{r_A} + k\|\vec{n}\|^2 &= d, \end{aligned}$$

od koder sledi

$$k = \frac{d - \vec{r_A} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}.$$

Sedaj imamo vse potrebno za zaključek izpeljave:

$$\begin{aligned} d(A, \Sigma) &= d(A, A') = \|\overrightarrow{AA'}\| = \|\vec{r_{A'}} - \vec{r_A}\| \\ &= \|k \cdot \vec{n}\| = |k| \cdot \|\vec{n}\| \\ &= \tfrac{|d - \vec{r_A} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \\ &= \tfrac{|\vec{r_A} \cdot \vec{n} - d|}{\|\vec{n}\|}. \end{aligned}$$

Če koordinate točke A označimo (x_A, y_A, z_A), potem lahko zadnji izraz v zgornji izpeljavi še preoblikujemo in dobimo naslednje.

> Razdalja točke $A(x_A, y_A, z_A)$ do ravnine Σ z enačbo $ax + by + cz - d = 0$ je enaka
>
> $$d(A, \Sigma) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

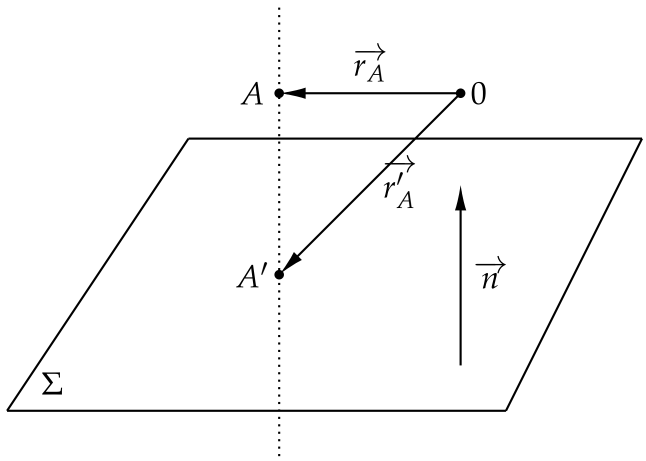
Primer 183 *Izračunajmo razdaljo med točko $A(2, 1, 5)$ in ravnino Σ podane z enačbo $x - 2y + 2z = 3$. Izračunajmo še $d(B, \Sigma)$, kjer je $B(1, -1, 0)$.*

Rešitev:

$$d(A, \Sigma) = \frac{|x - 2y + 2z - 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|2 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 5 - 3|}{\sqrt{9}} = \frac{7}{3}.$$

$$d(B, \Sigma) = \frac{|x - 2y + 2z - 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|1 - 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{9}} = 0,$$

kar pomeni, da točka B leži v ravnini Σ.



Slika 25: Razdalja med točko in ravnino.

Razdalja med premicama, ki se sekata ali sta vzporedni

Po definiciji je razdalja med dvema premicama enaka najkrajši razdalji med točkama iz obeh premic. Tako je v primeru, ko se premici p in q *sekata*, razdalja med njima $d(p,q)$ enaka 0.

V primeru *vzporednih* premic izberemo točko, ki leži na eni premici in jo pravokotno projiciramo na drugo. Tako na razdaljo med vzporednima premicama p in q lahko gledamo kot na razdaljo med poljubno točko premice p in premico q.

Primer 184 *Izračunajmo razdaljo med vzporednicama p in q z enačbama $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2}$ oz. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$.*

Rešitev: *Premici sta podani v normalni obliki, zato lahko razberemo naslednje podatke: na premici p leži točka $T(2,-1,-3)$, na premici q pa ležita točka $T_0(1,1,-1)$ in vektor $\overrightarrow{s} = (1,2,2)$. Tako velja*

$$d(p,q) = d(T,q) = \frac{\|\overrightarrow{s} \times \overrightarrow{T_0T}\|}{\|\overrightarrow{s}\|}.$$

Ker je $\overrightarrow{T_0T} = (1,-2,-2)$, dobimo

$$\overrightarrow{s} \times \overrightarrow{T_0T} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = (0,4,-4)$$

in od tod

$$d(T,q) = \frac{\sqrt{16+16}}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{\sqrt{32}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Razdalja med mimobežnima premicama

Oglejmo si še razdaljo v primeru *mimobežnih* premic (torej takih, ki se ne sekata in nista vzporedni). Najmanjšo razdaljo med točkama iz obeh premic tokrat dobimo tako: poiščemo ravnino Σ, ki vsebuje eno izmed premic (npr. q) in je vzporedna drugi premici (p), nato pa izračunamo razdaljo med premico p in ravnino Σ. To razdaljo dobimo kot razdaljo med poljubno točko premice p in ravnino Σ.

Primer 185 *Izračunajmo razdaljo med mimobežnicama p in q z enačbama $\frac{x-7}{3} = \frac{y+10}{-7} = \frac{z+5}{4}$ oz. $x+6 = \frac{y+1}{5}, z = 2$.*

Rešitev: *Iz podanih enačb premic razberemo: na p leži točka $A(7,-10,-5)$, njen smerni vektor pa je $\overrightarrow{s_1} = (3,-7,4)$. Na premici q leži točka $B(-6,-1,2)$, njen smerni vektor pa je $\overrightarrow{s_2} = (1,5,0)$. Sedaj poiščimo ravnino Σ, ki vsebuje premico q in je vzporedna premici p. Vektor $\overrightarrow{s_1}$ premaknemo tako, da leži v ravnini Σ. S tem imamo v ravnini Σ znana dva (nekolinearna) vektorja, namreč $\overrightarrow{s_1}$ in $\overrightarrow{s_2}$. Če izračunamo njun vektorski produkt, bomo s tem dobili vektor, ki je pravokoten na oba in s tem tudi na ravnino Σ. Vektor $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}$ je torej normalni vektor te ravnine:*

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & -7 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-20, 4, 22).$$

Prav tako je normalni vektor tudi $\overrightarrow{n}_1 = \frac{1}{2}\overrightarrow{n} = (-10,2,11)$. Zaenkrat torej vemo, da je enačba ravnine Σ oblike $-10x + 2y + 11z = d$, ker pa točka B leži na njej, dobimo $-10 \cdot (-6) + 2 \cdot (-1) + 11 \cdot 2 = d$, od koder sledi $d = 80$. Enačba ravnine Σ je torej

$$-10x + 2y + 11z = 80.$$

Končno izpeljemo še

$$\begin{aligned} d(p,q) &= d(A,\Sigma) \\ &= \frac{|-10x+2y+11z-80|}{\sqrt{(-10)^2+2^2+11^2}} \\ &= \frac{|-10\cdot 7+2\cdot(-10)+11\cdot(-5)-80|}{\sqrt{225}} \\ &= \frac{|-225|}{\sqrt{225}} = 15. \end{aligned}$$

3.3.4 *Preveri svoje znanje (premica in ravnina v prostoru)*

Vprašanja iz teorije

1. Definiraj normalni vektor ravnine?
2. S katerimi podatki je ravnina enolično določena?

3. Zapiši vektorsko, normalno in parametrično obliko enačbe ravnine ter pojasni pomen oznak.
4. Kaj pomeni, da so vektorji komplanarni oz. kolinearni?
5. Kako s pomočjo determinante izračunamo enačbo ravnine, ki vsebuje tri podane nekolinearne točke?
6. Katere podatke potrebujemo, da določimo enačbo premice v prostoru?
7. V kakšni medsebojni legi sta lahko dve premici v prostoru?
8. Zapiši vektorsko, normalno in parametrično obliko enačbe premice ter pojasni pomen oznak.
9. Kako izračunamo razdaljo med dvema točkama?
10. Kako izračunamo razdaljo med dvema premicama?
11. Kako izračunamo razdaljo med točko in ravnino?

Rešene naloge

Naloga 186 *Zapiši enačbo ravnine, ki je vzporedna ravnini* Σ *z enačbo* $2x+3y-11z+2=0$ *in je od nje oddaljena za* 5 *enot.*

Rešitev: *Naj* T *označuje poljubno točko iskane ravnine. Potem velja*

$$d(T,\Sigma)=5=\frac{|2x+3y-11z+2|}{\sqrt{4+9+121}}=\frac{|2x+3y-11z+2|}{\sqrt{134}}$$

in zato

$$|2x+3y-11z+2|=5\sqrt{134}.$$

Od tod dobimo dve rešitvi: $2x+3y-11z=-2+5\sqrt{134}$ *in* $2x+3y-11z=-2-5\sqrt{134}$.

Naloga 187 *Zapiši enačbo premice* p*, ki je pravokotna na ravnino* $3x+6y-z=5$ *in gre skozi točko* $T(1,1,2)$*. Nato ugotovi, v kateri točki ta premica seka dano ravnino.*

Rešitev: *Normalni vektor ravnine* $(3,6,-1)$ *je ravno vektor na iskani premici. Tako dobimo enačbo premice* p*:*

$$\begin{aligned} x &= 1+3\lambda \\ y &= 1+6\lambda \\ z &= 2-\lambda, \quad \lambda\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Presečišče premice in ravnine bo točka (x,y,z)*, ki zadošča tako enačbi ravnine kot enačbi premice. V enačbi ravnine* x,y,z *nadomestimo z desnimi stranmi zgornjih enačb in tako dobimo*

$$3(1+3\lambda)+6(1+6\lambda)-(2-\lambda)=5,$$

od koder sledi $\lambda = -\frac{1}{23}$. Ko dobljeno vrednost vstavimo v enačbo premice, dobimo koordinate presečišča:

$$\left(\frac{20}{23}, \frac{17}{23}, \frac{47}{23}\right).$$

Naloga 188 *Določi enačbo ravnine Σ, ki gre skozi točko $T(1,-1,2)$ in je vzporedna ravnini z enačbo $4x - 7y + z - 12 = 0$. Nato v parametrični obliki zapiši enačbo premice, ki leži v ravnini Σ in vsebuje točki $A(0,1,c)$ in $B(a,0,3)$.*

Rešitev: *Izpeljimo enačbo ravnine Σ. Ker ima iskana ravnina enak normalni vektor kot dana ravnina, dobimo:*

$$\begin{aligned} ax + by + cz + d &= 0 \\ 4x - 7y + z + d &= 0. \end{aligned}$$

Upoštevajmo še, da točka $T(1,-1,2)$ leži v iskani ravnini. S tem dobimo $4 + 7 + 2 + d = 0$ in od tukaj $d = -13$. Tako ima ravnina Σ enačbo $4x - 7y + z - 13 = 0$. V to enačbo sedaj vstavimo koordinate točk A in B, da izračunamo manjkajoči koordinati c in a. Tako dobimo $-7 + c - 13 = 0$, torej je $c = 20$ in zato ima točka A koordinate $(0,1,20)$. Za točko B velja $4a + 3 - 13 = 0$, zato je $a = \frac{5}{2}$ in $B(\frac{5}{2},0,3)$. Sedaj lahko dobimo vektor na iskani premici:

$$\overrightarrow{AB} = \left(\frac{5}{2}, 0, 3\right) - (0,1,20) = \left(\frac{5}{2}, -1, -17\right).$$

Enačba iskane premice se tako glasi:

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{5}{2}\lambda \\ y &= 1 - \lambda \\ z &= 20 - 17\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Naloga 189 *Dani sta premica $(x,y,z) = (-3-2t, 3+2t, 3+t)$, $t \in \mathbb{R}$ in ravnina z enačbo $4x - 5y + 2z = 11$. Izračunaj kot med njima in poišči enačbo ravnine, v kateri ležita dana premica in točka $T(2,2,2)$.*

Rešitev: *Iz enačbe premice razberemo vektor, ki leži na njej: $\vec{s} = (-2,2,1)$. Vektor $\vec{n} = (4,-5,2)$ pa je normalni vektor ravnine. Najprej izračunajmo kot $\cos\varphi_1$ med $\vec{s}$ in $\vec{n}$:*

$$\cos\varphi_1 = \frac{\vec{s} \cdot \vec{n}}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{-8 - 10 + 2}{\sqrt{4+4+1}\sqrt{16+25+4}} = \frac{-16}{9\sqrt{5}}.$$

Kot med $\vec{s}$ in $\vec{n}$ je torej $\varphi_1 = \arccos \frac{-16}{9\cdot\sqrt{5}} = 142{,}66^\circ$. Upoštevati je treba še, da je $\vec{n}$ pravokoten na ravnino, zato iskani kot φ dobimo z izračunom:

$$\varphi = \varphi_1 - 90^\circ = 52{,}66^\circ.$$

Poiščimo še enačbo ravnine, v kateri ležita dana premica in točka $T(2,2,2)$. Ob izbiri $t = 0$ in $t = 1$ dobimo še dve točki, ki ležita na premici in zato tudi na iskani ravnini: $T_1(-3,3,3)$ in $T_2(-5,5,4)$. Sedaj se lahko poslužimo formule (4), od koder izpeljemo enačbo ravnine $x - 3y + 8z - 12 = 0$.

Naloga 190 *Pokaži, da so točke $A(0,-7,2)$, $B(5,-7,3)$, $D(1,-4,-3)$ oglišča pravokotnika. Izračunaj še koordinate manjkajočega oglišča C. Zapiši enačbo ravnine, v kateri ta pravokotnik leži.*

Rešitev: *Najprej izračunajmo koordinate vektorjev $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AB} = (5,-7,3) - (0,-7,2) = (5,0,1)$, $\overrightarrow{AD} = (1,-4,-3) - (0,-7,2) = (1,3,-5)$. Poiščimo še njun skalarni produkt:*

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = (5,0,1) \cdot (1,3,-5) = 5 + 0 - 5 = 0.$$

Od tod sledi, da sta vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AD}$ pravokotna, kar dokazuje, da so A, B, D oglišča nekega pravokotnika. Koordinate manjkajočega oglišča izpeljemo z enačbo $\overrightarrow{r_C} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{AD} = (5,-7,3) + (1,3,-5) = (6,-4,-2)$. Normalni vektor iskane ravnine dobimo z izračunom vektorskega produkta

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 3 & -5 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3,-26,-15).$$

Sedaj vemo, da ima iskana ravnino naslednjo obliko $3x - 26y - 15z + d = 0$. Če vstavimo koordinate točke D v dobljeno enačbo, dobimo, da je $d = -152$. Tako je končni rezultat enačba ravnine

$$3x - 26y - 15z - 152 = 0.$$

Naloge za samostojno reševanje

Naloga 191 *Določi enačbo ravnine ki gre skozi koordinatno izhodišče in je vzporedna ravnini z enačbo $5x - 4y + 3z - 21 = 0$. Nato v parametrični obliki zapiši enačbo premice, ki leži v ravnini Σ, ki vsebuje točki $A(1,1,c)$ in $B(0,b,1)$.*

Rešitev: *Enačba ravnine se glasi $5x - 4y + 3z = 0$, premica pa ima enačbo*

$$x = 1 - k, y = 1 - \frac{1}{4}k, z = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}k,\ k \in \mathbb{R}.$$

Naloga 192 *Poišči ravnino Π, ki vsebuje premico p z enačbo $\frac{x-3}{2} = \frac{2z+1}{3}, y = 0$ in je pravokotna na ravnino Σ z enačbo $2x - z = 0$.*

Rešitev: *Enačba ravnine Π je $y = 0$.*

Naloga 193 *Za katere vrednosti parametra t je prostornina paralelepipeda, določenega z vektorji $\overrightarrow{a} = (t,-2,3)$, $\overrightarrow{b} = (0,1,-1)$ in $\overrightarrow{c} = (1,t,8)$, enaka 5?*

Rešitev: $t_1 = -4 - \sqrt{22}$, $t_1 = -4 + \sqrt{22}$.

Naloga 194 *Poišči enačbo ravnine Π, ki je vzporedna ravnini $2x - y + 2z + 4 = 0$, če sta podana in iskana ravnina enako oddaljeni od točke $P(3,2,-1)$.*

Rešitev: $\Pi : 2x - y + 2z - 8 = 0.$

4

RELACIJE

Relacija je matematično orodje, s katerim opišemo odnos med elementi množic. Z njimi smo se do sedaj pri matematiki srečevali na vsakem koraku (poznamo relacijo enakosti "=", relacijo "$\leq$", inkluzijo množic "$\subseteq$", relacijo deljivosti števil "$|$" , itd.). V računalništvu in informatiki jih prav tako pogosto srečamo, posebej pri podatkovnih bazah. Relacije je možno definirati za več elementov iz več različnih množic, predmet tega poglavja pa bodo binarne relacije, ki predstavljajo odnos med dvema elementoma iz iste ali iz različnih množic.

4.1 UVOD

Spomnimo se, da je **kartezični produkt** $A \times B$ množic A in B množica vseh urejenih parov, kjer je prvi element iz množice A in drugi element iz množice B; s simboli:

$$A \times B = \{(a, b); a \in A \wedge b \in B\}.$$

Binarna (oz. **dvomestna**) **relacija** iz množice A v množico B je podmnožica kartezičnga produkta $A \times B$:

$$R \subseteq A \times B.$$

Običajno uporabimo notacijo aRb, da označimo dejstvo, da je $(a, b) \in R$.

Primer 195 *Naj bosta* $A = \{a, b, c, d\}$ *in* $B = \{1, 2, 3\}$. *Potem je*

$$A \times B = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3),(c,1),(c,2),(c,3),(d,1),(d,2),(d,3)\}$$

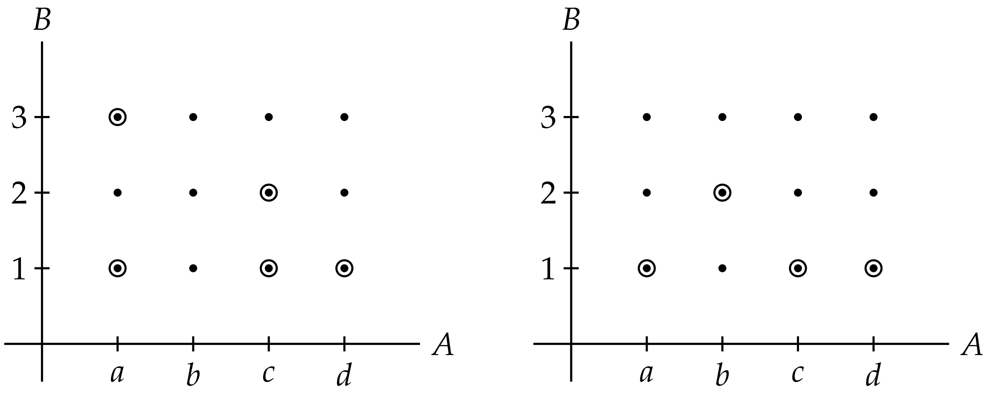
Primera relacij, definiranih na $A \times B$ *sta*

$$R = \{(a,1),(a,3),(c,1),(c,2),(d,1)\}$$

in

$$S = \{(a,1),(b,2),(c,1),(d,1)\}.$$

Velja torej $aR1$, $aR3$, $cR1$, $cR2$ in $dR1$, ne pa tudi $1Ra$, saj le-ta zapis pomeni $(1, a) \in R$, kar ne drži. Da element 1 ni v relaciji z elementom a, s simboli zapišemo kot $\neg 1Ra$. Kartezični produkt $A \times B$ in relaciji R in S (kot njegovi podmnožici) si lahko predstavljamo tudi v kartezičnem koordinatnem sistemu, glej sliko 26.



Slika 26: Relaciji R in S.

Če nas je definicija relacije spomnila na definicijo funkcije, je to upravičeno. Vsaka funkcija je namreč relacija. Vemo že, da je **funkcija** $f : A \to B$ predpis, ki vsakemu elementu iz množice A priredi natanko en element iz množice B, njen graf Γ pa je množica urejenih parov $\Gamma = \{(a, f(a)); a \in A\}$. Razlika med relacijo in funkcijo je torej v tem, da med tem, ko s funkcijo vsakemu elementu iz A priredimo nek element iz B, pri relaciji ni nujno vsak element iz množice A v relaciji s kakim elementom iz B. Nadalje, med tem, ko s funkcijo elementu $a \in A$ priredimo natanko en element iz B (namreč $f(a)$), je lahko kak element iz množice A v relaciji z večimi elementi iz množice B.

Nekatere relacije imajo posebna imena:

- R imenujemo **polna** relacija, če je $R = A \times B$,
- $R = \emptyset$ se imenuje **prazna** relacija,
- relacijo $E \subseteq A \times A$ oblike $E = \{(x, x); x \in A\}$ imenujemo **enotska** relacija.

Pojem binarne relacije je možno posplošiti.

Naj bodo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ množice. Potem je **n-arna relacija nad** $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ podmnožica kartezičnega produkta $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$.

V nadaljevanju se bomo posvetili le binarnim relacijam, zato jim bomo na kratko rekli kar *relacije*. Takim relacijam, ki bodo podmnožica kartezičnega produkta $A \times A$, pa bomo rekli **relacija na množici** A.

V primeru 195 smo relacijo definirali tako, da smo našteli vse urejene pare. Običajno to storimo s pomočjo opisa relacij.

Primer 196 *Nekaj primerov relacij:*

1. *Naj bo L množica ljudi. Na L × L lahko definiramo relacije:*

$$\begin{aligned} B &= \{(x,y); x \text{ je sosed od } y\}, \\ R &= \{(x,y); x \text{ ima rad } y\}, \\ P &= \{(x,y); x \text{ je prijatelj od } y\}. \end{aligned}$$

2. *Naj bo A množica študentov UM FERI in*

$$B = \{nogomet, dekleta, politika, matematika\},$$

   $Z = \{(x,y);$ *študenta x najbolj zanima y*$\} \subseteq A \times B$.

3. *Relacija* $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *je definirana takole* [1]*:*

$$nRm \equiv n \mid m.$$

   Z besedami, naravno število n je v relaciji R z naravnim številom m, če n deli m. Tako je npr. $3R6$, $\neg 6R3$, $4R12$ *in* $\neg 4R10$.

4. *Relacija* $V \subseteq \{premice\ v\ \mathbb{R}^2\} \times \{premice\ v\ \mathbb{R}^2\}$ *je definirana tako:*

$$pVr \equiv p \parallel r.$$

   Z besedami, premica p je v relaciji V s premico r, če ji je vzporedna. Opazimo, da za to relacijo velja $pVr \Rightarrow rVp$.

5. *Naj bo* $S = \{1,2\}$. *Potem je* $S \times S = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$. *Naj bo relacija L definirana tako:*

$$x\,L\,y \equiv x + y \quad \text{je liho število}.$$

   Potem je $(1,2) \in L$ *in* $(2,1) \in L$.

Relaciji $R \subseteq A \times B$ lahko priredimo naslednji množici:

- **domena relacije** D_R je množica vseh prvih koordinat elementov relacije R:

$$D_R = \{x \in A; \exists y \in B : xRy\},$$

- **zaloga vrednosti relacije** Z_R je množica vseh drugih koordinat elementov relacije R:

$$Z_R = \{y \in B; \exists x \in A : xRy\}.$$

1 Simbol $\equiv$ označuje definicijo relacije.

Primer 197 *Za relaciji R in S iz primera 195 velja $D_R = \{a, c, d\}$, $Z_R = \{1, 2, 3\}$, $D_S = \{a, b, c, d\}$, $Z_S = \{1, 2\}$.*

4.2 OPERACIJE NAD RELACIJAMI

Ker so relacije množice, lahko uporabljamo nad njimi vse običajne operacije nad množicami. Naj bosta R, S relaciji iz A v B. Ker je $R, S \subseteq A \times B$, lahko naravno definiramo **komplement** R', **unijo** $R \cup S$, **presek** $R \cap S$, **razliko** $R \setminus S$ relacij R in S:

$$\begin{aligned} xR'y &\Leftrightarrow \neg xRy, \\ xR \cup Sy &\Leftrightarrow xRy \vee xSy, \\ xR \cap Sy &\Leftrightarrow xRy \wedge xSy, \\ xR \setminus Sy &\Leftrightarrow xRy \wedge \neg xSy. \end{aligned}$$

Iz zgornje definicije komplementa vidimo, da je $R' = (A \times B) \setminus R$. Iz lastnosti operacij nad množicami[2] direktno sledijo lastnosti vseh zgoraj omenjenih operacij nad relacijami. Posebej ponovimo le lastnosti komplementa:

- $(R')' = R$,
- $(R \cup S)' = R' \cap S'$,
- $(R \cap S)' = R' \cup S'$.

Naj bo $R \subseteq A \times B$. Potem je **obratna** (ali **inverzna**) relacija R^{-1} relacije R

$$R^{-1} = \{(x, y); (y, x) \in R\} \subseteq B \times A.$$

Trditev 198 *Veljajo naslednje zveze:*

(i) $(R^{-1})^{-1} = R$,

(ii) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$,

(iii) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.

Dokaz. V vseh treh primerih je potrebno dokazati enakost množic.

(i) Dokazujemo, da je $(x, y) \in (R^{-1})^{-1}$ natanko tedaj, ko je $(x, y) \in R$. Slednje drži, saj je $x(R^{-1})^{-1}y \Leftrightarrow yR^{-1}x \Leftrightarrow xRy$.

2 Množice, operacije nad njimi in njihove lastnosti smo spoznali pri Matematiki 1.

(*ii*) Potrebno je dokazati, da je $(x, y) \in (R \cup S)^{-1}$ natanko tedaj, ko je $(x, y) \in R^{-1} \cup S^{-1}$. Res, $x(R \cup S)^{-1}y \Leftrightarrow y(R \cup S)x \Leftrightarrow yRx \vee ySx \Leftrightarrow xR^{-1}y \vee xS^{-1}y \Leftrightarrow x(R^{-1} \cup S^{-1})y$.

(*iii*) Podobno dokažemo zadnjo enakost: $x(R \cap S)^{-1}y \Leftrightarrow y(R \cap S)x \Leftrightarrow yRx \wedge ySx \Leftrightarrow xR^{-1}y \wedge xS^{-1}y \Leftrightarrow x(R^{-1} \cap S^{-1})y$.

■

Naj bosta $R \subseteq A \times B$ in $S \subseteq B \times C$ relaciji. Potem je **produkt relacij** R in S relacija $R * S \subseteq A \times C$, definirana kot

$$R * S = \{(x, z) \in A \times C; \quad \exists y \in B : (xRy \wedge ySz)\}.$$

Z besedami, $x \in A$ je v relaciji $R * S$ z elementom $z \in C$ natanko tedaj, ko obstaja $y \in B$, da je xRy in ySz.

Primer 199 *Naj bosta relaciji R in S na množici $A = \{a, b, c, d, e\}$ podani takole:*

$$R = \{(a, b), (a, c), (b, d), (b, e), (e, e)\} \quad \text{in} \quad S = \{(b, d), (b, e), (d, e)\}.$$

Potem je:

$$\begin{aligned} R * S &= \{(a, d), (a, e), (b, e)\}, \\ S * R &= \{(b, e), (d, e)\}, \\ R * R &= \{(a, d), (a, e), (b, e), (e, e)\} \\ S * S &= \{(b, e)\}. \end{aligned}$$

Zgornji zgled nam je pokazal, da produkt relacij **ni** komutativen:

$$R * S \neq S * R.$$

Veljajo pa naslednje lastnosti.

Trditev 200 *Za poljubne relacije R, S in T na množici A velja:*

(*i*) *asociativnost:* $R * (S * T) = (R * S) * T$,

(*ii*) *leva distributivnost:* $R * (S \cup T) = (R * S) \cup (R * T)$,

(*iii*) *desna distributivnost:* $(R \cup S) * T = (R * T) \cup (S * T)$,

(*iv*) $(R * S)^{-1} = S^{-1} * R^{-1}$,

(*v*) $R * (S \cap T) \subseteq (R * S) \cap (R * T)$.

(*vi*) *če je $R \subseteq S$, potem velja tudi* $R * T \subseteq S * T$ *in* $T * R \subseteq T * S$.

Dokaz.

(i) Pri dokazu asociativnosti enakost množic pokažemo z naslednjo izpeljavo:

$$\begin{aligned}
x(R*(S*T))y &\Leftrightarrow \exists z:(xRz \wedge z(S*T)y)\\
&\Leftrightarrow \exists z:(xRz \wedge \exists w:(zSw \wedge wTy))\\
&\Leftrightarrow \exists z \exists w:(xRz \wedge zSw \wedge wTy)\\
&\Leftrightarrow \exists w \exists z:(xRz \wedge zSw \wedge wTy)\\
&\Leftrightarrow \exists w:(\exists z:(xRz \wedge zSw) \wedge wTy)\\
&\Leftrightarrow \exists w:(x(R*S)w \wedge wTy))\\
&\Leftrightarrow x((R*S)*T)y.
\end{aligned}$$

(ii) Dokazali bomo enakost (ii) (enakost (iii) se pokaže podobno, dokaz pa naj ostane za vajo bralcu):

$$\begin{aligned}
x(R*(S\cup T))y &\Leftrightarrow \exists z:(xRz \wedge z(S\cup T)y)\\
&\Leftrightarrow \exists z:(xRz \wedge (zSy \vee zTy))\\
&\Leftrightarrow \exists z:((xRz \wedge zSy) \vee (xRz \wedge zTy))\\
&\Leftrightarrow \exists z:(xRz \wedge zSy) \vee \exists z:(xRz \wedge zTy)\\
&\Leftrightarrow x(R*S)y \vee x(R*T)y\\
&\Leftrightarrow x((R*S)\cup(R*T))y.
\end{aligned}$$

(iv) Dokažimo enakost množic $(R*S)^{-1}$ in $S^{-1}*R^{-1}$:

$$\begin{aligned}
x(R*S)^{-1}y &\Leftrightarrow y(R*S)x\\
&\Leftrightarrow \exists z:(yRz \wedge zSx)\\
&\Leftrightarrow \exists z:(zR^{-1}y \wedge xS^{-1}z)\\
&\Leftrightarrow \exists z:(xS^{-1}z \wedge zR^{-1}y)\\
&\Leftrightarrow x(S^{-1}*R^{-1})y.
\end{aligned}$$

(v) Premislimo še, da velja inkluzija $R*(S\cap T) \subseteq (R*S)\cap(R*T)$. Ob tem bomo uporabili idempotentnost konjunkcije ($A \wedge A \sim A$ za poljubno izjavo A) in lastnost konjunkcije, ki smo jo spoznali v drugem poglavju o predikatih: $\exists x:(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \exists x:P(x) \wedge \exists x:Q(x)$.

$$\begin{aligned}
x(R*(S\cap T))y &\Leftrightarrow \exists z:(xRz \wedge z(S\cap T)y)\\
&\Leftrightarrow \exists z:(xRz \wedge zSy \wedge zTy)\\
&\Leftrightarrow \exists z:(xRz \wedge zSy \wedge xRz \wedge zTy)\\
&\Rightarrow \exists z:(xRz \wedge zSy) \wedge \exists z:(xRz \wedge zTy)\\
&\Leftrightarrow x(R*S)y \wedge x(R*T)y\\
&\Leftrightarrow x((R*S)\cap(R*T))y.
\end{aligned}$$

(vi) Naj bo (x,y) poljuben par iz $R*T$. Potem obstaja z iz A, da velja xRz in zTy. Ker je $R \subseteq S$, velja tudi xSz. Od tukaj sledi, da je $(x,y) \in S*T$. S tem smo dokazali prvo inkluzijo, drugo pokažemo podobno. ■

V prvem primeru pri zadnji lastnosti radi rečemo, da smo $R \subseteq S$ zmnožili iz desne s T ter dobili $R * T \subseteq S * T$. Podobno v drugem primeru rečemo, da smo dano inkluzijo zmnožili iz leve s T ter tako dobili $T * R \subseteq T * S$.

Ker je operacija $*$ asociativna, lahko produkt več relacij pišemo brez oklepajev, npr. $R * (S * T) = (R * S) * T = R * S * T$. Velja tudi dogovor, da je operacija $*$ višje prioritete kot unija ali presek, zato smemo npr. lastnost (ii) v zgornji trditvi pisati tudi brez oklepajev na desni strani: $R * (S \cup T) = R * S \cup R * T$.

Posebej velja opomniti še, da v lastnosti (v) zgornje trditve nimamo enakosti množic, temveč le inkluzijo, kot vidimo iz primera naslednjih relacij na množici $A = \{1, 2, 3\}$: $R = \{(1, 2), (1, 3)\}$, $S = \{(2, 3)\}$, $T = \{(3, 3)\}$. Za dane relacije je $R * (S \cap T) = \emptyset$ (saj je $S \cap T = \emptyset$) in $R * S \cap R * T = \{(1, 3)\}$. Zato velja $R * (S \cap T) \subseteq (R * S) \cap (R * T)$, ne pa tudi obratna inkluzija.

Če so vse relacije v produktu enake, pišemo kar potenco, npr. $x(R * R * R * R)y = xR^4y$. Oglejmo si formalno definicijo potence relacij.

Potenco relacije $R \subseteq A \times A$ definiramo rekurzivno:

- $R^0 = E$,
- $R^{n+1} = R^n * R$.

Za potenco veljajo naslednje lastnosti.

Trditev 201 *Naj bosta Q in R relaciji na množici A. Potem velja:*

(i) $R^n * R^m = R^{n+m}$,

(ii) $(R^n)^m = R^{nm}$,

(iii) $Q \subseteq R \Rightarrow Q^n \subseteq R^n$.

Dokaz. Prvi dve lastnosti sta očitni. Oglejmo si dokaz tretje, ki jo bomo dokazali z indukcijo na n. Za $n = 1$ trditev očitno drži. Sedaj predpostavimo, da trditev velja za n (tj. $Q^n \subseteq R^n$) in ob tej predpostavki pokažimo trditev za $n + 1$. Pri tem bomo uporabili lastnost (vi) iz trditve 200: če zmnožimo $Q^n \subseteq R^n$ iz desne s Q, dobimo

$$Q^{n+1} \subseteq R^n * Q.$$

Podobno, če zmnožimo $Q \subseteq R$ iz leve z R^n, dobimo

$$R^n * Q \subseteq R^{n+1}.$$

Iz dobljenih inkluzij zaradi tranzitivnosti relacije $\subseteq$ sledi

$$Q^{n+1} \subseteq R^{n+1}.$$

■

4.3 PREDSTAVITVE RELACIJ IN NJIHOVE LASTNOSTI

Naj bo $R \subseteq A \times A$. Potem pravimo, da urejena dvojica $G = (A, R)$ določa **relacijski graf**, ki ga bomo včasih na kratko označili kar G_R. Elementom množice A pravimo **vozlišča** (ali točke), elementom iz množice R pa (usmerjene) **povezave**. Relacijski graf G_R narišemo tako, da vozlišča ponazorimo s krogci, nato pa za vsak par $(x, y) \in R$ povežemo ustrezni vozlišči z usmerjeno črto (puščico) od x do y.

Primer 202 *Naj bo $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ in R relacija na množici A, kjer je*

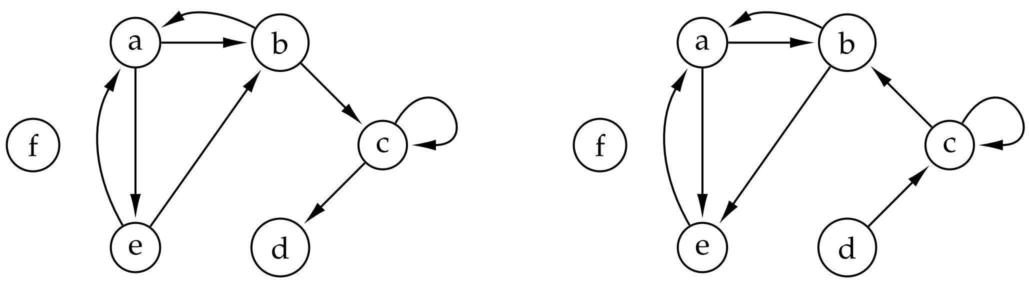
$$R = \{(a,b), (a,e), (b,a), (b,c), (c,d), (c,c), (e,a), (e,b)\}.$$

Nariši relacijske grafe G_R, $G_{R^{-1}}$, G_{R*R}.

Rešitev: *Grafa relacij R in R^{-1} vidimo na sliki 27. Graf relacije*

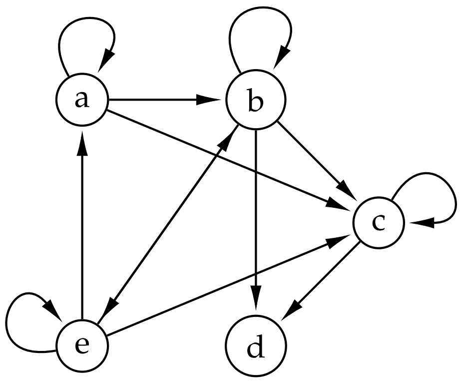
$$\begin{aligned} R * R &= \{(a,a), (a,c), (a,b), (b,b), (b,d), (b,c), (b,e), (c,c), (c,d), \\ &\quad (e,b), (e,e), (e,a), (e,c)\}, \end{aligned}$$

pa je prikazan na sliki 28.



(a) Graf G_R. (b) Graf $G_{R^{-1}}$.

Slika 27: Grafa relacij R in R^{-1} iz primera 202.



Slika 28: Grafi relacije $R * R$ iz primera 202.

V zgornjem zgledu lahko opazimo, kako se na relacijskih grafih odražata operaciji R^{-1} in $R * R$.

- Graf relacije R^{-1} dobimo tako, da v grafu relacije R obrnemo usmerjenost povezav.
- $x(R * R)y$ natanko tedaj, ko obstaja tako vozlišče z, da lahko od x do y pridemo tako, da gremo naprej po povezavi od x do z in nato od z do y. Rečemo tudi, da med vozliščema x in y obstaja **(usmerjeni) sprehod** dolžine 2, ali da od x do y pridemo *v dveh korakih*.

Ni težko videti, da zadnjo lastnost lahko tudi posplošimo na poljubno potenco: xR^ny velja natanko tedaj, ko lahko v relacijskem grafu iz x pridemo v y v n korakih (rečemo tudi, da v grafu G_R obstaja **sprehod dolžine** n iz vozlišča x v vozlišče y).

Primer 203 *V grafu G_{R*R} iz primera 202 od vozlišča e do vozlišča d obstaja usmerjeni sprehod dolžine* 2*, prav tako pa tudi usmerjeni sprehod dolžine* 4*, zato velja $e(R*R)^2d$ kot tudi $e(R*R)^4d$.*

Relacije lahko predstavimo tudi z matrikami. Naj bo $R \subseteq A \times A$ in $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Potem lahko relacijo R predstavimo z **matriko relacije** $B(R)$ razsežnosti $n \times n$ z elementi[3]:

$$(B(R))_{ij} = \begin{cases} 1; & a_i R a_j \\ 0; & \text{sicer.} \end{cases}$$

Primer 204 *Z matrikami predstavimo relacije iz primera 202:*

$$B(R) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B(R^{-1}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

3 Oznako $B(R)$ uporabljamo za matriko relacije zato, ker gre za *binarno matriko*, torej tako, v kateri nastopajo le ničle in enice.

$$B(R*R) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oglejmo si še naslednji produkt matrik:

$$B(R) \cdot B(R) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Opazimo lahko, kako se na matrikah relacij odražata operaciji R^{-1} in $B(R*R)$:

- Če matriko relacije R transponiramo, dobimo matriko relacije R^{-1}. Velja torej $B(R^{-1}) = B(R)^T$.
- Če primerjamo matriko $B(R) \cdot B(R)$ z matriko $B(R*R)$, lahko opazimo, da imata neničelne elemente na enakih mestih v matriki. Pri iskanju matrike $B(R*R)$ si namreč lahko pomagamo tako, da zmnožimo matriko $B(R)$ samo s seboj, nato pa namesto neničelnega elementa zapišemo enico, s čemer dobimo ustrezno binarno matriko relacije $R*R$.
- Splošneje: naj bo $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$, kjer je $|A| = n$, $|B| = m$, $|C| = p$. Potem ima $B(R*S)$ na mestu (i,k) enico natanko tedaj, ko obstaja enica na (i,j)-tem mestu v matriki $B(R)$ in na (j,k)-tem mestu v matriki $B(S)$, za nek $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

4.4 LASTNOSTI RELACIJ

Naj bo $R \subseteq A \times A$ relacija. Potem je

1. R **refleksivna** $\Leftrightarrow \forall x \in A : xRx$,
2. R **irefleksivna** $\Leftrightarrow \forall x \in A : \neg xRx$,
3. R **simetrična** $\Leftrightarrow \forall x, y \in A : (xRy \Rightarrow yRx)$,
4. R **asimetrična** $\Leftrightarrow \forall x, y \in A : (xRy \Rightarrow \neg yRx)$,
5. R **antisimetrična** $\Leftrightarrow \forall x, y \in A : (xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$,

6. R **tranzitivna** $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in A : (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$,
7. R **intranzitivna** $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in A : (xRy \wedge yRz \Rightarrow \neg xRz)$,
8. R **sovisna** $\Leftrightarrow \forall x, y \in A : (x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx)$,
9. R **strogo sovisna** $\Leftrightarrow \forall x, y \in A : (xRy \vee yRx)$.

Primer 205 *Naj bo relacija $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ podana takole*

$$R = \{(x, y); 3 \mid (x - y)\}.$$

Ali drugače: naravno število x je v relaciji z naravnim številom y, če število 3 deli razliko števil x in y. Ugotovimo, ali ima ta relacija katero od zgornjih lastnosti. Spomnimo se, da za celi števili a in b velja, da a deli b natanko tedaj, ko obstaja $k \in \mathbb{Z}$, da je $b = k \cdot a$. Zato lahko pomen relacije R pojasnimo tudi tako: xRy natanko tedaj, ko obstaja tak $k \in \mathbb{Z}$, da je $x - y = 3k$.

1. *Relacija je refleksivna, če za za vsak $x \in \mathbb{N}$ velja xRx. To drži, saj je $xRx \Leftrightarrow 3 \mid (x - x) \Leftrightarrow 3 \mid 0$ za vsako naravno število x. Torej je R refleksivna relacija.*

2. *Relacija R ni irefleksivna, saj je refleksivna (irefleksivnost bi pomenila, da nobeno naravno število ni v relaciji samo s seboj).*

3. *Naj bosta x in y poljubni naravni števili. Če velja xRy, potem $3 \mid (x - y)$ oz. je $x - y = 3 \cdot k$ za nek $k \in \mathbb{Z}$. Toda potem je $y - x = -3 \cdot k$, kar pomeni, da $3 \mid (y - x)$, zato velja yRx. Ker smo pokazali, da za poljubni naravni števili x in y velja implikacija[4] $xRy \Rightarrow yRx$, je relacija R simetrična.*

4. *Relacija R ni asimetrična, saj je $3R6$, kakor tudi $6R3$.*

5. *Antisimetričnost bi pomenila, da $\forall x, y \in \mathbb{N}$ velja implikacija $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$. To bi torej pomenilo, da velja implikacija*

$$3 \mid (x - y) \wedge 3 \mid (y - x) \Rightarrow x = y.$$

   Toda ta implikacija ne drži, saj velja $3 \mid (6 - 3) \wedge 3 \mid (3 - 6)$ toda $6 \neq 3$ (števili $x = 3$ in $y = 6$ tako pokažeta, da obstaja protiprimer za antisimetričnost).

4 Opazi, da smo pri tem sklepu uporabili hipotetični silogizem.

6. *Tranzitivnost bi pomenila, da* $\forall x, y, z \in \mathbb{N} : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$. *Prepričajmo se, da je ta izjava pravilna. Naj bodo* x, y, z *poljubna naravna števila. Sedaj lahko izpeljemo naslednje zaporedje implikacij*

$$\begin{aligned} xRy \wedge yRz &\Rightarrow 3 \mid (x-y) \wedge 3 \mid (y-z) \\ &\Rightarrow x-y=3k, k \in \mathbb{Z} \wedge y-z=3l, l \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow x-z=3k+3l \\ &\Rightarrow x-z=3(k+l) \\ &\Rightarrow 3 \mid (x-z) \\ &\Rightarrow xRz, \end{aligned}$$

kjer smo upoštevali, da je $k-l \in \mathbb{Z}$, *saj sta* $k, l \in \mathbb{Z}$.

7. *Ker je* $9R6$, $6R3$ *in* $9R3$, R *ni intranzitivna.*

8. *Sovisnost bi pomenila, da* $\forall x, y \in \mathbb{N} : x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx$. *Z besedami: če sta* x *in* y *poljubni različni naravni števili, potem ali* 3 *deli* $x-y$ *ali* 3 *deli* $y-x$. *Toda za to trditev obstaja protiprimer. Za* $x=7$ *in* $y=5$ *namreč velja, da sta različni naravni števili, toda* $3 \nmid (7-5)$ *in* $3 \nmid (5-7)$ *(oznako* $\nmid$ *beremo "ne deli"). Torej* $7 \neq 5$ *in* $\neg 7R5$ *in* $\neg 5R7$.

9. *Videli smo že, da obstajata naravni števili (*$x=5$ *in* $y=7$*), za kateri ne velja niti* xRy *niti* yRx*, zato relacija* R *ni strogo sovisna.*

Iz definicij lahko takoj opazimo naslednje:

- če je relacija R strogo sovisna, je tudi sovisna (kar je ekvivalentno temu: če ni sovisna, potem tudi ni strogo sovisna),
- če je R strogo sovisna, je tudi refleksivna (kar je ekvivalentno temu: če ni refleksivna, potem ni strogo sovisna).

V prejšnjem zgledu smo to, da relacija R ni strogo sovisna, utemeljili tudi s protiprimerom, ki je pokazal že, da relacija ni sovisna.

Še nekaj opozoril, da se izognemo pogostim napakam: če za neko relacijo ugotovimo, da je asimetrična, to ne pomeni nujno, da ni simetrična. Prav tako tudi antisimetričnost ni nasprotje simetričnosti (ne smemo pozabiti upoštevati pomena kvantifikatorjev, ko premišljujemo, kaj pomeni, da relacija ni simetrična!). Relacija je namreč lahko simetrična in antisimetrična (glej primer 227), nič od omenjenega (tak primer je relacija $R = \{(1,2),(2,1),(1,3)\}$ na množici $A = \{1,2,3\}$) ali ima le eno od obeh lastnosti. Prav tako velja poudariti, da tudi tranzitivnost in intranzitivnost nista nasprotji (za relacijo $R = \{(1,2),(3,4)\}$ na množici $A = \{1,2,3,4\}$ velja, da je hkrati tranzitivna in intranzitivna).

Oglejmo si, kako se lastnosti relacij odražajo na relacijskem grafu. Vse spodnje ugotovitve sledijo neposredno iz definicije posamezne lastnosti relacije:

1. če je R refleksivna, potem je v vsaki točki relacije grafa G_R zanka (**zanka** je v G_R usmerjena povezava, ki povezuje vozlišče samo s seboj),
2. če je R irefleksivna, je graf G_R brez zank,
3. če je R simetrična, potem vse povezave v G_R nastopajo v parih (t.j, če imamo povezavo od x do y, obstaja tudi obratna povezava),
4. če je R asimetrična, potem je G_R brez zank in nobena povezava ne nastopa v paru,
5. če je R antisimetrična, potem med dvema različnima elementoma ne obstajata povezavi v obe smeri,
6. če je R tranzitivna, potem velja: če iz nekega vozlišča grafa G_R lahko pridemo v dveh korakih, lahko pridemo tudi v enem (po povezavi),
7. če je R intranzitivna, potem velja: če iz nekega vozlišča grafa G_R lahko pridemo v drugo v dveh korakih, potem ne moremo priti v enem samem koraku,
8. če je R sovisna, potem je vsak par različnih vozlišč grafa G_R je povezan s povezavo vsaj v eno smer,
9. če je R strogo sovisna, potem je vsak par različnih vozlišč povezan s povezavo vsaj v eno smer in je v vsaki točki zanka.

Oglejmo si še algebraično karakterizacijo lastnosti relacij.

Izrek 206 *Naj bo $R \subseteq A \times A$. Tedaj je*

(i) *R refleksivna* $\Leftrightarrow E \subseteq R$,

(ii) *R irefleksivna* $\Leftrightarrow E \cap R = \emptyset$,

(iii) *R simetrična* $\Leftrightarrow R^{-1} = R$,

(iv) *R asimetrična* $\Leftrightarrow R^{-1} \cap R = \emptyset$,

(v) *R antisimetrična* $\Leftrightarrow R^{-1} \cap R \subseteq E$,

(vi) *R tranzitivna* $\Leftrightarrow R^2 \subseteq R$,

(vii) *R intranzitivna* $\Leftrightarrow R^2 \cap R = \emptyset$,

$(viii)$ *R sovisna* $\Leftrightarrow (A \times A) \setminus E \subseteq R \cup R^{-1}$,

(ix) *R strogo sovisna* $\Leftrightarrow A \times A = R \cup R^{-1}$.

Dokaz. Dokažimo le trditve (i), (iii) in $(viii)$.

(i) Naj bo R refleksivna relacija, tj. $\forall x : xRx$. Vemo, da je $E = \{(x,x); x \in A\}$ tj. $\forall x : xEx$. Torej je $E \subseteq R$. Dokažimo še nasprotno implikacijo. Naj bo $E \subseteq R$ (to pomeni, da je vsak element iz E v R), torej za vsak $x \in A$ velja xRx.

(iii) Naj bo R simetrična, torej za poljubna elementa $x, y \in A$ velja $xRy \Rightarrow yRx$. Spomnimo se, da je $xRy \Leftrightarrow yR^{-1}x$. Tako velja $xRy \Rightarrow yRx \Leftrightarrow xR^{-1}y$, kar pomeni: če je $(x,y) \in R$, potem je $(x,y) \in R^{-1}$. S tem smo dokazali inkluzijo $R \subseteq R^{-1}$. Podobno, ker je $xR^{-1}y \Leftrightarrow yRx \Rightarrow xRy$, velja $R^{-1} \subseteq R$. Zato je $R = R^{-1}$.

Naj bo sedaj $R = R^{-1}$. Potem za poljubna $x, y \in A$ velja

$$xRy \Rightarrow yR^{-1}x \Leftrightarrow yRx.$$

$(viii)$ Naj bo R sovisna (torej velja: če je $x \neq y$, potem je xRy ali yRx). Ob tej predpostavki dokazujemo inkluzijo $(A \times A) \setminus E \subseteq R \cup R^{-1}$. Naj bo $(x,y) \in (A \times A) \setminus E$. To pomeni, da $x \neq y$, od koder po predpostavki sledi $xRy \vee yRx$. Slednje je ekvivalentno $xRy \vee xR^{-1}y$, ali drugače rečeno $x(R \cup R^{-1})y$ oz. $(x,y) \in R \cup R^{-1}$.

Za dokaz obratne implikacije predpostavimo, da je $(A \times A) \setminus E \subseteq R \cup R^{-1}$. Če sta x in y poljubna elementa iz A, za katera velja $x \neq y$, potem izpeljemo naslednje zaporedje implikacij

$$\begin{aligned}(x,y) \in (A \times A) \setminus E &\Rightarrow (x,y) \in R \cup R^{-1} \\ &\Rightarrow x(R \cup R^{-1})y \\ &\Rightarrow xRy \vee xR^{-1}y \\ &\Rightarrow xRy \vee yRx.\end{aligned}$$

■

4.5 EKVIVALENČNE RELACIJE IN RAZBITJA

> Relacija je **ekvivalenčna**, če je refleksivna, simetrična in tranzitivna.

Primer 207 *Na množici $\mathbb{N}$ sta definirani relaciji S in L, za kateri velja:*

$$mSn \equiv m + n \text{ je sodo število},$$

$$mLn \equiv m + n \text{ je liho število}.$$

Ugotovi ali sta relaciji ekvivalenčni.

Rešitev: *Najprej obravnavajmo relacijo S.*

1. *Relacija S je refleksivna, saj mSm pomeni, da je $m + m = 2m$, kar je res sodo število za vsak $m \in \mathbb{N}$.*

2. *S je simetrična relacija, saj za poljubna $m, n \in \mathbb{N}$ velja $mSn \Rightarrow nSm$. Res,*

$$mSn \Rightarrow m + n \text{ je sodo število } \Rightarrow n + m \text{ je sodo število } \Rightarrow nSm.$$

3. *S je tranzitivna relacija, saj se lahko prepričamo, da za poljubna naravna števila m, n, r velja implikacija $mSn \wedge nSr \Rightarrow nSr$.*

$$\begin{aligned} mSn \wedge nSr &\Rightarrow m + n = 2k \wedge n + r = 2l, \text{ kjer sta } k, l \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow m = 2k - n \wedge r = 2l - n \\ &\Rightarrow m + r = 2k + 2l - 2n = 2(k + l - n) \\ &\Rightarrow m + r \text{ je sodo} \\ &\Rightarrow mSr. \end{aligned}$$

Torej je relacija S ekvivalenčna. Za relacijo L takoj vidimo, da ni refleksivna. Protiprimer je namreč katerokoli naravno število m, saj je izjava mLm za vsak m nepravilna izjava. Ker relacija L ni refleksivna, ni ekvivalenčna.

Naj bodo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ paroma disjunktne podmnožice množice A (t.j., $A_i \cap A_j = \emptyset$, če je $i \neq j$), za katere velja $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A$. Potem pravimo, da množice $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tvorijo **razbitje množice** A.

Izrek 208 *Vsako razbitje množice A določa neko ekvivalenčno relacijo. Natančneje, če je $A_1, A_2, \ldots, A_n$ razbitje množice A, potem je relacija*

$$xRy \equiv x \text{ in } y \text{ pripadata isti množici } A_i$$

ekvivalenčna relacija.

Dokaz.

1. Naj bo x poljuben element iz A. Element x je seveda v isti množici A_i kot x. Torej je xRx za vsak $x \in A$, zato je R refleksivna relacija.

2. Naj bosta x in y poljubna elementa iz A. Če je x v isti množici A_i kot y, je tudi y v isti množici A_i kot x. Torej velja $xRy \Rightarrow yRx$, zato je R simetrična relacija.

3. Naj bodo x, y, z poljubni elementi iz A. Če sta x in y v isti množici A_i in y in z v isti množici A_j, je $i = j$ (saj bi sicer $y \in A_i \cap A_j = \emptyset$). Torej sta tudi x in z v isti množici. Dokazali smo implikacijo $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$, kar pomeni, da je R tranzitivna.

■

Naj bo R ekvivalenčna relacija na množici A. Tedaj množici

$$[a] = \{b \in A; bRa\}$$

pravimo **ekvivalenčni razred** elementa a (in element a imenujemo **predstavnik** tega ekvivalenčnega razreda). Množico vseh ekvivalenčnih razredov imenujemo **faktorska množica** in jo označimo

$$A/R = \{[a]; a \in A\}.$$

Izrek 209 *Naj bo R ekvivalenčna relacija na množici A. Potem za poljubna elementa $a, b \in A$ velja:*

(i) $aRb \Leftrightarrow [a] = [b]$.

(ii) *Če a ni v relaciji z b, potem je* $[a] \cap [b] = \emptyset$.

(iii) *Vsak element množice A pripada natanko enemu ekvivalenčnemu razredu.*

Dokaz. Naj bo R ekvivalenčna relacija na množici A.

(i) Naj bo aRb, potem zaradi simetričnosti relacije R sledi tudi bRa. Če je $x \in [a]$, potem je xRa. Ker je R tranzitivna, imamo tako $aRb \Rightarrow xRb \Rightarrow x \in [b]$, torej je $[a] \subseteq [b]$.

Naj bo sedaj $[a] = [b]$. Zaradi refleksivnosti relacije R velja $a \in [a]$. Ker je $[a] = [b]$, je torej aRb.

(ii) Dokazujemo implikacijo $\neg aRb \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$. Dokažimo jo s pomočjo kontrapozicije. Recimo, da obstaja $x \in [a] \cap [b]$. Potem je $x \in [a] \wedge x \in [b]$, kar pomeni $xRa \wedge xRb$. Zaradi simetričnosti tako velja od koder sledi $aRx \wedge xRb$, od koder po tranzitivnosti dobimo aRb.

(iii) Ker je R refleksivna je $a \in [a]$ za vsak $a \in A$. Torej, vsak element množice A pripada vsaj enemu ekvivalenčnemu razredu. Recimo, da a pripada tudi $[b]$ za nek $b \in A$. Potem je aRb in po 1. točki izreka zato velja $[a] = [b]$. Zato a pripada natanko enemu ekvivalenčnemu razredu. ■

Prva lastnost zgornjega izreka pove, da se ekvivalenčna razreda elementov, ki sta v relaciji, ujemata. Drugo lastnost pa lahko povemo tudi tako: ekvivalenčna razreda elementov, ki nista v relaciji, sta disjunktna.

Prej smo videli, da vsako razbitje množice A določa neko ekvivalenčno relacijo. Iz izreka 209 pa sledi, da velja tudi obratno: ekvivalenčna relacija nam množico A razbije na ekvivalenčne razrede.

Izrek 210 *Naj bo R ekvivalenčna relacija na A. Potem je faktorska množica A/R razbitje množice A.*

Dokaz. Če je $x \in \bigcup_{[a]\in A/R}[a]$, potem je $x \in [a]$ za nek a iz A. Ker očitno velja $[a] \subseteq A$, je $x \in A$. Premislimo še obratno: naj bo $x \in A$. Potem je zaradi refleksivnosti $x \in [x]$, torej je x pripada množici $\bigcup_{[a]\in A/R}[a]$. Tako smo dokazali enakost

$$\bigcup_{[a]\in A/R} [a] = A\,,$$

ali z besedami, unija vseh ekvivalenčnih razredov glede na relacijo R je enaka množici A. Po prejšnjem izreku velja: če sta ekvivalenčna razreda $[a]$ in $[b]$ različna, potem $(a,b) \notin R$. Če pa $(a,b) \notin R$, velja $[a] \cap [b] = \emptyset$. S tem smo preverili izpolnjenost obeh pogojev iz definicije razbitja, zato je množica vseh ekvivalenčnih razredov razbitje množice A.

■

Primer 211 *Poišči faktorsko množico množice $\mathbb{N}$ glede na ekvivalenčno relacijo S iz primera 207.*

Rešitev: *Najprej premislimo, kaj je ekvivalenčni razred števila* 1*:*

$$[1] = \{n \in \mathbb{N}; aSn\} = \{n \in \mathbb{N}; 1+n \textit{ je sodo}\} = \{1,3,5,\ldots\}.$$

Opazimo tudi, da je

$$[1] = [3] = [5] = \cdots$$

Ker so torej že vsa liha števila v istem ekvivalenčnem razredu, nas zanima, kam sodijo soda števila. Izkaže se, da tudi vsa soda števila pripadaja istemu ekvivalenčnem razredu:

$$[2] = \{n \in \mathbb{N}; 2+n \textit{ je sodo}\} = \{2,4,6,\ldots\} = [4] = [6] = \cdots$$

Izračunana ekvivalenčna razreda torej pokrijeta celo množico $\mathbb{N}$, zato je

$$\mathbb{N}/S = \{[1],[2]\}.$$

Primer 212 *Na množici $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je definirana relacija R:*

$$(a,b)R(c,d) \quad \equiv \quad a+b = c+d.$$

Pokaži, da je relacija R ekvivalenčna in poišči ekvivalenčne razrede

$$[(1,1)],[(2,1)],[(3,1)],[(4,1)],[(5,1)],[(6,1)].$$

Rešitev: *Najprej premislimo, da je relacija R ekvivalenčna.*

1. *Za refleksivnost mora za vsak urejeni par $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ veljati $(a,b)R(a,b)$. Slednje drži, saj je*
$$(a,b)R(a,b) \Leftrightarrow a+b = a+b.$$

2. *Prepričajmo se, da je* R *simetrična relacija, torej, da za poljubna urejena para* $(a,b),(c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *velja* $(a,b)R(c,d) \Rightarrow (c,d)R(a,b)$. *Tudi to drži, saj je*

$$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a+b=c+d \Leftrightarrow c+d=a+b \Leftrightarrow (c,d)R(a,b).$$

3. *Za tranzitivnost preverimo ali za vsako trojico urejenih parov* $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *velja* $(a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(e,f) \Rightarrow (a,b)R(e,f)$. *Tudi ta lastnost drži, saj velja*

$$a+b=c+d \wedge c+d=e+f \Rightarrow a+b=e+f.$$

Poiščimo še ekvivalenčne razrede:

$$\begin{aligned}
[(1,1)] &= \{(a,b);(a,b)R(1,1)\} = \{(a,b);2=a+b\} \\
&= \{(a,2-a);a,2-a \in \mathbb{N}\} = \{(1,1)\}, \\
[(2,1)] &= \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};3=a+b\} = \{(a,3-a);a,3-a \in \mathbb{N}\} \\
&= \{(1,2),(2,1)\}, \\
[(3,1)] &= \{(a,4-a);a,4-a \in \mathbb{N}\} = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}, \\
[(4,1)] &= \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}, \\
[(5,1)] &= \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}, \\
[(6,1)] &= \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}.
\end{aligned}$$

4.6 OVOJNICE RELACIJ

Če relacija R na množici A nima neke lastnosti $\mathcal{L}$, jo lahko razširimo do relacije R_1 tako, da jo bo imela. Z "razširitvijo" mislimo na to, da bo nova relacija R_1 vsebovala vse urejene pare iz R ter dodatne urejene pare, ki so potrebni, da bi lastnost $\mathcal{L}$ veljala. Torej bo $R \subseteq R_1$. Če je R_1 najmanjša relacija, ki vsebuje relacijo R in ima lastnost $\mathcal{L}$, jo imenujemo ovojnica relacije R glede na lastnost $\mathcal{L}$ in označimo $R^{\mathcal{L}}$.

Naj bo $\mathcal{L}$ neka lastnost relacije. Potem je relacija $R^{\mathcal{L}}$ **ovojnica** relacije $R \subseteq A \times A$ **glede na lastnost** $\mathcal{L}$, če velja

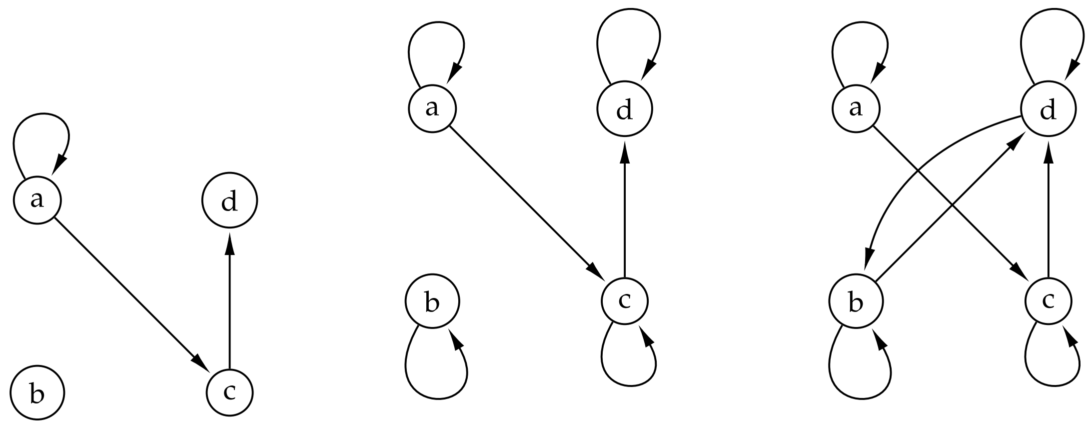
(*i*) $R \subseteq R^{\mathcal{L}}$,

(*ii*) $R^{\mathcal{L}}$ ima lastnost $\mathcal{L}$,

(*iii*) če za $Q \subseteq A \times A$ velja $R \subseteq Q$ in ima relacija Q lastnost $\mathcal{L}$, tedaj je $R^{\mathcal{L}} \subseteq Q$.

Če ima relacija R že sama lastnost $\mathcal{L}$, potem je sama sebi ovojnica glede na to lastnost. Velja torej $R = R^{\mathcal{L}}$. Za boljše razumevanje definicije ovojnice si oglejmo zgled, ki govori o refleksivni ovojnici.

Primer 213 *Naj bo množica $A = \{a, b, c, d\}$. Na množici A so dane tri relacije R, S in Q, katerih grafe vidimo na sliki 29. Opazimo, da velja $R \subseteq S$, kakor tudi $R \subseteq Q$. Obe relaciji S in Q sta refleksivni, relacija R pa ne. Da bi relacijo R razširili do relacije, ki je relfeksivna, njenemu grafu dodamo manjkajoče zanke (s tem dobimo relacijo S). Če dodamo še katerokoli drugo usmerjeno povezavo (kot je to v primeru relacije Q), bo taka relacija refleksivna, ne bo pa več najmanjša refleksivna relacija, ki vsebuje R. Najmanjša refleksivna relacija, ki vsebuje R je torej S, zato je S ovojnica relacije R glede na refleksivnost, kar zapišemo $S = R^{\text{ref}}$. Da tudi v splošnem dodajanje manjkajočih zank že zadostuje, da dobimo refleksivno ovojnico, bomo dokazali v izreku 214.*



(a) Relacija R. (b) Relacija S. (c) Relacija Q.

Slika 29: Grafi relacij R, S in Q.

Definirajmo:

$$R^{\text{ref}} = E \cup R.$$

Izrek 214 *Relacija R^{ref} je refleksivna ovojnica relacije R.*

Dokaz. Za R^{ref} preverimo vse tri lastnosti iz zgornje definicije. Lastnosti (i) in (ii) očitno veljata: $R \subseteq R^{\text{ref}}$ in $E \subseteq R^{\text{ref}}$. Premislimo še, da velja lastnost (iii). Naj bo Q refleksivna relacija, ki vsebuje R. Za relacijo Q torej velja $E \subseteq Q$ in $R \subseteq Q$. Ker potem očitno velja tudi $E \cup R \subseteq Q$, je $R^{\text{ref}} \subseteq Q$. ∎

Da bi dobili simetrično ovojnico relacije R, ji dodamo vse elemente iz R^{-1} (če še niso vsebovani v R). Definirajmo:

$$R^{\text{sim}} = R \cup R^{-1}.$$

Izrek 215 *Relacija R^{sim} je simetrična ovojnica relacije R.*

Dokaz. Preverimo lastnosti $(i), (ii)$ in (iii) iz definicije ovojnice.

(i) Ker je $R \subseteq R \cup R^{-1} = R^{\text{sim}}$, velja $R \subseteq R^{\text{sim}}$.

(ii) Pokažimo, da je $(R^{\text{sim}})^{-1} = R^{\text{sim}}$ tj. da je relacija R^{sim} simetrična:

$$(R^{\text{sim}})^{-1} = (R \cup R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cup R = R^{\text{sim}},$$

kjer drugi enačaj sledi po trditvi 198.

(iii) Naj bo $R \subseteq Q$ in Q simetrična relacija, tj. $Q = Q^{-1}$. Pokažimo, da je potem $R^{\text{sim}} \subseteq Q$:

$$Q = Q^{-1} = (R \cup Q)^{-1} = R^{-1} \cup Q^{-1} = R^{-1} \cup Q,$$

od koder lahko sklepamo, da je $R^{-1} \subseteq Q$. Ker velja tudi $R \subseteq Q$, velja $R^{\text{sim}} = R^{-1} \cup R \subseteq Q$. ■

Definirajmo novo relacijo $\overline{R}$:

$$\boxed{\overline{R} = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i.}$$

Z drugimi besedami, $x\overline{R}y$ natanko tedaj, ko obstaja naravno število n, da je xR^ny. To v grafu relacije pomeni, obstaja usmerjen sprehod od vozlišča x do vozlišča y (dolžine n).

Trditev 216 *Velja lastnost: $\overline{R} \cup \overline{S} \subseteq \overline{R \cup S}$.*

Dokaz. Naj bosta X in Y poljubni relaciji, za kateri velja $X \subseteq Y$. Potem po trditvi 201 (iii) velja tudi $X^n \subseteq Y^n$. Ker to velja za poljuben $n \in \mathbb{N}$, od tod sledi tudi $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$. Izpeljali smo lastnost:

$$X \subseteq Y \Rightarrow \overline{X} \subseteq \overline{Y}.$$

Sedaj najprej vzemimo $X = R$ in $Y = R \cup S$. Potem po izpeljani lastnosti velja tudi $\overline{R} \subseteq \overline{R \cup S}$. Podobno, če vzamemo $X = S$ in $Y = R \cup S$, izpeljemo tudi $\overline{S} \subseteq \overline{R \cup S}$. Tako končno sledi tudi $\overline{R} \cup \overline{S} \subseteq \overline{R \cup S}$. ■

Trditev 217 *Če je Q tranzitivna relacija, potem velja $\overline{Q} = Q$.*

Dokaz. Spomnimo se, da je $\overline{Q} = Q \cup Q^2 \cup Q^3 \cup \cdots$, zato očitno velja inkluzija $Q \subseteq \overline{Q}$. Dokažimo še obratno inkluzijo. Ker je Q tranzitivna, po izreku 206 velja $Q^2 \subseteq Q$. Če to inkluzijo pomnožimo iz desne s Q, dobimo $Q^3 \subseteq Q^2$ in če postopek ponavljamo, dobimo $Q^4 \subseteq Q^3$, $Q^5 \subseteq Q^4$, itd., od koder izvemo, da so poleg Q in Q^2 tudi vse potence $Q^3, Q^4, Q^5, \ldots$ podmnožice množice Q. Zato enako velja za njihovo unijo: $Q \cup Q^2 \cup Q^3 \cup \cdots \subseteq Q$. Torej je $\overline{Q} \subseteq Q$. ■

Sedaj se lahko prepričamo, da velja naslednje.

Izrek 218 *$\overline{R}$ je tranzitivna ovojnica relacije R.*

Dokaz. Preverimo vse tri lastnosti iz definicije.

(i) Inkluzija $R \subseteq \overline{R}$ velja po definiciji relacije $\overline{R}$.

(ii) Pokažimo, da je $\overline{R}$ je tranzitivna relacija tj., da za poljubne x, y, z velja

$$x\overline{R}y \wedge y\overline{R}z \Rightarrow x\overline{R}z.$$

Da ta implikacija drži, postane jasno takoj, ko razmislimo, kaj pomeni $x\overline{R}y$ in $y\overline{R}z$:

$$x\overline{R}y \Leftrightarrow \exists n \in N : xR^n y \Leftrightarrow \exists z_1, \ldots, z_{n-1} : xRz_1 \wedge z_1Rz_2 \wedge \cdots \wedge z_{n-1}Ry,$$

$$y\overline{R}z \Leftrightarrow \exists m \in N : xR^m y \Leftrightarrow \exists t_1, \ldots, t_{m-1} : yRt_1 \wedge t_1Rt_2 \wedge \cdots \wedge t_{m-1}Rz.$$

Če torej velja $x\overline{R}y \wedge y\overline{R}z$ potem za naravno število $m + n$ velja $xR^{n+m}z$, to pa pomeni, da je $x\overline{R}z$.

(iii) Naj bo Q poljubna tranzitivna relacija z lastnostjo $R \subseteq Q$. Pokažimo, da je $\overline{R} \subseteq Q$. Iz $R \subseteq Q$ sledi $R \cup Q = Q$. Ker je Q tranzitivna, po trditvi 217 velja $\overline{Q} = Q$. Torej lahko z upoštevanjem lastnosti iz trditve 216 izpeljemo

$$Q = \overline{Q} = \overline{R \cup Q} \supseteq \overline{R} \cup \overline{Q} = \overline{R} \cup Q \Rightarrow \overline{R} \subseteq Q.$$

■

Za $\overline{R}$ je v uporabi tudi oznaka R^{tran}.

Primer 219 *Naj bo $A = \{1, 2, 3\}$ in R relacija*

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 1)\}.$$

Potem R ni niti refleksivna (ker npr. $(2, 2) \notin R$), niti simetrična (velja npr. $(1, 2) \in R$, toda $(2, 1) \notin R$, niti tranzitivna (saj je $2R3$ in $3R1$ toda $\neg 2R1$). Refleksivna ovojnica relacije R je relacija

$$R^{\text{ref}} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 1), (2, 2), (3, 3)\},$$

saj je refleksivna in tudi najmanjša refleksivna relacija z lastnostjo, da vsebuje R (vsaka refleksivna relacija, ki vsebuje R bi morala vsebovati že dodana urejena para $(2, 2)$ in $(3, 3)$, manjša tako ne obstaja). Simetrična ovojnica relacije R je relacija

$$R^{\text{sim}} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 1), (2, 1), (3, 2)\}.$$

Pri iskanju refleksivne in simetrične ovojnice relacije R smo morali le pogledati, katere elemente že imamo v R, da bi ugotovili, katere je še potrebno dodati. Tako smo obe ovojnici dobili v enem samem koraku. Iskanje tranzitivne ovojnice pa lahko zahteva več korakov. Če si ogledamo relacijo R, bi v njeni tranzitivni ovojnici morali biti tudi pari

$(3,2)$ *(zaradi parov* $(3,1)$ *in* $(1,2)$*),* $(3,3)$ *(zaradi parov* $(3,1)$ *in* $(1,3)$*) in* $(2,1)$ *(zaradi* $(2,3)$ *in* $(3,1)$*). To nam da relacijo*

$$\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,3),(3,1),(3,2),(2,1),(3,3)\}.$$

Toda ta relacija še vedno ni tranzitivna. Zaradi novega para $(2,1)$ *in starega para* $(1,2)$ *moramo dodati še urejeni par* $(2,2)$*. To nam da relacijo*

$$\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,3),(3,1),(3,2),(2,1),(3,3),(2,2)\},$$

ki pa je tranzitivna, kot tudi najmanjša tranzitivna relacija, ki vsebuje R*. Zato je*

$$R^{\text{tran}} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,3),(3,1),(3,2),(2,1),(3,3),(2,2)\}.$$

Z večanjem števila elementov v množici A iskanje tranzitivne relacije na način, kot smo si ga ogledali v prejšnjem zgledu, postaja vse bolj nepregledno, zato si pomagamo z naslednjim postopkom, na katerem temelji **Floyd-Warshallov algoritem** za iskanje tranzitivne ovojnice. Natančno formulacijo algoritma in utemeljitev, zakaj deluje, izpustimo. Na zgledu pojasnimo le, kako lahko s pomočjo matrik pridemo do matrike tranzitivne ovojnice. Uporabimo kar relacijo R iz prejšnjega zgleda. Njena matrika je

$$B(R) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sedaj v 1. vrstici poiščemo vse enice, in si skoznje predstavljamo navpično premico. Podobno, v 1. stolpcu poiščemo vse enice, in si skoznje predstavljamo vodoravno premico. Sedaj poiščemo mesta v matriki, kjer se opisane premice sekajo. Če se na takem mestu v matriki nahaja 0, se le-ta spremeni v 1, če pa je na takem mestu že enica, je ne spreminjamo. Tako bi iz matrike $B(R)$ dobili matriko

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Res, tudi v prejšnjem zgledu smo opazili, da moramo zaradi parov $(3,1)$ in $(1,2)$ (ki ju v matriki $B(R)$ predstavljata enica v 3. vrstici in 1. stolpcu, ter enica v 1. vrstici in 2. stolpcu) dodati urejeni par $(3,2)$ (ki ga predstavlja novo nastala enica v 3. vrstici in 2. stolpcu). Prav tako pa smo morali dodati urejeni par $(3,3)$ (zaradi parov $(3,1)$ in $(1,3)$ tako nastane presečišče premic v 3. vrstici in 3. stolpcu). Sedaj postopek ponovimo, le da si navpične vzporednice predstavljamo skozi enice v drugi vrstici, vodoravne vzporednice pa skozi enice v drugem stolpcu. Na tem koraku nam presečišča premic ne dajo novih enic, zato z enakim postopkom nadaljujemo v 3. vrstici in 3. stolpcu, kar je še zadnji korak: navpične vzporednice si predstavljamo skozi enice v tretji vrstici, vodoravne vzporednice pa skozi enice v tretjem stolpcu. Na ta način opazimo še dve ničli na presečiščih premic, ki ju spremenimo v enici, ki predstavljata urejena para $(2,1)$ in $(2,2)$. Tako dobimo zadnjo matriko, ki je pa ravno matrika relacije R^{tran},

$$B(R^{\text{tran}}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Če bi iz te matrike izpisali urejene pare, bi dobili seveda enako množico urejenih parov kot v zgornjem zgledu. Izkazalo se je torej, da je R^{tran} dane relacije kar polna relacija, velja namreč $R^{\text{tran}} = A \times A$ (kar pa seveda ne zgodi vselej, glej npr. nalogo 232).

4.7 PREVERI SVOJE ZNANJE (OSNOVNO O RELACIJAH)

Vprašanja iz teorije

1. Kaj je binarna relacija?
2. Kaj je enotska relacija?
3. Kaj sta domena in zaloga vrednosti relacije?
4. Naštej lastnosti komplementa relacij.
5. Kako je definirana inverzna relacija?
6. Naštej lastnosti, ki veljajo za inverzno relacijo.
7. Kako je definiran produkt relacij?
8. Naštej lastnosti produkta relacij.
9. Pojasni pojem potence relacije in naštej njene lastnosti.
10. Pojasni, kako relacije predstavimo s pomočjo grafov in matrik.
11. Kako se na grafu relacije odraža dejstvo, da je $xR * Ry$?
12. Kaj lahko poveš o matriki inverzne relacije?
13. V kakšni zvezi je matrika produkta relacij $R * S$ s produktom matrik $B(R)$ in $B(S)$?
14. Naštej lastnosti relacij in njihove definicije.
15. Kako se lastnosti relacije odražajo na grafu relacije?
16. Kdaj je relacija ekvivalenčna?
17. Kaj je razbitje množice?

18. Pojasni pojma ekvivalenčni razred in faktorska množica.
19. Kako je definirana ovojnica relacije glede na neko lastnost?
20. Kako dobimo refleksivno (oz. simetrično oz. tranzitivno) ovojnico?
21. Kako deluje Floyd-Warshalov algoritem?

Rešene naloge

Naloga 220 *Naj bo* $A = \{1, 2, 3, 4\}$. *Kateri urejeni pari so v relaciji* $R = \{(a, b); a, b \in A, a < b\}$?

Rešitev: $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.

Naloga 221 *Za vsako od naslednjih relacij R definiranih na* $\mathbb{Z}$ *ugotovi, ali dani urejeni pari pripadajo relaciji R.*

(a) $xRy \equiv x = y + 1;\quad (2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 2),$
(b) $xRy \equiv x \mid y;\quad (2, 6), (3, 5), (8, 4), (4, 8),$
(c) $xRy \equiv$ *x in y sta tuji števili;* $\quad (5, 8), (9, 16), (6, 8), (8, 21),$
(d) $xRy \equiv$ *največji skupni delitelj števil x in y je 7;* $\quad (28, 14), (7, 7), (10, 4), (14, 21),$
(d) $xRy \equiv x^2 + y^2 = z^2$ *za nek* $z \in \mathbb{Z}$; $\quad (1, 0), (3, 9), (2, 2), (3, 4).$

Rešitev: *Rešitve so naslednji urejeni pari:*

(a) $(3, 2),$
(b) $(2, 6), (4, 8),$
(c) $(5, 8), (9, 16), (8, 21),$
(d) $(7, 7), (14, 21),$
(d) $(1, 0), (3, 4).$

Naloga 222 *Naj bo* $A = \{1, 2\}$. *Zapiši vse urejene pare relacije "$\subseteq$" na množici* $\mathcal{P}(A)$.

Rešitev: *Relacija "$\subseteq$" vsebuje naslednje urejene pare:* $(\emptyset, \emptyset)$, $(\emptyset, \{1\})$, $(\emptyset, \{2\})$, $(\emptyset, \{1, 2\})$, $(\{1\}, \{1\})$, $(\{1\}, \{1, 2\})$, $(\{2\}, \{2\})$, $(\{2\}, \{1, 2\})$, $(\{1, 2\}, \{1, 2\})$.

Naloga 223 *Na* $A = \{a, b, c, d, e\}$ *so podane relacije* $S = \{(b, d), (d, e), (d, a), (e, e)\}$, $R = \{(a, b), (b, c), (b, e), (c, c), (c, d), (e, a), (e, d)\}$ *in* $Q = \{(a, b), (b, d), (b, e), (c, b)\}$. *Poišči domeno in zalogo vrednosti relacije S ter relacije* S^{-1}, $R \cap S$, $R \cap Q$, $Q \cup S$, $S * S$, $Q * S$, $R \cap Q * S$, $(R \cap Q) * S$, Q^3.

Rešitev:

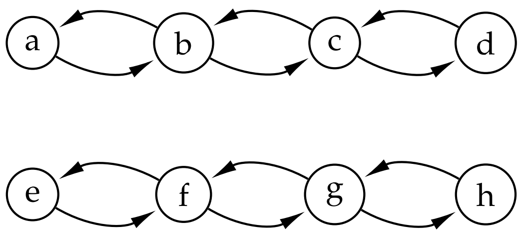
$$\begin{aligned}
D_S &= \{b,d,e\} = Z_{S^{-1}}, \\
Z_S &= \{a,d,e\} = D_{S^{-1}}, \\
R \cap S &= \emptyset, \\
R \cap Q &= \{(a,b),(b,e)\}, \\
Q \cup S &= \{(a,b),(b,d),(b,e),(c,b),(d,e),(d,a),(e,e)\}, \\
S * S &= \{(b,e),(b,a),(d,e),(e,e)\}, \\
Q * S &= \{(a,d),(b,e),(b,a),(c,d)\}, \\
R \cap Q * S &= \{(b,e),(c,d)\}, \\
(R \cap Q) * S &= \{(b,e),(a,d)\}, \\
Q^3 &= \emptyset.
\end{aligned}$$

Naloga 224 *Tabela 1 prikazuje razporeditev študentov v učilnici. Nariši graf relacije S, kjer je xSy natanko tedaj, ko študent x sedi neposredno poleg študenta y v isti vrsti.*

a	b	c	d
e	f	g	h

Tabela 1: Razporeditev študentov.

Rešitev: *Graf relacije vidimo na sliki 30.*



Slika 30: Graf relacije iz naloge 224.

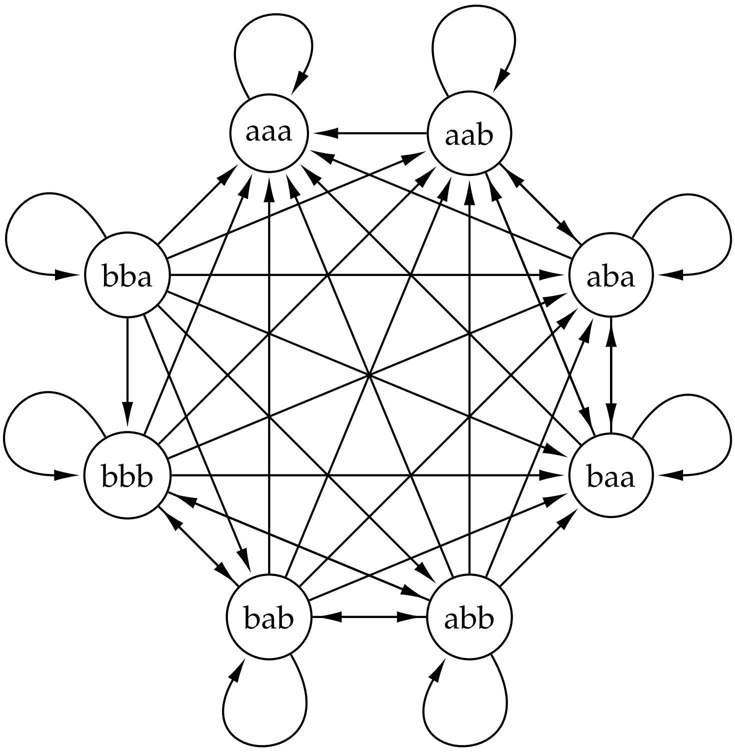
Naloga 225 *Naj bo A množica vseh 3-mestnih besed, ki jih lahko sestavimo s črkama a in b. Naj bosta $x, y \in A$. Relacija R je nad množico A definirana tako:*

$$xRy \equiv x \text{ vsebuje manj ali enako } a\text{-jev kot } y.$$

(a) *Nariši graf relacije R.*

(b) *Ali je relacija R refleksivna, simetrična, tranzitivna, sovisna, antisimetrična?*

Rešitev: *Graf relacije R vidimo na sliki 31. Relacija R je refleksivna, saj je vsak element v relaciji sam s seboj. Relacija ni simetrična, saj velja $aab\,R\,aaa$, ne pa tudi obratno. Relacija je tranzitivna, saj za poljubne besede x, y, z velja: če x vsebuje manj ali*



Slika 31: Graf relacije R iz naloge 225.

enako a-jev kot y in y vsebuje manj ali enako a-jev kot z, potem seveda x vsebuje manj ali enako a-jev kot z. Relacija je sovisna, saj med poljubnima različnima besedama na sliki 31 vidimo puščico vsaj v eno smer. Antisimetrična pa relacija ni, saj je npr. aab R aba kakor tudi aba R aab, toda besedi aab in aba nista enaki.

Naloga 226 *Na množici* $\mathbb{R}$ *je definirana relacija T:*

$$xTy \;\equiv\; x+5 \leq y.$$

Ali je podana relacija refleksivna, irefleksivna, simetrična oz. tranzitivna?

Rešitev: *Če bi T bila refleksivna relacija, bi za vsako realno število x veljalo* xTx *oz.* $x+5 \leq x$*, kar pa seveda ne drži. Ker pravzaprav za vsak* $x \in \mathbb{R}$ *velja* $x+5 > x$*, je relacija T irefleksivna. Če za x izberemo 0, za y pa 5, velja* $x+5 \leq y$*, ne pa tudi* $y+5 \leq x$*, zato relacija ni simetrična. Za dokaz tranzitivnosti moramo ob predpostavki, da za poljubna realna števila* x,y,z *velja* $x+5 \leq y$ *in* $y+5 \leq z$*, dokazati, da velja tudi* $x+5 \leq z$*. Da to drži, se lahko prepričamo iz naslednjega zaporedja neenakosti:* $x+5 \leq y \leq y+5 \leq z$*.*

Naloga 227 *Pokaži, da so edine relacije, ki so hkrati simetrične in antisimetrične, tiste, ki so podmnožice enotske relacije.*

Rešitev: *Naj bo R relacija na množici A, ki je hkrati simetrična in antisimetrična. Če obstaja* $(x,y) \in R$ *tako, da je* $x \neq y$*, potem iz simetričnosti relacije R sledi, da je tudi*

$(y,x) \in R$. Ker je R antisimetrična, pa velja $x = y$, kar je protislovje. Zato so lahko v relaciji R lahko le elementi oblike (x,x).

Naloga 228 *Naj bo relacija $R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ podana takole: $R = \{(x,y);\ x = y^2\}$. Ugotovi, katere lastnosti ima relacija.*

Rešitev: *Relacija R*

1. *ni refleksivna, saj npr. $(3,3) \notin R$,*
2. *ni irefleksivna, saj je $(1,1) \in R$,*
3. *ni simetrična, saj npr. $(4,2) \in R$ in $(2,4) \notin R$,*
4. *ni asimetrična, saj je $(1,1) \in R$,*
5. *je antisimetrična. Antisimetričnost pomeni, da $\forall x,y \in \mathbb{N}$ velja implikacija $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$. Res, če je $x = y^2$ in $y = x^2$, potem je $x = x^4$, od koder sledi $x(x-1)(x^2+x+1) = 0$, od tod pa da je $x = 0$ ali $x = 1$. Če je $x = 0$, iz enačbe $y = x^2$ sledi, da je tudi $y = 0$. Če pa je $x = 1$, je tudi $y = 1$. Torej sta x in y enaka,*
6. *ni tranzitivna, saj $(16,4) \in R$, $(4,2) \in R$, toda $(16,2) \notin R$,*
7. *ni intranzitivna, saj je $(1,1) \in R$ (protiprimer dobimo, če v definiciji intranzitivnosti za vse tri x,y in z vzamemo vrednost 1),*
8. *ni sovisna, saj $(1,2) \notin R$ in $(2,1) \notin R$,*
9. *ni strogo sovisna, ker ni sovisna.*

Naloga 229 *Naj bo relacija $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ podana takole: $R = \{(x,y);\ D(x,y) = 1\}$, kjer je $D(x,y)$ oznaka za največji skupni delitelj števil x in y.*

Rešitev: *Relacija R*

1. *ni refleksivna, saj npr. $D(3,3) = 3$,*
2. *ni irefleksivna, saj je $D(1,1) = 1$,*
3. *je simetrična, saj za poljubni naravni števili x in y velja: če je $D(x,y) = 1$, potem je tudi $D(y,x) = 1$,*
4. *ni asimetrična, saj je simetrična,*
5. *ni antisimetrična, saj iz $D(x,y) = 1$ in $D(y,x) = 1$ ne sledi nujno, da sta x in y enaka,*
6. *ni tranzitivna, saj je $D(3,4) = 1$, $D(4,9) = 1$, toda $D(3,9) = 3$,*
7. *ni intranzitivna, saj je $D(1,1) = 1$ (protiprimer dobimo, če v definiciji intranzitivnosti za vse tri x,y in z vzamemo vrednost 1),*

8. *ni sovisna, saj je* $D(3,6) = 3$ *in* $D(6,3) = 3$ *(torej obstajata* x *in* y*, za katera* $\neg xRy$ *in* $\neg yRx$*),*

9. *ni strogo sovisna, ker ni sovisna.*

Naloga 230 *Če je relacija ekvivalenčna, zapiši faktorsko množico:*

(a) $A = \{1,2,3,4,5\}$, $R \subseteq A \times A$,
$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,5),(5,1),(3,5),(5,3),(1,3),(3,1)\}$.

(b) $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ x \cdot y > 0\} \cup \{(0,0)\}$,

(c) $A = \{x \in \mathbb{N};\ 1 \leq x \leq 10\}$, $R = \{(x,y) \in A \times A;\ x \mid y \vee y \mid x\}$,

(d) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x^2 = y^2\}$.

Rešitev:

(a) *Vsak element iz* A *je v relaciji sam s seboj, zato je relacija refleksivna. Če je urejeni par oblike* (x,y) *v* R*, je v* R *tudi urejeni par* (y,x)*, zato je relacija simetrična. Prav tako se hitro prepričamo, da kakor hitro sta v* R *para oblike* (x,y) *in* (y,z)*, je v* R *tudi* (x,z)*. Zato je relacija tudi tranzitivna. Torej je* R *ekvivalenčna relacija. Za ekvivalenčne razrede velja:* $[1] = \{1,3,5\} = [3] = [5]$, $[2] = \{2\}$, $[4] = \{4\}$. *Tako je faktorska množica enaka* $A/R = \{[1],[2],[4]\} = \{\{1,3,5\},\{2\},\{4\}\}$.

(b) *Relacija* R *je refleksivna: iz definicije relacije je razvidno, da je* 0 *v relaciji z* 0*, če pa je celo število* x *različno od* 0*, je njegov kvadrat pozitiven. Torej za vsak* $x \in \mathbb{Z}$ *velja* xRx*. Relacija je očitno simetrična: za poljubna* $x, y \in \mathbb{Z}$ *velja:* $xy > 0 \Rightarrow yx > 0$*. Da bi preverili tranzitivnost, predpostavimo, da za poljubna cela števila* x, y, z *velja* $xy > 0$ *in* $zy > 0$*. Ker je* $xy > 0$*, to pomeni, da je* $x > 0, y > 0$ *ali* $x < 0, y < 0$*. Če je velja prva možnost, potem mora tudi* z *biti pozitiven (sicer ne bi veljala neenakost* $zy > 0$*). Zato je v tem primeru tudi produkt* xz *pozitiven. Če pa velja druga možnost, torej če je* $x < 0$ *in* $y < 0$*, potem pa mora zaradi neenakosti* $zy > 0$ *veljati* $z < 0$*. Tako je tudi v tem primeru* $xz > 0$*. Torej je relacija tranzitivna in lahko poiščemo njene ekvivalenčne razrede.*

Premislimo, čemu je enak ekvivalenčni razred $[1]$*. Po definiciji ekvivalenčnega razreda in definiciji relacije* R *dobimo:* $[1] = \{t \in \mathbb{Z};\ tR1\} = \{t \in \mathbb{Z};\ t \cdot 1 > 0\}$*. To bo veljalo za vsa pozitivna cela (oz. naravna) števila* t*, torej je* $[1] = \{1,2,3,\ldots\}$*. Podobno izpeljemo*

$$[-1] = \{t \in \mathbb{Z};\ tR(-1)\} = \{t \in \mathbb{Z};\ t \cdot (-1) > 0\} = \{-1,-2,-3,\ldots\}.$$

Iz definicije relacije R *vidimo še* $[0] = \{0\}$*. Tako je faktorska množica* $\mathbb{Z}/R = \{[-1],[0],[1]\}$.

(c) *Relacija je seveda refleksivna, saj vsako naravno število deli samo sebe. Če za poljubna $x, y \in A$ velja xRy, to pomeni, da velja $x \mid y \vee y \mid x$. Zaradi komutativnosti disjunkcije potem velja tudi $y \mid x \vee x \mid y$, kar pa pomeni, da je yRx. Zato je relacija simetrična. Ni pa tranzitivna, saj npr. urejena para $(4, 2)$ in $(2, 6)$ pripadata relaciji R, toda $(4, 6) \notin R$. Ker relacija ni tranzitivna in zato ni ekvivalenčna, ne moremo govoriti o ekvivalenčnih razredih relacije.*

(d) *Relacija R je očitno refleksivna, saj za vsako realno število velja $x^2 = x^2$. Je tudi simetrična, saj za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ velja: če je $x^2 = y^2$, potem je tudi $y^2 = x^2$. Velja pa tudi tranzitivnost: naj bodo x, y, z poljubna realna števila, za katera velja $x^2 = y^2$ in $y^2 = z^2$. Potem zaradi tranzitivnosti relacije "=" velja tudi $x^2 = z^2$. Poiščimo še ekvivalenčne razrede. Po definiciji je v ekvivalenčnem razredu nekega realnega števila x vsako realno število y, ki je v relaciji z x. Torej tak y, za katerega velja $x^2 = y^2$. Torej je $y = x$ ali $y = -x$. Vsak ekvivalenčni razred je torej oblike $[x] = \{x, -x\}$, zato je faktorska množica $\mathbb{R}/_R = \{[x]; x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\} = \{\{x, -x\}; x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$.*

Naloga 231 *Na množici $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sta definirani relaciji L in S:*

$$xLy \equiv x \cdot y \text{ je liho število,}$$

$$xSy \equiv x \cdot y \text{ je sodo število.}$$

(a) *Nariši grafa relacij L in S.*

(b) *Za obe relaciji preuči njune lastnosti.*

(c) *Zapiši matriko relacije L in matriko refleksivne ovojnice relacije S.*

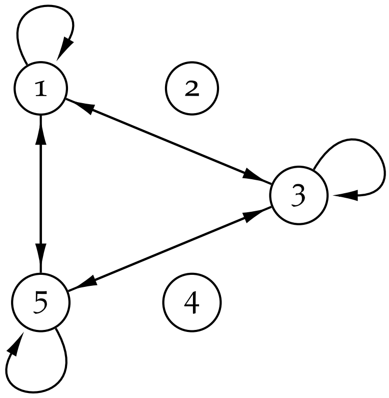
Rešitev:

(a) *Graf relacije L prikazuje slika 32, graf relacije S pa slika 33.*

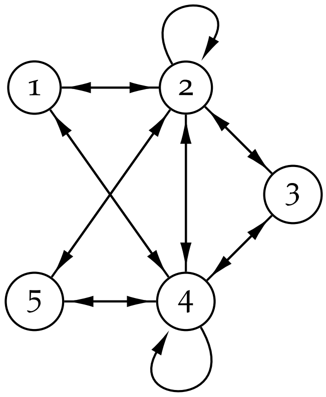
(b) *Relacija L je simetrična in tranzitivna, ostalih lastnosti nima. Relacija S je le simetrična.*

(c)

$$B(L) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B(S^{ref}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$



Slika 32: Graf relacije L iz naloge 231.



Slika 33: Graf relacije S iz naloge 231.

Naloga 232 *Poišči matriko tranzitivne ovojnice relacije R, ki je podana z matriko*

$$B(R) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ali je $\overline{R}$ ekvivalenčna relacija?

Rešitev: *Matriko $B(\overline{R})$ dobimo s pomočjo Floyd-Warshalovega algoritma:*

$$B(\overline{R}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Relacija $\overline{R}$ je sicer tranzitivna (po definiciji tranzitivne ovojnice) in refleksivna (kar se vidi iz enic na glavni diagonali matrike $B(\overline{R})$), ni pa ekvivalenčna relacija, ker ni simetrična (saj matrika $B(\overline{R})$ ni simetrična).

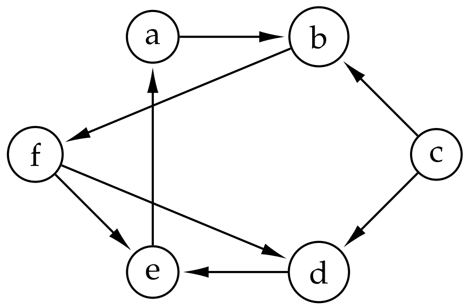
Naloga 233 *Na množici $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ je definirana relacija T:*

$$T = \{(a,b),(b,f),(c,b),(c,d),(d,e),(e,a),(f,d),(f,e)\}.$$

Nariši graf relacije T, ugotovi ali je podana relacija irefleksivna oz. antisimetrična, ter poišči tranzitivno ovojnico relacije T.

Rešitev: *Graf relacije T vidimo na sliki 34. Iz njega razberemo, da ne vsebuje nobene zanke, zato je relacija irefleksivna. Ker se tudi ne zgodi, da bi med dvema elementoma množice A imeli puščico od enega elementa do drugega in obratno, je relacija antisimetrična. Tranzitivno ovojnico $\overline{T}$ dobimo s pomočjo Floyd-Warshalovega algoritma:*

$$B(\overline{T}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$



Slika 34: Graf relacije iz primera 233.

4.8 UREJENOSTI

Relacija $\preceq$ na množici A je **delna urejenost na množici** A, če ima naslednje tri lastnosti:

- **refleksivnost:** $\forall x \in A : x \preceq x$,
- **antisimetričnost:** $\forall x, y \in A : (x \preceq y \text{ in } y \preceq x \Rightarrow x = y)$,
- **tranzitivnost:** $\forall x, y, z \in A : (x \preceq y \text{ in } y \preceq z \Rightarrow x \preceq z)$.

Če je $\preceq$ delna urejenost na množici A, potem urejeni par $(A, \preceq)$ imenujemo **delno urejena množica**.

Z delno urejenimi množicami smo se že srečevali. Hitro lahko premislimo, da je vsaka izmed množic $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ delno urejena z relacijo "$\leq$". Prav tako za vsako neprazno množico A velja, da je $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ delna urejenost[5]. Prav tako je primer delne urejenosti množica deliteljev $D(n)$ naravnega števila n skupaj z relacijo deljivosti "$|$".

> **Linearna urejenost** je sovisna delna urejenost.

Spomnimo se, da je relacija R sovisna natanko tedaj, ko $\forall x, y \in A : (x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx)$. Ker je relacija "$\leq$" na množicah $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sovisna, je ta na teh množicah tudi linearna urejenost. Ni pa linearna urejenost relacija inkluzije: če sta dve množici različni, to še ne pomeni, da je prva množica podmnožica druge ali obratno (lahko sta disjunktni). Prav tako je relacija deljivosti delna urejenost na $D(n)$, ni pa linearna urejenost (npr. v $D(60)$ sta 6 in 10 različni števili, a 6 ne deli 10, kot tudi ne obratno).

> Naj bo A delno urejena množica z relacijo $\preceq$. Rečemo, da sta elementa $x, y \in A$ **primerljiva**, če je $x \preceq y$ ali $y \preceq x$, sicer sta **neprimerljiva**.

Npr. v delno urejeni množici $(D(60), |)$ sta 6 in 10 neprimerljiva elementa, 3 in 6 pa sta primerljiva.

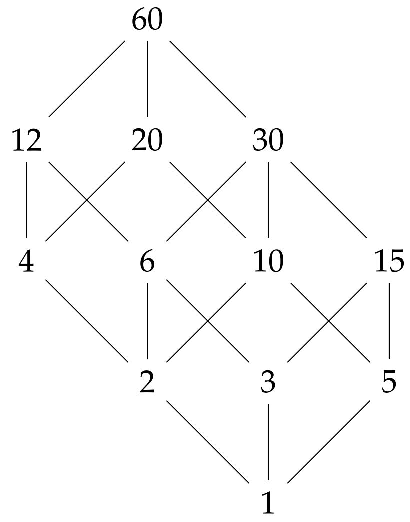
> Če je $x \preceq y$ in $x \neq y$, potem pišemo tudi $x \prec y$ in rečemo, da je element x **predhodnik** elementa y, oz. da je element y **naslednik** elementa x.
>
> Element x je **neposredni predhodnik** y oz. y je **neposredni naslednik** x, če velja:
>
> - $x \prec y$,
> - ne obstaja element $z \in A$, da je $x \prec z \prec y$.

Če je množica A končna, si lahko delno urejeno množico $(A, \preceq)$ vizualno predstavimo s **Hassejevim diagramom**. V njem vsakega od elementov množice A predstavimo s točko (oz. vozliščem) v ravnini tako, da za poljubna elementa $a, b \in A$ velja:

- če je $a \preceq b$, potem točka b leži nad a,
- a in b povežemo s črto, če je element a neposredni predhodnik elementa b.

5 $\mathcal{P}(A)$ je oznaka za potenčno množico, tj. množico vseh podmnožic množice A.

V posebnem primeru, ko je delna urejenost $(A, \preceq)$ tudi sovisna (ko je torej $(A, \preceq)$ linearna urejenost), si njen Hassejev diagram predstavljamo kot navpično daljico oz. premico, na kateri so vse točke diagrama.

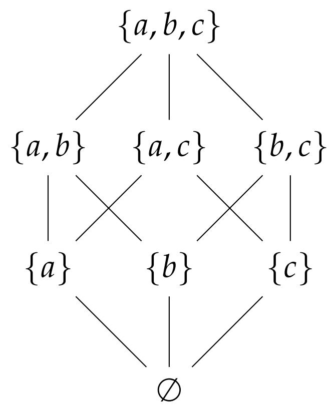


Slika 35: Hassejev diagram delne urejenosti $(D(60), |)$.

Primer 234 *Na sliki 35 vidimo Hassejev diagram delne urejenosti* $(D(60), |)$. *Pri tem je* $D(60) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$.

Primer 235 *Nariši Hassejev diagram delne urejenosti* $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$.

Rešitev: $\mathcal{P}(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$, *Hassejev diagram pa vidimo na sliki 36.*



Slika 36: Hassejev diagram delno urejene množice $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$.

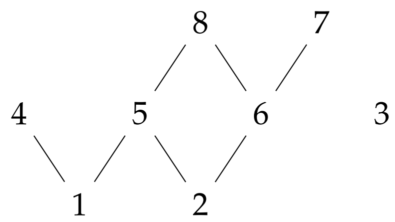
Oglejmo si, kako v delno urejeni množici definiramo **posebne elemente**.

Naj bo $a \in A$, kjer je $(A, \preceq)$ delna urejenost.

- Element a je **minimalen**, če za $\forall x \in A : (x \preceq a \Rightarrow x = a)$.
- Element a je **maksimalen**, če za $\forall x \in A : (a \preceq x \Rightarrow x = a)$.
- Element a je **prvi** (oz. **najmanjši**), če za $\forall x \in A : a \preceq x$.
- Element a je **zadnji** (oz. **največji**), če za $\forall x \in A : x \preceq a$.

Primer 236 *Iz slike 35 (oz. 36) lahko razberemo, da je element* 1 *(oz.* $\emptyset$*) tako minimalen kot prvi, element* 60 *(oz.* $\{a, b, c\}$*) pa maksimalen, kakor tudi zadnji.*

Primer 237 *Slika 37 naj predstavlja Hassejev diagram delno urejene množice, katere elementi so naravna števila od* 1 *do* 8*. V delno urejeni množici, ki jo ta diagram predstavlja, so* $1, 2$ *in* 3 *minimalni elementi, ni pa elementa, ki bi bil v relaciji z vsemi drugimi, zato ni prvega elementa. Elementi* $3, 4, 8$ *in* 7 *so maksimalni (saj niso v relaciji z nobenim drugim elementom razen sami s sabo), ne obstaja pa zadnji element (ni namreč elementa, za katerega bi veljalo, da so tudi vsi drugi v relaciji z njim).*



Slika 37: Hassejev diagram delno urejene množice.

Trditev 238 *V delni urejenosti* $(A, \preceq)$ *velja:*

(i) *če je element* $a \in A$ *prvi, potem je minimalen,*

(ii) *če je element* $a \in A$ *zadnji, potem je maksimalen,*

(iii) *če sta elementa* $a_1, a_2 \in A$ *prva, potem je* $a_1 = a_2$*,*

(iv) *če sta elementa* $a_1, a_2 \in A$ *zadnja, potem je* $a_1 = a_2$*.*

Dokaz. Prvi dve trditvi sta očitni, saj sledita neposredno iz definicije. Razmislimo, da velja tretja trditev: če je element a_1 prvi, potem za vsak x velja $a_1 \preceq x$, kar med drugim pomeni tudi, da je $a_1 \preceq a_2$. Če je tudi element a_2 prvi, potem za vsak x velja $a_2 \preceq x$, kar pa pomeni, da je $a_2 \preceq a_1$. Torej je $a_1 = a_2$ zaradi antisimetričnosti. Četrto trditev dokažemo podobno, za vajo naj jo bralec dokaže sam. ∎

Trditev 239 *V linearni urejenosti* $(A, \preceq)$ *velja:*

(i) *če je* $a \in A$ *minimalen, potem je prvi,*

(ii) *če je* $a \in A$ *maksimalen, potem je zadnji.*

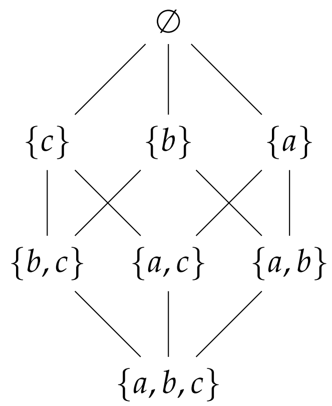
Dokaz. Tudi sedaj sta dokaza zelo podobna, zato dokažimo le prvo trditev. To bomo storili s pomočjo kontrapozicije. Recimo, da element a ni prvi. Potem obstaja $x \in A : \neg a \preceq x$. Ker je relacija $\preceq$ sovisna, sledi, da je $x \preceq a$, kar pa pomeni da a ni minimalen element. ∎

Delna urejenost in linearna urejenost sta relaciji, zato lahko govorimo tudi o njunih inverzih relacijah oz. na kratko o inverzih.

Inverz urejenosti $\preceq$ označimo z $\succeq$. Velja torej

$$\succeq = \preceq^{-1} .$$

Primer 240 *Hassejev diagram inverza urejenosti, prikazane na sliki 36, vidimo na sliki 38.*



Slika 38: Hassejev diagram inverza.

Trditev 241 *Če je* $(A, \preceq)$ *delna urejenost, potem je tudi* $(A, \succeq)$ *delna urejenost. Velja še:*

(i) *če je* x *minimalen za relacijo* $\preceq$*, potem je* x *maksimalen za relacijo* $\succeq$*,*

(ii) *če je* x *prvi za relacijo* $\preceq$*, potem je* x *zadnji za relacijo* $\succeq$*.*

Ker dokaz temelji neposredno na definicijah pojmov, ki nastopajo v trditvi, ga kot vajo za samostojno reševanje prepuščamo bralcu.

Naj bo $(A, \preceq)$ delna urejenost množica.

Najmanjša zgornja meja (ali **supremum**) elementov x in y, $\sup(x, y)$, je element $z \in A$, za katerega velja:

- $x \preceq z$ in $y \preceq z$,
- če za poljuben $a \in A$ velja $x \preceq a$ in $y \preceq a$, potem $z \preceq a$.

Če velja le prvi od zgornjih dveh pogojev, rečemo da je z **zgornja meja** elementov x in y.

Največja spodnja meja (ali **infimum**) elementov x ter y, $\inf(x, y)$, je element $s \in A$, za katerega velja:

- $s \preceq x$ in $s \preceq y$,
- če za poljuben $a \in A$ velja $a \preceq x$ in $a \preceq x$, potem $a \preceq s$.

Če velja le prvi od zgornjih dveh pogojev, rečemo da je s **spodnja meja** elementov x in y.

Primer 242 *Oglejmo si delno urejeno množico, predstavljeno s Hassejevim diagramom na sliki 35. Potem je:*

$$\begin{array}{lcl} \sup(20,30) & = & 60, \\ \sup(2,6) & = & 6, \\ \sup(2,15) & = & 30, \\ \inf(20,30) & = & 10, \\ \inf(6,5) & = & 1. \end{array}$$

Primer 243 *Oglejmo si delno urejeno množico, predstavljeno s Hassejevim diagramom na sliki 36. Potem sta tako $\{a,c\}$ in $\{a,b,c\}$ zgornji meji elementov a in c, $\{a,c\}$ je pa tudi njuna najmanjša zgornja meja, zato je $\sup(\{a\},\{c\}) = \{a,c\}$. Opazimo lahko še, da velja:*

$$\begin{array}{lcl} \sup(\{a,b\},\{a,c\}) & = & \{a,b,c\}, \\ \sup(\{a\},\{b,c\}) & = & \{a,b,c\}, \\ \sup(\{b\},\{b,c\}) & = & \{b,c\}, \\ \inf(\{a,b\},\{a,c\}) & = & \{a\}, \\ \inf(\{a,b\},\{c\}) & = & \emptyset. \end{array}$$

Na zgornjih zgledih je bilo že mogoče opaziti naslednjo lastnost, ki velja tudi v splošnem in sledi neposredno iz definicije.

Trditev 244 *Naj bo $(A, \preceq)$ delna urejenost in $x, y \in A$. Potem velja:*

$$x \preceq y \quad \Leftrightarrow \quad x = \inf(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad y = \sup(x,y).$$

4.9 MREŽE

Pojem mreže bomo definirali na dva načina in se nato prepričali, da gre za ekvivalentna pojma. Oglejmo si najprej *relacijsko definicijo*.

Delna urejenost $(A, \preceq)$ je **(relacijska) mreža**, če za vsak par $x, y \in A$ obstajata elementa $\sup\{x, y\}$ in $\inf\{x, y\}$.

Primer 245 *Delni urejenosti, prikazani na slikah 35 in 36 sta mreži, medtem ko delna urejenost na sliki 37 ni, saj npr. za elementa* 7 *in* 8 *ne obstaja supremum.*

Izkaže se, da sta delni urejenosti $(D(n), |)$ in $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ mreži za poljubno naravno število n oz. poljubno množico A.

Primer 246 *Delna urejenost $(D(n), |)$ je mreža. Pri tem za poljubna $x, y \in D(n)$ velja, da je* $\inf(x, y)$ *enak največjemu skupnemu delitelju $D(x, y)$ števil x in y,* $\sup(x, y)$ *pa najmanjšemu skupnemu večkratniku $v(x, y)$ teh dveh števil.*

Primer 247 *Delna urejenost $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ je mreža, kjer za poljubni množici $X, Y \subseteq A$ velja* $\inf(X, Y) = X \cap Y$ *in* $\sup(X, Y) = X \cup Y$.

Algebrska struktura v matematiki pravimo množici skupaj z vsaj eno računsko operacijo, ki je definirana za elemente te množice. V *algebrski definiciji* mreže imamo dve takšni operaciji, $\vee$ in $\wedge$.

Algebrska struktura $(A, \vee, \wedge)$ je **(algebrajska) mreža**, če za poljubne $x, y, z \in A$ veljajo naslednje lastnosti:

- **idempotentnost:** $$x \vee x = x$$ $$x \wedge x = x$$

- **komutativnost:** $$\begin{aligned} x \vee y &= y \vee x \\ x \wedge y &= y \wedge x \end{aligned}$$

- **asociativnost:** $$\begin{aligned} (x \vee y) \vee z &= x \vee (y \vee z) \\ (x \wedge y) \wedge z &= x \wedge (y \wedge z) \end{aligned}$$

- **absorpcija:** $$\begin{aligned} x \vee (x \wedge y) &= x \\ x \wedge (x \vee y) &= x. \end{aligned}$$

Primer 248 *Primer mreže že poznamo: na osnovi znanja iz prvega poglavja lahko vidimo, da je izjavni račun* $(\{0,1\}, \wedge, \vee)$ *mreža.*

Zveza med algebrajsko ter relacijsko definicijo mreže je naslednja:

$$\begin{aligned} x \preceq y &\Leftrightarrow x \vee y = y \\ &\Leftrightarrow x \wedge y = x, \\ \sup\{x,y\} &= x \vee y, \\ \inf\{x,y\} &= x \wedge y. \end{aligned}$$

S tem je mogoče pokazati, da velja naslednji izrek.

Izrek 249 $(A, \preceq)$ *je relacijska mreža natanko tedaj, ko je* $(A, \vee, \wedge)$ *algebrajska mreža.*

Dokaz. Predpostavimo, da je $(A, \preceq)$ relacijska mreža. Pokažimo, da za algebrsko strukturo $(A, \vee, \wedge)$ velja absorpcija: ker je $(A, \preceq)$ relacijska mreža, za poljubna elementa x in y obstajata $\inf\{x,y\}$ in $\sup\{x,y\}$. Naj bo $c = \inf\{x,y\}$. Potem je $c \preceq x$ in zato $\sup\{c,x\} = x$. To pa v algebrajski mreži $(A, \vee, \wedge)$ pomeni: če je $c = x \wedge y$, potem je $c \vee x = x$, kar (ob upoštevanju $c = x \wedge y$) pomeni $(x \wedge y) \vee x = x$. Naj bo $d = \sup\{x,y\}$. Potem je $x \preceq d$ in $\inf\{x,d\} = x$. V jeziku algebrajske mreže to pomeni: če je $d = x \vee y$, potem je $x \wedge d = x$. Od tod pa sledi še druga enakost absorpcije $x \wedge (x \vee y) = x$. Podobno bi se lahko prepričali, da veljajo tudi idempotentnost, komutativnost in asociativnost v $(A, \vee, \wedge)$, zato je $(A, \vee, \wedge)$ algebrajska mreža.

Naj bo sedaj $(A, \vee, \wedge)$ algebrajska mreža. Relacijo $\preceq$ definiramo tako: $x \preceq y \equiv x \vee y = y$. Da bi dokazali, da $(A, \preceq)$ relacijska mreža, se moramo prepričati, da je ta relacija delna urejenost (torej refleksivna, antisimetrična in tranzitivna) in da za vsak par $x, y \in A$ obstajata $\inf\{x,y\}$ in $\sup\{x,y\}$.

Relacija $\preceq$ je refleksivna, saj $x \vee x = x$ velja zaradi idempotentnosti. Preden dokažemo antisimetričnost, se lahko prepričamo, da iz $x \vee y = y$ sledi $x \wedge (x \vee y) = x \wedge y$ in od tod (zaradi absorpcije) $x = x \wedge y$. Sedaj naj bo $x \preceq y$ in $y \preceq x$. To po definiciji relacije pomeni, da je $x \vee y = y$ in $y \vee x = x$. Izpeljemo lahko $x = y \vee x = y \vee (x \wedge y) = y$, kjer zadnja enakost velja zaradi absorpcije. Torej je $x = y$ in antisimetričnost je dokazana. Dokažimo še tranzitivnost: če je $x \preceq y$ in $y \preceq z$, potem je $x \vee y = y$ in $y \vee z = z$. Potem (zaradi asociativnosti) velja $z = (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee z$, torej $x \preceq z$. Če definiramo še $\sup\{x,y\} = x \vee y$ in $\inf\{x,y\} = x \wedge y$, se lahko prepričamo, da sta to ravno natančna zgornja oz. natančna spodnja meja za poljuben par $x, y \in A$. ■

Spomnimo se, da je v delni urejenosti $(A, \preceq)$ (in zato tudi v mreži) nek element *prvi*, če je v relaciji z vsemi elementi iz A, in *zadnji*, če so vsi elementi iz A v relaciji z njim. Prvi element bomo označevali z 0, oznaka za zadnji element bo 1.

Mreža je **omejena**, ko v njej obstaja največji element 1 in najmanjši element 0:

$$\forall x : 0 \preceq x \preceq 1,$$

oz. ekvivalentno:

$$0 \vee x = x \quad \text{in} \quad 0 \wedge x = 0$$

$$1 \vee x = 1 \quad \text{in} \quad 1 \wedge x = x.$$

Trditev 250 *Vsaka končna mreža je omejena.*

Dokaz. Če končna mreža nima prvega elementa, ima (zaradi končnosti) vsaj dva minimalna elementa a in b. Toda potem ne obstaja $\inf\{a, b\}$, kar je protislovje. Podobno pridemo v protislovje, če predpostavimo, da mreža nima zadnjega elementa.

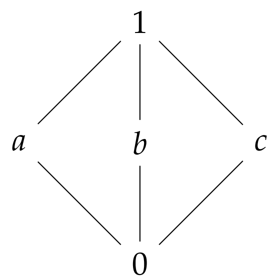
■

V omejeni mreži je element x' **komplement** elementa x, če velja

$$x \wedge x' = 0 \quad \text{in} \quad x \vee x' = 1.$$

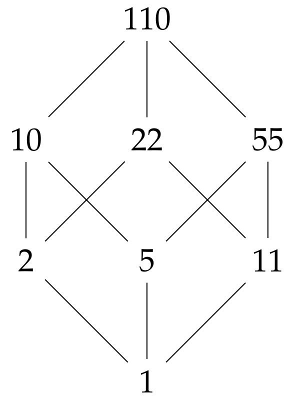
Če ima vsak element komplement, rečemo, da je mreža **komplementirana**.

V splošnem ima element lahko več komplementov, kot vidimo na sliki 39, kjer so si elementi a, b, c paroma komplementarni, saj velja $a \wedge b = b \wedge c = c \wedge a = 0$ in $a \vee b = b \vee c = c \vee a = 1$.



Slika 39: Komplementirana mreža.

Primer 251 *Mreža* $(D(110), |)$ *je omejena in komplementirana. Prikazana je na sliki 40. Prvi element je* 1 *(kar označimo* $0 = 1$*), zadnji element je* 110 *(s simboli:* $1 = 110$*), komplementarni pari pa so* 1 *in* 110, 2 *in* 55, 5 *in* 22, *ter* 10 *in* 11.



Slika 40: Hassejev diagram mreže iz primera 251.

Mreža je **distributivna**, če veljata oba distributivnostna zakona:

(D1) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,

(D2) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Trditev 252 *Če v mreži $(A, \vee, \wedge)$ velja eden od zakonov $(D1)$ in $(D2)$, potem velja tudi drugi.*

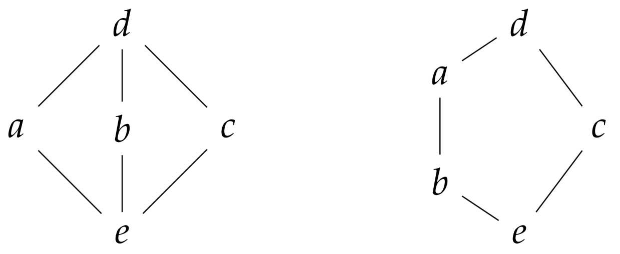
Dokaz. Predpostavimo, da velja $(D1)$ ter izpeljimo $(D2)$:

$$\begin{aligned} x \vee (y \wedge z) &= (x \vee (x \wedge z)) \vee (y \wedge z) \\ &= x \vee ((x \wedge z) \vee (y \wedge z)) \\ &= x \vee ((x \vee y) \wedge z) \\ &= (x \wedge (x \vee y)) \vee ((x \vee y) \wedge z) \\ &= ((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z) \\ &= (x \vee y) \wedge (x \vee z). \end{aligned}$$

Pri tem prva in četrta enakost veljata zaradi absorpcije, druga zaradi asociativnosti, tretja in zadnja zaradi $(D1)$, ter predzadnja zaradi komutativnosti. Podobno bi dokazali, da $(D1)$ sledi iz $(D2)$. ■

Primer 253 *Pokaži, da mreži M in N na sliki 41 nista distributivni.*

Rešitev: *Za mrežo M velja $a \vee (b \wedge c) = a \vee e = a$ ter $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = d \wedge d = d$, kar predstavlja protiprimer za distributivnost. Sedaj si oglejmo mrežo N. Če bi ponovno izračunali $a \vee (b \wedge c)$ in $(a \vee b) \wedge (a \vee c)$, bi v obeh primerih dobili a, kar ni protiprimer za distributivnost. Dobimo ga pa z naslednjim izračunom: $b \vee (a \wedge c) = b \vee e = b$ in $(b \vee a) \wedge (b \vee c) = a \wedge d = a$.*



(a) mreža M. (b) mreža N.

Slika 41: Primera mrež, ki nista distributivni.

4.10 BOOLEOVA ALGEBRA

Booleova algebra je mreža, ki je komplementirana in distributivna.

Booleovo[6] algebro označimo z $\mathcal{B} = (A, \sup, \inf, ', 0, 1)$, kjer oznake znotraj oklepaja predstavljajo že znane pojme. Oglejmo si še alternativno definicijo Booleove algebre.

Booleova algebra je struktura $\mathcal{B} = (A, \vee, \wedge, ', 0, 1)$, kjer je A množica, v kateri obstajata različna elementa 0 in 1, $\vee$ in $\wedge$ sta binarni operaciji, $\vee, \wedge : A \times A \to A$, $'$ pa enočlena relacija, $' : A \to A$, pri čemer za poljubne $x, y, z \in A$ velja:

$$
\begin{array}{llll}
(1a) & x \vee y = y \vee x, & (1b) & x \wedge y = y \wedge x, \\
(2a) & (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z), & (2b) & (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z), \\
(3a) & x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), & (3b) & x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \\
(4a) & x \vee 0 = x, & (4b) & x \wedge 1 = x, \\
(5a) & x \vee x' = 1, & (5b) & x \wedge x' = 0.
\end{array}
$$

Podobno kot smo to naredili pri mrežah, bi bilo mogoče dokazati, da sta obe definiciji ekvivalentni, a tokrat formalni dokaz izpustimo. Dokažimo pa naslednjo trditev.

6 George Boole je bil angleški matematik, logik in filozof, ki je živel v 19. stoletju. Okoli leta 1850 je logiko, s katero so se dotlej ukvarjali filozofi, razvil v novo matematično področje. Zanimalo ga je, kako razviti "algebraična" pravila logičnega mišljenja, podobno kot veljajo algebraična pravila za računanje s števili. Njegova dela so bila sprva smatrana kot neuporabna. Uporabo v inženirstvu so dobila, ko je Claude Shannon leta 1937 v svojem magistrskem delu pojasnil uporabnost Booleove logike v dizajnu elektromehanskih relejev, kar je ključno vplivalo na nadaljnji razvoj vseh modernih elektronskih digitalnih naprav.

Trditev 254 *V Booleovi algebri ima vsak element natanko en komplement.*

Dokaz. Predpostavimo, da sta y in z komplementa elementa x. To pomeni (glej lastnost (5a) in (5b)), da velja $x \vee y = 1$, $x \wedge y = 0$ in $x \vee z = 1$, $x \wedge z = 0$. Potem lahko izpeljemo

$$
\begin{aligned}
y &= y \wedge 1 && (4b)\\
&= y \wedge (x \vee z) && (x \vee z = 1)\\
&= (y \wedge x) \vee (y \wedge z) && (3b)\\
&= 0 \vee (y \wedge z) && (x \wedge y = 0)\\
&= (x \wedge z) \vee (y \wedge z) && (x \wedge z = 0)\\
&= (z \wedge x) \vee (z \wedge y) && (1b)\\
&= z \wedge (x \vee y) && (3b)\\
&= z \wedge 1 && (x \vee y = 1)\\
&= z, && (4b)
\end{aligned}
$$

torej sta y in z enaka. ■

Primer 255 *Naj bo $A = \{0,1\}$. Potem je $(A, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$, kjer $\wedge, \vee$ in $\neg$ pomenijo izjavne povezave, ki smo jih spoznali v prvem poglavju, Booleova algebra.*

Primer 256 *Premislimo, da je $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ', \emptyset, U)$ Booleova algebra. Preverimo, da velja vseh deset točk iz algebrske definicije Booleove algebre (pri tem vlogo 0 igra $\emptyset$, vlogo 1 pa univerzalna množica U):*

$$
\begin{array}{llll}
(1a) & X \cup Y = Y \cup X, & (1b) & X \cap Y = Y \cap X,\\
(2a) & (X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z), & (2b) & (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z),\\
(3a) & X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z) & (3b) & X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z),\\
(4a) & X \cup \emptyset = X, & (4b) & X \cap U = X,\\
(5a) & X \cup X' = U, & (5b) & X \cap X' = \emptyset.
\end{array}
$$

Res, da vse navedene lastnosti veljajo, smo spoznali pri predmetu Matematika 1.

Brez dokaza navedimo še lastnost Booleove algebre glede števila elementov.

Trditev 257 *Vsaka končna Booleova algebra ima 2^n elementov za nek $n \in \mathbb{N}_0$.*

4.11 PREVERI SVOJE ZNANJE (UREJENOSTI IN BOOLEOVA ALGEBRA)

Vprašanja iz teorije

1. Kdaj je neka relacija delna urejenost? Podaj nekaj primerov delnih urejenosti.

2. Kako je definirana linearna urejenost?

3. Pojasni, kdaj sta elementa v delno urejeni množici primerljiva.

4. Zapiši definicije naslednjih pojmov: (neposredni) predhodnik, (neposredni) naslednik, minimalen, maksimalen, prvi, zadnji element.

5. Kaj lahko poveš o minimalnem elementu v linearni urejenosti. Kako izgleda Hassejev diagram linearne urejenosti?

6. Kako je definiran inverz urejenosti?

7. Kaj sta supremum in infimum v delno urejeni množici? Kakšna je razlika med infimumom in spodnjo mejo? Pojasni na primeru.

8. Zapiši obe definiciji mreže. Kakšna je zveza med njima?

9. Kaj pomeni, da je mreža omejena in kaj pomeni, da je komplementirana?

10. Kdaj je mreža distributivna? Podaj primer mreže, ki ni distributivna.

11. Zapiši obe definiciji Booleove algebre. Kakšna je zveza med njima?

12. Kakšna lastnost velja za komplement v Booleovi algebri?

13. Ali ima Booleova algebra lahko 12 elementov?

Rešene naloge

Naloga 258 *Ali sta relaciji, predstavljeni z grafom na sliki 42, delni urejenosti?*

Rešitev: *Relacija na levem grafu ni tranzitivna (a je v relaciji z b, b je v relaciji s c, toda a ni v relaciji s c), zato ta relacija ni delna urejenost. Relacija, prikazana na desnem grafu, je refleksivna (v vsakem vozlišču je zanka), antisimetrična (če sta vozlišči različni in puščica poteka od enega do drugega, potem ne obstaja puščica tudi v obratno smer) in tranzitivna (če se da od enega vozlišča do drugega priti v dveh korakih, se da tudi v enem), zato je ta relacija delna urejenost.*

Naloga 259 *Na množici $A = \{a, b, c, d, e\}$ je podana relacija*

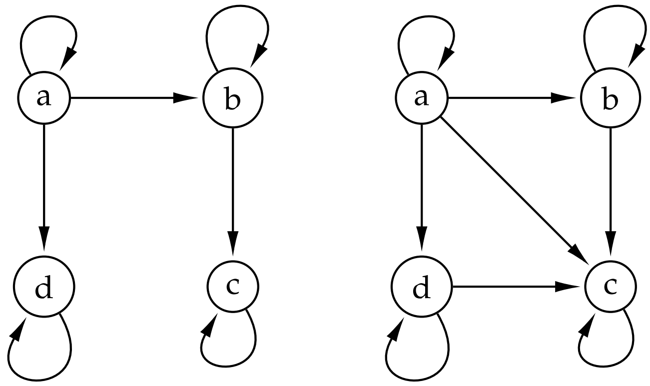
$$R = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,b),(b,d),(c,c),(c,d),(d,d),(d,e),(e,e)\}.$$

(a) *Nariši graf relacije $\overline{R}$.*

(b) *Ali je relacija $\overline{R}$ delna urejenost?*

(c) *Poišči minimalne in maksimalne elemente relacije $\overline{R}$ ter nariši Hassejev diagram relacije $\overline{R}$.*

Rešitev:

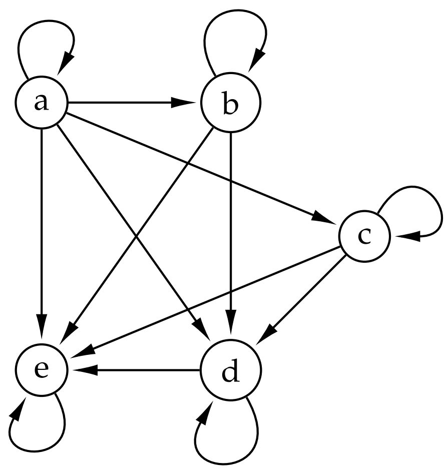


Slika 42: Grafa relaciji iz naloge 258.

(a) *Graf relacije $\overline{R}$ vidimo na sliki 43.*

(b) *Relacija $\overline{R}$ je delna urejenost, saj je očitno refleksivna in tranzitivna, prav tako pa lahko iz slike 43 takoj razberemo, da je antisimetrična (med nobenima dvema elementoma nimamo puščice v obe smeri).*

(c) *Minimalni element relacije $\overline{R}$ je a (saj nima nobenega predhodnika), maksimalni element relacije $\overline{R}$ pa je e (saj nima nobenega naslednika). Hassejev diagram relacije $\overline{R}$ vidimo na sliki 44.*

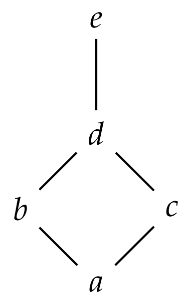


Slika 43: Graf relacije $\overline{R}$ iz nalo 259.

Naloga 260 *Slika 45 naj predstavlja Hassejev diagram delne urejenosti R na množici M. Katere izmed naslednjih izjav so pravilne izjave:*

(a) $1R0$,

(b) $aR1$,



Slika 44: Hassejev diagram delno urejene množice iz primera 259.

(c) *a in c sta primerljiva elementa,*

(d) *a in d sta neprimerljiva elementa,*

(e) *cRb,*

(f) 0 *je predhodnik elementa b,*

(g) *a je neposredni naslednik elementa* 0*,*

(h) 0 *je tako minimalen kot prvi element,*

(i) *R je linearna urejenost,*

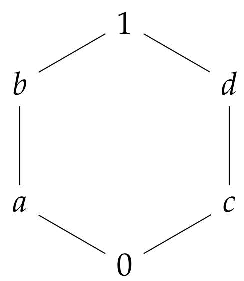
(j) $\sup(a, d) = 1$,

(k) $\inf(a, b) = a$,

(l) *R je mreža,*

(m) *c in d sta oba komplementa elementa a?*

Rešitev: *Nepravilne so izjave* (a), (c), (e) *in* (i)*, ostale so pravilne.*



Slika 45: Hassejev diagram delno urejene množice.

Naloga 261 *Dana je delno urejena množica* $(\{2, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 48, 60, 72\}, \mid)$.

(a) *Poišči mininimalne elemente.*

(b) *Poišči maksimalne elemente.*

(c) *Ali obstaja zadnji element?*

(d) *Ali obstaja prvi element?*

(e) *Poišči vse zgornje meje elementov* 2 *in* 9.

(f) *Poišči najmanjšo zgornjo mejo elementov* 2 *in* 9*, če obstaja.*

(g) *Poišči vse spodnje meje elementov* 60 *in* 72.

(h) *Poišči največjo spodnjo mejo elementov* 60 *in* 72*, če obstaja.*

Rešitev: *Minimalna elementa sta* 2 *in* 9. *Maksimalni elementi so* $27, 48, 60, 72$. *Prvi in zadnji element ne obstajata. Vse zgornje meje elementov* 2 *in* 9 *so* $18, 36, 72$, *najmanjša zgornja meja pa je* 18, *kar zapišemo* $\sup(2,9) = 18$. *Spodnje meje elementov* 60 *in* 72 *so* $2, 4, 6$ *in* 12, *pri čemer je* 12 *največja spodnja meja:* $\inf(60,72) = 12$.

Naloga 262 *Particija naravnega števila n je definirana kot množica naravnih števil, katerih vsota je n. Obstaja 7 particij števila $n = 5$:*

$$\{5\}, \{3,2\}, \{4,1\}, \{3,1,1\}, \{2,2,1\}, \{2,1,1,1\}, \{1,1,1,1,1\}.$$

Particije števila n lahko uredimo tako: particija P_1 je predhodnik particije P_2, če lahko elemente iz P_2 razbijemo tako, da dobimo elemente iz P_1. Nariši Hassejev diagram delno urejene množice particij števila 5.

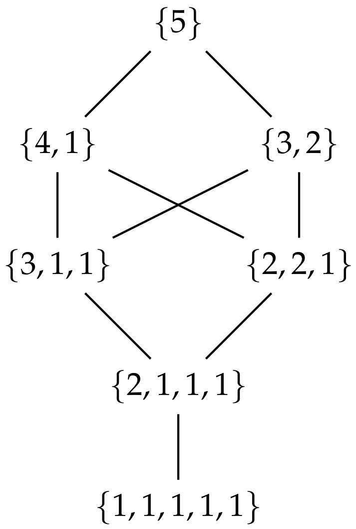
Rešitev: *Diagram vidimo na sliki 46.*

Naloga 263 *Kateri izmed Hassejevih diagramov na sliki 48 predstavljajo mrežo?*

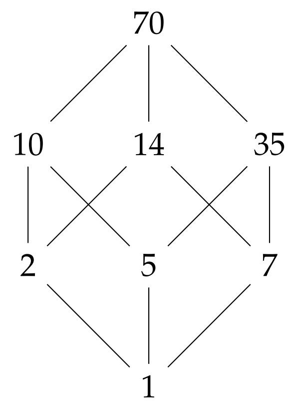
Rešitev: *Prvi in zadnji diagram predstavljata mreži, ne pa drugi diagram, saj v tem diagramu ne obstaja infimum elementov d in h (opazimo lahko tudi, da ne obstaja supremum elementov b in g).*

Naloga 264 *Ali so naslednje delno urejene množice mreže:*

1. $(\{1,3,6,9,12\}, \mid)$,
2. $(\{1,5,25,125\}, \mid)$,
3. $(\{\{1\},\{2\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}, \subseteq)$,
4. $(\{\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}, \subseteq)$?



Slika 46: Hassejev diagram iz naloge 262.



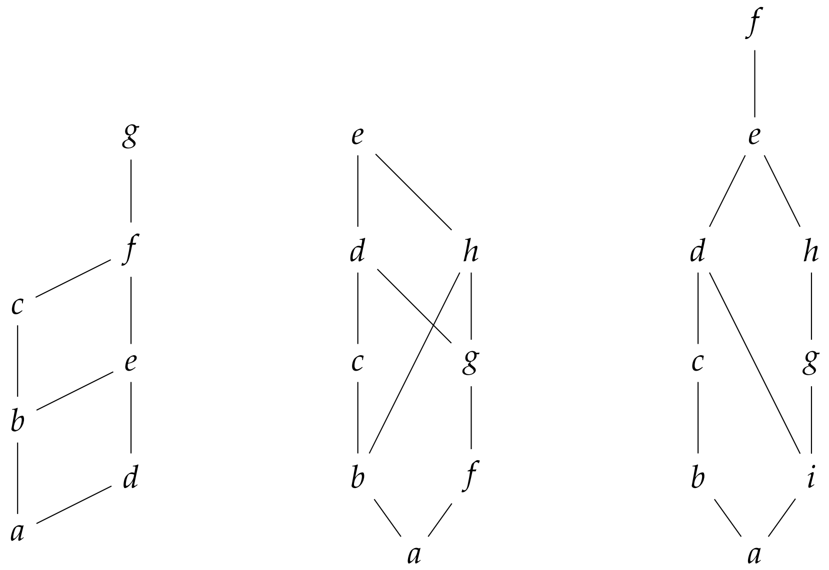
Slika 47: Hassejev diagram mreže iz primera 265.

Rešitev: *Delno urejena množica* $(\{1,3,6,9,12\}, |)$ *ni mreža, saj ne obstaja* $\sup\{9,12\}$. *Prav tako ni mreža delno urejena množica iz 3. primera, saj ne obstaja* $\inf\{\{1\},\{2\}\}$. *Preostala primera predstavljata mreži.*

Naloga 265 *Naj bo* $D(70)$ *množica deliteljev števila* 70. *Pokaži, da lahko* $D(70)$ *izrazimo kot Booleovo algebro, nariši njen diagram in poišči* $14 \vee 10$, $14 \wedge 10$ *in* $10'$.

Rešitev: *Operacije* $\vee, \wedge$ *in* $'$ *na* $D(70)$ *definiramo kot:*

$$\begin{aligned} a \vee b &= v(a,b), \\ a \wedge b &= D(a,b), \\ a' &= \tfrac{70}{a}. \end{aligned}$$



Slika 48: Hassejevi diagrami iz primera 263.

Potem je $D(70), \vee, \wedge, ', 1, 70)$ *Booleova algebra, kjer je* 1 *ničelni (oz. prvi) element,* 70 *pa enota (oz. zadnji element). Diagram vidimo na sliki 47. Velja:*

$$\begin{aligned} 14 \vee 10 &= v(14,10) = 70, \\ 14 \wedge 10 &= D(14,10) = 2, \\ 10' &= \tfrac{70}{10} = 7. \end{aligned}$$

Naloga 266 *Iz definicije algebrske Booleove algebre izpelji, da za poljuben element* x *veljata lastnosti:*

$$(n1) \quad x \wedge 0 = 0 \quad \text{in} \quad (n2) \quad x \vee 1 = 1.$$

Rešitev: *Najprej dokažimo lastnost (n1):*

$$\begin{aligned} x \wedge 0 &= (x \wedge 0) \vee 0 && (4a) \\ &= (x \wedge 0) \vee (x \vee x') && (5b) \\ &= x \wedge (0 \vee x') && (3b) \\ &= x \wedge (x' \vee 0) && (1a) \\ &= x \wedge x' && (4a) \\ &= 0 && (5b). \end{aligned}$$

Preverimo še lastnost (n2):

$$\begin{aligned} x \vee 1 &= (x \vee 1) \wedge 1 && (4b) \\ &= (x \vee 1) \wedge (x \vee x') && (5a) \\ &= x \vee (1 \wedge x') && (3a) \\ &= x \vee (x' \wedge 1) && (1b) \\ &= x \vee x' && (4b) \\ &= 1 && (5a). \end{aligned}$$

Naloga 267 *Dokaži, da v (algebrski) Booleovi algebri veljata De Morganova zakona:*

$$(x \wedge y)' = x' \vee y' \quad in \quad (x \vee y)' = x' \wedge y'.$$

Rešitev: *Zapisali bomo dokaz, da je $x' \vee y'$ komplement elementa $x \wedge y$, drugo enakost se dokaže podobno. Po definiciji komplementa je treba dokazati dvoje (glej lastnosti (5a) in (5b)):*

$$(x \wedge y) \wedge (x' \vee y') = 0 \quad in \quad (x \wedge y) \vee (x' \vee y') = 1.$$

Dokažimo prvo enakost:

$$\begin{array}{rcll}
(x \wedge y) \wedge (x' \vee y') & = & x \wedge (y \wedge (x' \vee y')) & (2b) \\
& = & x \wedge ((y \wedge x') \vee (y \wedge y')) & (3b) \\
& = & x \wedge ((y \wedge x') \vee 0) & (5b) \\
& = & x \wedge (y \wedge x') & (4a) \\
& = & x \wedge (x' \wedge y) & (1b) \\
& = & (x \wedge x') \wedge y & (2b) \\
& = & 0 \wedge y & (5b) \\
& = & 0 & (n1).
\end{array}$$

Dokažimo še drugo enakost:

$$\begin{array}{rcll}
(x \wedge y) \vee (x' \vee y') & = & ((x \wedge y) \vee x') \vee y' & (2a) \\
& = & (x' \vee (x \wedge y)) \vee y' & (1a) \\
& = & ((x \vee x') \wedge (x' \vee y)) \vee y' & (3a) \\
& = & (1 \wedge (x' \vee y)) \vee y' & (5a) \\
& = & ((x' \vee y) \wedge 1) \vee y' & (1b) \\
& = & (x' \vee y) \vee y' & (4b) \\
& = & x' \vee (y \vee y') & (2a) \\
& = & x' \vee 1 & (5a) \\
& = & 1 & (n2).
\end{array}$$

Naloga 268 *Dokaži, da v (algebrski) Booleovi algebri velja lastnost*

$$((x \vee y)' \wedge z) \vee (x' \wedge (z \wedge y)) = x' \wedge z.$$

Rešitev:

$$\begin{array}{rcll}
((x \vee y)' \wedge z) \vee (x' \wedge (z \wedge y)) & = & ((x' \wedge y') \wedge z) \vee (x' \wedge (z \wedge y)) & (De\ Morgan) \\
& = & ((x' \wedge y') \wedge z) \vee (x' \wedge (y \wedge z)) & (1b) \\
& = & (x' \wedge (y' \wedge z)) \vee (x' \wedge (y \wedge z)) & (2b) \\
& = & x' \wedge ((y' \wedge z) \vee (y \wedge z)) & (3b) \\
& = & x' \wedge ((z \wedge y') \vee (z \wedge y)) & (1b) \\
& = & x' \wedge (z \wedge (y' \vee y)) & (3b) \\
& = & x' \wedge (z \wedge 1) & (5a) \\
& = & x' \wedge z & (4b).
\end{array}$$

5

OSNOVE TEORIJE GRAFOV

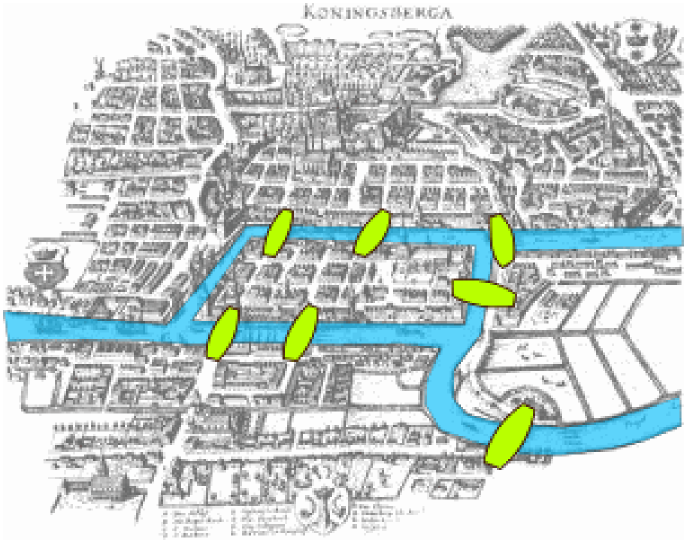
Pri matematičnih predmetih smo se doslej že srečali s pojmom graf funkcije in graf relacije. Posebna veja matematike, t.i. teorija grafov, se pa ukvarja s preučevanjem grafov, pod katerimi si predstavljamo množico točk in (ne nujno ravnih) črt, kjer črte povezujejo nekatere pare točk. Točke imenujemo *vozlišča*, črte pa *povezave*.

Teorija grafov je sorazmerno mlada veja matematike, ki se (tudi po zaslugi računalnikov) neprenehoma in naglo razvija, in skoraj ni več področja, na katerem ne bi mogli najti primera uporabe grafov (nekaj jih bomo spoznali skozi primere). Grafi namreč predstavljajo model za množico elementov, v katerih med elementi veljajo neki odnosi. Teorija grafov je tudi nepogrešljivi del računalništva. Pravzaprav lahko na Wikipediji celo preberemo, da je teorija grafov *matematična in računalniška disciplina*, ki raziskuje značilnosti grafov. Samo zgradbo spletnih povezav Wikipedije lahko predstavimo kot *usmerjeni graf*, kjer vozlišča grafa predstavljajo članke v Wikipediji, usmerjena povezava od članka X do članka Y pa obstaja natanko tedaj, ko ima članek X povezavo na članek Y. S primeri usmerjenih grafov smo se pravzaprav že srečali v poglavju o relacijah, nekaj pozornosti jim bomo namenili še ob koncu tega poglavja. Sicer pa se bomo osredotočili predvsem na *neusmerjene grafe* (ki jim bomo na kratko rekli kar *grafi*), kjer je relacija, ki jo predstavljajo povezave, simetrična.

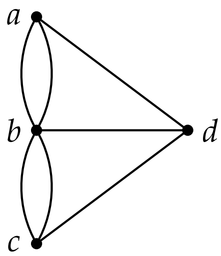
5.1 UVOD

Temelje teorije grafov je postavil švicarski matematik Leonhard Euler, ko se je leta 1735 pridružil reševanju problema königsbergških mostov. Prusko mesto Königsberg (danes Kaliningrad v Rusiji) je reka Pregel razdelila na štiri dele, ki jih je povezovalo sedem mostov (slika 49). Meščani so brez uspeha poskušali najti sprehod po mestu, s katerim bi se sprehodili po vseh sedmih mostovih natanko enkrat in se na koncu vrnili v izhodišče. Začeli so verjeti, da naloga nima rešitve, a tega niso znali utemeljiti. Nazadnje je to uspelo Eulerju[1]. Opazil je, da čeprav bi na videz problem morda sodil na področje geometrije, to ne drži, saj rezultat ni odvisen od *merjenja*. Namreč, pri problemu so važni le deli mesta

1 Eulerjev dokaz je bil objavljen v članku *Solutio problematis ad geometriam situs pertinenstis* leta 1736.



Slika 49: Sedem mostov v mestu Königsberg. Vir: `https://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_Konigsberg#/media/File:Konigsberg_bridges.png` (CC BY-SA 3.0).



Slika 50: Graf problema königsbergških mostov.

(kopnega) in relacije med njimi (dva dela mesta sta v relaciji, če sta povezana z mostom), ne pa tudi dolžina mostov, koti po katerim so postavljeni mostovi, razporeditev hiš v delih mesta, ali karkoli podobnega.

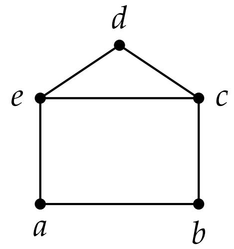
Tako pridemo do tega, da lahko dani problem zelo enostavno predstavimo z grafom: deli mesta so vozlišča, dve vozlišči sta povezani s povezavo natanko tedaj, ko sta ustrezna dela mesta povezana z mostom. Tako dobimo graf na sliki 50. S tem smo torej grafično upodobili dvomestno relacijo, ki predstavlja odnose med določenimi objekti. Puščic na povezave nismo risali, saj gre za simetrično relacijo. Ker je relacija irefleksivna (seveda noben del mesta ni z mostom povezan s samim seboj), tudi nismo narisali nobene zanke.

Oglejmo si formalno definicijo grafa.

> Naj bo V končna neprazna množica in E poljubna *družina* dvoelementnih podmnožic množice V. Potem urejenemu paru $G = (V, E)$ pravimo **graf** na **množici vozlišč (točk)** V z **množico povezav** E.

Z izrazom *družina* v zgornji definiciji želimo poudariti, da se lahko dvoelementne podmnožice množice V tudi ponovijo.

Kadar bomo imeli opravka z večimi grafi, bomo z oznako $V(G)$ oz. $E(G)$ poudarili, na katero množico vozlišč oz. povezav mislimo. Element $\{u,v\}$ množice E bomo krajše pisali kot uv. Tako uv in vu predstavljata isto povezavo s **krajišči** u in v v grafični upodobitvi grafa. Kadar je par vozlišč uv element množice E pravimo, da sta vozlišči u in v **sosedni** v grafu G. Množico vseh vozlišč v grafu G, ki so sosedna z u imenujemo **odprta okolica vozlišča** u in jo označimo $N_G(u)$. Če množici $N_G(u)$ dodamo še vozlišče u, dobimo **zaprto okolico** $N_G[u]$ vozlišča u, $N_G[u] = N_G(u) \cup \{u\}$. Za dve povezavi rečemo, da sta **sosedni**, če imata kako skupno krajišče.



Slika 51: Graf G iz primera 269.

Primer 269 *Za graf G na sliki 51 velja:*

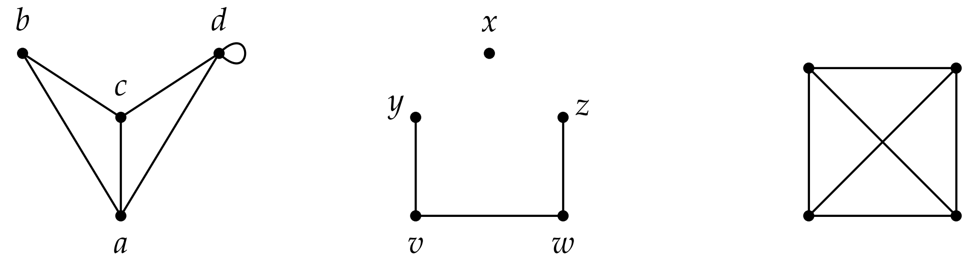
$$V(G) = \{a,b,c,d,e\} \quad \text{in} \quad E(V) = \{ab, ae, bc, cd, ce, de\}.$$

Vozlišči a in b sta sosedni, vozlišči a in c pa ne. Vozlišči b in c sta krajišči povezave bc. Primer sosednih povezav sta povezavi bc in cd.

V zgornji definiciji so torej zajeti grafi, v katerih so dovoljene **vzporedne povezave** (ko imamo več povezav nad istim parom vozlišč) in **zanke** (tj. povezave, ki imajo obe krajišči enaki). Taki grafom rečemo tudi **multigrafi**. Kadar želimo poudariti, da govorimo o grafih brez zank in vzporednih povezav, jim rečemo **enostavni grafi**.

Stopnja vozlišča u v grafu G, označimo jo z $\deg_G(u)$ ali $d_G(u)$, je število povezav grafa G, ki imajo vozlišče u za svoje krajišče, pri čemer za zanko velja, da prispeva 2 k stopnji vozlišča. Vozliščem stopnje 0 pravimo **izolirana vozlišča**, vozliščem stopnje 1 pa **listi**. Najmanjšo stopnjo vozlišča grafa G označimo z $\delta(G)$, največjo pa z $\Delta(G)$. Graf G je **regularen**, če velja $\delta(G) = \Delta(G)$, in d**-regularen**, če velja $d = \delta(G) = \Delta(G)$. Grafom, ki so 3-regularni, pravimo tudi **kubični** grafi.

Primer 270 *Za grafe G, H in K na sliki 52 velja:* $\deg_G(b) = 2$, $\deg_G(a) = \deg_G(c) = 3$, $\deg_G(d) = 4$, *vozlišči y in z v grafu H sta lista, x pa izolirano vozlišče,* $\delta(H) = 0$, $\Delta(H) = 2$, $\Delta(G) = 4$. *Graf K imenujemo tudi* ***neoznačeni*** *graf. Graf K je* 3*-regularen oz. kubičen graf na štirih vozliščih. Grafa H in K sta enostavna grafa.*



Slika 52: Grafi G, H, K (od leve proti desni).

Če vsem vozliščem grafa poiščemo stopnjo in jih uredimo po velikosti (navadno od najmanjšega do največjega), pravimo, da smo poiskali **zaporedje stopenj** vozlišč.

Primer 271 *Oglejmo si grafe na sliki 52. Zaporedje stopenj vozlišč grafa G je* $2, 3, 3, 4$, *zaporedje stopenj grafa H je* $0, 1, 1, 2, 2$, *zaporedje stopenj grafa K pa* $3, 3, 3, 3$.

Če v zgornjem zgledu za posamezni graf seštejemo člene zaporedja stopenj vozlišča, dobimo ravno dvakratnik števila povezav. To ni naključje. Za vsak graf namreč velja naslednji izrek.

Izrek 272 *(**Lema o rokovanju**) V vsakem grafu je vsota stopenj vozlišč enaka dvakratniku števila povezav:*

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = 2 \cdot |E(G)|\,.$$

Dokaz. Lema drži, saj ima vsaka povezava dva konca in zato prispeva k vsoti stopenj grafa natanko 2. ■

Pojasnimo še poimenovanje zgornje leme: naj v grafu vozlišča predstavljajo ljudi na zabavi, povezavo med vozlišči pa narišemo, če sta se osebi, ki ju ti dve vozlišči predstavljata, rokovali. Vsota stopenj vozlišč tako pomeni število vseh rok, ki so bile udeležene v rokovanjih, število rokovanj je enako številu povezav v grafu. Ker sta v vsakem rokovanju udeleženi dve roki, je število rok dvakrat večje kot je število rokovanj. Iz leme o rokovanju takoj sledijo naslednje posledice.

Posledica 273 *Naj bo G poljuben graf.*

(i) *Vsota vseh stopenj vozlišč grafa G je sodo število.*

(ii) *Število vozlišč grafa G, ki so lihe stopnje, je sodo.*

(iii) *Če je G r-regularen graf, ima natanko* $\frac{1}{2}|V(G)| \cdot r$ *povezav.*

Dokaz. Obravnavajmo vsako trditev posebej.

(i) Trditev razberemo neposredno iz leme o rokovanju.

(ii) Vsoto stopenj vseh vozlišč grafa (ki je sodo število) lahko zapišemo kot vsoto dveh vsot, kjer v pri seštejemo le stopnje vozlišč, katerih stopnje so lihe, v drugi pa stopnje vseh vozlišč, ki so sode stopnje:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = \sum_{\substack{v \in V(G) \\ \deg_G(v) \text{ je liho}}} \deg_G(v) + \sum_{\substack{v \in V(G) \\ \deg_G(v) \text{ je sodo}}} \deg_G(v).$$

Druga od opisanih vsot je sodo število, saj seštevamo sama soda števila. Prav tako pa je izraz na levi strani zgornje enačbe sodo število, zato mora biti tudi prva vsota sodo število. Ker pa le-to dobimo s seštevanjem lihih števil, mora teh biti sodo mnogo. Torej je število vozlišč grafa, ki so lihe stopnje, sodo mnogo.

(iii) Vsota stopenj vseh vozlišč r-regularnega grafa je enaka $|V(G)|r$. Po lemi o rokovanju pa velja

$$|V(G)|r = 2|E(G)|,$$

od koder sledi $|E(G)| = \frac{1}{2}|V(G)|r$. ■

Omenimo še, da moči množic $V(G)$ in $E(G)$ pogosto krajše označujemo z n oz. m, zato bi lahko zadnjo enakost v zgornji posledici zapisali kot $m = \frac{1}{2}nr$.

5.2 PODGRAFI

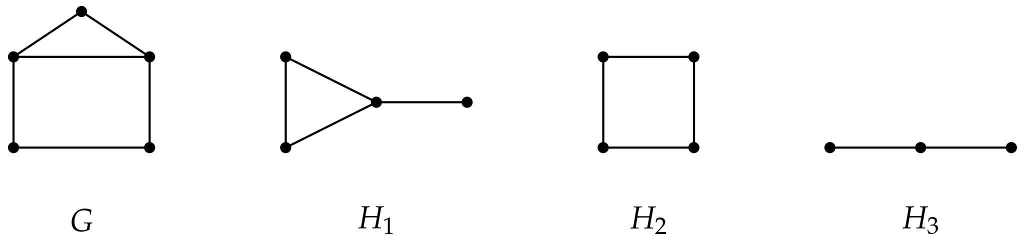
Graf H je **podgraf** grafa G, $H \subseteq G$, če velja

$$V(H) \subseteq V(G) \quad \text{in} \quad E(H) \subseteq E(G).$$

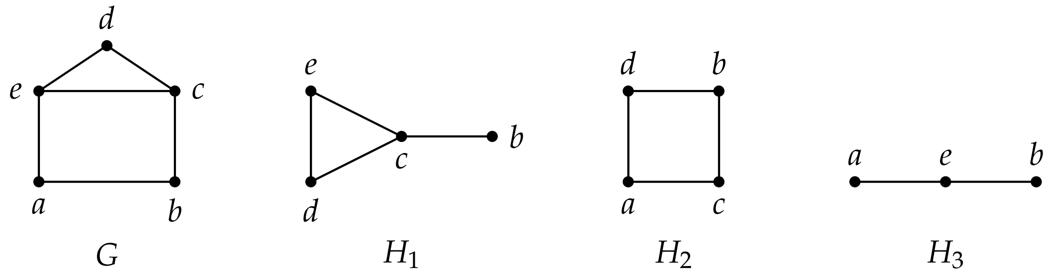
Podgraf H je **vpeti**, če velja $V(H) = V(G)$.

Primer 274 *Grafi G, H_1, H_2 in H_3 na sliki 53 so podgrafi grafa G. Pazimo pri označenih grafih: na sliki 54 sta G in H_1 podgrafa grafa G, grafa H_2 in H_3 pa ne, saj je npr. ac povezava v grafu H_2 in ni povezava v G, prav tako v grafu H_3 obstaja povezava be, ki je ni v grafu G.*

Primer 275 *Noben od grafov H_1, H_2 in H_3 na slikah 53 in 54 ni vpeti podgraf grafa G, saj vsak od njih vsebuje premalo vozlišč. Grafi G_1, G_2 in G_3 na sliki 55 so vpeti podgrafi grafa G iz slike 54, kar pa ne velja za G_4 (ta graf sploh ni podgraf grafa G).*



Slika 53: Grafa G in nekaj njegovih podgrafov.



Slika 54: Grafi G, H_1, H_2, H_3.

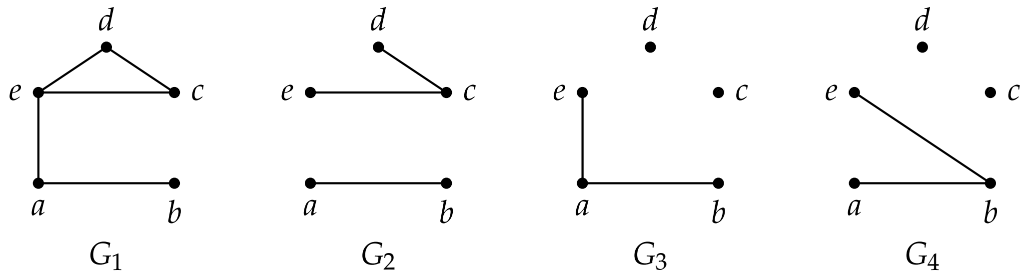
> Podgraf H je **induciran** z množico vozlišč $U \subseteq V(G)$, če velja
>
> $$V(H) = U \quad \text{in} \quad E(H) = \{uv \in E(G); u, v \in V(H)\}.$$

Za podgraf H, ki je induciran z množico vozlišč U, uporabljamo oznako $H = G[U]$. Množica vozlišč induciranega grafa je torej podmnožica vozlišč grafa, in če med nekima vozliščema iz U obstaja povezava v grafu G, potem obstaja taka povezava tudi v induciranem podgrafu.

Primer 276 *Oglejmo si graf G iz slike 54. Graf H_1 iz te slike je inducirani podgraf grafa G. Seveda je tudi G inducirani podgraf grafa G. Grafa H_2 in H_3 nista inducirana podgrafa grafa G, saj niti nista podgrafa tega grafa in enako velja za graf G_4 iz slike 55. Grafi G_1, G_2, G_3 so (vpeti) podgrafi grafa G, a niso inducirani.*

5.3 SPREHODI, OBHODI IN POTI V GRAFU

> **Sprehod dolžine** k v grafu G je zaporedje k povezav oblike:
>
> $$xv_1,\ v_1v_2,\ v_3v_4,\ \ldots,\ v_{k-1}y.$$
>
> - Tak sprehod označimo z $xv_1v_2v_3 \cdots v_{k-1}y$ in mu rečemo **sprehod med vozliščema** x in y.



Slika 55: Grafi G_1, G_2, G_3 in G_4.

- Če so vse povezave sprehoda različne, potem sprehod poimenujemo **enostavni sprehod**.
- Če so v enostavnem sprehodu vsa vozlišča različna, potem sprehod poimenujemo **pot**.

Kasneje nas bodo zanimali tudi sprehodi in poti, ki se začnejo in končajo v istem vozlišču. Tudi za njih imamo posebna imena.

Sklenjeni sprehod ali **obhod** v grafu G je zaporedje povezav oblike:

$$xv_1,\ v_1v_2,\ v_3v_4,\ \ldots,\ v_{k-1}y,\ yx.$$

- Če so vse povezave obhoda različne, potem ga poimenujemo **enostavni obhod**.
- Če so v obhodu vse povezave in vsa vozlišča različna, ga poimenujemo **cikel**.

Primer 277 *Oglejmo si graf G na sliki 56. Naštejmo nekaj sprehodov: $bedcbf$, $edecb$, bf, ebe (njihove dolžine so $5, 4, 1$ oz. 2). Od tega so enostavni $bedcbf$, bf, ebe, če si pri slednjem predstavljamo, da smo uporabili različni povezavi med b in e. Od naštetih sprehodov je pot le bf, saj smo v vseh ostalih primerih neko vozlišče obiskali več kot enkrat. Od naštetih je sklenjeni sprehod (obhod) le ebe, ki je hkrati tudi primer enostavnega obhoda in cikla. Obhod $bedcbfb$ ni cikel in niti enostaven obhod. Obhod $fedcebf$ je enostaven, a ni cikel. Obhod $bedcb$ je cikel.*

Oznako $G - v$ uporabimo za graf, ki ga iz grafa G dobimo tako, da odstranimo vozlišče v. S tem seveda odstranimo vsa vozlišča, katerih krajišče je vozlišče v.

Graf G je **povezan**, če obstaja pot med poljubnim parom vozlišč grafa, sicer je **nepovezan**. Povezan graf G je **2-povezan**, če za vsako vozlišče $v \in V(G)$ velja, da je graf $G - v$ povezan.

Primer 278 *Graf G na sliki 56 ni povezan, saj med vozliščem a in katerimkoli drugim vozliščem iz grafa pot ne obstaja. Graf $G - a$ je povezan. Pravzaprav je celo 2-povezan, saj če bi iz njega odstranili še katerokoli vozlišče, bi še vedno ostal povezan.*

Točki grafa sta v isti **povezani komponenti** tedaj, ko v grafu med njima obstaja pot. Število povezanih komponent grafa G bomo označili s $c(G)$.

Primer 279 *Za graf G na sliki 56 velja $c(G) = 2$ in $c(G - a) = 1$.*

Oglejmo si še, kako v grafih merimo razdaljo med dvema vozliščema.

Razdalja $d_G(u, v)$ med vozliščema u in v v grafu G je definirana kot dolžina najkrajše poti od u do v v G. Če taka pot ne obstaja, razdalji $d_G(u, v)$ pripišemo vrednost ∞.

Za tako definirano razdaljo veljajo naslednje lastnosti:

1. $\forall v \in V(G) : d(v, v) = 0$,
2. $\forall u, v \in V(G) : d(u, v) = d(v, u)$,
3. $\forall u, v, w \in V(G) : d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$.

Največji razdalji med parom vozlišč grafa pravimo **diameter** oz. **premer** grafa,

$$\mathrm{diam}(G) = \max\{d_G(u, v); u, v \in V(G)\}.$$

Primer 280 *Za graf G na sliki 56 je $\mathrm{diam}(G) = \infty$ in $\mathrm{diam}(G - a) = 2$. Diameter Petersenovega grafa iz slike 71 je prav tako enak 2.*

Sedaj, ko poznamo definicijo razdalje med dvema vozliščema grafa, lahko spoznamo še eno vrsto posebnih podgrafov.

Podgraf H je **izometrični podgraf** grafa G, če velja

$$\forall u, v \in V(H): \quad d_H(u,v) = d_G(u,v).$$

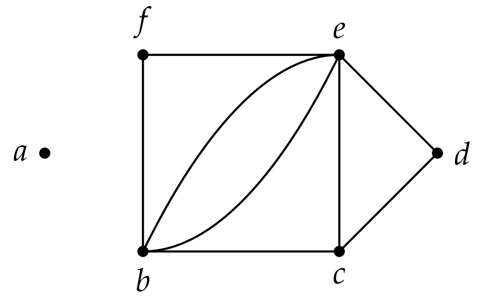
Izometrični podgraf lahko opišemo kot podgraf, za katerega velja, da med poljubnima njegovima vozliščema zunaj podgrafa ne obstaja nobena bližnjica (z bližnjico med u in v iz $V(H)$ mislimo pot, ki bi vsebovala vozlišče iz $V(G) \setminus V(H)$ in bi bila njena dolžina krajša od $d_H(u,v)$).

Primer 281 *Oglejmo si grafe iz slike 54 in 55. Grafa G in H_1 sta izometrična podgrafa grafa G, ostali pa ne.*

5.4 MATRIKE GRAFOV

Podobno kot pri relacijah si lahko pri predstavitvi grafov pomagamo z matrikami.

Naj bo G graf brez zank na n vozliščih. **Matrika sosednosti** $S(G)$ je matrika razsežnosti $n \times n$, v kateri element i-te vrstice in j-tega stolpca pove število povezav, ki povezujejo vozlišči i in j.



Slika 56: Graf G.

Vozlišča grafa si torej predstavljamo urejena v nekem vrstnem redu. Za graf G na sliki 56 naj bo to vrstni red a, b, c, d, e, f. Tako grafu G pripada naslednja matrika sosednosti (pri čemer vozlišču a ustrezata prva vrstica in prvi stolpec, vozlišču b druga vrstica in drugi stolpec, itd.):

$$S(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

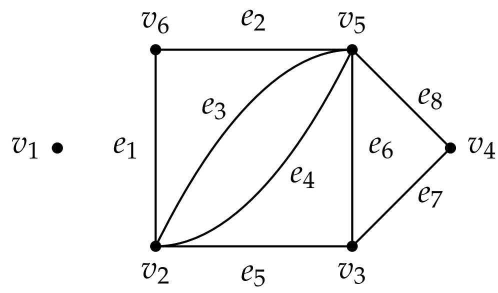
Vozlišči z oznakama b in e sta povezani z dvema povezavama. V matriki sosednosti je zato v 2. vrstici in 5. stolpcu število 2, enako pa velja za element 5. vrstice 2. stolpca. Matrika sosednosti je namreč simetrična matrika. Seštevek števil v posamezni vrstici (oz. stolpcu) nam da stopnjo vozlišča.

Naj bo G graf brez zank na n vozliščih in m povezavah. Vozlišča označimo z $v_1, \ldots, v_n$ in povezave $e_1, e_2, \ldots, e_m$. **Incidenčna matrika** $I(G)$ je $n \times m$ matrika, katere element v i-ti vrstici j-tega stolpca je enak 1, če je vozlišče v_i krajišče povezave j in 0 sicer.

Na kratko, element a_{ij} incidenčne matrike je enak:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{če } v_i \in e_j \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Vzemimo graf G iz zgornjega zgleda in tokrat označimo vozlišča in povezave v skladu z zgornjo definicijo.



Slika 57: Graf G z označenimi vozlišči in povezavami.

Grafu G na sliki 57 pripada naslednja incidenčna matrika:

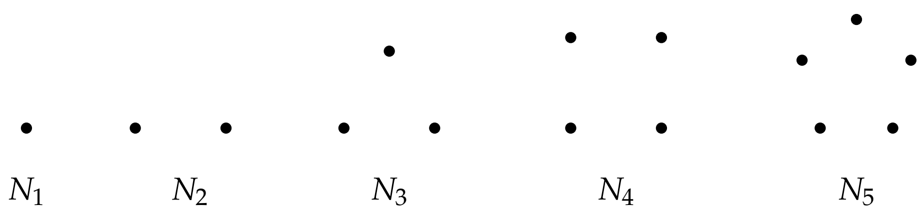
$$I(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vozlišče v_1 ne leži na nobeni povezavi, zato je prva vrstica incidenčne matrike ničelna. Vozlišče v_2 leži na štirih povezavah, e_1, e_3, e_4, e_5, kar se odraža v štirih enicah v drugi vrstici v ustreznih stolpcih. Opazimo lahko, da vsota enic v posamezni vrstici pove stopnjo vozlišča. Seveda pa je vsota enic v vsakem stolpcu enaka 2, saj ima vsaka povezava dve krajišči.

5.5 POSEBNE DRUŽINE GRAFOV

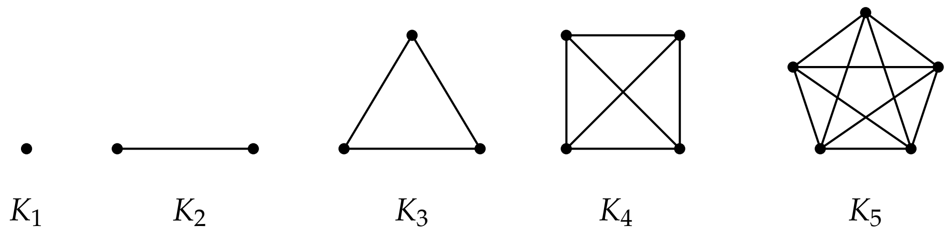
Oglejmo si nekaj grafov, ki imajo posebna imena. Pri tem bomo v definicijah uporabili oznako $[n]$, ki bo pomenila množico prvih n naravnih števil, torej $[n] = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Prazni graf na n vozliščih, N_n, je graf brez povezav (glej sliko 58).



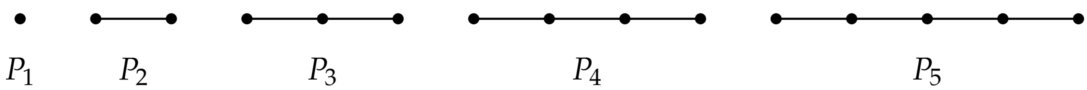
Slika 58: Prazni grafi.

Polni graf na n vozliščih, ki ga označimo s K_n, je določen z množico vozlišč $V(K_n) = [n]$ in množico povezav $E(K_n) = \{uv; u, v \in [n], u \neq v\}$. Tak graf je $(n-1)$-regularen in ima $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ povezav. Slika 59 prikazuje polne grafe K_1 do K_5.



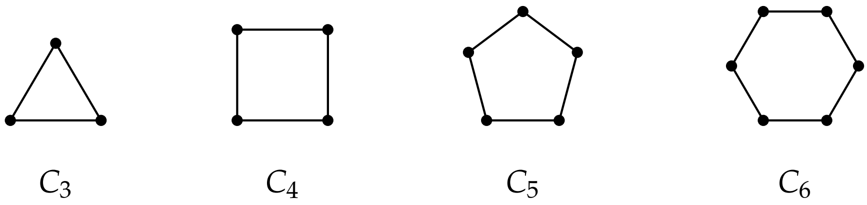
Slika 59: Polni grafi.

Pot P_n je graf, določen z množicama $V(P_n) = [n]$ in $E(P_n) = \{u(u+1); u = 1, \ldots, n-1\}$. Pot P_n ima n vozlišč in $n-1$ povezav. Prvih pet poti vidimo na sliki 60. Za $n = 1$ in $n = 2$ pot sovpada s polnim grafom K_n.



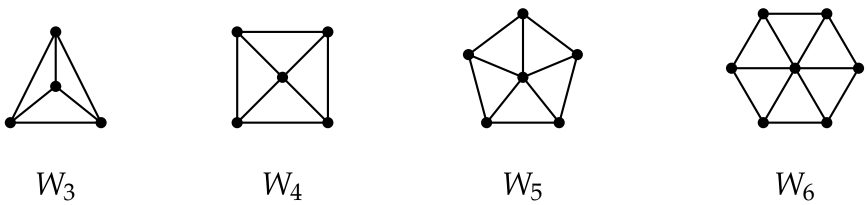
Slika 60: Poti na največ 5 vozliščih.

Cikel C_n, kjer je $n \geq 3$, je definiran z množicama $V(C_n) = [n]$ in $E(C_n) = \{u(u+1); u \in [n-1]\} \cup \{n1\}$, glej sliko 61. Kadar dopuščamo tudi multigrafe, sta definirana še cikla C_1 (zanka) in C_2 (par vzporednih povezav). Cikel je 2-regularen graf. Cikel C_3 včasih imenujemo tudi *trikotnik*.



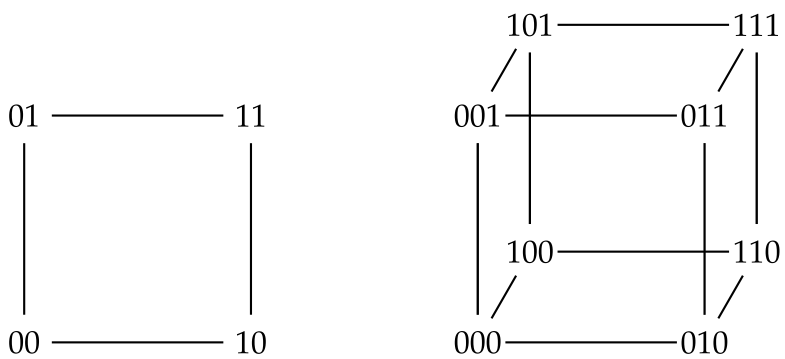
Slika 61: Primeri ciklov.

Kolo na $n+1$ vozliščih označimo z W_n ($n \geq 3$) in je definirano z množicama $V(W_n) = [n] \cup \{c\}$ in $E(W_n) = \{u(u+1); u \in [n-1]\} \cup \{n1\} \cup \{uc; u \in [n]\}$, glej sliko 62. Graf W_n ima torej $n+1$ vozlišč in $2n$ povezav. Vozlišču c rečemo *center* kolesa.

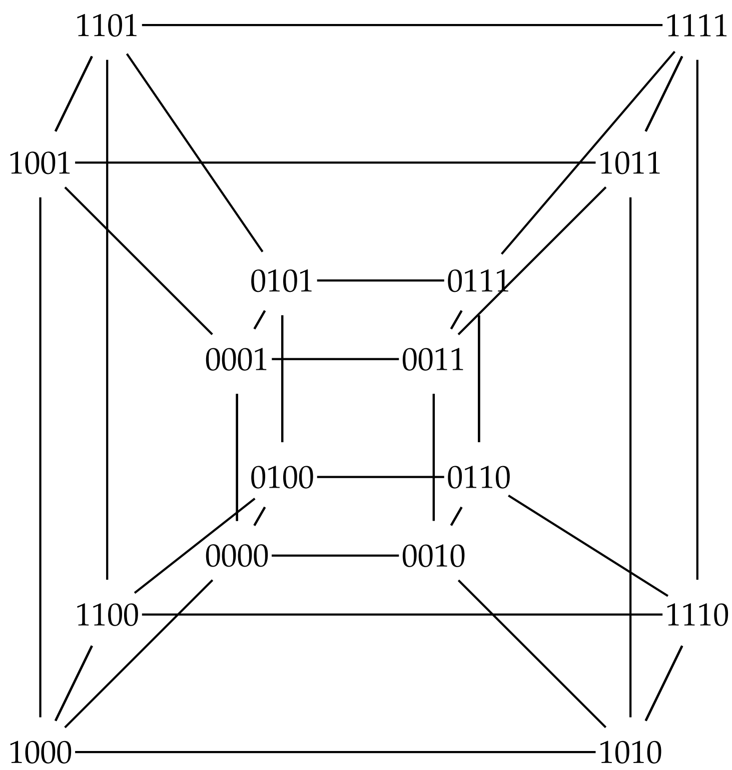


Slika 62: Primeri koles.

Hiperkocke so družina grafov, ki jih označimo s Q_n. Pri tem je $V(Q_n) = \{(u_1, u_2, \ldots, u_n); u_i \in \{0,1\}\}$ in $E(Q_n) = \{uv; u,v \in V(Q_n) : \sum_{i=1}^{n} |u_i - v_i| = 1\}$. Vozlišča so torej urejene n-terice, sestavljene iz ničel in enic, dve n-terici sta pa sosedni natanko tedaj, ko se razlikujeta na natanko enem mestu. Med hiperkocke štejemo tudi 0-razsežno kocko $Q_0 = K_1$. Hiperkocka Q_n ima 2^n vozlišč in $n \cdot 2^{n-1}$ povezav ter je n-regularen graf. Slika 63 prikazuje hiperkocki Q_2 in Q_3, slika 64 pa hiperkocko Q_4.



Slika 63: Hiperkocki Q_2 in Q_3.

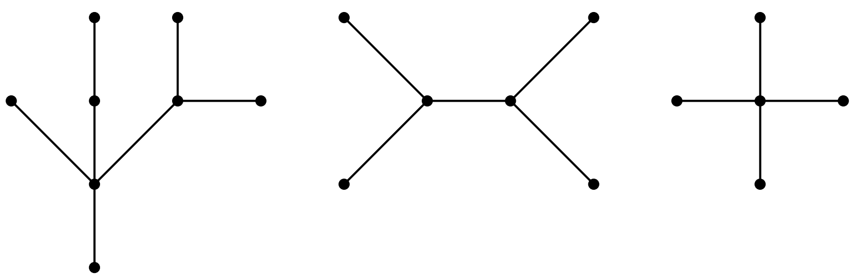


Slika 64: Hiperkocka Q_4.

5.5.1 *Drevesa*

Drevo je povezan graf brez cikla. Grafu, ki ne vsebuje nobenega cikla, pravimo **gozd**.

Iz definicije drevesa takoj sledi, da je drevo enostaven graf (saj ne more vsebovati zank ali večkratnih povezav, saj bi s tem vseboval cikel). Na sliki 65 vidimo gozd, ki je sestavljen iz treh dreves. Grafom, ki ne vsebujejo cikla, rečemo tudi **aciklični grafi**. Drevo bi tako lahko definirali kot povezan acikličen graf.



Slika 65: Gozd, sestavljen iz treh dreves.

Vsako drevo lahko zgradimo iz drevesa z enim samim vozliščem tako, da zaporedoma dodajamo novo povezavo in novo vozlišče. Zato za poljubno drevo na n vozliščih in m povezavah velja zveza $m = n - 1$. Ker s tako konstrukcijo nikoli ne moremo dobiti cikla, saj vsaka povezava povezuje eno od starih vozlišč z novo dodanim, od tod sledi, da je v drevesu vsak par vozlišč povezan z natanko eno potjo. Velja pa tudi obratno, če je vsak par vozlišč v grafu povezan z natanko eno potjo, potem je graf drevo (res, graf je povezan, ker med poljubnim parom vozlišč obstaja pot, je pa tudi acikličen, saj bi v primeru cikla obstajali vozlišči, ki sta povezani z dvema različnima potema). Velja torej naslednji izrek.

Izrek 282 *Graf je drevo natanko takrat, ko je vsak par njegovih vozlišč povezan z natanko eno potjo.*

Če je graf G drevo, potem po definiciji vemo, da gre za acikličen in povezan graf, premislili pa smo že tudi, da zanj velja $m = n - 1$. Izkaže se, da če za graf G z n vozlišči in m povezavami veljata vsaj dve izmed lastnosti

- acikličnost,
- povezanost,
- $m = n - 1$,

potem je ta graf drevo.

Izrek 283 *Naj bo G graf z n vozlišči. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

(i) *graf G je drevo,*

(ii) *G je povezan graf in ima* $n - 1$ *povezav,*

(iii) *G je acikličen graf in ima* $n - 1$ *povezav.*

Dokaz. Da veljata implikaciji $(i) \Rightarrow (ii)$ in $(i) \Rightarrow (iii)$ že vemo. Pokažimo še, da veljata obratni implikaciji.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Naj bo G povezan graf z $n - 1$ povezavami. Ker je povezan po predpostavki, je treba dokazati le njegovo acikličnost, kar bomo naredili s pomočjo redukcije na absurd. Predpostavimo, da G vsebuje cikel. Sedaj iz G odstranimo poljubno povezavo, pri čemer graf ostane povezan. Če G vsebuje več ciklov, postopek odstranjevanja povezav postopoma ponavljamo, dokler ne dobimo drevesa H. Ker ima H n vozlišč, ima $n - 1$ povezav. Tako jih mora G imeti več kot $n - 1$, kar pa je v nasprotju s predpostavko.

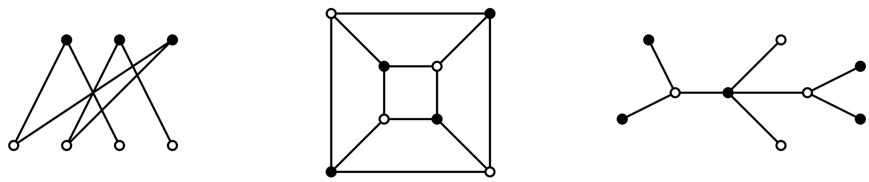
$(iii) \Rightarrow (i)$. Naj bo G acikličen graf z $n - 1$ povezavami. Dokazati je treba le, da je G povezan. Predpostavimo, da ni. To pomeni, da ima graf vsaj dve povezani komponenti. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da ima natanko dve povezani komponenti G_1 in G_2. Sedaj dodajmo povezavo uv med vozlišči $u \in G_1$ in $v \in G_2$ in dobljeni graf imenujmo H. Ker v G ni obstajala nobena pot med u in v, je graf H brez ciklov. Torej je H povezan graf brez ciklov (drevo) na n vozliščih in n povezavah, kar je protislovje, saj bi H kot drevo moralo imeti $n - 1$ povezav. ∎

5.5.2 *Dvodelni grafi*

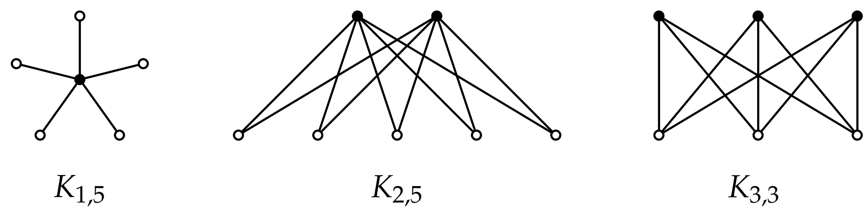
Graf G je **dvodelni**, če lahko množico točk $V(G)$ zapišemo kot disjunktno unijo dveh podmnožic $A, B \subseteq V(G)$ tako, da je za vsako povezavo $uv \in E(G)$ eno od vozlišč u, v vsebovano v množici A, drugo pa v množici B.

Množici A in B imenujemo **množici dvodelnega razbitja** grafa G, (ali **particiji** množice dvodelnega grafa).

Pri ugotavljanju ali je (dovolj majhen) graf dvodelen, si lahko pomagamo tako, da skušamo graf pobarvati z dvema barvama (recimo belo in črno) tako, da ima vsako belo vozlišče le črne sosede in obratno, vsako črno vozlišče ima v soseščini le bela vozlišča. Graf, katerega vozlišča je mogoče pobarvati na opisani način, imenujemo 2**-obarvljiv** (kasneje bomo dokazali, da je graf dvodelen natanko tedaj, ko je 2-obarvljiv). Primere takih grafov vidimo na slikah 66 in 67.



Slika 66: Dvodelni grafi.



Slika 67: Primeri polnih dvodelnih grafov.

Polni dvodelni graf $K_{m,n}$ je definiran z množico vozlišč $V(K_{m,n}) = A \cup B$, kjer velja $|A| = m$, $|B| = n$ in $A \cap B = \emptyset$, ter množico povezav $E(K_{m,n}) = \{uv; u \in A, v \in B\}$.

To pomeni, da je v polnem dvodelnem grafu vsako črno vozlišče povezano z vsakim belim vozliščem z natanko eno povezavo. Polni dvodelni graf $K_{m,n}$ ima

$m+n$ vozlišč in mn povezav. Polnemu dvodelnemu grafu oblike $K_{1,n}$ rečemo tudi **zvezda**. Na sliki 67 vidimo zvezdo $K_{1,5}$ in polna dvodelna grafa $K_{2,5}$ in $K_{3,3}$.

Izrek 284 *Naslednje trditve so ekvivalentne:*

(i) *G je dvodelen graf,*

(ii) *graf G je* 2*-obarljiv,*

(iii) *graf G ne vsebuje lihega cikla.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Naj bo G dvodelni graf s particijo vozlišč $V(G) = A \cup B$. Potem lahko vozlišča iz A pobarvamo z eno barvo, vozlišča iz B pa z drugo barvo tako, da sta sosedni vozlišči različnih barv. Torej je G 2-obarvljiv.

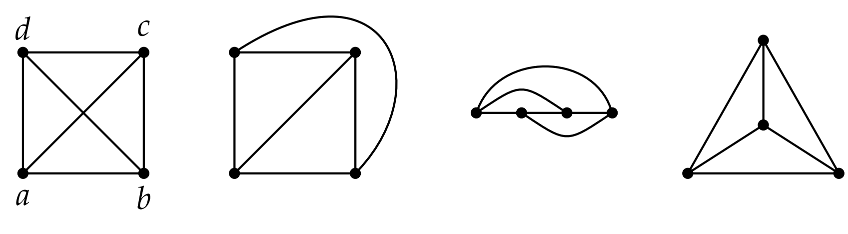
$(ii) \Rightarrow (i)$. Če je G 2-obarvljiv, potem nam barvi vozlišč ravno določata particijo dvodelnega grafa.

$(i) \Rightarrow (iii)$. Ta implikacija očitno drži, saj če graf vsebuje lihi cikel, potem ne more biti dvodelen.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Naj bo graf G brez lihih ciklov. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je povezan. Naj bo $u \in V(G)$ poljubno vozlišče. Dodelimo ga v množico A. Nato damo vse sosede vozlišča u v množico B. Vse sosede sosedov vozlišča u, ki še niso razporejeni, damo spet v možico A. S postopkom nadaljujemo, dokler ne razporedimo vseh vozlišč grafa. Tako dobljeni množici A in B zadoščata pogoju o dvodelnosti grafa, saj G ne vsebuje lihih ciklov. ■

Iz zgornjega izreka sledi, da so vsa drevesa dvodelni grafi. Če v hiperkocki Q_n množico A definiramo kot množico vozlišč, katerih oznake s pomočjo urejene n-terice iz definicije hiperkock vsebujejo sodo mnogo enic, množico B pa kot vozlišča z lihim številom enic, lahko glede na definicijo povezav v hiperkocki takoj vidimo, da množici A in B predstavljata particiji dvodelnega grafa. Premislili smo naslednje.

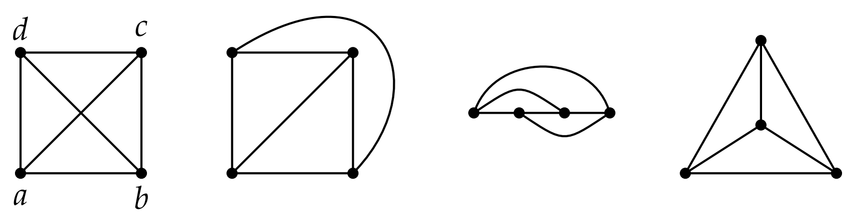
Trditev 285 *Hiperkocke so dvodelni grafi.*



Slika 68: Izomorfni grafi.

5.6 IZOMORFIZEM GRAFOV

Grafi na sliki 69 na prvi pogled zgledajo različno. A vsak od štirih grafov na tej sliki ima lastnost, da je graf na 4 vozliščih, kjer je vsako vozlišče povezano z vsakim drugim. Tako bi lahko katerakoli od teh slik predstavljala upodobitev (neoznačenega) grafa $G = (V, E)$, kjer je $V = \{a, b, c, d\}$ in $E = \{ab, ac, ad, bc, bd, cd\}$. Rečemo, da so vsi štirje grafi *izomorfni*. Oglejmo si formalno definicijo tega pojma.



Slika 69: Izomorfni grafi.

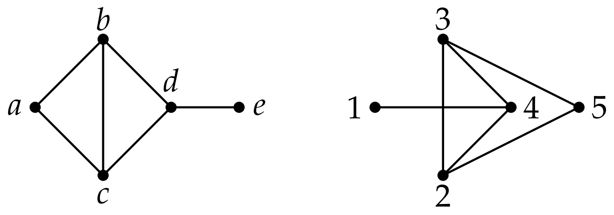
Naj bosta G in H grafa. Preslikava $f : V(G) \to V(H)$ je **izomorfizem**, če velja:

- f je bijekcija,
- $uv \in E(G)$ natanko tedaj, ko je $f(u)f(v) \in E(H)$.

Če obstaja izomorfizem $f : V(G) \to V(H)$, rečemo, da sta grafa G in H **izomorfna**, kar označimo $G \simeq H$.

Z drugimi besedami, grafa sta izomorfna, če med množicama njunih vozlišč obstaja bijekcija, ki ohranja povezave in nepovezave. Spomnimo se, da je bijekcija preslikava, ki je hkrati injektivna in surjektivna. Tako je pri bijektivni preslikavi $f : A \to B$ poljuben element množice B slika natanko enega elementa množice A. To med drugim pomeni, da imata izomorfna grafa enako število vozlišč, pa tudi enako število povezav. Toda pozor, če se grafa ujemata v številu vozlišč in povezav, to še ne pomeni, da sta izomorfna. Npr. grafa G in K na sliki 52 imata oba 4 vozlišča in 6 povezav, toda G vsebuje zanko, ki bi se z bijekcijo med $V(G)$ in $V(H)$ seveda morala preslikati v zanko v grafu K, ki pa zanke sploh ne vsebuje. Zato bijekcija iz množice $V(G)$ v množico $V(H)$, ki bi ustrezala 2. pogoju iz definicije izomorfizma, ne obstaja.

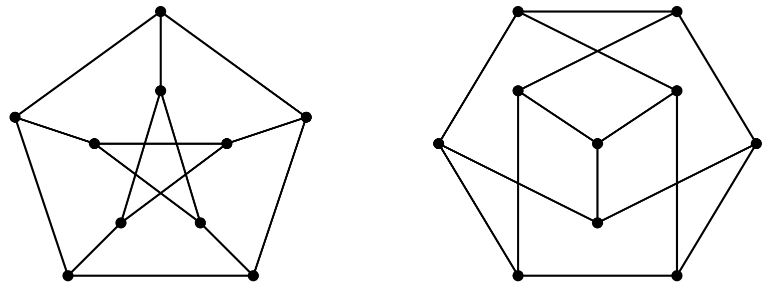
Primer 286 *Grafa G in H na sliki 70 sta izomorfna, saj obstaja bijekcija f iz $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ v $V(H) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, definirana s predpisom $f(e) = 1, f(d) = 4, f(b) = 3, f(c) = 2, f(a) = 5$, ki ohranja povezave in nepovezave. Res, ker je*



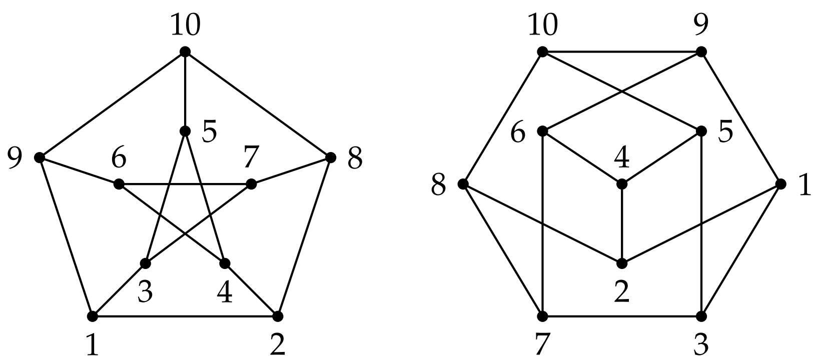
Slika 70: Grafa G in H iz primera 286.

$de \in E(G)$, velja, da sta ustrezni sliki vozlišč d in e, torej vozlišči 1 in 4, povezani. Podobno, $bc \in E(G)$ in $23 \in E(H)$. Ker vozlišči a in d v G nista povezani, tudi vozlišči 4 in 5 nista povezani, itd.

Primer 287 *Kadar grafa nista označena, si lahko pri iskanju izomorfizma pomagamo tako, da grafa skušamo z enako množico oznak označiti tako, da če sta vozlišči x in y povezani v prvem grafu, potem sta povezani tudi v drugem. Na sliki 71 sta podana dva neoznačena grafa. Na sliki 72 pa smo ju označili tako, da se povezave in nepovezave v obeh grafih ujemajo, kar pomeni, da sta izomorfna (oba predstavljata graf, ki ima posebno ime:* ***Petersenov graf****). Predstavljena rešitev je ena od več možnih.*



Slika 71: Neoznačena grafa iz primera 287.



Slika 72: Označena grafa iz primera 287.

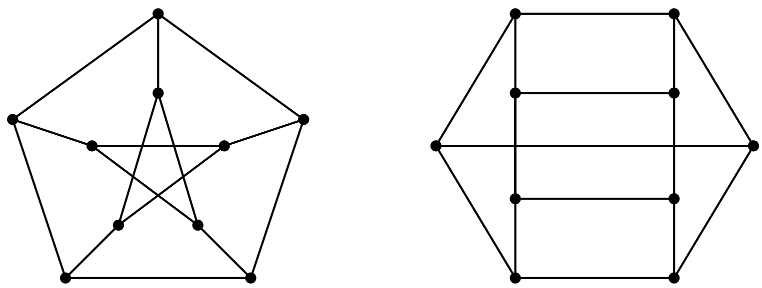
Ni težko videti, da velja naslednja trditev (dokaz izpustimo).

Trditev 288 *Izomorfnost grafov $\simeq$ je ekvivalenčna relacija.*

Lastnosti grafa, ki jo imajo poleg grafa samega tudi vsi z njim izomorfni grafi, pravimo **invarianta** grafa. Primeri grafovskih invariant so število vozlišč, število povezav, število vozlišč določene stopnje, število 4-ciklov v grafu, dvodelnost, vsebovanost določenega podgrafa itd. Grafovske invariante nam pomagajo pri utemeljitvi, da grafa nista izomorfna: poiščemo grafovsko invarianto, v kateri se obravnavana grafa ločita. Poudariti je pa treba, da matrika sosednosti $S(G)$ in incidenčna matrika $I(G)$ nista grafovski invarianti, saj sta odvisni od vrstnega reda oz. razvrščanja vozlišč v matriki.

Primer 289 *Že prej smo omenili, da grafa G in K na sliki 52 nista izomorfna, saj en vsebuje zanko, drugi pa ne. Tudi grafa H in K iz tega primera nista izomorfna, saj se ne ujemata v številu vozlišč. Alternativna utemeljitev, da H in K nista izomorfna, bi bila, da je $\delta(H) = 0$, medtem ko je $\delta(K) = 3$, ali da se grafa ne ujemata v številu povezav, ali da je en graf regularen, drugi pa ne, itd.*

Primer 290 *Dolžini najkrajšega cikla v grafu pravimo* **notranji obseg** *oz.* **ožina** *grafa. Ker imata grafa na sliki 73 različno ožino, nista izomorfna, čeprav sta oba kubična grafa na* 10 *vozliščih.*

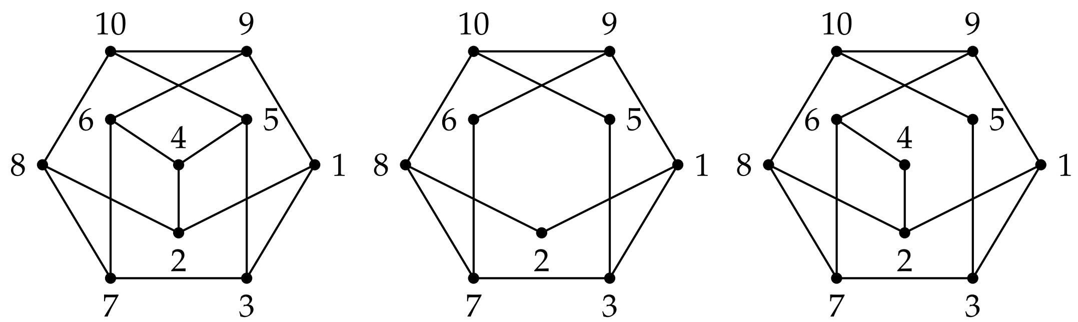


Slika 73: Grafa z različnima ožinama.

5.7 NEKAJ OPERACIJ Z GRAFI

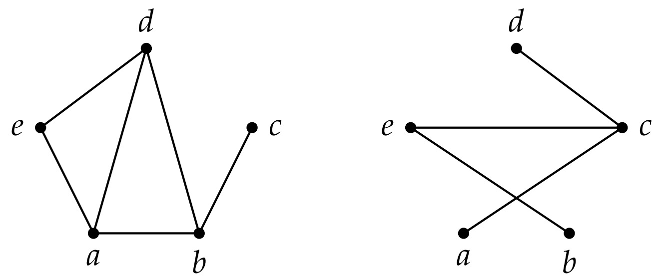
Operacijo **odstranjevanja vozlišča** smo že spoznali: za graf G in $v \in V(G)$ z $G - v$ označimo graf, ki ga dobimo z odstranitvijo vozlišča v iz množice $V(G)$, pri čemer pa tudi iz $E(G)$ odstranimo vse povezave, ki imajo vozlišče v za krajišče. Podobno $G - S$ označuje graf, ki ga iz grafa G dobimo z odstranitvijo vseh vozlišč iz množice $S \subseteq V(G)$.

Ko **odstranimo povezavo** $e \in E(G)$, to storimo tako, da odstranimo le povezavo, krajišča odstranjene povezave pa ostanejo del novonastalega grafa, ki ga označimo z $G - e$. Primer, kjer iz grafa odstranimo vozlišče 4 oz. povezavo med vozliščema 4 in 5, vidimo na sliki 74.



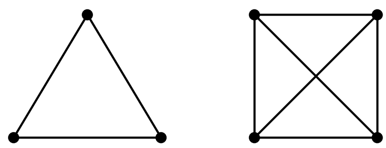
Slika 74: Petersenov graf, ki mu odstranimo vozlišče 4 oz. povezavo med 4 in 5.

Komplementarni graf grafa G je graf $\overline{G}$, za katerega velja $V(\overline{G}) = V(G)$, dve vozlišči sta v grafu $\overline{G}$ sosedni natanko tedaj, ko nista sosedni v grafu G, glej primer na sliki 75.



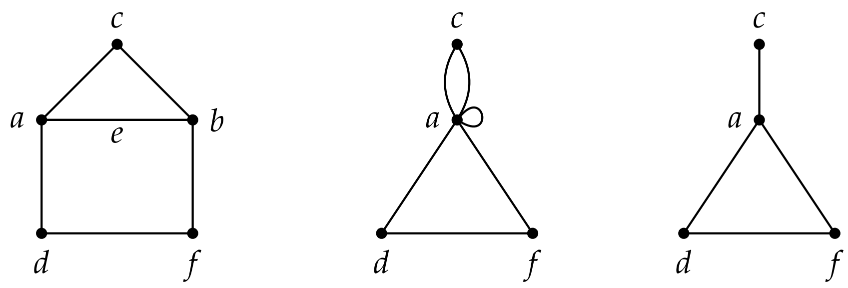
Slika 75: Graf in njegov komplement.

Unija grafov G_1 in G_2 je graf $G = G_1 \cup G_2$ z množico vozlišč $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ in množico povezav $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Če velja še $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$, govorimo o **disjunktni uniji** grafov. Na sliki 76 vidimo disjunktno unijo grafov K_3 in K_4.



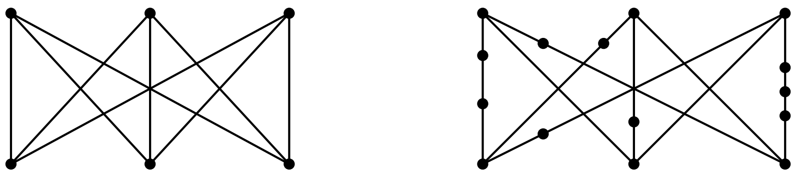
Slika 76: Disjunktna unija grafov K_3 in K_4.

Opišimo postopek **skrčitve povezave** $e \in E(G)$ v enostavnem grafu G: v grafu G identificiramo krajišči povezave e in odstranimo zanko (ta nastane iz povezave e) ter morebitne vzporedne povezave (te nastanejo, če je povezava e vsebovana v trikotnikih grafa G). Dobljeni graf označimo z G/e. V kolikor delamo z multigrafi, nastalih vzporednih povezav ne odstranjujemo. Slika 77 prikazuje levo graf G, desno pa najprej graf G/e v primeru multigrafov, nato pa v primeru, ko delamo z enostavnimi grafi.



Slika 77: Skrčitev povezave e v multigrafu in v enostavnem grafu.

Povezavo **subdividiramo** tako, da nanjo dodamo vozlišča (eno ali več) stopnje dve. **Subdivizija grafa** G je vsak graf, ki ga iz grafa G dobimo s subdivizijo povezav grafa G. Slika 78 prikazuje graf $K_{3,3}$ in eno izmed njegovih subdivizij.



Slika 78: Graf $K_{3,3}$ in njegova subdivizija.

Spoj grafov G_1 in G_2, kjer je $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$, je graf $G = G_1 * G_2$, ki je določen z množico vozlišč $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ in množico povezav

$$E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv; u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}.$$

Spoj ima $|V(G_1)| + |V(G_2)|$ vozlišč in $|E(G_1)| + |E(G_2)| + |V(G_1)| \cdot |V(G_2)|$ povezav.

Primer 291 *Kolesa in polne dvodelne grafe je mogoče predstaviti kot spoj grafov, saj velja* $W_n \simeq K_1 * C_n$ *in* $K_{m,n} \simeq \overline{K_m} * \overline{K_n}$. *Na sliki 79 pa vidimo spoj grafov* P_3 *in* C_3.

5.8 preveri svoje znanje (osnovno o grafih)

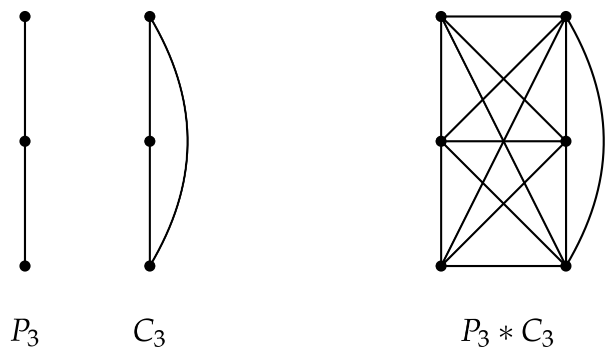
Vprašanja iz teorije

1. Zapiši definicijo grafa.

2. Pojasni pojme: sosedni povezavi, vporedne povezave, enostavni graf, izolirano vozlišče, ožina grafa.

3. Kaj je regularen graf? Koliko povezav ima regularen graf?

4. Kaj pove lema o rokovanju in kakšne lastnosti grafa lahko izpeljemo z njeno pomočjo?



Slika 79: Spoj grafov P_3 in C_3.

5. Kaj je podgraf? Katere vrste podgrafov poznamo? Podaj primere različnih vrst podgrafov.
6. Pojasni razliko med sprehodom in obhodom. Katere vrste sprehodov in obhodov ločimo?
7. Kaj je povezan graf? Kdaj je graf 2-povezan?
8. Kako je definirana razdalja med vozliščema v grafu? Kakšne lastnosti ima?
9. Kako poiščemo diameter grafa?
10. Kako graf predstavimo s pomočjo matrik?
11. Kaj je drevo? Naštej karakterizacije dreves.
12. Pojasni, kaj je dvodelen graf. Kako prepoznamo dvodelne grafe? Podaj primere dvodelnih grafov.
13. Kdaj sta grafa izomorfna?
14. Kako utemeljimo, da grafa nista izomorfna?
15. Naštej in pojasni operacije z grafi.

Rešene naloge

Naloga 292 *Če dana zaporedja predstavljajo zaporedje stopenj enostavnega grafa, ga skonstruiraj, sicer utemelji, zakaj tak graf ne obstaja:*

(a) $1, 2, 2, 2, 3, 3,$

(b) $3, 3, 4, 4, 6, 6, 6,$

(c) $2, 2, 4, 4, 6, 6, 6.$

Rešitev:

(*a*) *Graf z zaporedjem stopenj* $1, 2, 2, 2, 3, 3$ *ne obstaja, saj je njihova vsota liho število (po lemi o rokovanju bi morala biti sodo število).*

(*b*) *Primer grafa z zaporedjem stopenj grafa* $3, 3, 4, 4, 6, 6, 6$ *vidimo na sliki 81.*

(*c*) *Predpostavimo, da obstaja enostaven graf z zaporedjem vozlišč* $2, 2, 4, 4, 6, 6, 6$. *Potem ima graf* 7 *vozlišč. Tri od njih so stopnje* 6, *kar pomeni, da je vsako od njih sosedno z vsakim drugim vozliščem grafa. To pa pomeni, da je stopnja vsakega vozlišča v grafu vsaj* 3, *kar pa je protislovje z danim zaporedjem, ki vsebuje dve dvojki.*

Naloga 293 *Iz besede tvorimo enostaven graf* $G = (V, E)$, *kjer je*

$$V(G) = \{v;\ v \text{ je črka v besedi}\}$$

in

$$E(G) = \{vu;\ v \text{ in } u \text{ sta sosedni črki v besedi}\}.$$

Za vsako od besed MATEMATIKA, LJUBEZEN in SLOVENIJA nariši graf in ugotovi:

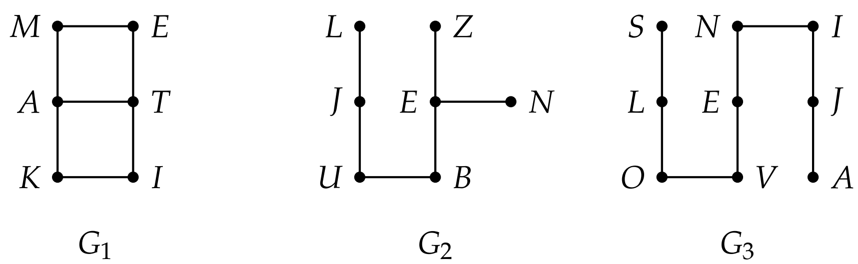
(*a*) *maksimalno in minimalno stopnjo vozlišča v grafu,*

(*b*) *diameter grafa,*

(*c*) *ali je dvodelen,*

(*d*) *ali vsebuje pot* P_3 *oz.* P_4 *kot izometrični podgraf.*

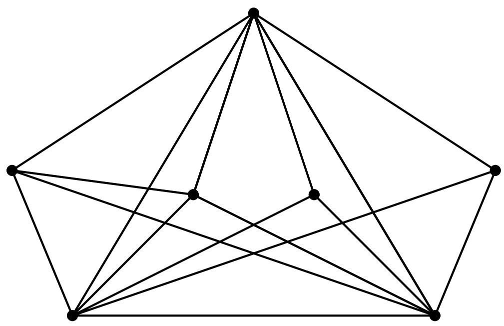
Rešitev: *Grafe vidimo na sliki 80. Za graf* G_1 *velja* $\delta(G_1) = 2$, $\Delta(G_1) = 3$, $\mathrm{Diam}(G_1) = 3$, *je dvodelen, vsebuje izometrično pot* P_3, *nobena od poti* P_4 *v* G_1 *pa ni izometrična. Za graf* G_2 *je* $\delta(G_2) = 1$, $\Delta(G_2) = 3$, $\mathrm{Diam}(G_2) = 5$, *je dvodelen, vsebuje izometrično pot* P_3, *kakor tudi* P_4 *(npr. pot JUBEN). Za graf* G_3 *je* $\delta(G_3) = 1$, $\Delta(G_3) = 2$, $\mathrm{Diam}(G_3) = 8$. *Ker je* G_3 *drevo, je vsaka njegova pot izometrična, prav tako pa je dvodelen graf.*



Slika 80: Grafi iz naloge 293.

Naloga 294 *Dokaži, da če je graf G r-regularen in r liho število, potem ima G sodo število vozlišč.*

Rešitev: *Recimo, da ima r-regularen graf, kjer je $r = 2k + 1$ za nek $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, liho število vozlišč, tj. $|V(G)| = n = 2l + 1$ za nek $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Potem je vsota stopenj vseh vozlišč enaka $n \cdot r = (2k + 1)(2l + 1) = 4l^2 + 2l + 2k + 1$, kar je liho število. Toda to je protislovje, saj je po lemi o rokovanju vsota stopenj vseh vozlišč $2|E(G)|$, torej sodo število.*



Slika 81: Graf iz naloge 292.

Naloga 295 *Dokaži, da je vsak izometrični podgraf tudi induciran.*

Rešitev: *Trditev dokažimo s protislovjem. Naj bo H izometrični podgraf grafa G, ki ni induciran. Tedaj obstajata vozlišči $u, v \in V(H)$, ki sta v grafu G povezani, v podgrafu H pa ne. Torej velja $d_G(u, v) = 1$ in $d_H(u, v) > 1$, kar vodi v protislovje, saj je H izometrični podgraf grafa G.*

Naloga 296 *V ciklu C_6 poišči podgraf, ki je induciran, ni pa izometričen.*

Rešitev: *Poljubna inducirana pot P_5 v ciklu C_6 ni njegov izometričen podgraf, saj sta krajišči te poti v ciklu na razdalji 2, medtem ko sta v poti na razdalji 4.*

Naloga 297 *Za kakšne vrednosti n je C_n podgraf grafa $K_{n,n}$?*

Rešitev: *Vemo, da je graf $K_{n,n}$ dvodelen, zato ne more vsebovati lihega cikla. Torej n ne more biti liho število. Po drugi strani se hitro prepričamo, da v $K_{n,n}$ za vsak sodi n, kjer je $n > 2$, obstaja cikel dolžine n.*

Naloga 298 *Naj bo G graf na sliki 82. Za vsakega od spodnjih podgrafov grafa G določi število vozlišč in število povezav:*

(a) *H_1 je podgraf, induciran z vozlišči, označenimi s sodimi števili.*

(b) *H_2 je podgraf, induciran z vozlišči, označenimi z lihimi števili.*

(c) *H_3 je podgraf, induciran z množico vozlišč $\{1, 3, 6, 7, 9\}$.*

(d) *H_4 je podgraf, induciran z množico vozlišč* $\{1, 3, 4, 6, 8, 10\}$.

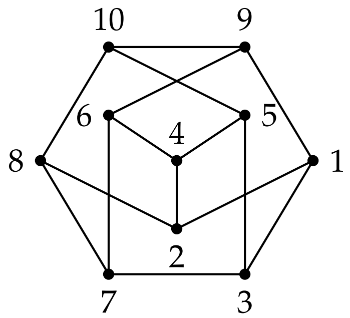
Rešitev:

(a) *H_1 je izomorfen poti P_5 in ima tako* 5 *vozlišč in* 4 *povezave.*

(b) *H_2 je izomorfen enemu izmed dreves na* 5 *vozliščih in ima tako* 4 *povezave.*

(c) *H_3 je podgraf, izomorfen grafu C_5, zato ima* 5 *vozlišč in* 5 *povezav.*

(d) *H_4 je podgraf, izomorfen disjunktni uniji treh polnih grafov K_2, tako ima* 6 *vozlišč in tri povezave.*



Slika 82: Graf iz naloge 298.

Naloga 299 *Graf G je podan z naslednjo incidenčno matriko:*

$$I(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) *Ali je graf G povezan? Ali je G* 2*-povezan?*

(b) *Ali so cikli C_3, C_4 in C_5 inducirani podgrafi grafa G?*

(c) *Ali je graf G dvodelen?*

(d) *Koliko povezav vsebuje komplement grafa G?*

Rešitev:

(a) *Graf G je povezan, ne pa tudi* 2*-povezan (če odstranimo vozlišče, ki ustreza 4. vrstici, graf razpade na dve povezani komponenti).*

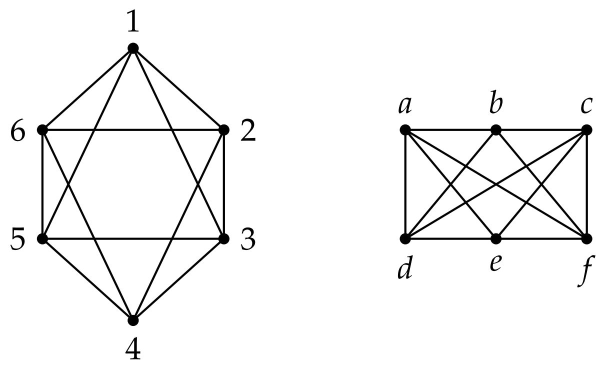
(*b*) *Graf G vsebuje cikle* C_3, C_4 *in* C_5*, inducirana sta le* C_3 *in* C_4.

(*c*) *Graf G ni dvodelen, saj vsebuje lihi cikel.*

(*d*) *Poln graf na* 6 *vozliščih vsebuje* $\binom{6}{2} = 15$ *povezav. Ker jih G vsebuje* 7*, jih njegov komplement tako vsebuje* 8.

Naloga 300 *Ali sta grafa na sliki 83 izomorfna?*

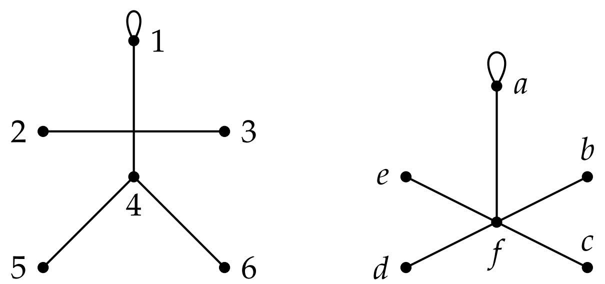
Rešitev: *Naj bo G levi, H pa desni graf na sliki 83. Grafa sta izomorfna, saj je* $k : V(G) \to V(H)$*, definiran s predpisom* $k(1) = a$, $k(2) = f$, $k(3) = e$, $k(4) = c$, $k(5) = d$, $k(6) = b$*, izomorfizem grafov.*



Slika 83: Grafa iz naloge 300.

Naloga 301 *Ali sta grafa na sliki 84 izomorfna?*

Rešitev: *Grafa nista izomorfna, saj je desni graf povezan, levi pa ne.*



Slika 84: Grafa iz naloge 301.

Naloga 302 *Pokaži, da lahko polni graf* K_5 *dobimo tako, da v Petersenovem grafu skrčimo pet povezav.*

Rešitev: *Označen Petersenov graf lahko vidimo levo na sliki 72. Če postopoma naredimo skrčitev povezav* $87, 24, 13, 96$ *ter povezave med vozliščema* 10 *in* 5*, dobimo* K_5.

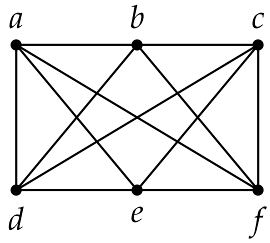
5.9 EULERJEVI GRAFI

Eulerjev obhod je enostaven obhod, na katerem so vse povezave grafa, **Eulerjev sprehod** pa enostaven sprehod z isto lastnostjo. Grafu, v katerem obstaja Eulerjev obhod, rečemo **Eulerjev graf**, če pa v grafu obstaja Eulerjev sprehod, ga imenujemo **poleulerjev graf**.

Eulerjeve grafe je enostavno prepoznati, saj je treba preveriti le, ali je graf povezan in je vsako vozlišče sode stopnje. Pri dokazu da to velja, potrebujemo naslednjo lastnost grafov, ki jo navedimo brez dokaza[2].

Trditev 303 *Če ima v grafu G vsako vozlišče sodo stopnjo, potem lahko povezave grafa razbijemo na unijo po povezavah disjunktnih ciklov.*

Primer 304 *Graf na sliki 85 vsebuje sama soda vozlišča. Zato ga lahko po prejšnji trditvi razbijemo na unijo po povezavah disjunktnih ciklov. Disjunktni cikli, ki skupaj sestavljajo graf G, so npr. $afeda$, $bcfb$ in $abdcea$, saj noben par ciklov nima skupne povezave.*



Slika 85: Graf iz primera 304.

Izrek 305 *Naj bo G povezan graf. Potem je G Eulerjev natanko tedaj, ko so vsa vozlišča grafa G sode stopnje.*

Dokaz. Najprej premislimo, da velja naslednja implikacija: če je graf G Eulerjev, potem ima vsako vozlišče v grafu G sodo stopnjo. Ker je graf G Eulerjev, vsebuje Eulerjev obhod. To pomeni, da pri pomikanju vzdolž tega obhoda prehodimo vsako povezavo natanko enkrat in se na koncu vrnemo v začetno vozlišče. Z vsakim obiskom vozlišča prispevamo dva k njegovi stopnji (pridemo v vozlišče in odidemo iz njega), kar velja tudi za začetno vozlišče, saj v njem začnemo in končamo obhod. Torej je vsako vozlišče sode stopnje.

2 Dokaz trditve 303 je mogoče nati v knjigi R. J. Wilson, J. J. Watkins, *Uvod v teorijo grafov*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 1997, ki je priporočljiva začetna literatura za bralca, ki ga zanima teorija grafov.

Dokažimo še obratno implikacijo: če ima vsako vozlišče povezanega grafa G sodo stopnjo, potem je graf G Eulerjev. Predpostavimo, da so vsa vozlišča grafa G sode stopnje. Po trditvi 303 graf G vsebuje cikel C. Pri dokazu, da obstaja Eulerjev obhod v grafu G, si pomagamo z matematično indukcijo glede na število povezav m. Za $m = 0$ je edini povezani graf K_1, ki je očitno Eulerjev. Predpostavimo, da trditev velja za vse povezane grafe, ki imajo manj kot m povezav. Naj bo G graf z m povezavami. Iz njega sedaj odstranimo povezave cikla C in dobljeni graf imenujmo H. Graf H ima tako manj kot m povezav, vsako vozlišče grafa H je pa še vedno sode stopnje (vozlišča, ki ne ležijo na C so še vedno enake stopnje kot v G, vozliščem, ki ležijo na C se je pa stopnja zmanjšala za 2). Graf H ni nujno povezan, a je vsaka njegova povezana komponenta povezan graf z vozlišči sode stopnje. Zato je po indukcijski predpostavki vsaka povezana komponenta grafa H Eulerjev graf.

Eulerjev obhod grafa G lahko sedaj poiščemo tako: za začetek obhoda izberemo katerokoli vozlišče v cikla C. Nato se pomikamo po ciklu C, dokler ne pridemo do prve povezane komponente grafa H. Nadaljujemo po Eulerjevem obhodu te komponente in se vrnemo na cikel C. Nato nadaljujemo vzdolž C in pri tem vsakič, ko naletimo na novo komponento grafa H, prehodimo vse njene povezave po njenem Eulerjevem obhodu. Ko se nazadnje vrnemo v vozlišče v, smo tako prehodili vsako povezavo grafa G in to natanko enkrat. ■

Zgornji izrek nam torej pokaže enostaven način za preverjanje ali je nek graf Eulerjev ali ne. Tako npr. takoj vidimo, da sta grafa na sliki 83 Eulerjeva, saj sta povezana in vsebujeta sama soda vozlišča. Graf na sliki 81 je povezan, a vsebuje vozlišči, ki sta lihe stopnje, zato ni Eulerjev. Prav tako očitno nista Eulerjeva grafa iz slike 84, saj vsebujeta list (vozlišče stopnje 1), pri čemer za levi graf že niti osnovni pogoj o povezanosti ni izpolnjen.

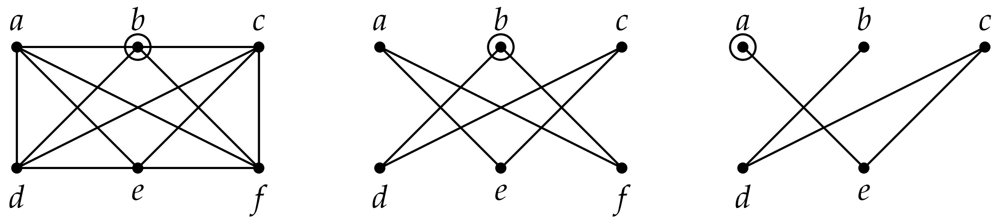
Most je povezava v povezanem grafu, brez katere bi bil graf nepovezan.

Mostovi igrajo pomembno vlogo v *Fleury-jev algoritmu*, ki nam pove, kako v Eulerjevem grafu najti Eulerjev obhod.

Fleury-jev algoritem:

1. Izberemo začetno vozlišče.
2. Prečkamo poljubno povezavo. Pri tem most izberemo le, kadar ni več druge možnosti.
3. Povezavo, ki smo jo prehodili, odstranimo. Prav tako odstranimo vsa vozlišča, ki ob tem postanejo izolirana.
4. Končamo, ko v grafu ni več nobene povezave.

Primer 306 *Slika 86 prikazuje nekaj korakov Fleury-jevega algoritma, s katerim poiščemo Eulerjev obhod prvega grafa iz te slike. Izbrano začetno vozlišče je b. Ker nobena povezava, katere krajišče je b v tem trenutku še ni most, jo lahko izberemo kot prvo, ki jo prehodimo. Recimo, da izberemo povezavo bc. Ob tem, ko se premaknemo v vozlišče c po izbrani povezavi, le-to izbrišemo. Iz vozlišča c lahko nadaljujemo po katerikoli preostali povezavi, saj nobena ni most. S postopkom nadaljujemo tako, da začenši v b prehodimo cikel $bcfedab$. Povezave tega cikla sproti odstranjujemo. Graf, ki na tak način ostane, je drugi graf na sliki 86, v katerem je začetna pozicija spet vozlišče b. Ponovno bi lahko izbrali katerikoli povezavo s krajiščem v b, recimo povezavo bf, ki jo seveda odstranimo, ko smo jo prehodili. Ko smo v vozlišču f, nam preostane le še most fa, ki ga odstranimo skupaj z vozliščem f, ki je s tem postalo izolirano vozlišče. Graf, ki ostane, je tretji graf na sliki 86. Ko nadaljujemo iz vozlišča a, bo vsaka nadaljnja povezava most, zato je edina možnost prehoditi pot $aecdb$. Tako smo skupaj prehodili Eulerjev obhod $bcfedabfaecdb$.*



Slika 86: Nekaj korakov Fleury-jevega algoritma.

Prav tako je enostavno prepoznati, kdaj je povezan graf poleulerjev. Spomnimo se, da to pomeni, da v njem obstaja Eulerjev sprehod, tj. enostaven sprehod, ki vsebuje vsako povezavo grafa. Razlika z Eulerjevim obhodom je torej le v tem, da pri Eulerjevem sprehodu ne rabimo začeti in končati v istem vozlišču.

Trditev 307 *Povezan graf je poleulerjev natanko tedaj, ko ima največ dve vozlišči lihe stopnje.*

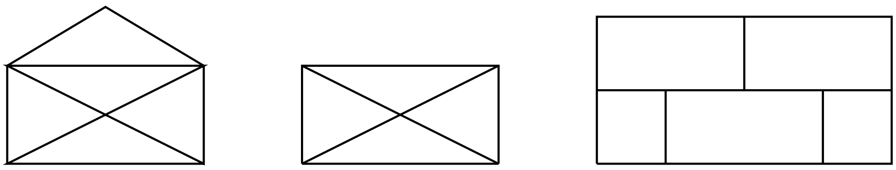
Z drugimi besedami, graf je poleulerjev, če je povezan in ima 0 ali 2 vozlišči lihe stopnje (po posledici leme o rokovanju graf ne more imeti le enega lihega vozlišča).

Dokaz. Naj bo G poleulerjev graf, v in u pa začetno oziroma končno vozlišče enostavnega sprehoda, na katerem so vse povezave grafa. Če vozlišči v in u povežemo s povezavo e, dobimo Eulerjev graf, ki ga označimo s H. Po izreku 305 so v H vsa vozlišča sode stopnje. Da dobimo nazaj graf G, iz grafa H ostranimo povezavo e. Tako opazimo, da sta v grafu G vozlišči v in u edini vozlišči lihe stopnje.

Za dokaz obratne implikacije predpostavimo, da da ima povezan graf G natanko dve vozlišči lihe stopnje. Naj bosta to vozlišči x in y. Če med vozlišči x

in y dodamo povezavo e, dobimo povezan graf H, v katerem imajo vsa vozlišča sodo stopnjo. Po izreku 305 je H Eulerjev graf, ki torej vsebuje Eulerjev obhod. Če sedaj odstranimo povezavo e, dobimo enostaven sprehod med vozliščema x in y, na katerem so vse povezave grafa G. Graf G je torej poleulerjev. ∎

Večina nas gotovo že iz osnovne šole pozna uganke, kjer je dani diagram treba narisati s čim manj potezami, pri čemer ne smemo nobenega dela diagrama narisati dvakrat. Gre za t.i. **uganke Eulerjevega tipa**. Nekaj primerov diagramov vidimo na sliki 87. Diagrame si lahko predstavimo kot grafe, kjer vozlišča na diagrame postavimo le v tista stikališča daljic, kjer se stikata več kot dve daljici (kjer se stikata dve, nimamo izbire kako nadaljevati s potezo). Tako se v jeziku teorije grafov dani problem glasi: poiskati najmanjše možno število enostavnih sprehodov v grafu tako, da bodo na njih ležala vsa vozlišča grafa. Graf, ki ga na prej opisani način dobimo iz prvega diagrama na sliki 87, je poleulerjev, zato vsebuje en tak sprehod. V grafu dobljenem iz drugega diagrama je najmanjše število takih sprehodov 2, v grafu dobljenem iz tretjega diagrama pa 4. Velja namreč naslednja trditev.



Slika 87: Uganke Eulerjevega tipa.

Trditev 308 *Povezan graf brez lihih vozlišč lahko narišemo z eno potezo. Za $k > 0$ velja: če ima povezan graf $2k$ vozlišč lihe stopnje, ga lahko narišemo s k potezami.*

Dokaz. Če graf nima lihih vozlišč, je Eulerjev, zato ga lahko narišemo z eno potezo. Naj bo sedaj G graf, v katerem so $v_1, v_2, \ldots, v_{2k-1}, v_{2k}$ liha vozlišča grafa (spomnimo se, da je po posledici leme o rokovanju teh sodo mnogo). Iz grafa G skonstruirajmo nov graf H tako, da dodamo povezave $v_1v_2, v_3v_4, \ldots, v_{2k-1}v_{2k}$. V grafu H so vsa vozlišča sode stopnje, zato je H Eulerjev graf, v katerem lahko najdemo Eulerjev obhod. Če nato iz njega odstranimo dodane povezave (da spet dobimo graf G), ta obhod razpade na k disjunktnih poti (vsaka taka pot je poteza). ∎

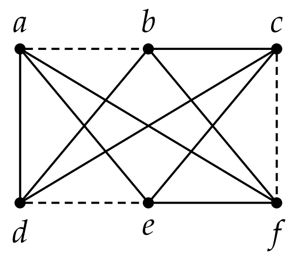
Kitajski problem poštarja

Oglejmo si naslednji problem: poštar želi razdeliti pošto vzdolž vseh ulic svojega rajona in se vrniti na poštni urad. Kakšno pot naj izbere, da bo prehodil najmanjšo možno razdaljo? S tem problemom se je ukvarjal kitajski matematik Meigu Guan (1962), zato tudi takšno poimenovanje problema. Le-ta se pojavlja tudi v drugih konteksih, npr. zimske službe, zadolžene za pluženje snega, želijo načrtovati obhode tako, da bi čim manjkrat peljali po že spluženih ulicah. V praksi namreč graf, ki predstavlja del mesta (ali poštarjev rajon), ni nujno Eulerjev (v tem primeru je rešitev problema seveda kar Eulerjev obhod). Model, s katerim predstavimo omenjeni problem v jeziku teorije grafov vključuje *uteženi graf*.

Uteženi graf ali **omrežje** je graf, v katerem je vsaki povezavi dodeljeno pozitivno število, imenovano **utež**.

Primer uteženega grafa vidimo na sliki 89. Uteži v obravnavanem problemu predstavljajo dolžine ulic poštarjevega rajona, iščemo torej obhod z *najmanjšo skupno težo* (t.j. vsoto vseh uteži), v katerem je vsaka povezava grafa vsebovana vsaj enkrat. Za predstavitev algoritma, ki najde tak obhod (v primeru, ko graf vsebuje liha vozlišča), potrebujemo še naslednji pojem.

Prirejanje v grafu G je podmnožica $M \subseteq E(G)$, za katero velja, da nobeni dve povezavi v M nimata skupnega vozlišča. **Popolno prirejanje** v grafu G je prirejanje, v katerem je vsako vozlišče krajišče kakšne povezave.

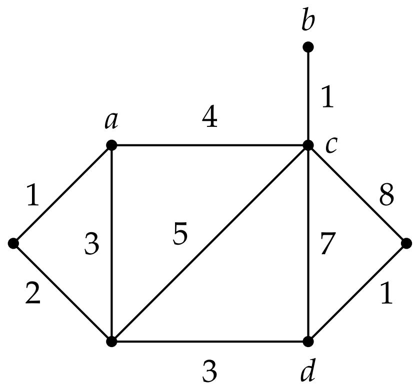


Slika 88: Popolno prirejanje v grafu (množica črtkanih povezav).

Primer 309 *Primer prirejanja grafa na sliki 88 je množica povezav* $\{ad, ef\}$*, množica* $\{ab, de, cf\}$ *je pa popolno prirejanje tega grafa.*

Sedaj si lahko ogledamo algoritem za *iskanje optimalnega poštarjevega obhoda*.

1. Naj bo G povezan utežen graf.
2. Poiščemo množico vseh vozlišč lihe stopnje v grafu G in jo označimo z L.



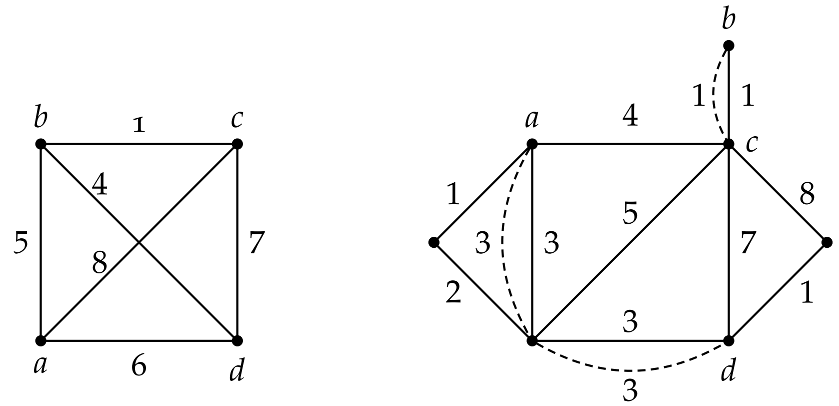
Slika 89: Uteženi graf.

3. Za vsak par vozlišč u in v iz L poiščemo najkrajšo pot P med njima (pozor: **dolžina poti v uteženem grafu** je definirana kot vsota uteži na tej poti). Naj bo $d(u,v)$ dolžina poti P.
4. Skonstruiramo polni graf K katerega množica vozlišč je množica L.
5. Vsaki povezavi $e = uv$ v K priredimo utež $d(u,v)$.
6. Poiščemo popolno prirejanje M grafa K tako, da je skupna teža povezav v M najmanjša.
7. Za vsako povezavo e v M naredimo naslednje: naj bo P pripadajoča najkrajša pot v G med krajiščema povezave e. Vsako povezavo f na poti P v grafu G podvojimo (skupaj z njeno utežjo). S tem dobimo graf, ki ga označimo z G^*.
8. Graf G^* je Eulerjev graf in Eulerjev obhod v tem grafu nam da iskani optimalni poštarjev obhod.

Primer 310 *Rešimo kitajski poblem poštarja za uteženi graf na sliki 89. Graf ima* 4 *vozlišča lihe stopnje, njihovo množico označimo z* $L = \{a,b,c,d\}$. *Graf K, ki je polni graf na množici vozlišč L, vidimo levo na sliki 90. Vsa možna prirejanja v grafu K so razvidna iz prvega stolpca spodnje tabele (posamezna prirejanja so ločena s horizontalnimi črtami). V drugem stolpcu iste tabele so zapisane dolžine poti med vozliščema povezav iz prirejanja, zadnji stolpec tabele pa za posamezno prirejanje prikazuje skupno težo povezav iz prirejanja.*

par vozlišč	*dolžina poti*	*vsota dolžin poti*
a, b	5	
c, d	7	12
a, d	6	
b, c	1	7
a, c	4	
b, d	8	12

Iz tabele je razvidno, da ima med vsemi prirejanji najmanjšo težo prirejanje s povezavama ad in bc, zato grafu G dodamo povezave, ki ležijo na (neki) najkrajši poti (glede na vsoto uteži) med vozliščema a in d, ter vozliščema b in c. Eulerjev graf G^**, ki ga pri tem dobimo, vidimo desno na sliki 90, kjer so dodane povezave označene črtkano. Eulerjev obhod tega grafa optimalni poštarjev obhod, čigar skupna teža znaša toliko kot je vsota uteži v starem grafu ter uteži na dodanih povezavah, torej* $35 + 3 + 3 + 1 = 42$.



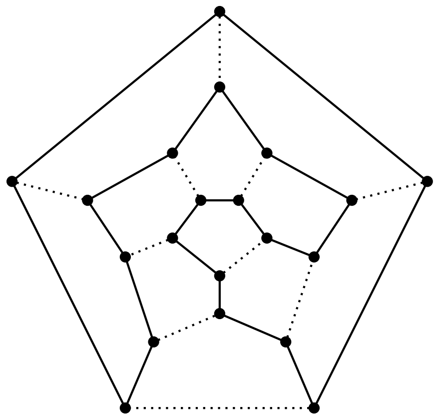
Slika 90: Konstrukcija Eulerjevega grafa iz uteženega grafa.

5.10 HAMILTONOVI GRAFI

Oglejmo si definicijo Hamiltonovega [3] grafa.

> Graf G je **Hamiltonov**, če v njem obstaja cikel, ki vsebuje vsako vozlišče grafa (takemu ciklu rečemo **Hamiltonov cikel**). **Hamiltonova pot** je pot, na kateri so vsa vozlišča grafa. Graf, ki vsebuje Hamiltonovo pot, se imenuje **polhamiltonov**.

3 Sir William Rowan Hamilton je bil irski matematik, ki je leta 1857 je izumil igro, ki je temeljila na dodekaedru (slika 91), narisanem na leseni plošči. Cilj igre je bilo najti Hamiltonov cikel na dodekaedru, katerega oglišča so označena s črkami. Prvih pet črk je bilo že določenih.



Slika 91: Hamiltonova pot v dodekaedru (tvorijo jo polne povezave).

Pri Eulerjevih grafih smo spoznali izrek, ki je natančno karakteriziral, kdaj je poljuben graf Eulerjev in kdaj ne: sodost vseh stopenj vozlišč v grafu je *potreben in zadosten pogoj*[4] za to, da je povezan graf Eulerjev. Potreben in zadosten pogoj, ki bi karakteriziral Hamiltonove grafe, žal ni znan. V naslednjem izreku lahko vidimo potreben pogoj (ki ni zadosten), Orejev in Diracov izrek pa nam predstavita zadostna pogoja (ki nista potrebna) za to, da je graf Hamiltonov.

Izrek 311 *Naj bo S neprazna podmnožica množice vozlišč grafa G. Če je $c(G - S) > |S|$, potem G ni Hamiltonov. Če je $c(G - S) > |S| + 1$, potem G ni niti polhamiltonov.*

Zgornji izrek bi lahko povedali tudi tako: če iz grafa G odstranimo k vozlišč in pri tem graf razpade na več kot k komponent, tedaj graf G ni Hamiltonov. Če je komponent več kot $k + 1$, potem v grafu G ni niti Hamiltonove poti.

Dokaz. Predpostavimo, da v grafu G obstaja Hamiltonov cikel oz. pot. Z odstranitvijo k vozlišč, cikel razpade na največ k delov, pot pa na največ $k + 1$ delov. Vsak od teh delov leži v eni komponenti, na katere razpade graf, in vsaka komponenta vsebuje vsaj en del. Torej graf ne more razpasti na več kot k oz. $k + 1$ delov. ■

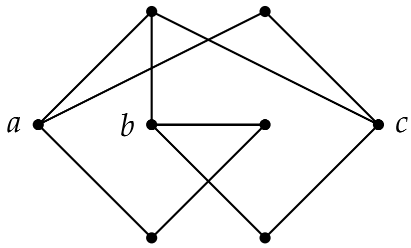
Primer 312 *Graf na sliki 92 ni Hamiltonov. Namreč, ko odstranimo vozlišča a, b, c graf razpade na štiri povezane komponente.*

Za dokaz Orejevega izreka potrebujemo naslednjo trditev.

Trditev 313 *Naj bosta u in v nesosedni vozlišči v enostavnem grafu G z lastnostjo $\deg(u) + \deg(v) \geq |V(G)|$. Potem je graf G', ki ga dobimo iz grafa G z dodano povezavo uv, Hamiltonov natanko tedaj, ko je graf G Hamiltonov.*

---

4 Glej poglavje o izjavnem računu za razlago tega pojma.

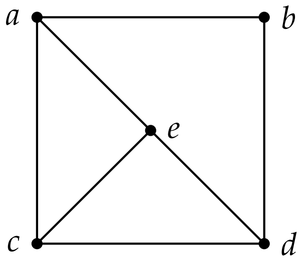


Slika 92: Graf, ki ni Hamiltonov.

Dokaz. Če je graf G Hamiltonov, potem je Hamiltonov tudi graf G', saj je cikel, ki je Hamiltonov v G, Hamiltonov tudi v G'. Premislimo, da velja tudi obratna implikacija. Predpostavimo, da je G' Hamiltonov in naj bo C Hamiltonov cikel v grafu G'. Če $uv \notin E(C)$, potem je C cikel tudi v grafu G. Sedaj predpostavimo, da je $uv \in E(C)$. Tedaj je $C - uv$ Hamiltonova pot v grafu G. Zadostuje dokazati, da na tej poti od u do v obstajata sosedni vozlišči x in y, za kateri velja $uy, xv \in E(G)$, saj je tedaj $u \to x \to v \to y \to u$ Hamiltonov cikel (oznaka $u \to x$ pomeni, da vzamemo del poti $C - uv$ med vozliščema u in x, podobno velja za $y \to u$). Dokažimo torej obstoj takih vozlišč x in y: ker je G enostaven graf, ima vozlišče u toliko sosedov, kot je njegova stopnja. Naj bo $\deg(u) = k$. Če vozlišče v ne bi bilo povezano z nobenim od predhodnikov sosedov vozlišča u na poti $C - uv$, bi to pomenilo, da je njegova stopnja največ $|V(G)| - 1 - k$. Tako bi bilo $\deg(u) + \deg(v) \le k + |V(G)| - 1 - k = |V(G)| - 1$, kar je protislovje s predpostavko, da je $\deg(u) + \deg(v) \ge |V(G)|$. ■

Izrek 314 *(Orejev izrek) Naj ima enostaven graf G vsaj tri vozlišča in naj za poljubni nesosedni vozlišči u in v velja* $\deg(u) + \deg(v) \ge |V(G)|$. *Potem je G Hamiltonov.*

Dokaz. Grafu G na n vozliščih, ki zadošča predpostavkam izreka, postopoma dodajamo povezave, dokler ne dobimo polnega grafa K_n. Tako dobimo zaporedje grafov $G_0 = G, G_1 = G_0 + u_0v_0, G_2 = G_1 + u_1v_1, \ldots, G_k = K_n$. Po trditvi 313 velja, da so vsi grafi G_i Hamiltonovi ali pa noben izmed njih. Ker K_n seveda je Hamiltonov graf, morajo biti vsi grafi iz tega zaporedja, torej tudi graf G, Hamiltonovi. ■



Slika 93: Graf iz primera 315.

Primer 315 *Preverimo pogoje Orejevega izreka za graf na sliki 93. Oglejmo si vsote stopenj vseh parov nesosednih vozlišč:* $\deg(a) + \deg(d) = 6$, $\deg(b) + \deg(e) = 5$, $\deg(b) + \deg(c) = 5$. *Ker je vsaka od teh vsot večja ali enaka* $5 = |V(G)|$, *je graf po Orejevem izreku Hamiltonov.*

Graf na sliki 93 je dovolj majhen in enostaven, da bi lahko utemeljili, da je graf Hamiltonov, že s tem, da bi navedli Hamiltonov cikel *abdeca*, včasih pa Hamiltonovega cikla ni tako enostavno videti.

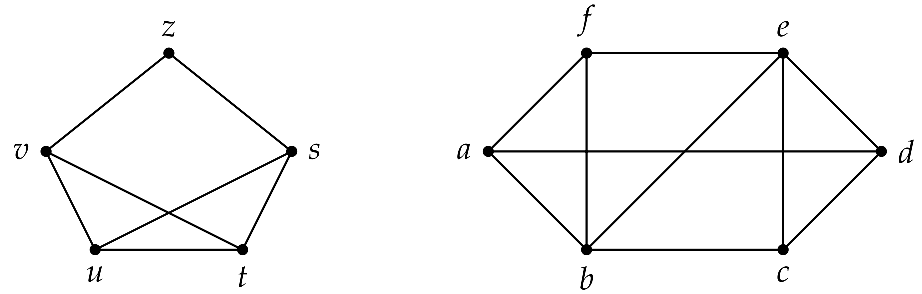
Še enkrat poudarimo, da je pogoj iz Orejevega izreka le zadosten pogoj, ne pa tudi potreben. To pomeni, da kljub temu, da ta pogoj ni izpolnjen (da torej v grafu najdemo nesosedni vozlišči a in b, za kateri velja $\deg(a) + \deg(b) < |V(G)|$), to še ne pomeni, da graf ni Hamiltonov. Npr. graf C_5 je očitno Hamiltonov, čeprav pogoj iz Orejevega izreka ni izpolnjen (vsota stopenj poljubnih nesosednih vozlišč je enaka 4, kar je manj kot je število vozlišč grafa).

Diracov izrek je posledica Orejevega izreka.

Izrek 316 *(Diracov izrek) Enostaven graf na n vozliščih* ($n \geq 3$) *je Hamiltonov, če je stopnja vsakega vozlišča vsaj* $\frac{n}{2}$.

Dokaz. Predpostavimo, da v enostavnem grafu z n vozlišči, kjer je $n \geq 3$, velja, da je stopnja vsakega vozlišča vsaj $\frac{n}{2}$. Potem za poljubni nesosedni vozlišči u in v velja $\deg(u) + \deg(v) \geq |V(G)|$, zato po Orejevem izreku sledi, da je graf Hamiltonov. ∎

Primer 317 *Preverimo pogoj Diracovega izreka za grafa na sliki 94. Za graf levo pogoj ni izpolnjen. Velja namreč* $\deg(z) = 2$, *kar ni vsaj* $2.5 = \frac{n}{2}$. *Samo na osnovi te opazke ne bi mogli trditi niti da je graf Hamiltonov, niti da ni Hamiltonov. Seveda pa lahko v grafu neposredno najdemo Hamiltonov cikel: zstuvz. Vozlišča grafa na desni imajo stopnjo* 3 *ali* 4, *kar je enako vsaj polovici števila vozlišč, ki je enako* 3. *Zato je graf Hamiltonov po Diracovem izreku (seveda tudi v tem primeru to takoj vidimo, saj je* $fedcbaf$ *Hamiltonov cikel).*



Slika 94: Grafa iz primera 317.

5.11 RAVNINSKI GRAFI

Graf G je **ravninski** (ali **planarni**), če ga lahko v ravnini narišemo tako, da se nobeni dve povezavi ne sekata (skupno vozlišče dveh sosednih povezav se ne smatra kot presečišče teh povezav). Vsako tako risbo poimenujemo **ravninska risba** grafa G.

Primer ravninskega grafa je polni graf K_4. Na sliki 69 vidimo tri ravninske risbe tega grafa, povezavi se sekata le na prvi risbi.

Vsaka ravninska risba ravninskega grafa G razdeli ravnino na območja, imenovana **lica**. Natanko eno od teh lic je neomejeno in se imenuje **neskončno lice** ali **zunanje lice**. **Rob lica** je množica vozlišč in povezav, ki omejujejo lice. Če je f poljubno lice, je **stopnja lica** f število povezav, ki jih prehodimo, da se sprehodimo po robu lica. Stopnjo lica f označimo z $\deg(f)$. Če je stopnja vsakega lica enaka r, potem je ravninska risba grafa G **po licih r-regularna**.

Primer 318 *Prvi graf na sliki 95 je* 3*-regularna ravninska risba* 3*-cikla, saj je stopnja obeh lic enaka* 3*, lice L_2 je neskončno lice. Vsako drevo ima le eno (neskončno) lice. Opazimo, da sta predzadnji in zadnji graf na sliki 95 izomorfna, a sta njuni ravninski risbi različni: stopnje lic prvega od obeh grafov so (po vrsti glede na oznake L_1, L_2, L_3)* $3, 3, 5$, *drugega pa* $4, 3, 4$.

Za vsakega od grafov na sliki 95 poleg števila lic, ki ga označimo s f, poiščimo še število vozlišč n, število povezav m in izračunajmo vrednost izraza $n - m + f$.

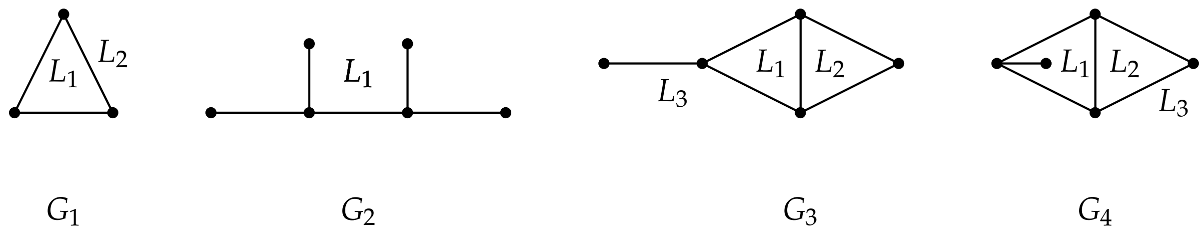
graf	n	m	f	$n-m+f$
G_1	3	3	2	2
G_2	6	5	1	2
G_3	5	6	3	2
G_4	5	6	3	2

Izkaže se, da je vrednost $n - m + f$ vselej 2*, kar ni naključje, kot bomo videli v naslednjem izreku, enakost $n - m + f =$ 2 pa se imenuje Eulerjeva formula.*

Izrek 319 ***(Eulerjeva formula)*** *Naj bo G povezan ravninski graf, n, m in f pa število vozlišč, število povezav oz. število lic ravninske risbe grafa G. Potem je*

$$n - m + f = 2.$$

Dokaz. Trditev bomo dokazali s pomočjo matematične indukcije na število povezav m. Za bazo indukcije vzamem primer, ko je $m = 0$. To pomeni, da je $G = K_1$. Za ta graf velja $n = 1, m = 0, f = 1$, zato je $n - m + f = 2$. V indukcijskem



Slika 95: Lica grafa.

koraku ob predpostavki, da trditev velja za vse povezane ravninske grafe z manj kot m povezavami (kjer je $m \geq 1$), dokazujemo, da trditev velja tudi za poljuben povezan ravninski graf z m povezavami. Naj bo G povezan ravninski graf z m povezavami, n vozlišči in f lici. Ločimo dva primera, odvisna od tega ali je G drevo ali ne.

1. Predpostavimo, da je G drevo. To pomeni, da je $m = n - 1$. Ker drevo ne vsebuje ciklov, ima le eno lice. Tako dobimo $n - m + f = n - (n-1) + 1 = 2$. Če je G drevo, je torej trditev dokazana.

2. Sedaj predpostavimo, da G ni drevo. Vemo že, da je G povezan graf. Ker G ni drevo, mora torej vsebovati cikel C. Naj bo $e \in E(C)$. Iz grafa G odstranimo povezavo e, da dobimo graf na manj kot m povezavah (da bomo lahko uporabili indukcijsko predpostavko). Ker povezava e leži na ciklu, zagotovo ni most, zato je graf $G - e$ še vedno povezan. Seveda je tudi še vedno ravninski, ima n vozlišč, $m - 1$ povezav in $f - 1$ lic (slednje drži, saj odtranitev povezave na ciklu ravninske risbe ravninskega grafa pomeni, da se dve lici zdužita v eno). Tako za graf $G - e$ po indukcijski predpostavki velja $n - (m-1) + (f-1) = 2$. Če dobljeno formulo poenostavimo, dobimo $n - m + f = 2$, kar pomeni, da za G drži Eulerjeva formula. ■

Eulerjeva formula pove, da imajo vse ravninske risbe ravninskega grafa enako število lic, tj. $f = 2 - n + m$, ali z drugimi besedami, število lic ravninskega grafa je neodvisno od njegove ravninske risbe.

Eulerjevo formulo smo dokazali za povezane grafe, a jo je mogoče posplošiti na grafe, ki niso povezani (dokaz izpustimo).

Posledica 320 *Če je G ravninski graf z n vozlišči, m povezavami, f lici in $c(G)$ povezanimi komponentami, potem velja*

$$n - m + f = 1 + c(G).$$

Da je dani graf ravninski, je v primeru manjših grafov enostavno utemeljiti, saj je le treba najti njegovo ravninsko risbo. Težje pa je dokazati, da graf ni ravninski. Večinoma je namreč nemogoče pregledati vse možne risbe grafa in preveriti, da nobena ni ravninska. V nadaljevanju bomo izpeljali uporabno posledico Eulerjeve formule, ki nam lahko pomaga pri utemeljevanju, da graf ni ravninski.

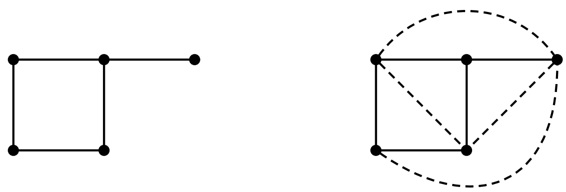
Oglejmo si levi graf na sliki 96. Opazimo, da je ravninski. Sedaj mu postopoma dodajajmo manjkajoče povezave (med različnima vozliščema) vse dokler se lastnost ravninskosti ohrani. Tako dobimo npr. graf na desni (prvotnemu grafu so bile dodane črtkane povezave). Za ta graf velja: če mu dodamo še katerokoli povezavo med različnima vozliščema, graf več ni ravninski. Takemu grafu rečemo *maksimalni ravninski graf*. Oglejmo si formalno definicijo.

Maksimalni ravninski graf je enostaven graf, ki ni vpeti podgraf kakega drugega ravninskega grafa.

Če si ogledamo maksimalni ravninski grafa na sliki 96, lahko opazimo, da so robovi vsakega njegova lica trikotniki (to velja tudi za zunanje lice). Takemu grafu rečemo tudi *triangulacija*.

Enostaven ravninski graf imenujemo **triangulacija**, če obstaja taka njegova ravninska risba, da je vsako njegovo lice trikotnik.

Videli bomo, da je ravninski graf maksimalni ravninski graf natanko tedaj, ko je triangulacija. Še več, tak graf ima natanko določeno število povezav.



Slika 96: Maksimalen ravninski graf oz. triangulacija (desno).

Izrek 321 *Za enostaven ravninski graf G na n vozliščih (kjer je $n \geq 3$) so naslednje trditve ekvivalentne:*

(i) *G je maksimalni ravninski graf,*

(ii) *G je triangulacija,*

(iii) *G ima $3n - 6$ povezav.*

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. To implikacijo utemeljimo s kontrapozicijo. Če graf G, ki zadošča predpostavkam izreka, ni triangulacija, vsebuje lice, na katerem so več kot tri povezave. Tako je mogoče povezati dve vozlišči iz roba tega lica brez da bi se povezave sekale. Zato G ni maksimalen.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Tudi to implikacijo utemeljimo s kontrapozicijo. Če ravninski graf G na vsaj treh vozliščih ni maksimalni, obstaja v G tako lice, da lahko dodamo povezavo med nesosedni vozlišči iz njegovega roba in bo graf še vedno ravninski. To je možno le, ko rob tega lica vsebuje več kot tri povezave. Torej G ni triangulacija.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Naj bo graf G triangulacija. Naj S predstavlja število, ki ga dobimo tako, da za vsako lice preštejemo število povezav na njegovem robu, nato pa vsa tako dobljena števila seštejemo. Ker je G triangulacija, vsak rob vsebuje natanko tri povezave, zato je $S = 3f$, kjer je f število lic v G. Po drugi strani pa opazimo, da vsaka povezava leži v natanko dveh licih, zato je v S vsaka povezava šteta dvakrat, torej $S = 2m$. Tako je $2m = 3f$ oz. $f = \frac{2m}{3}$. Ker je G triangulacija, je seveda ravninski graf, zato zanj velja Eulerjeva formula. Če vanjo namesto f vstavimo $\frac{2m}{3}$, izpeljemo, da je $m = 3n - 6$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Če je G enostaven ravninski graf na vsaj treh vozliščih in velja $m = 3n - 6$, potem s tem, ko iz te enačbe izrazimo n in ga vstavimo v Eulerjevo formulo, izpeljemo enakost $2m = 3f$. Ta lahko drži le, če je vsako lice trikotnik.

∎

Posledica 322 *Če je G povezan ravninski enostavni graf z $n \geq 3$ vozlišči in m povezavami, velja*

$$m \leq 3n - 6.$$

Dokaz. Grafu G, ki zadošča predpostavkam izreka, dodajmo toliko povezav, da bo s tem graf G', ki ga na ta način dobimo, maksimalni ravninski graf z m' povezavami. Po prejšnjem izreku je $m' = 3n - 6$. Glede na konstrukcijo grafa G' je očitno $m \leq m'$, torej je $m \leq 3n - 6$. ∎

Oglejmo si, kako lahko zgornji rezultat uporabimo za utemeljitev, da graf ni ravninski. To bomo naredili na primeru grafa K_5.

Trditev 323 *Graf K_5 ni ravninski.*

Dokaz. Če bi K_5 bil ravninski, bi po posledici 322 lahko imel največ $3n - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9$ povezav. Ker jih ima 10, torej ni ravninski. ∎

Da graf $K_{3,3}$ ni ravninski, bomo dokazali s pomočjo naslednje leme.

Lema 324 *Naj bo G ravninski graf brez trikotnikov na $n \geq 3$ vozliščih in m povezavah. Potem je $m \leq 2n - 4$.*

Dokaz. Ravninski risbi grafa G postopoma dodajajmo povezave med nesosednimi vozlišči vse dokler je še graf ravninski in brez trikotnikov. Maksimalni graf s tema lastnostima označimo z G'. Tako za število povezav m' grafa G' velja $m' \geq m$. Naj S predstavlja število, ki ga dobimo tako, da za vsako lice preštejemo število povezav na njegovem robu, nato pa vsa tako dobljena števila seštejemo. Kot smo že ugotovili v dokazu izreka 321, je $S = 2m'$. Po drugi strani pa mora biti število S vsaj $4f$, saj ima graf G' vsaj štiri povezave na robu vsakega lica. Tako velja zveza $2m' \geq 4f$ oz. $f \leq \frac{m'}{2}$. Ker je G' ravninski graf, zanj velja Eulerjeva formula $n - m' + f = 2$. Tako lahko izpeljemo oceno $2 = n - m' + f \leq n - m' + \frac{m'}{2} = n - \frac{m'}{2}$, od koder sledi $m' \leq 2n - 4$. Ker je $m' \geq m$, pa velja tudi $m \leq 2n - 4$. ■

Trditev 325 *Graf $K_{3,3}$ ni ravninski.*

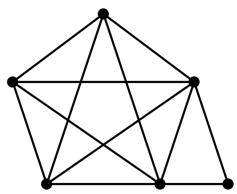
Dokaz. Spomnimo se, da je graf $K_{3,3}$ dvodelen in kot tak ne more vsebovati lihih ciklov, zato pa tudi ne trikotnikov. Če bi $K_{3,3}$ bil ravninski, bi po posledici 324 lahko imel največ $2n - 4 = 2 \cdot 6 - 4 = 8$ povezav. Ker jih ima 9, torej ni ravninski. ■

Da grafa K_5 in $K_{3,3}$ nista ravninska, lahko premislimo tudi neposredno, brez uporabe zgoraj izpeljanih lastnosti (glej nalogi 332 in 333). Hitro lahko vidimo tudi, da graf G na sliki 97 ni ravninski. Če bi G bil ravninski, bi lahko poiskali njegovo ravninsko risbo. Če bi v tej risbi odstranili vozlišče v, bi tako dobili ravninsko risbo grafa K_5, za kar pa vemo, da ne obstaja. Velja v splošnem: vsak graf, ki vsebuje K_5 ali $K_{3,3}$ kot podgraf, ni ravninski graf.

Spomnimo se, da je subdivizija grafa G graf G', ki ga dobimo tako, da lahko poljubno povezavo grafa G nadomestimo s potjo poljubne dolžine. Hitro lahko premislimo, da je subdivizija G' grafa G ravninski graf natanko tedaj, ko je G ravninski graf. To pomeni, da subdivizija grafa, ki ni ravninski, prav tako ni ravninski graf. Ker grafa K_5 in $K_{3,3}$ nista ravninska, ni ravninska tudi nobena njuna subdivizija, prav tako pa torej tudi ne graf, ki kot podgraf vsebuje subdivizijo katerega od teh grafov. Tole opažanje zapišimo v obliki trditve.

Trditev 326 *Če graf G vsebuje podgraf, ki je subdivizija grafa K_5 ali $K_{3,3}$, potem graf G ni ravninski.*

Graf na sliki 97 ni ravninski.



Slika 97: Graf G, ki ni ravninski.

Presenetljiv rezultat, da velja tudi obratna implikacija, je delo Kuratowskega[5], po katerem nosi ime karakterizacija ravninskih grafov. Dokaz te implikacije je netrivialen in presega osnovne pojme teorije grafov, zato ga izpustimo.

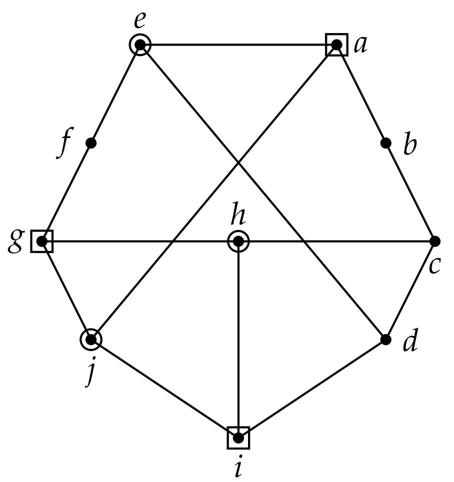
Izrek 327 ***(Izrek Kuratowskega)*** *Graf je ravninski natanko tedaj, ko ne vsebuje podgrafa, ki je subdivizija grafa K_5 ali subdivizija grafa $K_{3,3}$.*

5 Kazimierz Kuratowski (1896-1980) je bil poljski matematik in logik.

Primer 328 *Spomnimo se, da je graf* $K_{3,3}$ *dvodelen, zato lahko množico njegovih vozlišč razdelimo na disjunktno unijo množic* A *in* B *tako, da bo vsaka povezava imela eno krajišče v* A *in drugo v* B*. Tako bo za vsako subdivizijo grafa* $K_{3,3}$ *veljalo, da vsebuje dve množici vozlišč, zaradi enostavnosti ju spet imenujmo* A *in* B*, da bo med vsakim vozliščem iz* A *in vsakim vozliščem iz* B *obstajala natanko ena pot (poljubne dolžine), pri čemer se vsaka povezava v subdiviziji pojavi na natanko eni izmed teh poti, ki si smejo deliti le začetno ali končno vozlišče na poti, ne pa vmesnih (takim potem rečemo, da so* ***notranje disjunktne****). To dejstvo nam lahko pomaga pri iskanju subdivizije* $K_{3,3}$ *v grafu.*

Vozlišča, ki pripadajo množici A *bomo označili tako, da jih obkrožimo s krogcem, vozlišča iz množice* B *pa bomo obkrožili s kvadratkom. Poenostavljeno rečeno tako sedaj iščemo tri krogce in tri kvadratke v vozliščih grafa tako, da bo vsak krogec povezan z neko potjo z vsakim kvadratkom (in obratno), pri čemer so te poti notranje disjunktne. Za graf na sliki 98 tako velja* $A = \{e, j, h\}$ *in* $B = \{a, g, i\}$*. Vozlišče* a *je z vozliščem* e *povezano preko povezave (poti dolžine* 1*)* ae*, z vozliščem* j *je povezano preko povezave* aj*, z vozliščem* h *pa preko poti* $abch$*. Vozlišče* g *je z vozliščem* j *povezano preko povezave* gj*, z vozliščem* h *preko povezave* gh*, z vozliščem* e *pa preko poti* gfe*. Vozlišče* i *je z vozliščem* j *povezano preko povezave* ij*, z vozliščem* h *preko povezave* ih*, z vozliščem* e *pa preko poti* ide*.*

Tako je vsak krogec z neko potjo res povezan z vsakim kvadratkom (seveda zato velja tudi obratno), vsaka povezava in vsako notranje vozlišče na neki poti pa se pojavi le na tej poti. Graf na sliki 98 torej ni ravninski, saj vsebuje subdivizijo grafa $K_{3,3}$*.*



Slika 98: Graf, ki vsebuje subdivizijo $K_{3,3}$.

5.12 PREVERI SVOJE ZNANJE (EULERJEVI, HAMILTONOVI, RAVNINSKI GRAFI)

Vprašanja iz teorije

1. Pojasni razliko med Eulerjevim obhodom in Eulerjevim sprehodom.

2. Kdaj je graf Eulerjev in kdaj poleulerjev?
3. Kako prepoznamo Eulerjev oz. poleulerjev graf?
4. Razloži Fleuryjev algoritem.
5. Kaj je omrežje?
6. Kaj je popolno prirejanje?
7. Kako za dani graf rešimo kitajski problem poštarja?
8. Kako je definiran Hamiltonov oz. polhamiltonov graf?
9. Navedi izrek, s pomočjo katerega lahko dokažemo, da graf ni Hamiltonov.
10. Kaj pravita Orejev oz. Diracov izrek?
11. Kateremu grafu rečemo ravninski graf?
12. Kaj je stopnja lica?
13. Kako lahko izračunamo število lic ob podanem številu vozlišč in povezav ravninskega grafa?
14. Navedi izrek, ki nam pomaga pri utemeljevanju, da nek graf ni ravninski.

Rešene naloge

Naloga 329 *Dan je graf G na sliki 99.*

(a) *Določi* $\delta(G)$ *in* $\Delta(G)$.

(b) *Ali je* C_5 *induciran podgraf grafa G?*

(c) *Ali je graf G Eulerjev?*

(d) *Ali je graf G Hamiltonov?*

(e) *Ali je graf G 2-povezan?*

Rešitev:

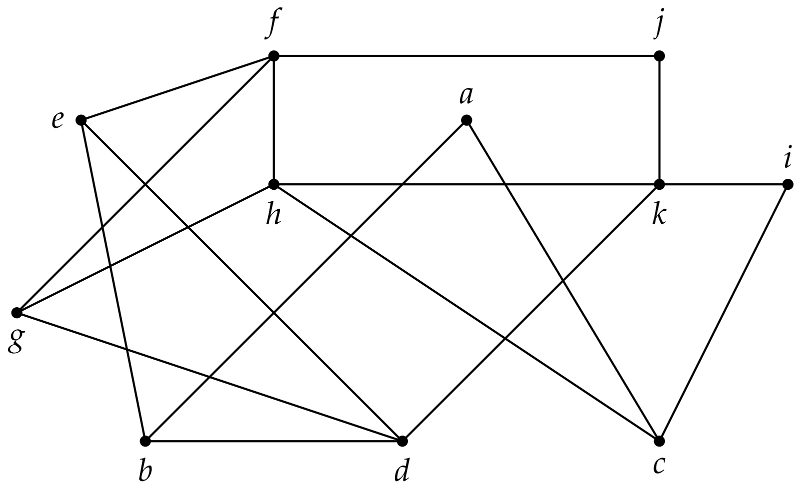
(a) $\delta(G) = 2$ *in* $\Delta(G) = 4$.

(b) *Cikel* $gfjkdg$ *je induciran 5-cikel v grafu G.*

(c) *Graf G ni Eulerjev, saj niso vsa vozlišča sode stopnje (npr.* $\deg(b) = 3$*).*

(*d*) *Pri iskanju Hamiltonovega cikla si lahko pomagamo tudi z dejstvom, da če imamo v grafu vozlišče stopnje* 2*, potem morata biti obe povezavi, ki izhajata iz njega, del Hamiltonovega cikla. Tako je jasno, da v kolikor Hamiltonov cikel v grafu obstaja, bo pot* $bacikjf$ *del tega cikla. Od tu dalje ni več težko videti, da je* $ebacikjfhgde$ *Hamiltonov cikel, zato je graf G Hamiltonov.*

(*e*) *Graf G je* 2*-povezan, saj ob odstranitvi kateregakoli vozlišča graf še vedno ostane povezan.*



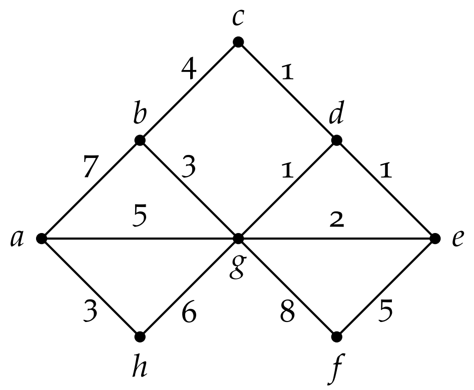
Slika 99: Graf iz naloge 329.

Naloga 330 *Reši Kitajski problem poštarja za uteženi graf na sliki 100.*

Rešitev: *Graf ima* 4 *vozlišča lihe stopnje:* a, b, d, e*, njegova skupna teža (vsota uteži po vseh povezavah) pa je* 46*. Glede na algoritem, ki smo ga spoznali, poiščemo popolno prirejanje v polnem grafu na vozliščih* a, b, d, e *tako, da je skupna teža povezav, ki tvorijo prirejanje, najmanjša. Rezultati za graf iz slike 100 so zbrani v spodnji tabeli, kjer prvi stolpec prikazuje pare vozlišč, ki so krajišča povezav prirejanja (posamezna prirejanja so ločena s horizontalnimi črtami), drugi stolpec prikazuje dolžino poti med vozliščema povezav iz prirejanja, zadnji stolpec pa za posamezno prirejanje pokaže skupno težo povezav iz prirejanja.*

par vozlišč	*dolžina poti*	*vsota dolžin poti*
a, b	7	
d, e	1	8
a, d	6	
b, e	5	11
b, d	4	
a, e	7	11

Iz tabele razberemo, da ima med vsemi prirejanji najmanjšo težo prvo prirejanje, zato grafu G dodamo povezavi ab in de skupaj z njunima utežma, s čemer dobimo graf G^*. Graf G^* je Eulerjev graf in Eulerjev obhod v tem grafu predstavlja optimalen poštarjev obhod, čigar skupna teža znaša $46 + 7 + 1 = 54$.



Slika 100: Uteženi graf iz naloge 330.

Naloga 331 *Naj bo G Hamiltonov graf in G' graf, ki ga iz grafa G skonstruiramo z dodajanjem povezav med vozlišča grafa G. Utemelji, zakaj je G' prav tako Hamiltonov graf.*

Rešitev: *Ker je graf G Hamiltonov, vsebuje Hamiltonov cikel C. Glede na konstrukcjo grafa G' je C Hamiltonov cikel tudi v grafu G'.*

Naloga 332 *Dokaži, da K_5 ni ravninski graf.*

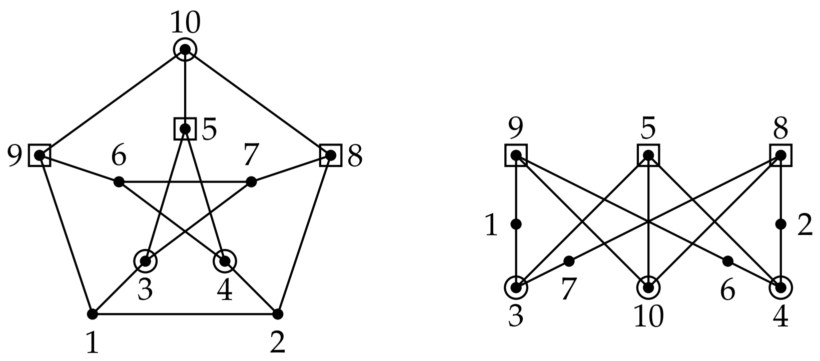
Rešitev: *Grafa K_5 vsebuje* 5*-cikel C, ki ga narišemo v obliki petkotnika. Sedaj je potrebno dodati še pet povezav, ki povezujejo vozlišča, ki so na ciklu C na razdalji* 2*. Toda to je nemogoče narediti brez sekanja povezav, saj lahko hitro opazimo, da je brez sekanja povezav znotraj cikla C mogoče dodati le dve taki povezavi, enako pa velja tudi za zunanjost cikla C.*

Naloga 333 *Dokaži, da $K_{3,3}$ ni ravninski graf.*

Rešitev: *Spomnimo se, da je $K_{3,3}$ dvodelen graf, zato lahko njegovo množico vozlišč razdelimo na množici črnih in belih vozlišč tako, da ima vsaka povezava eno belo in eno črno krajišče. Opazimo, da $K_{3,3}$ vsebuje Hamiltonov cikel, na katerem se bela in črna vozlišča izmenjujejo. Narišimo ga tako, da se nobeni dve izmed povezav ne sekata. Da bi ta cikel dopolnili do grafa $K_{3,3}$, je potrebno dodati še manjkajoče* 3 *povezave, ki povezujejo belo vozlišče s črnim. Pri tem lahko le eno od njih narišemo znotraj Hamiltonovega cikla, saj bi se dve povezavi (ali več) gotovo sekali. A tudi zunaj Hamiltonovega cikla lahko dodamo le eno povezavo, če se hočemo izogniti sekanju povezav. Hamiltonov cikel je tako nemogoče dopolniti z manjkajočimi povezavami do grafa $K_{3,3}$ tako, da bi pri tem dobili ravninski graf.*

Naloga 334 *Pokaži, da Petersenov graf ni ravninski.*

Rešitev: *Petersenov graf lahko vidimo na sliki 71 (grafa na tej sliki sta izomorfna). Da ta graf ni ravninski, bomo utemeljili s pomočjo izreka Kuratowskega, natančneje, v Petersenovem grafu bomo poiskali subdivizijo grafa $K_{3,3}$. Takoj namreč lahko vidimo, da subdivizija grafa K_5 v tem grafu ne more obstajati, saj je v K_5 vsako vozlišče stopnje 4 in zato v vsaki njegovi subdiviziji obstajajo vozlišča stopnje 4. Petersenov graf pa je 3-regularen, zato take subdivizije ne more vsebovati kot podgraf. Vsako vozlišče, ki je na sliki 101 označeno s krogcem, je z neko potjo povezano z vsakim vozliščem, ki je označeno s kvadratkom, vse te poti so pa notranje disjunktne. Zato imamo v Petersenovem grafu subdivizijo grafa $K_{3,3}$, ki je posebej izrisana desno na sliki 101.*



Slika 101: Petersenov graf vsebuje subdivizijo grafa $K_{3,3}$.

Naloga 335 *Ugotovi, ali sta grafa na sliki 102 izomorfna. Preveri, ali je G ravninski graf in ali je graf H Eulerjev ali Hamiltonov.*

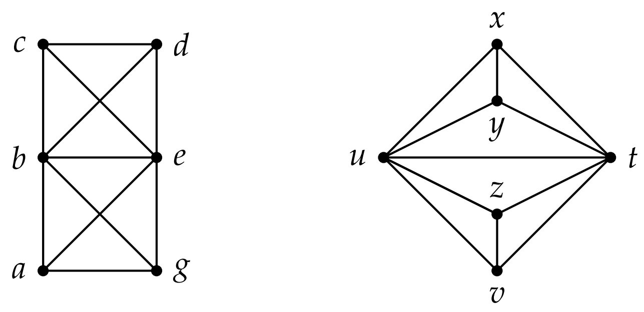
Rešitev: *Z G označimo levi, s H pa desni graf slike 102. Potem je $f : V(G) \to V(H)$, $f(b) = u$, $f(e) = t$, $f(c) = y$, $f(d) = x$, $f(a) = z$, $f(g) = v$ eden od možnih izomorfizmov, zato sta G in H izomorfna. Ker velja slednje, je graf G ravninski (H je namreč njegova ravninska risba), H pa Hamiltonov (v G takoj opazimo Hamiltonov cikel abcdega, zato mora Hamiltonov cikel obstajati tudi v H). Ker so vsa vozlišča grafa H lihe stopnje, H ne more biti Eulerjev, niti poleulerjev.*

Naloga 336 *Za katere vrednosti n je hiperkocka Q_n Eulerjev graf?*

Rešitev: *Hiperkocka Q_n je n-regularen graf, tj. vsako vozlišče je stopnje n. Zato je poleg Q_0 Eulerjeva vsaka hiperkocka Q_n, kjer je n sodo število.*

Naloga 337 *Graf G je podan z naslednjo incidenčno matriko:*

$$I(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$



Slika 102: Grafa iz naloge 335.

(a) *Ali je graf G ravninski? Koliko lic ima v tem primeru poljubna ravninska risba grafa G?*

(b) *Ali je G Hamiltonov oz. polhamiltonov graf?*

(c) *Ali je graf G Eulerjev oz. poleulerjev?*

Rešitev:

(a) *Graf G se da narisati tako, da se nobeni dve povezavi ne sekata, zato je ravninski (bralec naj sam poišče tako risbo) in ima* 3 *lica.*

(b) *Graf G ni Hamiltonov, saj vsebuje vozlišče stopnje ena. Je pa polhamiltonov, saj lahko najdemo pot, ki vsebuje vsa vozlišča grafa.*

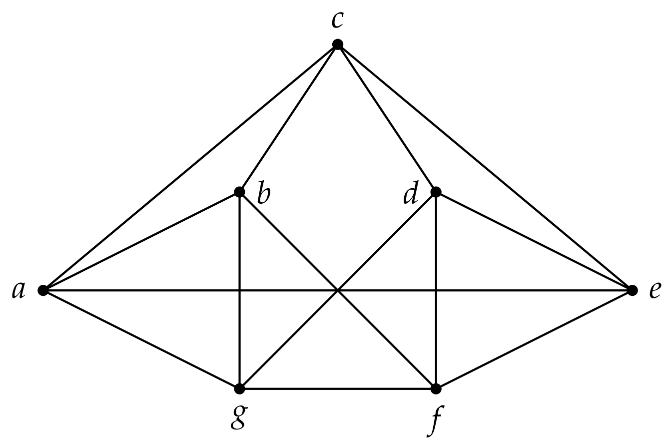
(c) *Graf G ni niti Eulerjev niti poleulerjev, saj vsebuje* 4 *liha vozlišča.*

Naloga 338 *Za graf na sliki 103 ugotovi, ali je Hamiltonov, Eulerjev (v tem primeru poišči tudi Eulerjev obhod) in ali je ravninski.*

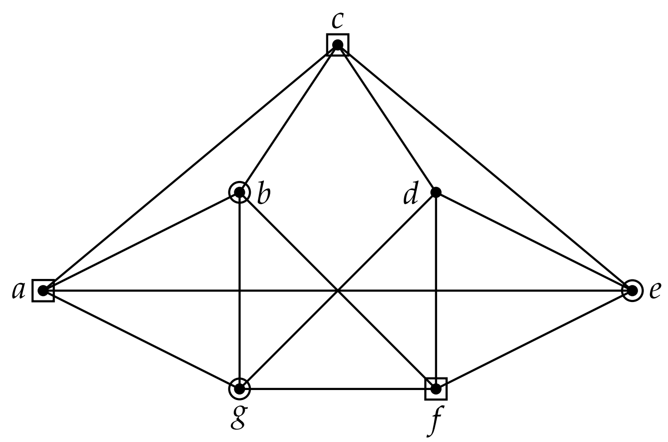
Rešitev: *Graf na sliki 103 je Hamiltonov, saj je $abcdefga$ Hamiltonov cikel. Graf je Eulerjev, saj so vsa vozlišča sode stopnje (je celo 4-regularen), primer Eulerjevega obhoda je $acedcbagfbgdfea$. Graf ni ravninski, saj premore subdivizijo grafa $K_{3,3}$, katere osnovna vozlišča so prikazana z dogovorjenimi oznakami (krogci in kvadratki) na sliki 104.*

Naloga 339 *Za graf G na sliki 105 zapiši zaporedje stopenj in ugotovi, ali je Hamiltonov, Eulerjev in ali je ravninski. Ali je G izomorfen grafu H (na isti sliki)?*

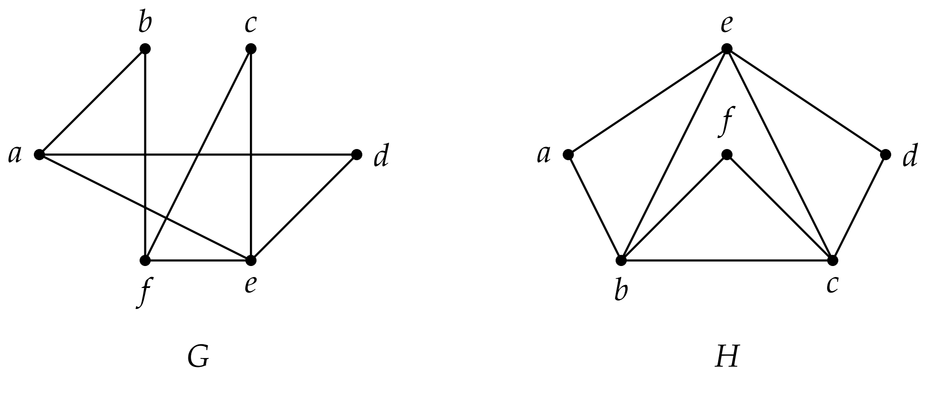
Rešitev: *Graf G ima zaporedje stopenj $2, 2, 2, 3, 3, 4$. Graf G je Hamiltonov s Hamiltonovim ciklom $cedabfc$, ni pa Eulerjev, saj vsebuje vozlišča lihe stopnje (ker sta taki vozlišči natanko dve, je poleulerjev). Graf G je ravninski, primer njegove ravninske risbe vidimo na sliki 106. Grafa G in H nista izomorfna, saj se ne ujemata v številu povezav.*



Slika 103: Graf iz naloge 338.



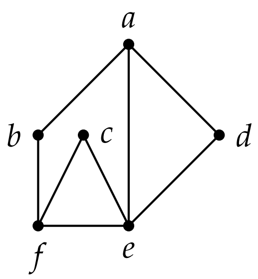
Slika 104: Rešitev naloge 338.



Slika 105: Grafa iz naloge 339.

Naloga 340 *Naj bo G levi graf na sliki 107, H pa desni graf na isti sliki.*

(*a*) *Ali je graf G ravninski?*



Slika 106: Ravninska risba grafa G iz naloge 339.

(b) *Koliko lic ima graf H?*

(c) *Ali sta grafa G in H Eulerjeva oz. poleulerjeva?*

(d) *Ali sta grafa G in H Hamiltonova?*

(e) *Ali sta grafa G in H izomorfna?*

Rešitev:

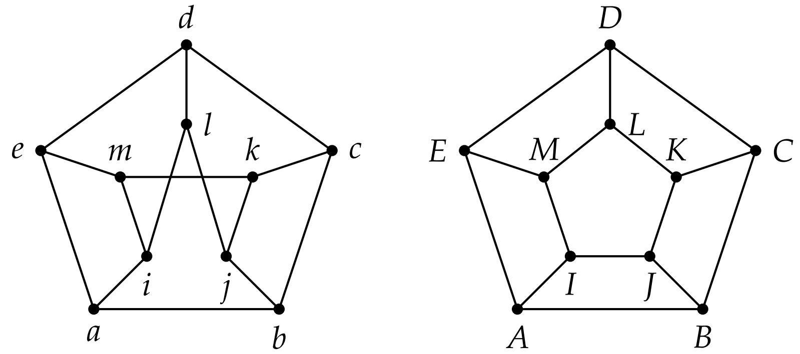
(a) *Graf G ni ravninski. V njem je mogoče najti subdivizijo grafa* $K_{3,3}$ *(s krogci bi označili vozlišča* a, d, m*, s kvadratki pa* b, e, i*).*

(b) *Graf H je ravninski in ima 7 lic.*

(c) *Oba grafa sta kubična, zato ne moreta biti Eulerjeva, niti poleulerjeva.*

(d) *Oba grafa sta Hamiltonova. Hamiltonov cikel v grafu G je* $ailjkmedcba$*, Hamiltonov cikel v grafu H pa* $AIJKLMEDCBA$*.*

(e) *Grafa G in H nista izomorfna, saj je H ravninski, G pa ne.*



Slika 107: Grafa iz naloge 340.

STVARNO KAZALO

LITERATURA

[1] V. Batagelj, *Diskretne strukture - logika*, samozaložba, Ljubljana- 1998.

[2] J. L. Gersting, *Mathematical structures for computer science*, W. H. Freeman & Co. New York, New York, 2006.

[3] J. Grasselli, *Linearna algebra. Linearno programiranje*, 2. natis, DMFA Slovenije, 1990.

[4] C. Stein, R. Drysdale, K. Bogart, *Discrete Mathematics for Computer Scientists*, Addison-Wesley Publishing Company, USA, 2010.

[5] R. Škrekovski, *Diskretne strukture 1 - zapiski predavanj*, Ljubljana: samozaložba, 2010.

[6] R. Škrekovski, *Diskretne strukture 2 - zapiski predavanj*, Ljubljana: samozaložba, 2010.

[7] S. Klavžar, P. Ž. Pleteršek, *Izbrana poglavja uporabne matematike, (Knjižna zbirka Učbeniki, 3)*, Maribor: Pedagoška fakulteta, 2002.

[8] R. J. Wilson, J. J. Watkins, *Uvod v teorijo grafov*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 1997.

Učbenik je namenjen študentom visokošolskega študija računalništva in informatike. Predstavlja uvod v izbrana poglavja iz matematike, ki so potrebna za razumevanje in reševanje problemov, ki se pojavljajo v računalništvu. Poleg izjavnega računa, relacij in teorije grafov, ki sodijo v področje diskretne matematike, učbenik zajema tudi poglavji o geometrijskih vektorjih in matrikah. Poleg teoretične obravnave snovi učbenik vsebuje veliko zgledov za lažje razumevanje, kakor tudi naloge s postopki in rešitvami.