Univerza v Mariboru

Fakulteta za energetiko

Zbirka nalog iz **Matematičnih metod II** z rešitvami

Avtorica:
mag. Maja Žulj

2017

Univerzitetna založba
Univerze v Mariboru

Univerzitetna založba
Univerze v Mariboru

Univerzitetna založba
Univerze v Mariboru

Zbirka nalog iz

Matematičnih metod II

z rešitvami

Avtorica:
mag. Maja Žulj

Oktober 2017

Naslov: Zbirka nalog iz Matematičnih metod II z rešitvami
Avtorica: asist. mag. Maja Žulj (Univerza v Mariboru, Fakulteta za energetiko)
Strokovna recenzija: red. prof. ddr. Janez Usenik (Univerza v Mariboru, Fakulteta za energetiko)
Tehnična recenzija: Jan Perša (Univerzitetna založba Unvierze v Mariboru)
doc. dr. Brigita Ferčec (Univerza v Mariboru, Fakulteta za energetiko)
Grafične priloge: Avtorica

Izdajateljica:
Univerza v Mariboru, Fakulteta za energetiko
Hočevarjev trg 1, 8270 Krško, Slovenija
tel. +386 7 620 22 10, tel. +386 7 777 04 00
http://fe.um.si, fe@um.si

Založnik: Univerzitetna založba Univerze v Mariboru
Slomškov trg 15, 2000 Maribor, Slovenija
tel. +386 2 250 42 42, faks +386 2 252 32 45
http://press.um.si, zalozba@um.si

Izdaja: Prva izdaja
Vrsta publikacije: Elektronska publikacija
Dostopno na: http://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/280
Izid: Krško, Oktober 2017

©Univerzitetna založba Univerze v Mariboru Vse pravice pridržane. Brez pisnega dovoljenja založnika je prepovedano reproduciranje, distribuiranje, predelava ali druga uporaba tega dela ali njegovih delov v kakršnemkoli obsegu ali postopku, vključno s fotokopiranjem, tiskanjem ali shranjevanjem v elektronski obliki.

CIP - Katadožni zapis o publikaciji
Univerzitetna knjižnica Maribor
51(076)
ŽULJ, Maja
Zbirka nalog iz Matematičnih metod II z rešitvami / avtorica Maja Žulj. - 1. izd. - El. publikacija. - Maribor : Univerzitetna založba Univerze, 2017
Način dostopa (URL): http://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/280
ISBN 978-961-286-096-7
doi: 10.18690/978-961-286-096-7
COBISS.SI-ID 93164033

ISBN: 978-961-286-096-7
DOI: https://doi.org/10.18690/978-961-286-096-7
Cena: Brezplačen izvod
Odgovorna oseba založnika: Prof. dr. Igor Tičar, rektor Univerze v Mariboru

DOI https://doi.org/10.18690/978-961-286-096-7 ISBN 978-961-286-096-7

©2017 Univerzitetna založba Univerze v Mariboru

Dostopno na: http://press.um.si

Zbirka nalog iz Matematičnih metod II z rešitvami

MAJA ŽULJ

Povzetek Zbirka nalog vsebuje naloge namenjene študentom za utrjevanje snovi pri predmetu Matematične metode II. Naloge sledijo razporeditvi snovi v učbeniku Matematične metode II, zato je pred nalogami vselej navedeno poglavje iz učbenika, na katero se naloge nanašajo (Diferencialne enačbe, Funkcije več spremenljivk, Ravnine in premice v prostoru, Vektorska analiza, Trigonometrične vrste, Verjetnostni račun in Linearno programiranje). Za razumevanje snovi je potrebno poznati vsaj osnove, ki so bile podane pri predmetu Matematične metode I in v istoimenskem učbeniku. Naloge imajo rešitve zapisane na koncu vsakega poglavja. Rešitve prvih nekaj nalog poglavja so podane z vsemi vmesnimi koraki in potrebno teorijo, da lahko tudi bralec, ki se prvič srečuje s podobnimi nalogami, sledi postopku in pride do pravilne rešitve.

Ključne besede: diferencialne enačbe, funkcije več spremenljivk, premice in ravnine, verjetnost, linearno programiranje.

NASLOV AVTORICE: mag. Maja Žulj, asistentka, Univerza v Mariboru, Fakulteta za energetiko, Hočevarjev trg 1, 8270 Krško, Slovenija, e-pošta: maja.zulj@um.si.

DOI https://doi.org/10.18690/978-961-286-096-7 ISBN 978-961-286-096-7
©2017 Univerzitetna založba Univerze v Mariboru
Dostopno na: http://press.um.si

Univerzitetna založba
Univerze v Mariboru

Mathematical methods II - Exercises with solutions

MAJA ŽULJ

Abstract This teaching resource comprises exercises for students who need to gain knowledge of the subject Matematične metode II. The exercise order is the same as in the textbook named Matematične metode II, therefore, before we give exercises we always specify the name of chapter of the textbook mentioned above to which the exercises relate (Differential equations, Functions of several variables, Straight lines and planes in space, Vector analysis, Trigonometric series, Probability theory and Linear programming). In order to understand the subject matter, it is necessary to know the basics that were given in the course of Matematične metode I and in the same named textbook. At the end of each chapter there are solutions to all exercises of the chapter. The solutions of first several exercises are written with all middle steps and needed theory, so, also students who are new to the subject can follow the steps an solve the exercises successfully.

Key words: differential equations, functions of several variables, straight lines and planes, probability, linear programming.

CORRESPONDENCE ADDRESS: Maja Žulj, M.S., Assistant, University of Maribor, Faculty of Energy Technology, Hočevarjev trg 1, 8270 Krško, Slovenia, e-mail: maja.zulj@um.si.

DOI https://doi.org/10.18690/978-961-286-096-7 ISBN 978-961-286-096-7
©2017 University of Maribor Press
Available at: http://press.um.si.

Kazalo

1. Diferencialne enačbe

1. Poiščite rešitve naslednjih diferencialnih enačb:

   (a) $y' = xy^2 + xy$;

   (b) $y'' + y - 2 = 0$ pri pogojih $y(0) = 0$ in $y'(0) = 2$;

   (c) $y'' - 2y' + y - e^x - x^2 - 2x + 4 - 3\sin 5x = 0$.

2. Rešite sistem:
   $\dot{x} = -7x + y$
   $\dot{y} = -2x - 5y$
   pri pogojih $x(0) = 1$ in $y(0) = 0$.

3. Poiščite rešitve naslednjih diferencialnih enačb oz. sistema:

   (a) $xy' - x^2 + x = 1 - 2y$;

   (b) $y'' + 2y' + 2y = 0$, pri pogojih $y(\frac{\pi}{4}) = 2$ in $y'(\frac{\pi}{4}) = -2$;

   (c) $y'' - 2y' + y = x^2 + e^x$;

   (d) $\dot{x} = x + 2y + 2t$
   $\dot{y} = 3x + 2y - 4t$
   pri pogojih $x(0) = \frac{1}{4}$ in $y(0) = 3$.

4. Poiščite rešitve naslednjih diferencialnih enačb:

   (a) $xy' - 2y = x$;

   (b) $y'' - 3y' + 2y = 0$ pri pogojih $y(0) = 1$ in $y'(0) = 0$;

   (c) $y'' - 2y' - 3y - e^{2t} - 3t^2 - 4t + 5 - 5\cos 2t = 0$.

5. Poiščite rešitve naslednjih diferencialnih enačb:

   (a) $xy' - y - xy^2 = 0$, pri pogoju $y(1) = 2$;

(b) $y'' + y = 5\sin x$.

6. Poiščite splošno rešitev naslednjih diferencialnih enačb prve stopnje:

   (a) $y' - xy = x$;

   (b) $y' + 2y = 4e^x + \sin x + \cos x$.

7. Poiščite splošno rešitev homogenih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti:

   (a) $y'' - 4y' + 3y = 0$;

   (b) $y'' - 6y' + 9y = 0$;

   (c) $y'' + y' + y = 0$.

8. Poiščite splošno rešitev nehomogenih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti:

   (a) $y'' + y = e^x$;

   (b) $y'' - 5y' + 6y = (2x^2 - 4x + 1)e^x$;

   (c) $y'' - 4y' + 4y = 7\sin x - \cos x$;

   (d) $y'' - 3y' + 2y = x(e^x + e^{-2x})$.

9. Poiščite splošno rešitev danih diferencialnih enačb z ločljivima spremenljivkama.

   (a) $y' + 2y + 3 = 0$,

   (b) $xy'\ln x - y = 0$,

   (c) $yy' + x = 0$,

   (d) $(1 - x)y' = y^2$,

   (e) $xy^3dx + e^{x^2}dy = 0$.

10. Poiščite partikularne rešitve naslednjih diferencialnih enačb z ločljivima spremenljivkama.

    (a) $y' + 2xy = 0$, $y(0) = 5$,

    (b) $y'\cos y = 1$, $y(0) = 0$,

    (c) $(x\ln x)dy = ydx$, $y(3) = 4$,

    (d) $\sin\varphi dr = 2r\cos\varphi d\varphi$, $r(\frac{\pi}{2}) = 2$.

11. Poiščite splošno oz. partikularno rešitev danih homogenih diferencialnih enačb.

    (a) $xydx = (x^2 + 3y^2)dy$,

    (b) $x(x^2 + y^2)^2(ydx - xdy) + y^6dy = 0$,

    (c) $(x - y)dx + (3x + y)dy = 0$, $x = 3, y = -2$,

    (d) $y + \sqrt{x^2 + y^2} - xy' = 0$, $y(\sqrt{3}) = 1$.

12. Poiščite rešitve danih linearnih diferencialnih enačb.

    (a) $(x^2 + 1)dy = 2x((x^2 + 1)^2 + 3y)dx$,

    (b) $y + y' \cos x - \cos^2 x = 0$,

    (c) $x(x^2 + 1)y' + 2y = (x^2 + 1)^3$,

    (d) $y = (2x + 3)(y' - (2x + 3)^{-\frac{1}{2}})$, $x = -1, y = 0$,

    (e) $y' + 2xy = x^3$, $y(1) = 1$.

13. Poiščite rešitev danih Bernoullijevih diferencialnih enačb.

    (a) $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$,

    (b) $xy' + y + x^2y^2 = 0$.

14. Poiščite rešitev danih diferencialnih enačb drugega reda, če poznate partkularno rešitev y_1.

    (a) $(2x + 1)y'' + (4x - 2)y' - 8y = 0$, $y_1 = e^{-2x}$,

    (b) $4x^2y'' - 8xy' + 9y = 0$, $y_1 = x^{\frac{3}{2}}$,

    (c) $xy'' + 2y' + xy = 0$, $y_1 = \frac{\cos x}{x}$, $y(\frac{\pi}{2}) = -\frac{2}{\pi}, y(\pi) = 0$,

15. Poiščite rešitev naslednjih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti.

    (a) $2y'' - y' - 3y = 0$, $y(0) = 2, y'(0) = \frac{7}{2}$,

    (b) $y'' - 8y' + 16y = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}$,

    (c) $y'' + 2y' + 4y = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$,

    (d) $y'' + 9y = 0$, $y(0) = -1, y(\frac{\pi}{2}) = 2$,

16. Poiščite splošno rešitev naslednjih diferencialnih enačb.

    (a) $y'' + y' = -\cos x$,

(b) $y'' - 6y' + 9y = e^x$,

(c) $y'' + y = x + \frac{1}{\sin x}$,

(d) $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x}$,

(e) $y''' - 4y' = x(1 + e^{2x}) + \sin x$,

(f) $y'' + 2y' + y = 7 + 75 \sin 2x$,

(g) $y''' - y'' + y' - y = 4 \sin x$.

17. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe $y' + 2xy = e^{-x^2}$.

18. Rešite diferencialno enačbo

$$y'' - y' - 6y = 0,$$

ki zadošča danima pogojema $y(0) = 3$ in $y'(0) = -1$.

19. Določite partikularno rešitev diferencialne enačbe $xy' + y - e^x = 0$ skozi točko $(1, 2e)$.

20. Poiščite tisto rešitev homogene diferencialne enačbe $y''' - 6y'' + 9y' = 0$, ki zadošča pogojem $y(0) = 2, y'(0) = 0$ in $y''(0) = -9$

21. Določite splošno rešitev diferencialne enačbe $y'e^{x^2} + 2xye^{x^2} = x \sin x$.

22. Določite splošno rešitev diferencialne enačbe $y' = x^2 + 2x - 2y$.

23. Določite partikularno rešitev diferencialne enačbe $y' + 3x^2 y = xe^{-x^3}$ skozi točko $(0, 3)$.

24. Določite partikularno rešitev diferencialne enačbe $y' + \frac{y}{x} = x^2$ skozi točko $(1, 1)$.

25. Poiščite splošne rešitve naslednjih diferencialnih enačb:

(a) $(1 + x^2)y' - 2xy = x$; poišči tudi partikularno rešitev za začetni pogoj $y(0) = 1$;

(b) $y^{(4)} + 13y'' + 36y = 0$;

(c) $y'' + y' - 6y = (10x + 3)e^{2x} - 52 \sin 2x$.

26. Rešite naslednje sisteme diferencialnih enačb:

(a)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 4x - 3y - 4t^2 + 5t\\ \dot{y} &= 6x - 7y - 6t^2 + 7t + 1,\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x - y\\ \dot{y} &= -x + 2y - 5e^t \sin t,\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + 2y\\ \dot{y} &= x - 5\sin t,\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x + y - 2z - t + 2\\ \dot{y} &= -x + 1\\ \dot{z} &= x + y - z + 1 - t.\end{aligned}$$

1.1 Rešitve

1. (a) Enačbo $y' = xy^2 + xy$ najprej preoblikujemo v standardno obliko, to je $y' - xy = xy^2$, in opazimo, da je to Bernoullijeva enačba za $n = 2$.

   Najprej celotno enačbo delimo z y^n, torej v našem primeru z y^2, in tako dobimo

   $$\frac{y'}{y^2} - \frac{x}{y} = x.$$

   Zdaj vpeljemo novo spremenljivko $u = \frac{1}{y}$, če odvajamo, dobimo še $u' = -\frac{y'}{y^2}$.

Vstavimo v enačbo in dobimo

$$-u' - xu = x \Leftrightarrow u' + xu = -x,$$

kar je NEHLDE [1] Rešimo NEHLDE za u v dveh korakih:
1.korak: Rešimo prirejeno HLDE[2], ki se glasi:

$$\begin{aligned}
z' + xz &= 0 \\
\frac{dz}{dx} &= -xz \qquad \longleftarrow \text{ ločimo spremenljivke} \\
\frac{dz}{z} &= -xdx \qquad \longleftarrow \text{ integriramo obe strani} \\
\int \frac{dz}{z} &= -\int xdx \qquad \longleftarrow \text{ izračunamo integral} \\
\ln z &= -\frac{x^2}{2} + \ln C \qquad \longleftarrow \text{ antilogaritmiramo} \\
z_H &= ce^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \longleftarrow \text{ je rešitev homogenega dela enačbe}
\end{aligned}$$

2.korak Nastavek za partikularno rešitev se glasi

$$u_{PAR} = c(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Določiti moramo funkcijo $c(x)$. Ker je partikularna rešitev tudi rešitev NEHLDE mora zadoščati enačbi, zato jo vstavimo v NEHLDE za u. Seveda moramo izračunati še odvod.

$$\begin{aligned}
u &= c(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \\
u' &= c'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - xc(x)e^{-\frac{x^2}{2}}
\end{aligned}$$

[1] NEHLDE pomeni nehomogena linearna diferencialna enačba.
[2] HLDE pomeni homogena linearna diferencialna enačba.

Ko u in u' vstavimo v NEHLDE, dobimo:

$$\begin{aligned}
c'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - xc(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + xc(x)e^{-\frac{x^2}{2}} &= -x \\
c'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} &= -x \\
\frac{dc(x)}{dx}e^{-\frac{x^2}{2}} &= -x \\
\int dc(x) &= -\int xe^{\frac{x^2}{2}}dx \longrightarrow \text{vpeljemo novo spremenljivko } t = \frac{x^2}{2} \Rightarrow dt = xdx \\
c(x) &= -\int e^t dt \\
c(x) &= -e^{\frac{x^2}{2}}
\end{aligned}$$

Izračunan $c(x)$ vstavimo v nastavek za u_{PAR} in dobimo

$$u_{PAR} = -e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = -1$$

Splošna rešitev NEHLDE za u se torej glasi:

$$u = ce^{-\frac{x^2}{2}} - 1$$

Upoštevamo $u = \frac{1}{y}$ in dobimo $\frac{1}{y} = ce^{-\frac{x^2}{2}} - 1$ oz.

$$y = \frac{1}{ce^{-\frac{x^2}{2}} - 1},$$

kar je splošna rešitev Bernoullijeve DE.

(b) Enačbo najprej preoblikujemo v standardno obliko

$$y'' + y = 2$$

in opazimo, da je enačba $NEHLDE^2$ s KK.
Opomba: $NEHLDE^2$ s KK pomeni nehomogena linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti.
Rešujemo jo torej v dveh korakih:
1.*korak* Rešimo prirejeno HLDE:

$$z'' + z = 0$$

in tako dobimo karakteristično enačbo $\lambda^2 + 1 = 0$, katere rešitvi sta kompleksni števili $\lambda_{1,2} = \pm i$. Rešitev homogenega dela enačbe se torej glasi

$$z_H = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

<u>2.*korak*</u> Partikularno rešitev poiščemo z metodo nedoločenih koeficientov. Nastavek je odvisen od oblike desne strani DE. Desna stran je konstanten polinom t.j. polinom ničte stopnje, nastavek za y_{PAR} bo torej poljuben polinom ničte stopnje oz. poljubna konstanta:

$$y_{PAR} = A.$$

Ko nastavek odvajamo dvakrat in vstavimo v prvotno NEHLDE, dobimo $A = 2$.
Splošna rešitev DE se torej glasi

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2.$$

Upoštevamo še začetne pogoje:

$$\begin{aligned} y(0) = 0 &\Rightarrow C_1 + 2 = 0 \\ y' &= -C_1 \sin x + C_2 \cos x \\ y'(0) = 2 &\Rightarrow C_2 = 2 \Rightarrow C_1 = -2 \end{aligned}$$

Rešitev DE je torej

$$y = -2 \cos x + 2 \sin x + 2.$$

(c) Enačbo najprej preoblikujemo v standardno obliko

$$y'' - 2y' + y = e^x + x^2 + 2x - 4 + 3 \sin 5x.$$

To je NEHLDE s KK. Rešujemo jo v dveh korakih:
<u>1.*korak*</u> Rešimo prirejeno HDE:

$$z'' - 2z' + z = 0$$

in tako dobimo karakteristično enačbo $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, katere rešitvi sta $\lambda_{1,2} = 1$; to je dvojna rešitev (D=0) oz. 1 je 2-kratni koren karakteristične enačbe. Torej rešitev homogenega dela enačbe se glasi

$$z_H = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

<u>2.*korak*</u> Partikularno rešitev poiščemo z metodo nedoločenih koeficientov. Nastavek je odvisen od oblike desne strani DE.
Funkcijo na desni strani razdelimo na tri funkcije:
$f_1 = e^x$, nastavek bo torej $y_{PAR} = x^2 A e^x$, saj je število 1 2-kratni koren karakteristične enačbe.
$f_2 = x^2 + 2x - 4$, nastavek bo poljuben polinom 2. stopnje, torej $y_{PAR} = Bx^2 + Cx + D$.
$f_3 = 3\sin 5x$, nastavek bo $y_{PAR} = E\cos 5x + F\sin 5x$.
Nastavek za skupno partikularno rešitev bo torej vsota vseh treh:

$$y_{PAR} = x^2 A e^x + Bx^2 + Cx + D + E\cos 5x + F\sin 5x.$$

To vstavimo v prvotno NEHLDE, izračunati moramo torej še 1. in 2. odvod te funkcije y:
$y' = 2Axe^x + Ax^2e^x + 2Bx + C - 5E\sin 5x + 5F\cos 5x$,
$y'' = 2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x + 2B - 25E\cos 5x - 25F\sin 5x$.
Vstavimo y, y' in y'' v NEHLDE in po enačenju istoležnih koeficientov izračunamo

$$A = \frac{1}{2}, B = 1, C = 6, D = 6, E = \frac{15}{338}, F = -\frac{18}{169}.$$

To pomeni, da je partikularna rešitev enaka

$$y_{PAR} = \frac{1}{2}x^2e^x + x^2 + 6x + 6 + \frac{15}{338}\cos 5x - \frac{18}{169}\sin 5x.$$

Splošna rešitev DE je torej:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + \frac{1}{2}x^2e^x + x^2 + 6x + 6 + \frac{15}{338}\cos 5x - \frac{18}{169}\sin 5x.$$

2. Prvo enačbo odvajamo in dobimo:

$$\ddot{x} = -7\dot{x} + \dot{y},$$

v katero vstavimo izraza za $\dot{y}$ in y in dobimo

$$\ddot{x} = -7\dot{x} - 2x - 5y = -7\dot{x} - 2x - 5(\dot{x} + 7x) = -12\dot{x} - 37x.$$

Dobimo $HLDE^2$ s KK:

$$\ddot{x} + 12\dot{x} + 37x = 0,$$

ki ji pripada karakteristična enačba (KE):

$$\lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0.$$

Rešitvi te enačbe sta

$$\lambda_{1,2} = -6 \pm i,$$

kar pomeni, da je splošna rešitev HLDE za x:

$$x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

Iz prve DE sistema, kjer smo izrazili $y = \dot{x} + 7x$ izračunamo še y:

$$\begin{aligned} y &= 6e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-6t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) + 7e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) \\ &= e^{-6t}((C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t), \end{aligned}$$

kar je splošna rešitev za y.

Ko upoštevamo še začetna pogoja, dobimo sistem dveh enačb

$$\begin{aligned} x(0) &= C_1 = 1 \\ y(0) &= C_1 + C_2 = 0, \end{aligned}$$

iz katerega zlahka izračunamo $C_1 = 1$ in $C_2 = -1$.
Partikularna rešitev se torej glasi:

$$x = e^{-6t}(\cos t - \sin t),$$

$$y = -2e^{-6t}\sin t$$

3. (a) Enačbo $xy' - x^2 + x = 1 - 2y$ najprej preoblikujemo v standardno obliko,

to je: $y' + \frac{2}{x}y = x - 1 + \frac{1}{x}$ in opazimo, da je $NEHLDE^1$

Rešimo najprej prirejeni homogeni del enačbe, torej DE $y' + \frac{2}{x}y = 0$ (DE z ločljivima spremenljivkama) in dobimo rešitev

$$y_H = \frac{C}{x^2}.$$

Za partikularno rešitev uporabimo metodo variacije konstant, nastavek se glasi $y_P = \frac{C(x)}{x^2}$. Izraz odvajamo in vstavimo v prvotno DE. Tako dobimo DE $C'(x) = x^3 - x^2 + x$, ki jo rešimo in dobimo partikularno rešitev:

$$y_P = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{2}.$$

Splošna rešitev DE se torej glasi:

$$y = \frac{C}{x^2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{2}.$$

(b) Enačba $y'' + 2y' + 2y = 0$ je $HLDE^2$ s KK, ki jo rešujemo z nastavkom $y = e^{\lambda x}$. Ko nastavek odvajamo in vstavimo v DE, dobimo karakteristično enačbo

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0,$$

ki ima rešitvi (korena) $\lambda_1 = -1 + i$ in $\lambda_2 = -1 - i$.

Splošna rešitev je torej oblike:

$$y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Če upoštevamo še začetna pogoja, izračunamo $C_1 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$ in $C_2 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$, torej se partikularna rešitev DE glasi:

$$y = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}e^{-x}(\cos x + \sin x).$$

(c) Enačbi $y'' - 2y' + y = x^2 + e^x$, pripada karakteristična enačba $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, katererešitvi sta $\lambda_{1,2} = 1$. Torej se rešitev homogenega dela enačbe glasi

$$z_H = C_1e^x + C_2xe^x.$$

Partikularno rešitev poiščemo v dveh korakih:

1. korak: $L = x^2$ nam da nastavek: $y = Ax^2 + Bx + C$ in rešitev $y = x^2 + 4x + 6$.
2. korak: $L = e^x$ nam da nastavek: $y = Ax^2e^x$ in rešitev $y = \frac{1}{2}x^2e^x$.
Splošna rešitev se torej glasi:

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + x^2 + 4x + 6 + \frac{1}{2}x^2e^x.$$

(d) Prvo enačbo odvajamo, vstavimo izražene $\dot{y}$ in y in tako dobimo $NEHLDE^2$ s KK:

$$\ddot{x} - 3\dot{x} - 4x = -12t + 2,$$

ki jo rešimo in dobimo $x_H = C_1e^{4t} + C_2e^{-t}$ in $x_P = 3t - \frac{11}{4}$. Splošna rešitev je torej enaka:

$$x = C_1e^{4t} + C_2e^{-t} + 3t - \frac{11}{4}.$$

Iz enačbe, kjer smo izrazili y, izračunamo še

$$y = \frac{3}{2}C_1e^{4t} - C_2e^{-t} - \frac{5}{2}t + \frac{23}{8}$$

Ko upoštevamo še začetna pogoja, dobimo sistem dveh enačb iz katerega zlahka izračunamo $C_1 = \frac{5}{4}$ in $C_2 = \frac{7}{4}$.
Partikularna rešitev se torej glasi:

$$x = \frac{5}{4}e^{4t} + \frac{7}{4}e^{-t} + 3t - \frac{11}{4},$$

$$y = \frac{15}{8}e^{4t} - \frac{7}{4}e^{-t} - \frac{5}{2}t + \frac{23}{8}.$$

4. (a) To je NEHLDE^1. Rešimo homogeni del in dobimo $y_H = Cx^2$. Nastavek za partikularno rešitev $y_P = C(x)x^2$ odvajamo in vstavimo v prvotno enačbo. Dobimo $C(x) = \frac{-1}{x}$. Splošna rešitev je torej $y = Cx^2 - x$.

   (b) To je HLDE^2 s KK. Rešimo z nastavkom $y = e^{\lambda x}$. Splošna rešitev je $y = C_1e^{2x} + C_2e^x$. Upoštevajoč pogoje dobimo rešitev $y = -e^{2x} + 2e^x$.

   (c) Splošna rešitev: $y = C_1e^{-t} + C_2e^{3t} - \frac{1}{3}e^{2t} - t^2 + 1 - \frac{7}{13}\cos 2t - \frac{4}{13}\sin 2t$.

5. (a) Enačbo $xy' - y - xy^2 = 0$ preoblikujemo na $y' - \frac{y}{x} = y^2$, kar je Bernoullijeva DE. Enačbo delimo z y^2 in uvedemo novo spremenljivko $u = \frac{1}{y}$, torej tudi

$u' = \frac{-1}{y^2} y'$ in dobimo

$$u' + \frac{1}{x} u = -1 \quad NEHLDE^1.$$

Homogeni del $u' + \frac{1}{x} u = 0$ nam da rešitev

$$u_H = \frac{C}{x}.$$

Za partikularno rešitev pa nastavek $u_P = \frac{C(x)}{x}$ odvajamo in vstavimo v DE za u. Dobimo $C(x) = -\frac{x^2}{2}$.

Splošna rešitev za u se torej glasi:

$$u = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}.$$

Ker je $u = \frac{1}{y}$, velja torej $y = \frac{2x}{2C - x^2}$.

Upoštevamo še začetni pogoj $y(1) = 2$, od koder sledi $C = 1$ in dobimo še partikularno rešitev

$$y = \frac{2x}{2 - x^2}.$$

(b) $z_H = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.
Nastavek za partikularno rešitev: $y_P = x(A \cos x + B \sin x)$.
Dobimo partikularno rešitev $y_P = -5x \cos x$ ter splošno rešitev

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 5x \cos x.$$

6. (a) $y = -1 + Ce^{\frac{x^2}{2}}$,

   (b) $y = \frac{4}{3} e^x + \frac{1}{5} \cos x + \frac{3}{5} \sin x + Ce^{-2x}$.

7. (a) $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$,

   (b) $y = (C_1 x + C_2) e^{3x}$,

   (c) $y = e^{-\frac{x}{2}} (C_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} x) + C_2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} x))$.

8. (a) $y = \frac{1}{2} e^x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$,

   (b) $y = (x^2 + x + 1) e^x + C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$,

   (c) $y = \sin x + \cos x + (C_1 x + C_2) e^{2x}$,

   (d) $y = (-\frac{1}{2} x^2 - x) e^x + (\frac{1}{12} x + \frac{7}{144}) e^{-2x} + C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

9. (a) $y = Ce^{-2x} - \frac{2}{3}$,

   (b) $y = C \ln x$,

   (c) $y^2 = -x^2 + C$,

   (d) $y = \frac{1}{\ln|C(1-x)|}$,

   (e) $y^{-2} = e^{-x^2} + C$.

10. (a) $y = 5e^{-x^2}$,

    (b) $y = \arcsin x$,

    (c) $y = \frac{4 \ln x}{\ln 3}$,

    (d) $r = 2 \sin^2 \varphi$.

11. (a) $x^2 = 6y^2 \ln |Cy|$,

    (b) $(x^2 + y^2)^3 = 6y^6 \ln \left|\frac{C}{y}\right|$,

    (c) $2(2x + 3y) + (x + y) \ln(x + y) = 0$,

    (d) $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$.

12. (a) $y = (x^2 + 1)^2(C(x^2 + 1) - 1)$,

    (b) $(1 + \sin x)y = (C + x - \cos x) \cos x$,

    (c) $y = \frac{1}{4}(x^2 + 2)(x^2 + 1) + C\frac{x^2+1}{x^2}$,

    (d) $y = \sqrt{2x + 3} \ln(2x + 3)$,

    (e) $y = \frac{x^2-1}{2} + e^{-x^2+1}$.

13. (a) $y = x^4(C + \ln \sqrt{|x|})^2$,

    (b) $y = \frac{1}{x^2+Cx}$.

14. (a) $y = C_1e^{-2x} + C_2(4x^2 + 1)$,

    (b) $y = (C_1 + C_2 \ln x)x^{\frac{3}{2}}$,

    (c) $y = -\frac{\sin x}{x}$.

15. (a) $y(x) = \frac{11}{5}e^{\frac{3x}{2}} - \frac{1}{5}e^{-x}$,

    (b) $y(x) = (-\frac{7}{2}x + 1)e^{4x}$,

    (c) $y(x) = e^{-x}(\cos(\sqrt{3}x) + \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin(\sqrt{3}x))$,

    (d) $y(x) = -\cos 3x - 2 \sin 3x$.

16. (a) $y = C_1 + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x - \sin x)$,
    (b) $y = (C_1 + C_2x)e^{3x} + \frac{e^x}{4}$,
    (c) $y = C_1 \cos x + C - 2\sin x - x\cos x + \sin x \ln|\sin x| + x$,
    (d) $y = (C_1 + C_2x + x\ln x)e^{2x}$,
    (e) $y = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{-2x} + \frac{1}{32}(2x^2 - 3x)e^{2x} + \frac{1}{5}\cos x - \frac{1}{8}x^2$,
    (f) $y = (C_1 + C - 2x)e^{-x} + 7 - 12\cos 2x - 9\sin 2x$,
    (g) $y = C_1e^x + (C_2 + x)\cos x + (C_3 - x)\sin x$.

17. $y_H = Ce^{x^2}$, $y_{PAR} = Ce^{-x^2} + xe^{-x^2}$.

18. $y_H = C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}$, $y_{PAR} = e^{3x} + 2e^{-2x} + C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}$.

19. $y_H = \frac{C}{x}$, $y_{PAR} = \frac{e+e^x}{x}$.

20. $y = C_1 + (C_2 + C_3x)e^{3x}$, $y_{PAR} = 1 + (1 - 3x)e^{3x})$.

21. $y_H = Ce^{-x^2}$, $y = Ce^{-x^2} + (\sin x - x\cos x)e^{-x^2}$.

22. $y_H = Ce^{-2x}$, $y = Ce^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

23. $y_H = Ce^{-x^3}$, $y_{PAR} = 3e^{-x^3} + \frac{x^2}{2}e^{-x^3}$.

24. $y_H = \frac{C}{x}$, $y_{PAR} = \frac{3}{4x} + \frac{x^3}{4}$.

25. (a) $y_s = -\frac{1}{2} + c(1 + x^2)$, $y_{PAR} = 1 + \frac{3}{2}x^2$,
    (b) $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + c_3\cos 3x + c_4\sin 3x$,
    (c) $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{2x} + (x^2 + \frac{1}{5}x)e^{2x} + \cos 2x + 5\sin 2x$.

26. (a) Dobimo NEHLDE s KK

$$\ddot{x} + 3\dot{x} - 10x = -10t^2 + 6t + 2,$$

    katere splošna rešitev je $x = C_1e^{-5t} + C_2e^{2t} + t^2$.
    Izračunamo še $y = 3C_1e^{-5t} + \frac{2}{3}C_2e^{2t} + t$.
    (b) $x(t) = Ae^t + Be^{3t} + e^t(2\cos t - \sin t)$
    $y(t) = Ae^t - Be^{3t} + e^t(3\cos t + \sin t)$.
    (c) $x(t) = Ae^{-t} + 2Be^{2t} - \cos t + 3\sin t$
    $y(t) = -Ae^{-t} + Be^{2t} + 2\cos t - \sin t$.

(d) $$\begin{aligned} x(t) &= Ae^t + B\sin t + C\cos t \\ y(t) &= -Ae^t + B\cos t - C\sin t + t \\ z(t) &= B\sin t + C\cos t + 1. \end{aligned}$$

2. Funkcije več spremenljivk

1. Izračunajte vse prve in druge parcialne odvode funkcije

$$f(x, y, z) = \ln(x + y^2) + z \sin(2x + z) + x^2y^3z^4.$$

2. Izračunajte prve in druge parcialne odvode funkcij

   (a) $z = x^2 \sin y + x^4y^2$,

   (b) $z = \ln(x^2 + y^2)$,

   (c) $z = \sin(2x + 3y) \cos(2x + 3y)$,

   (d) $z = \frac{2x^2y^3}{x^2+y}$.

3. Izračunajte $\frac{dz}{dt}$ za funkcijo $z = x^2 + xy + y^2$, če je $x = t^2$ in $y = t$.

4. Izračunajte $\frac{dz}{dt}$ za funkcijo $z = \frac{y}{x}$, če je $x = e^t$ in $y = 1 - e^{2t}$.

5. Dan je stožec z višino 30 cm in polmerom osnovne ploskve 10 cm. Izračunajte prostornino stožca in s pomočjo diferenciala ocenite, za koliko se prostornina spremeni, če povečamo višino za 3 mm in zmanjšamo polmer za 1 mm. Nato še izračunajte dejansko spremenjeno prostornino in primerjajte oba rezultata.

6. Pri deformaciji valja se polmer r poveča od 2 na $2,05$ dm, višina v pa se zmanjša od 10 na $9,8$ dm. Kakšna je pri tej deformaciji približna sprememba prostornine valja? (Izračunajte s pomočjo totalnega diferenciala.)

7. S totalnim diferencialom izračunajte približno vrednost funkcije $z = \sqrt{xy}$ pri $x = 2,05$ in $y = 2,1$.

8. S totalnim diferencialom izračunajte približno spremembo prostornine votle krogle z zunanjim polmerom 5 m in notranjim 3 m, če se polmera povečata za 2%.

9. S totalnim diferencialom ocenite približno spremembo prostornine cevi z zunanjim premerom $D = 10$ cm, notranjim premerom $d = 6$ cm in dolžino $l = 80$ cm, če premer D povečamo za 2 mm, d zmanjšamo za 4 mm, ter dolžino podaljšamo za 1 cm.

10. Izračunajte lokalne ekstreme funkcije $z(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$.

11. Izračunajte lokalne ekstreme funkcije $z(x, y) = e^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2}$.

12. Določite lokalne ekstreme funkcije

    (a) $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 5)^2$,
    (b) $z = y^3 - 2x^2 + 3xy - 15y - 2x$,
    (c) $z = x^2 + y^2 + xy - 7x - 8y + 2$,
    (d) $z = x^3 + y^2 - 2xy - x + 1$,
    (e) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 12x - 12y + 7$,
    (f) $z(x, y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 6x$,
    (g) $f(x, y) = 2 \ln xy - 4x - 4y + 1$,
    (h) $f(x, y) = e^{x^2+y^2-3xy-y+4x}$,
    (i) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$,
    (j) $f(x, y) = x^2y(4 - x - y)$,
    (k) $f(x, y) = 3x^3 + xy^2 - 9x$,
    (l) $f(x, y) = 2x^2 + x - 13 - 3xy + 8y + y^2$,
    (m) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 10x - 6y + 8$,
    (n) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$,
    (o) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$,
    (p) $f(x, y) = 4x^2 - x + 10 + 2xy - 3y + 2y^2$.

13. Določite lokalne ekstreme funkcije

    (a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$,
    (b) $f(x, y) = x^3 + y^3$,
    (c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^3$,
    (d) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$,

(e) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2(x+y) + 2$,

(f) $f(x,y) = e^x - \ln y - x + y$,

(g) $f(x,y) = 6xy - 2x^2 - 5y^2 + x + y - 3$,

14. Po Taylorjevi formuli razvijte funkcijo $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 4$ v točki $(5,6)$ ter s pomočjo razvoja izračunajte vrednost funkcije v točki $(5.01, 5.98)$.

15. Po Taylorjevi formuli razvijte funkcijo $z = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ okoli točke $(-2,1)$ ter s pomočjo razvoja izračunajte vrednost funkcije v točki $(-1.99, 0.98)$.

16. Razvijte funkcijo $z = x^3 - 2y^3 + 3xy$ v Taylorjevo vrsto okoli točke $(1,2)$ in s pomočjo tega razvoja izračunajte vrednost $z(1.002, 1.997)$.

17. Z uporabo vezanih ekstremov določite stranice pravokotnika, ki ima pri obsegu 10 cm največjo ploščino.

18. Izračunajte vezane ekstreme funkcije:

    (a) $z = x + y$, če je $x^2 + y^2 = 1$,

    (b) $u = x + y + z$, če je $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

19. Poiščite vezani ekstrem funkcije $z = 6 - 4x - 3y$ pri pogoju, da točke (x,y) ležijo na enotski krožnici.

20. Izdelajte škatlo v obliki kvadra tako, da bo vsota dolžine, širine in višine škatle merila 450 cm. Kako je potrebno izbrati dimenzije, da bo škatla imela največjo prostornino?

21. Poiščite ekstreme funkcije $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ pri pogoju $x + y - 2 = 0$.

22. Poiščite ekstreme funkcije $z = x + y$ pri pogoju $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$.

23. Izračunajte ekstreme funkcije $z = x^2 + y^2$ pri pogoju $x + y + 2 = 0$.

24. Poiščite vezani ekstrem funkcije $f(x,y) = 2x(\ln x - 1) + 2y(\ln y - 1)$ pri pogoju, da je $x^2 + y^2 = 18$.

2.1 Rešitve

1. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+y^2} + 2z\cos(2x+z) + 2xy^3z^4$,
$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x+y^2} + 3x^2y^2z^4$,
$\frac{\partial f}{\partial z} = \sin(2x+z) + z\cos(2x+z) + 4x^2y^3z^3$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-1}{(x+y^2)^2} - 4z\sin(2x+z) + 2y^3z^4$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x-2y^2}{(x+y^2)^2} + 6x^2yz^4$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2\cos(2x+z) - z\sin(2x+z) + 12x^2y^3z^2$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -\frac{2y}{(x+y^2)^2} + 6xy^2z^4 = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = 12x^2y^2z^3 = \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = 2\cos(2x+z) - 2z\sin(2x+z) + 8xy^3z^3 = \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}$.

2. (a) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\sin y + 4x^3y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2\cos y + 2x^4y$,
$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\sin y + 12x^2y^2$,
$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = 2x\cos y + 8x^3y$,
$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x^2\sin y + 2x^4$.

(b) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$,
$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$,
$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$,
$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

(c) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2\cos^2(2x+3y) - 2\sin^2(2x+3y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3\cos^2(2x+3y) - 3\sin^2(2x+3y)$,
$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -16\sin(2x+3y)\cos(2x+3y)$,
$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = -24\sin(2x+3y)\cos(2x+3y)$,
$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -36\sin(2x+3y)\cos(2x+3y)$.

(d) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4xy^4}{(x^2+y)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6x^4y^2+4x^2y^3}{(x^2+y)^2}$,
$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{4x^4(-3x^2+y)}{(x^2+y)^3}$,
$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{8xy^3(2x^2+y)}{(x^2+y)^3}$,
$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{4x^2y(3x^4+3x^2y+y^2)}{(x^2+y)^3}$.

3. $\frac{dz}{dt} = 4t^3 + 3t^2 + 2t$.

4. $\frac{dz}{dt} = e^{-t}(-1 - e^{2t})$.

5. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$, $dV = \frac{1}{3}\pi r^2 dv + \frac{2}{3}\pi r v dr = -10\pi$.

   Odg.: Za $10\pi cm^3$ se zmanjša prostornina.

6. $dV = 1,2\pi\ \mathrm{dm}^3$.

7. $z = 2,075$.

8. $dV = 7,84\pi\ \mathrm{m}^3$.

9. $dV = 192\pi\ \mathrm{cm}^3$.

10. Izračunamo parcialne odvode funkcije in jih enačimo z 0, da dobimo stacionarne točke:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{2x} \cdot (x + y^2 + 2y) + e^{2x} = 0 \quad \Rightarrow e^{2x} \cdot (2x + 2y^2 + 4y + 1) = 0$$

Upoštevamo, da $e^{2x} \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ in tako dobimo prvo enačbo: $2x+2y^2+4y+1 = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{2x} \cdot (2y + 2) = 0 \quad \Rightarrow 2y + 2 = 0 \text{ ker } e^{2x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y = -1$$

Vstavimo izračunano vrednost y v prvo enačbo in dobimo še $x = \frac{1}{2}$. Stacionarna točka je torej ena sama, in sicer $E(\frac{1}{2}, -1)$.

Potrebno je izračunati še druge odvode:
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^{2x}(2x + 2y^2 + 4y + 1) + 2e^{2x} = 2e^{2x}(2x + 2y^2 + 4y + 2)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2e^{2x}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2e^{2x}(2y + 2)$

Izračunamo

$$K(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 4e^{4x}(-2y^2 - 4y + 2x - 2),$$

kamor vstavimo stacionarno točko E:
$K(\frac{1}{2}, -1) = 4e^2 > 0$ in zato je v točki $E(\frac{1}{2}, -1)$ ekstrem.

Izračunamo še $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{1}{2}, -1) = 2e > 0$ kar pomeni, da je v točki $E(\frac{1}{2}, -1)$ dosežen lokalni minimum.
Ta minimum znaša $f(\frac{1}{2}, -1) = -\frac{e}{2}$. Torej je

$$T_{\min}\left(\frac{1}{2}, -1, -\frac{e}{2}\right)$$

11. Izračunamo parcialne odvode funkcije in jih enačimo z 0. Tako izračunamo

stacionarne točke:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2} \cdot (-x^2+1) = 0 \quad \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm 1$$

in

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2} \cdot (-2y) = 0 \quad \Rightarrow y = 0$$

Stacionarni točki sta torej $E_1(1,0)$ in $E_2(-1,0)$.

Potrebno je izračunati še
$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2} \cdot (-x^2+1)^2 + e^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2} \cdot (-2x) = e^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2} \cdot (x^4-2x^2+1-2x)$,
$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2} \cdot (4y^2-2)$,
$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2} \cdot (-x^2+1)(-2y)$.

Izračunamo $K(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2$, vstavimo in ugotovimo:
$K(1,0) = 4e^{\frac{4}{3}} > 0$ in zato v točki $E_1(1,0)$ je ekstrem.
$K(-1,0) = -4e^{-\frac{4}{3}} < 0$ in zato v točki $E_2(-1,0)$ ni ekstrema.
Izračunamo še $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,0) = -2e^{\frac{2}{3}} < 0$, kar pomeni, da je v točki $E_1(1,0)$ dosežen lokalni maksimum.
Ta maksimum znaša: $f(1,0) = e^{\frac{2}{3}}$.

12. (a) V točki $T(2,5)$ je lokalni minimum, $z_{min} = 0$.
 (b) V točki $T_1(1,2)$ ni ekstrema, v $T_2(-\frac{41}{16}, -\frac{11}{4})$ je lokalni maksimum, ki znaša približno $33,59$.
 (c) V točki $T(2,3)$ je lokalni minimum, to je $T_{\min}(2,3,-17)$.
 (d) V točki $T(1,1)$ je lokalni minimum, to je $T_{\min}(1,1,0)$.
 (e) V točki $T_1(2,2)$ je lokalni minimum, v $T_2(-2,-2)$ je lokalni maksimum. Dobimo točki na grafu $T_{\min}(2,2,-25)$ in $T_{\max}(-2,-2,39)$
 (f) Točka $T_{\min}(2,-1,-6)$ je lokalni minimum.
 (g) V točki $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ je lokalni maksimum.
 (h) V točki $T(1,2)$ ni ekstrema.
 (i) V točkah $T_1(1,2)$ on $T_2(-1,-2)$ ni ekstrema. V točki $T_3(2,1)$ je lokalni minimum in v točki $T_4(-2,-1)$ lokalni maksimum.
 (j) V $T(2,1)$ ima f lokalni minimum in sicer $z_{min} = 4$.
 (k) V $T_1(0,3), T_2(0,-3)$ je sedlo, v $T_3(1,0)$ je lokalni minimum in sicer $z_{min} = -6$, v $T_4(-1,0)$ je lokalni maksimum, $z_{max} = 6$.

(l) V $T(26,35)$ je sedlo.

(m) V $T_1(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$ je lokalni minimum, $z_{min} = -5,8$, v $T_2(-\sqrt{3},\frac{-\sqrt{3}}{3})$ je lokalni maksimum, $z_{max} = 21,8$, v $T_3(\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3})$ in $T_4(\frac{-\sqrt{3}}{3},-\sqrt{3})$ je sedlo.

(n) V $T(1,0)$ je lokalni minimum $z_{min} = -1$.

(o) V $T_1(2,1)$ je lokalni minimum, $z_{min} = -28$, v $T_2(-2,-1)$ je lokalni maksimum $Z_{max} = 28$, v $T_3(1,2)$, $T_4(-1,-2)$ je sedlo.

(p) V $T(-\frac{1}{14},\frac{11}{14})$ je lokalni minimum $z_{min} = 8.86$.

13. (a) V točki $T(-\frac{1}{3},-\frac{4}{3})$ je minimum $z_{min} = -\frac{7}{3}$.

(b) Točka $T(0,0)$ je stacionarna točka, ampak $K = 0$, zato ne vemo, če je ekstrem.

(c) V točki $T_1(0,0)$ je minimum $z_{min} = 0$, v $T_2(-\frac{2}{3},0)$ je maksimum, $z_{max} = \frac{4}{27}$.

(d) V točki $T_1(1,1)$ je lokalni minimum, $z_{min} = -1$, točka $T_2(0,0)$ je stacionarna točka, ampak v njej ni ekstrema.

(e) V točki $T(1,1)$ je lokalni minimum $z_{min} = 0$.

(f) V točki $T(0,1)$ je lokalni minimum $z_{min} = 2$.

(g) V točki $T(4,\frac{5}{2})$ je lokalni maksimum $z_{max} = \frac{1}{4}$.

14. $z(5+h,6+k) = -102 + 15h^2 - 6hk + k^2 + h^3$, $z(5.01,5.98) = -101,9969$.

15. $z(-2+h,1+k) = 1 - h^2 + 2hk + 3k^2$, $z(-1.99,0.98) = 1,0007$.

16. $z(1+h,2+k) = -9+9h-21k+3h^2+3hk-12k^2+h^3-2k^3$ $z(1.002,1.997) = -9,05$.

17. Naj bo x dolžina in y širina. Iščemo torej največjo vrednost funkcije $f(x,y) = xy$ med točkami (x,y), ki zadoščajo pogoju $2x + 2y = 10$ oz. $x + y = 5$. Preoblikujemo v $x - y - 5 = 0$, torej $g(x,y) = x - y - 5$. Zapišemo funkcijo

$$F(x,y,\lambda) = xy + y(x + y - 5)$$

in poiščemo njene stacionarne točke. Ko odvajamo, dobimo sistem: $y + \lambda = 0$, $x + \lambda = 0$ in $x + y - 5 = 0$, od tod pa točko $(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$.

Odg. Pravokotnik je torej kvadrat s stranico $2,5$.

18. (a) $T_1(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2})$, $z_{min} = -\sqrt{2}$, $T_2(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$, $z_{max} = \sqrt{2}$;

(b) $T_1(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}), z_{min} = -\sqrt{3}, T_2(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}), z_{max} = \sqrt{3}$;

19. $T_1(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}), z_{min} = 1$, $T_2(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}), z_{max} = 11$.

20. Škatla z največjo prostornino je kocka s stranicami $a = b = c = 150$cm.

21. V točki $T(1, 1)$ je maksimum.

22. V točki $T_1(2, 2)$ je maksimum, v $T_2(-2, -2)$ je minimum.

23. V točki $T(-1, -1)$ je minimum.

24. V točki $T(3, 3)$ je maksimum.

3. Ravnine in premice v prostoru

1. Naj bo premica p vzporedna premici p_1 z enačbo $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-5}{6}$ in poteka skozi točko P, ki je presečišče premice p_2: $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{2} = z - 5$ z ravnino Σ, ki je določena s točkami $A(1, -1, 2), B(-1, 1, 2)$ in $C(0, 1, 0)$.

   (a) Zapišite enačbo premice p v vseh treh oblikah.

   (b) Izračunajte razdaljo med premicama p in p_1.

   (c) Izračunajte razdaljo med premico p_1 in premico p_3, ki pravokotno prebada ravnino Σ v točki P.

2. Izračunajte razdaljo med premico p_1: $x = y + 2 = z$ in

   (a) premico p_2, ki je presečišče ravnin $x - y - 1 = 0$ in $x + y - z = 0$;

   (b) ravnino Π z normalo $\vec{n} = (1, -1, 0)$, ki vsebuje točko $A(2, 5, 2)$.

3. Naj bodo podane točke $A(2, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$, $C(3, 0, 1)$ in $D(0, 0, 2)$. Točke A, B in C določajo ravnino Σ, točka D pa leži na premici p, ki pravokotno prebada ravnino Σ. Zapišite enačbo premice p v vseh treh oblikah, izračunajte presečišče premice p z ravnino in oddaljenost točke D od ravnine Σ.

4. Zapišite enačbo premice, ki gre skozi točki $A(-1, 2, 3)$ in $B(2, 6 - 2)$ v

   (a) vektorski obliki,

   (b) parametrični obliki,

   (c) kanonski obliki.

5. Zapišite enačbo premice, ki gre skozi točki $A(1, -1, 2)$ in $B(0, 2, 3)$ v

   (a) vektorski obliki,

   (b) parametrični obliki,

(c) kanonski obliki.

Izračunajte še oddaljenost točke $C(3,2,1)$ od te premice.

6. Določite razdaljo med premicama $\frac{x+2}{3} = \frac{2-y}{2} = z - 3$ in $\frac{x-1}{2} = -y = \frac{z+4}{3}$.

7. Preučite medsebojne lege premic p_1 in p_2. V primeru, da se sekata, poiščite tudi njun presek.

   (a) $p_1 : -\frac{x}{2} = y - 1 = \frac{z-5}{3}$, $p_2 : x = 2 - 2t, y = t, z = 2 + 3t$;

   (b) $p_1 : \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{5}$, $p_2 : \frac{x-1}{8} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-1}{10}$;

   (c) $p_1 : x = 1 - 2t, y = 1 - t, z = -2 + 3t$, $p_2 : x = 3 - 2s, y = 4s, z = 2 - 3s$;

   (d) $p_1 : \frac{1-x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-5}{3}$, $p_2 : \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-5}{2}$;

8. Zapišite enačbo ravnine, ki gre skozi točke $A(1,2,3)$, $B(0,-1,1)$ in $C(3,1,-2)$ v splošni, normirani in segmentni obliki.

9. Kakšen kot oklepa premica $x = 2z - 1, y = -2z + 1$ s premico, ki gre skozi točki $A(0,0,0)$ in $B(1,-1,-1)$?

10. Zapišite enačbo ravnine, ki gre skozi točko $T(4,-1,1)$ in je pravokotna na vektor $\vec{v} = (-1,2,1)$.

11. Zapišite enačbo ravnine, ki gre skozi premico $x - 2 = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}$ in točko $T(3,4,0)$.

12. Izračunajte razdaljo točke $A(1,2,3)$ od ravnine $6x - 6y + 3z - 9 = 0$.

13. Izračunajte kot med ravninama $y - \sqrt{3}x - 7 = 0$ in $y = 0$.

14. Pokažite, da sta premici $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = z$ in $x = z + 1$ $y = 1 - z$ pravokotni.

15. Pokažite, da sta ravnini, podani z enačbama $\vec{r}\,(3\,\vec{i} - \vec{k}) = 4$ in $\vec{r}\,(2\,\vec{i} + \vec{j} + 6\,\vec{k}) = -2$ pravokotni.

16. Zapišite enačbo ravnine, ki gre skozi točko $A(-4,0,4)$ in odreže na oseh x in y odseka $a = 4$ in $b = 3$.

17. Zapišite enačbo ravnine, ki gre skozi točko $A(4,-7,1)$ in je vzporedna z ravnino $3x - 7y + 5z - 12 = 0$.

18. Izračunajte kot med ravninama $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ in $x + 2y + 2z - 7 = 0$.

19. Izračunajte razdaljo med točko $A(1,2,1)$ in ravnino $x+2y+2z-10=0$.

20. Preverite, da sta ravnini $3x+2y-6z-35=0$ in $3x+2y-6z-56=0$ vzporedni in izračunajte razdaljo med njima.

21. Preučite medsebojno lego premice p in ravnine Π. V primeru, da se sekata, poiščite njun presek.

    (a) $p_1 : \frac{x}{2} = y-1 = \frac{z+1}{2}$, $\Pi : x+2y+3z-29=0$,

    (b) $p_1 : x=t-1, y=2-t, z=3$, $\Pi : x+y=3$,

    (c) $p_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{3-y}{3} = -z-2$, $\Pi : 2x-3y-z+3=0$,

    (d) $p_1 : x=2t-2, y=1-2t, z=3t$, $\Pi : x=-2-2s+t, y=1+2s-2t, z=-3s-t$.

22. Preučite medsebojno lego ravnin Π in Σ. V primeru, da se sekata, poiščite njun presek.

    (a) $\Sigma : x+2y-3z=3$, $\Pi : 3x+z=1$.

    (b) $\Sigma : x-3y+z=1$, $\Pi : -2x+6y-2z=0$.

23. Izračunajte kot med premico $3x=24+2y=-4+z$ in ravnino $6x+15y-10z+31=0$.

24. Izračunajte oddaljenost točke $T(9,9,9)$ od ravnine, ki jo določajo točke $A(5,6,7)$, $B(7,6,7)$ in $C(5,8,7)$.

25. Poiščite tisto premico, ki je pravokotna na ravnino, podano z enačbo $x-y+z=1$ in gre skozi točko $T(-1,1,1)$.

26. Naj bosta podani premica p_1 z enačbo $\vec{r}\,(t) = (1,3,2)+t(1,2,-1)$ in ravnina $\pi : y+2z=5$.

    (a) Preverite, da sta premica p_1 in ravnina π vzporedni in izračunajte razdaljo med njima.

    (b) Poiščite enačbo premice p_2, ki je pravokotna na π in seka premico p_1 v točki $(2,5,1)$. Zapišite jo v vseh treh oblikah.

    (c) Izračunajte presek P med premico p_2 in ravnino π. Izračunajte razdaljo med dobljeno točko P in premico p_1.

27. Poiščite tisto premico, ki je vzporedna premici $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-5}{6}$ in gre skozi presečišče premice $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{1}$ in ravnine $2x + 2y + z = -2$.

28. Določite razdaljo med premico p_1: $2(x-2) = y+1 = z+3$ in

    (a) premico p_2: $x = 1+t$, $y = 1+2t$, $z = -1+2t$.

    (b) ravnino Π: $4x - y - z = 5$.

    Najprej preverite, da so objekti v ravnini vzporedni, šele nato je smiselno izračunati razdaljo.

29. Poiščite presečišče med ravnino Π: $x - 2y + 3z = 5$ in

    (a) premico $x = 3+t$, $y = -1$, $z = 3t$;

    (b) ravnino $2x + y - z = 2$.

    ter izračunajte pod kakšnim kotom ravnina Π seka dano premico in ravnino.

3.1 Rešitve

1. (a) Enačbi premic p_1 in p_2 zapišimo v vektorski obliki.
   Najprej $p_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-5}{6}$:

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{2} &= t \Rightarrow x = 1+2t \\ \frac{y-3}{4} &= t \Rightarrow y = 3+4t \\ \frac{z-5}{6} &= t \Rightarrow z = 5+6t \end{aligned}$$

   torej: $\vec{r} = (1,3,5) + t(2,4,6)$, lahko torej izpišemo podatke $\vec{r_1} = (1,3,5)$ in $\vec{s_1} = (2,4,6)$.
   $p_2 : \frac{x}{2} = \frac{y-3}{2} = z-5$:

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} &= t \Rightarrow x = 2t \\ \frac{y-3}{2} &= t \Rightarrow y = 3+2t \\ z-5 &= t \Rightarrow z = 5+t \end{aligned}$$

torej: $\vec{r} = (0,3,5) + t(2,2,1)$.

Da izračunamo presečišče P med premico in ravnino Σ potrebujemo enačbo ravnine. Enačbo ravnine Σ izračunamo po formuli in dobimo:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ -1-1 & 1+1 & 2-2 \\ 0-1 & 1+1 & 0-2 \end{vmatrix} = 0$$

Tako dobimo enačbo

$$\Sigma : 2x + 2y + z - 2 = 0.$$

Presečišče med premico p_2 in ravnino Σ izračunamo tako, da namesto x, y, z v enačbi ravnine vstavimo parametrično enačbo premice p_2:

$$2(2t) + 2(3+2t) + 5 + t = 2 \Rightarrow t = -1.$$

Presečišče ima torej koordinate $P(-2,1,4)$.

Imamo torej točko na premici p, to je $P(-2,1,4)$, za enačbo premice potrebujemo še en vektor na tej premici. Ker je premica p vzporedna premici p_1, imata enak smerni vektor (vzporednost vektorjev), torej je $\vec{s} = \vec{s_1} = (2,4,6)$. Zapišemo lahko že vektorsko obliko premice p:

$$\vec{r} = (-2,1,4) + t(2,4,6).$$

Iz tega takoj dobimo parametrično obliko:

$$\begin{aligned} x &= -2 + 2t \\ y &= 1 + 4t \\ z &= 4 + 6t. \end{aligned}$$

Če iz vsake enačbe izrazimo t in jih med sabo enačimo, dobimo še kanonsko enačbo:

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-4}{6}.$$

(b) Ker sta premici p in p_1 vzporedni, računamo po formuli za razdaljo med premico in točko. Npr. med točko $(1,3,5)$ in premico p: $\vec{r} = (0,3,5) + t(2,4,6)$.

$$d = \frac{|\vec{s} \times (\vec{r_1} - \vec{r_0})|}{|\vec{s}|} = \frac{\sqrt{6^2 + (-4)^2}}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2}} = \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{56}} = \sqrt{\frac{13}{14}},$$

ker je

$$\vec{r_1} - \vec{r_0} = (1,3,5) - (0,3,5) = (1,0,0)$$

$$\vec{s} \times (\vec{r_1} - \vec{r_0}) = (2,4,6) \times (1,0,0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,6,-4).$$

(c) Premica p_1 ima enačbo $\vec{r} = (1,3,5) + t(2,4,6)$, lahko torej izpišemo podatke $\vec{r_1} = (1,3,5)$ in $\vec{s_1} = (2,4,6)$. Če premica p_3 pravokotno prebada ravnino $\Sigma : 2x + 2y + z - 2 = 0$, je smerni vektor s_3 lahko kar enak normali ravnine $\vec{n} = (2,2,1)$. Točka $P(-2,1,4)$ leži na premici p_3, zato se vektorska enačba premice p_3 glasi: $\vec{r} = (-2,1,4) + t(2,2,1)$, če izpišemo podatke: $\vec{r_3} = (-2,1,4)$ in $\vec{s_3} = (2,2,1)$.

Razdaljo med dvema premicama izračunamo po formuli:

$$d = \frac{|(\vec{r_3} - \vec{r_1}, \vec{s_1}, \vec{s_3})|}{|\vec{s_1} \times \vec{s_3}|} = \frac{8}{\sqrt{180}} = \frac{4\sqrt{5}}{15},$$

ker je

$$(\vec{r_3} - \vec{r_1}, \vec{s_1}, \vec{s_3}) = \begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8,$$

$$\vec{s_1} \times \vec{s_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-8,10,-4)$$

in $|(-8,10,-4)| = \sqrt{(-8)^2 + 10^2 + (-4)^2} = \sqrt{180}$.

Razdalja med premicama je torej $\frac{4\sqrt{5}}{15}$ dolžinskih enot.

2. (a) Enačba premice p_1v vektorski obliki se glasi: $\vec{r} = (0,-2,0) + t(1,1,1)$, lahko torej izpišemo podatke $\vec{r_1} = (0,-2,0)$ in $\vec{s_1} = (1,1,1)$.

Poiskati presečišče ravnin pomeni rešiti sistem linearnih enačb (npr. z Gaussovo eliminacijsko metodo). Dobimo rešitev:

$x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}$
$z = t,$
kar je dejansko enačba premice p_2 zapisana v parametrični obliki. Če jo zapišemo v vektorski, se le-ta glasi:

$$p_2 : \quad \vec{r} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0) + t(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$$

Izpišemo podatke: $\vec{r_2} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$ in $\vec{s_2^*} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$.
Zaradi lažjega računanja lahko za $\vec{s_2^*}$ vzamemo tudi $\vec{s_2} = 2\cdot\ \vec{s_2^*} = (1, 1, 2)$ (velikost smernega vektorja za premico ni pomembna).
Razdaljo med dvema premicama izračunamo po formuli: $d = \frac{|(\vec{r_2} - \vec{r_1}, \vec{s_1}, \vec{s_2})|}{|\vec{s_1} \times \vec{s_2}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
pri čemer je

$$(\vec{r_2} - \vec{r_1}, \vec{s_1}, \vec{s_2}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

in

$$\vec{s_1} \times \vec{s_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (1, -1, 0)$$

ter $|\ \vec{s_1} \times \vec{s_2}\ | = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.
Razdalja med premicama je torej $\frac{\sqrt{2}}{2}$ dolžinskih enot.

(b) Ravnina Π z normalo $\vec{n} = (1, -1, 0)$, ki vsebuje točko $A(2, 5, 2)$, je ravnina

$$x - y + 3 = 0.$$

Razdaljo med premico in ravnino je smiselno računati samo tedaj, ko sta vzporedni. To preverimo tako, da izračunamo skalarni produkt med normalo ravnine in smernim vektorjem premice (ta dva vektorja morata biti pravokotna). $\vec{n} \cdot \vec{s_1} = (1, -1, 0) \cdot (1, 1, 1) = 0$, torej premica p_1 je res vzporedna ravnini Π. Zdaj je dovolj, če izračunamo razdaljo od poljubne točke na premici p_1 do ravnine. Računamo torej razdaljo od točke $(0, -2, 0)$ do ravnine $x - y + 3 = 0$:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

3. Enačba ravnine Σ se izračuna kot

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Tako dobimo enačbo $y+z-1=0$, normala ravnine je torej $\vec{n}=(0,1,1)$.

Ker premica pravokotno prebada ravnino, je njen smerni vektor pravokoten na ravnino, kar pomeni, da lahko za smerni vektor premice p vzamemo kar normalo ravnine $\Rightarrow \vec{s}=(0,1,1)$. Premica skozi točko $D(0,0,2)$ s smernim vektorjem $\vec{s}=(0,1,1)$ ima enačbo

$$\vec{r}=(0,0,2)+t(0,1,1)$$

oz. v parametrični obliki:
$x=0$
$y=t$
$z=2+t$.
Zdaj lahko enostavno izračunamo presečišče med premico in ravnino: $P(0,-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$.

Oddaljenost:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. (a) vektorska oblika: $\vec{r}=(-1,2,3)+t(3,4,5)$,
   (b) parametrična oblika: $x=-1+3t, y=2+4t, z=3-5t$,
   (c) kanonska oblika: $\frac{1+x}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-5}$.

5. (a) vektorska oblika: $\vec{r}=(1,-1,2)+t(-1,3,1)$,
   (b) parametrična oblika: $x=1-t, y=-1+3t, z=2+t$,
   (c) kanonska oblika: $1-x=\frac{y+1}{3}=z-2$.

   Oddaljenost: $d=\frac{\sqrt{118}}{\sqrt{11}}$.

6. $d=\frac{8\sqrt{3}}{15}$.

7. (a) Premici sta vzporedni in celo sovpadata.
   (b) Premici sta vzporedni in nimata skupnih točk.
   (c) Premici nista vzporedni in nimata skupnih točk (sta mimobežni).

(d) Premici se sekata v točki $P(1,1,5)$.

8. Splošna oblika: $13x - 9y + 7z = 16$, segmentna: $\frac{x}{\frac{16}{13}} - \frac{y}{\frac{16}{9}} + \frac{z}{\frac{16}{7}} = 1$, normirana: $\frac{13x-9y+7z-16}{\sqrt{299}} = 0$.

9. $\varphi = \arccos(\frac{\sqrt{3}}{3})$.

10. $-x + 2y + z + 5 = 0$.

11. $x - 2y + z + 5 = 0$.

12. $d = \frac{2}{3}$.

13. $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

14. $(1,-1,1) \cdot (2,3,1) = 0$.

15. $(3,0,-1) \cdot (2,1,6) = 0$.

16. $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$.

17. $3x - 7y + 5z - 66 = 0$.

18. $\varphi = \arccos(\frac{8}{21})$.

19. $d = 1$.

20. $d = 3$.

21. (a) Premica prebada ravnino v točki $P(6,4,5)$.
    (b) Premica in ravnina sta vzporedni in nimata skupne točke.
    (c) Premica in ravnina sta pravokotni. Sekata se v točki $P(2,3,-2)$.
    (d) Premica in ravnina sta vzporedni, imata skupno točko, torej premica leži v ravnini.

22. (a) Ravnini sta pravokotni. Njun presek je premica z enačbo $x = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}t, y = \frac{4}{3} + \frac{5}{3}t, z = t$.
    (b) Ravnini sta vzporedni in različni.

23. $\varphi = \arcsin \frac{3}{133}$.

24. $d = 2$.

25. $(x, y, z) = (-1, 1, 1) + t(1, -1, 1)$.

26. (a) Da sta vzporedni, mora biti normala ravnine pravokotna na smerni vektor premice (skalarni produkt je enak 0). $d = \frac{2}{\sqrt{5}}$.
    (b) $\vec{r}\,(t) = (2, 5, 1) + t(0, 1, 2)$
    (c) $P(2, \frac{23}{5}, \frac{1}{5})$, $d = \frac{2}{\sqrt{5}}$, kar je očitno, ker je enako kot v (a).

27. $9x + 26 = \frac{9y-1}{2} = \frac{9z-32}{3}$.

28. (a) $d = \frac{4\sqrt{2}}{3} \approx 1,89$,
    (b) $d = \frac{7}{\sqrt{18}} \approx 1,65$.

29. (a) Presečišče: $T(3, -1, 0)$, kot: $\phi = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{\sqrt{35}}{7} = 57,7°$.
    (b) Presečišče: $x = \frac{9}{5} - \frac{1}{5}t, y = -\frac{8}{5} + \frac{7}{5}t, z = t$, kot: $\phi = \pi - \arccos(-\frac{\sqrt{21}}{14}) = 70,9°$.

4. Vektorska analiza

1. Podana sta vektorsko polje $\vec{F} = (x^2 + 2y + z^2, x^2 - z, y^2 + e^{2z})$ in točka $T(1, -3, 0)$.
   (a) Izračunajte $grad(div\ \vec{F})$ v točki T.
   (b) Izračunajte $rot(rot\ \vec{F})$ v točki T.

2. Podano je skalarno polje $f(x, y, z) = x^2yz$.
   (a) Izračunajte $div(grad f)$ v točki $A(2, -1, 1)$.
   (b) Izračunajte $rot(grad f)$.

3. Izračunajte gradiente funkcij f v danih točkah P_k:
   (a) $f(x, y) = 3x + 2y + 5; P_1(x, y) P_2(3, 2), P_3(-2, 3)$,
   (b) $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2x + xyz; P_1(x, y, z), P_2(1, 1, 1), P_3(-1, 1, 1)$.

4. Izračunajte odvode funkcije z v dani točki v smeri danega vektorja $\vec{u}$.
   (a) $z = 3x + 2y + 1, P(1, 1), \vec{u} = 3\ \vec{i} + 4\ \vec{j}$;
   (b) $z = \frac{1}{x^2+y^2}, P(0, 1), \vec{u} = (0, 1)$;
   (c) $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, P(a, b, c), \vec{u} = (a, b, c)$.

5. Podano je vektorsko polje $\vec{F} = (x^2y, xy^2 + z, xy)$ in točka $T(1, 2, 1)$.
   (a) Izračunajte $div(rot\ \vec{F})$.
   (b) Izračunajte $grad(div\ \vec{F})$ v točki T.
   (c) Izračunajte $rot(rot\ \vec{F})$ v točki T.

6. Podano imamo vektorsko polje $\vec{F} = (6xy + z^3, 3x^2 - z, 3xz^2 - y)$.
   (a) Izračunajte $div\vec{F}$ v točki $A(2, -3, 1)$.
   (b) Pokažite, da je polje $\vec{F}$ brez vrtincev.

4.1 Rešitve

1. (a) div $\vec{F}= 2x + 0 + 2e^{2z}$, $grad$(div $\vec{F}$) $= (2, 0, 4e^{2z})$, $grad$(div $\vec{F}$)$(1, -3, 0) = (2, 0, 4)$.

   (b) rot $\vec{F}= \nabla\times \vec{F}= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2+2y+z^2 & x^2-z & y^2+e^{2z} \end{vmatrix} = (2y-1, 2z, 2x-2)$,

   rot(rot $\vec{F}$) $= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y-1 & 2z & 2x-2 \end{vmatrix} = (-2, -2, 2)$.

   rot(rot $\vec{F}$)$(1, -3, 0) = (-2, -2, 2)$

2. (a) grad$f = (2xyz, x^2z, x^2y)$,
   div(grad$f$)$= 2yz$,
   div(grad$f$)$(2, -1, 1) = -2$.

   (b)

   $$\text{rot(grad f)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz & x^2z & x^2y \end{vmatrix} = (x^2-x^2, -(2xy-2xy), 2xz-2xz) = (0, 0, 0).$$

3. (a) $gradf = (3, 2)$ je konstanten vektor (isti v vseh točkah).

   (b) $gradf = (2xy + z^2 + yz, x^2 + 2yz + xz, y^2 + 2xz + xy), (4, 4, 4), (0, 2, -2)$.

4. (a) $\frac{17}{5}$ (rezultat ni odvisen od lege točke),

   (b) -2,

   (c) $\frac{6}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

5. (a) 0,

   (b) $(8, 4, 0)$,

   (c) $(4, 2, 0)$.

6. (a) $divF = 6y + 6xz$, $div(T) = -6$,

   (b) Pokažemo, da je rot$\vec{F} = 0$.

5. Trigonometrične vrste

1. Izračunajte konvergenčni polmer potenčne vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} x^n = \frac{1}{2}x + x^2 + \frac{9}{8}x^3 + \dots$$

2. Izračunajte konvergenčni polmer potenčne vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n}{n!} x^n.$$

3. Izračunajte konvergenčni polmer potenčne vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n+4} x^n.$$

4. Izračunajte konvergenčni polmer potenčne vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{100^n} x^n.$$

5. Izračunajte konvergenčni polmer potenčne vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-3)^n.$$

6. Funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; -\pi < x \leq 0 \\ \frac{4x}{\pi} & ; \quad 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

razvijte v trigonometrijsko vrsto. Funkcija je periodična s periodo 2π.

7. Funkcijo
$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; -\pi < x \leq 0 \\ x & ; \quad 0 < x \leq \pi \end{cases}$$
razvijte v trigonometrijsko vrsto. Funkcija je periodična s periodo 2π.

8. Poiščite Fourierjevo vrsto funkcije $f(x) = \begin{cases} -1 & ; \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & ; \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$

9. Poiščite Fourierjevo vrsto funkcije $f(x) = x$ na intervalu $[-\pi, \pi]$.

10. Poiščite Fourierjevo vrsto funkcije $f(x) = |x|$ na intervalu $[-\pi, \pi]$.

11. Poiščite Fourierjevo vrsto funkcije $f(x) = x^2$ na intervalu $[-\pi, \pi]$.

12. Poiščite Fourierjevo vrsto funkcije $f(x) = x + x^2$ na intervalu $[-\pi, \pi]$.

13. Funkcijo $f(x) = \frac{1}{2\pi}x + \frac{1}{2}$, definirano na intervalu $[-\pi, \pi]$, razvijte v trigonometrijsko vrsto.

14. Razvijte v kompleksno trigonometrijsko Fourierjevo vrsto funkcijo $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$. Funkcija se periodično ponavlja s periodo 2π.

5.1 Rešitve

1. $R = 2$.

2. $R = \infty$.

3. $R = 1$.

4. $R = 0$.

5. $R = 1$.

6. $f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + ...\right) + \frac{4}{\pi}\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - ...\right)$.

7. $a_0 = \frac{\pi}{4}, a_n = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}, b_n = \frac{(-1)^n}{n}$,
$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos nx + \frac{(-1)^n}{n} \sin nx.$$

8. $f(x) = \frac{4}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + ...)$.

9. $f(x) = 2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + ...)$.

10. $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + ...)$.

11. $f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4(\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{9}\cos 3x - \frac{1}{16}\cos 4x + ...)$.

12. $f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4(\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{9}\cos 3x - \frac{1}{16}\cos 4x + ...) + 2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + ...)$.

13. $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sin x - \frac{1}{2\pi}\sin 2x + \frac{1}{3\pi}\sin 3x - ...$

14. $f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4i\sin x + \frac{4}{4}i\sin 2x - \frac{4}{9}i\sin 3x + \frac{4}{16}i\sin 4x + ...$

6. Verjetnostni račun

1. Kakšna je verjetnost, da pri metu dveh igralnih kock
   A - padejo 4 pike na obeh kockah?
   B - padejo 4 pike vsaj na eni kocki?

2. Na loto listku je 39 števil, obkrožite jih 7. Kolikšna je verjetnost, da je prav vaša kombinacija dobitna?

3. Iz kupa 32 kart izvlečemo eno karto. Kolikšna je verjetnost, da je izvlečena karta križeva ali dama?

4. Iz kupa 32 kart na enkrat izvlečemo 3 karte. Kolikšne so verjetnosti dogodkov
   A - vse 3 karte so piki,
   B - vse 3 karte so asi,
   C - natanko dve karti sta dami,
   D - vsaj ena karta je srčeva?

5. V seriji 20 izdelkov, med katerimi sta 2 slaba, izberemo vzorec treh izdelkov. Kolikšna je verjetnost dogodka, da je med izbranimi en slab, če

   (a) izdelkov ne vračamo?

   (b) izdelke vračamo?

6. Od 12 deklet v razredu imajo 3 dekleta modre oči. Slučajno izberemo 2 dekleti. Kolikšna je verjetnost,

   (a) da imata obe modre oči?

   (b) da ima vsaj ena modre oči?

7. Kolikšna je verjetnost, da študent, ki se je pripravil na 50 izmed 70-ih možnih izpitnih vprašanj, zna odgovoriti na vsaj eno izmed treh naključno izbranih?

8. V posodi imamo 5 belih, 2 rdeči in 4 modre kroglice. Na slepo izbiramo po eno kroglico, dokler jih ne zmanjka. Izvlečene kroglice odlagamo v vrsto. Izračunajte verjetnost dogodka, da bodo pri tem prišle kroglice enake barve skupaj.

9. Stroji A, B in C izdelujejo isti izdelek serijsko, pri čemer velja:
   - stroj A izdela 25% vseh izdelkov, od tega je 1% defektnih.
   - stroj B izdela 35% vseh izdelkov, od tega je 2% defektnih.
   - stroj C izdela 40% vseh izdelkov, od tega je 3% defektnih.

   Kontrolor na slepo izbere izdelek iz dnevne proizvodnje.

   (a) Kolikšna je verjetnost, da je izbrani izdelek defekten?

   (b) Če je izdelek defekten, kolikšna je verjetnost, da je bil izdelan na stroju C?

10. Študenti odgovarjajo na vprašanja s podanimi štirimi možnimi odgovori od katerih je le en odgovor pravilen. Študenti obkrožujejo na dva načina: ali odgovor poznajo ali ugibajo. V polovici primerov študent pozna odgovor, sicer ugiba.

    (a) Kolikšna je verjetnost, da študent obkroži pravilen odgovor?

    (b) Kolikšna je verjetnost, da študent, ki je obkrožil pravilen odgovor, ni ugibal?

    (c) Denimo, da študent ugiba pri vsakem izmed 10 vprašanj. Kolikšna je verjetnost, da na 5 ali 6 vprašanj odgovori pravilno?

11. V razredu je 10 dijakov iz mesta, 6 iz okolice in 8 iz podeželja. 3 dijaki iz mesta, 2 iz okolice in 6 s podeželja se dobro uče.

    (a) Kolikšna je verjetnost, da se slučajno izbrani dijak dobro uči?

    (b) Kolikšna je verjetnost, da je dijak s podeželja, če se dobro uči?

12. Verjetnost, da iz serije izberemo slab izdelek je $0,06$. Kolikšna je verjetnost dogodka A, da je med tremi izbranimi izdelki vsaj en slab, če izdelke vračamo?

13. Trije strelci hkrati ustrelijo v tarčo z verjetnostjo zadetka 0.8, 0.6 in 0.7. Kolikšna je verjetnost, da bo tarča vsaj dvakrat zadeta?

14. Leta 2015 se je sestava M& M bonbonov spremenila. Pred tem je vreča M& Msov vsebovala 30% rjavih, 20% rumenih, 20% rdečih, 10% zelenih, 10 %

oranžnih in 10 % svetlo rjavih bonbonov. Po tem letu je sestava naslednja: 24% modrih, 20% zelenih, 16% oranžnih, 14% rumenih, 13% rdečih in 13% rjavih). Pred sabo imate dve popolnoma enaki vreči M& Msov, eno iz leta 2014 in eno iz leta 2016.

(a) Kolikšna je verjetnost, da izvlečete bonbon rumene barve, če je verjetnost, da izbirate iz ene ali druge vreče enaka?

(b) Izvlečete en bonbon, ki je rumene barve. Kolikšna je verjetnost, da ste ga izvlekli iz vreče iz leta 2014?

(c) Desetkrat zaporedoma izvlečete bonbon iz vrečke iz leta 2014 in ga vrnete. Kolikšna je verjetnost, da ste največ dvakrat izvlekli rdeč bonbon?

15. Iz serije 40 izdelkov, med katerimi je 8 slabih, izberemo vzorec 5 izdelkov in serijo sprejmemo, če je v vzorcu največ en slab izdelek. Kolikšna je verjetnost, da serijo sprejmemo, če izdelke po izboru vračamo?

16. Trije dobavitelji oskrbujejo prodajalno z $20\%, 30\%$ in 50% izdelkov. Delež izdelkov z napako prvega dobavitelja je $0,05$, drugega $0,02$ in tretjega $0,01$. Izračunajte verjetnost dogodka A, da ima izdelek kupljen v tej trgovini napako. Izračunajte verjetnost dogodka B, da je izdelek z napako dobavil prvi dobavitelj.

17. V seriji A imamo 16 dobrih in 4 slabe izdelke, v seriji B pa 15 dobrih in 3 slabe. Na slepo izberemo dva izdelka iz serije A in ju prenesemo v serijo B, nato pa na slepo iz serije B izberemo en izdelek. Kolikšna je verjetnost, da bo izbrani izdelek dober?

18. V tovarni imajo tri neodvisne linije, ki proizvajajo eno vrsto čipov. Prva linija proizvede 50% vseh čipov, od katerih je 4% pokvarjenih, druga linija proizvede 30% vseh čipov, od katerih je 5% povarjenih in tretja 20% vseh čipov, od katerih je pokvarjenih le 1%. Na slepo izberemo čip v tovarni.

(a) Kakšna je verjetnost dogodka A, da je pokvarjen?

(b) Izbrani čip je pokvarjen. Kolikšna je verjetnost, da je izbran iz prve (druge, tretje) linije?

19. Na sovražno letalo izstrelijo trije protiletalski topovi neodvisno vsak po en izstrelek. Verjetnost, da zadene prvi top je 0.5, da zadene drugi top 0.7 in tretji

0.8. Da bi bilo letalo zagotovo uničeno, ga morajo zadeti vsi trije izstrelki. Če ga zadene le en izstrelek, je verjetnost uničenja 0.4 in če ga zadeneta 2 izstrelka, je verjetnost uničenja 0.6.

(a) Kolikšna je verjetnost dogodka A, da bo letalo uničeno?

(b) Kolikšna je verjetnost, da je bilo letalo samo enkrat zadeto, če vemo, da je uničeno?

20. V seriji imamo 200 izdelkov od katerih je 10 slabih. Iz te serije na slepo enega za drugim izvlečemo 6 izdelkov. Kolikšna je verjetnost, da bo v tako izbranem vzorcu ravno 1 izdelek slab, če

(a) izdelke po pregledu vračamo?

(b) izdelkov ne vračamo.

21. Pošteno igralno kocko vržemo 10 krat. Izračunajte verjetnosti dogodkov

(a) šestica pade natanko dvakrat,

(b) šestica pade največ trikrat,

(c) enica pade samo v drugem metu,

(d) enica pade trikrat, zadnjič v 5. metu.

22. Verjetnost, da iz serije izberete slab izdelek je $0,08$. Kolikšna je verjetnost dogodka, da je med petimi na slepo izbranimi izdelki vsaj en slab, če izdelke pri izboru vračate?

23. Štirje naključni obiskovalci 10-nadstropne stavbe vstopijo v dvigalo. Kolikšna je verjetnost, da niti 2 ne izstopita hkrati?

24. Meteorologi napovedujejo, da bo prihodnja pomlad suha z verjetnostjo $0,3$ in vlažna z verjetnostjo $0,7$. Verjetnost, da zbolite za gripo, če je pomlad suha je $0,2$, če je vlažna pa $0,4$. Kakšna je verjetnost, da boste prihodnjo pomlad zboleli za gripo?

25. Na mizi imamo karto, ki je lahko srčeva ali pikova. Dodamo eno srčevo karto, karti premešamo in nato eno od njiju izberemo. Kolikšna je verjetnost, da je bila prvotna karta srčeva, če je bila tudi izbrana karta srčeva?

26. Imamo tri povsem enake vrečke z bonboni. V prvi imamo 3 ananasove in 4 jagodne bonbone, v drugi 4 ananasove in 3 jagodne bonbone, v tretji pa 2 ananasova in 5 jagodnih bonbonov. Na slepo izberemo vrečko in iz nje izberemo 2 bonbona. Kolikšna je verjetnost, da sta oba ananasova?

27. Verjetnost, da se v neki družini rodi deklica, je ocenjena na $0,482$. Izračunajte verjetnost, da sta v družini s tremi otroki natanko 2 deklici.

28. Imamo goljufivi kovanec, pri katerem je verjetnost, da pade cifra enaka $0,6$. Kolikšna je verjetnost, da pri štirih metih tega kovanca

    (a) natanko dvakrat pade cifra?

    (b) največ dvakrat pade cifra?

    (c) vsaj trikrat pade cifra?

29. S pomočjo Poissonovega približka izračunajte verjetnost, da bodo v seriji s 1000 izdelki manj kot štirje z napako, če je verjetnost, da kupimo izdelek z napako $0,6\%$.

30. S pomočjo normalne porazdelitve ocenite verjetnost dogodka, da pri 4500 metih igralne kocke pade med 700 in 800 šestic.

31. V tovarni zamaškov imajo 10% odpad. Kolikšna je verjetnost, da bo izmed 10000 zamaški kvečjemu 910 neuporabnih?

32. Podan imamo običajni komplet 32 kart.

    (a) Iz kupa sočasno izvlečemo 2 karti. Izračunajte verjetnost dogodkov
    A - izvlekli smo križevega kralja in pikovo damo,
    B - obe karti sta križevi,
    C - izvlekli smo vsaj 1 damo.

    (b) Šestkrat zapored potegnemo iz kupa eno karto in jo vrnemo nazaj. Kolikšna je verjetnost dogodka D, da potegnemo natanko dvakrat srce?

33. V posodi X je 7 rdečih in 3 bele kroglice, v posodi Y pa 3 rdeče in 6 belih.

    (a) Na slepo potegnemo po eno kroglico iz vsake posode (prvo kroglico iz posode X in drugo iz posode Y). Izračunaj verjetnost dogodkov
    A - izvlekli smo kroglici enake barve,
    B - izvlekli smo vsaj eno rdečo kroglico.

(b) Osemkrat zapored potegnemo po 2 kroglici iz posode Y in ju vrnemo nazaj. Kolikšna je verjetnost dogodka C, da sta bili natanko štirikrat obe kroglici beli?

(c) Iz posode X na slepo izberemo eno kroglico in jo damo v posodo Y, nato pa iz posode Y na slepo izberemo eno kroglico.

- Kolikšna je verjetnost dogodka D, da je ta kroglica bela?
- Denimo, da smo iz posode Y potegnili belo kroglico. Kolikšna je verjetnost dogodka E, da je bila tudi kroglica, ki smo jo prenesli iz posode X v posodo Y, bela?

34. V posodi X je 7 rdečih in 3 bele kroglice, v posodi Y pa 3 rdeče in 6 belih.

(a) Na slepo izvlečemo 2 kroglici iz posode X. Izračunaj verjetnost dogodkov
A - izvlekli smo kroglici enake barve,
B - izvlekli nismo nobene bele kroglice.

(b) Desetkrat zapored izvlečemo 1 kroglico iz posode Y in jo vrnemo nazaj. Kolikšna je verjetnost dogodka C, da smo natanko štirikrat izvlekli belo kroglico?

(c) Iz posode X na slepo izberemo eno kroglico in jo damo v posodo Y, nato pa iz posode Y na slepo izberemo eno kroglico.

- Kolikšna je verjetnost dogodka D, da je ta kroglica rdeča?
- Denimo, da smo iz posode Y potegnili rdečo kroglico. Kolikšna je verjetnost dogodka E, da je bila tudi kroglica, ki smo jo prenesli iz posode X v posodo Y, rdeča?

35. Podan imamo običajni komplet 32 kart.

(a) Hkrati na slepo izvlečemo 2 karti. Izračunajte verjetnost dogodkov
A - izvlekli smo 2 dami,
B - izvlekli smo vsaj enega križa.

(b) Sedemkrat zapored potegnemo iz kupa 1 karto in jo nato vrnemo. Kolikšna je verjetnost dogodka C, da smo potegnili natanko trikrat pika?

(c) Iz kupa izvlečemo karto in jo v primeru, da je AS zadržimo, v nasprotnem pa jo vrnemo v kup. To storimo trikrat. Izračunajte verjetnost dogodka D, da imamo na koncu v rokah 1 karto.

36. Podan imamo običajni komplet 32 kart.

    (a) Hkrati na slepo izvlečemo 1 karto. Izračunajte verjetnost dogodkov
    A - izvlekli smo ali križa ali pikovo damo,
    B - nismo izvlekli kralja.

    (b) Sedemkrat zapored potegnemo iz kupa 1 karto in jo nato vrnemo. Kolikšna je verjetnost dogodka C, da smo potegnili natanko dvakrat damo?

    (c) Iz kupa izvlečemo karto in jo v primeru, da je AS zadržimo, v nasprotnem pa jo vrnemo v kup. To storimo dvakrat. Izračunajte verjetnost dogodka D, da imamo na koncu v rokah 1 karto.

37. Med 500 izdelki jih je 200 iz prve tovarne, 160 iz druge in 140 iz tretje.

    (a) Hkrati na slepo izberemo 2 izdelka. Izračunajte verjetnost dogodkov
    A - oba izdelka sta iz druge tovarne,
    B - vsaj en izdelek je iz prve tovarne.

    (b) Kolikšna je verjetnost dogodka C, da izberemo en izdelek I. kvalitete, če so verjetnosti, da so izdelki I. kvalitete, po vrsti za tovarne 0.9, 0.85 in 0.8?

    (c) Kolikšna je verjetnost dogodka E, da je izdelek iz druge tovarne, če smo izbrali izdelek I. kvalitete?

38. Opazujemo metanje na koš na košarkarskem igrišču. Oseba zadene koš z verjetnostjo $\frac{1}{2}$. Označimo s slučajno spremenljivko X število danih košev, če je oseba metala trikrat.

    (a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X?

    (b) Kakšna je porazdelitvena funkcija $F(x)$?

    (c) Izračunajte $P(1 \leq X \leq 2)$.

    (d) Izračunajte $E(X)$ in $D(X)$.

39. Zvezna slučajna spremenljivka X je podana z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq 2 \\ \frac{1}{c} & ; \quad 2 < x < 10 \\ 0 & ; \quad x \geq 10. \end{cases}$$

(a) Določite konstanto c tako, da bo $p(x)$ res gostota verjetnosti slučajne spremenljivke.

(b) Zapišite porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke X in izračunajte $P(3 \leq X \leq 5)$.

(c) Izračunajte matematično upanje in disperzijo.

40. Iz serije z desetimi izdelki, od katerih so trije slabi, na slepo izberemo vzorec štirih izdelkov. Slučajna spremenljivka X naj določa število slabih izdelkov v izbranem vzorcu. Zapišite porazdelitev te slučajne spremenljivke.

41. Naj slučajna spremenljivka X določa število padlih grbov v petih metih kovanca. Zapišite porazdelitev te slučajne spremenljivke.

42. V mošnji imamo 7 srebrnikov ter 3 zlatnike. Na slepo in brez vračanja izbiramo kovance dokler ne izvlečemo prvega zlatnika. Število izvlečenih kovancev naj določa slučajno spremenljivko X. Zapišite porazdelitev te slučajne spremenljivke.

43. Naj slučajna spremenljivka X označuje vsoto pik pri metu dveh igralnih kock. Zapišite njeno porazdelitev.

44. Naj bo verjetnostna funkcija diskretne slučajne spremenljivke X podana s predpisom

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & a \end{pmatrix}.$$

(a) Določite a tako, da bo X res diskretna slučajna spremenljivka.

(b) Zapišite porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke X.

(c) Izračunajte z_k, matematično upanje in disperzijo.

45. Diskretna slučajna spremenljivka X je podana s predpisom

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{8} & 4a & \frac{1}{4} & 5a & \frac{1}{16} \end{pmatrix}.$$

(a) Določite konstanto a tako, da bo X res diskretna slučajna spremenljivka.

(b) Izračunajte verjetnost, da slučajna spremenljivka X zavzame vrednosti manjše od 3.

46. Zvezna slučajna spremenljivka X je podana z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} a(-x^2 + 2x) & ; \quad x \in [0, 2] \\ 0 & ; \quad \text{sicer.} \end{cases}$$

   (a) Določite konstanto a.
   (b) Izračunajte porazdelitveno funkcijo F_X.
   (c) Izračunajte $E(X)$ in $D(X)$.

47. Podano imamo funkcijo $p(x) = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad x \leq 0, \\ ce^{-\frac{x}{4}} & \text{za} \quad x > 0. \end{cases}$

   (a) Določite c tako, da bo $p(x)$ gostota neke zvezno porazdeljene slučajne spremenljivke.
   (b) Izračunajte verjetnost, da ta slučajna spremenljivka zavzame vrednosti med -1 in 2.

48. David in Ajda mečeta kocko. Če padejo manj kot 4 pike, mora David plačati Ajdi 1 EUR. Če padejo 4 pike, je igra neodločena. Koliko mora plačati Ajda Davidu, če pade 5 ali 6 pik, da bo igra poštena?

49. V škatli imamo rumeno, rdečo in modro kroglico. Na slepo izvlečemo eno kroglico in jo vrnemo v škatlo. Kroglice premešamo in zopet na slepo izvlečemo eno kroglico. Če je ta enake barve kot prva, dobimo 10 EUR, sicer ne dobimo nič. Kolikšen je v povprečju naš dobiček, če moramo za igro plačati 3 EUR?

50. V pošiljki je 30 izdelkov, 27 od njih je prve kakovosti (cena 10 EUR na enoto), 3 so slabše kakovosti (cena 8 EUR na enoto). Iz celotne pošiljke na slepo sočasno izberemo v vzorec 4 izdelke. Kolikšna je pričakovana vrednost takega vzorca?

51. Iz kupa 20 kart potegnemo dve karti na enkrat. Za dva asa dobimo 10 EUR, za natanko enega asa in eno rdečo karto dobimo 5 EUR, za enega asa in eno pikovo karto dobimo 1 EUR, sicer pa ne dobimo nič. Kolikšen je v povprečju naš dobiček, če moramo za igro plačati 1 EUR?

52. V škatli imamo 3 rdeče, 5 belih in 2 modri kroglici. Na slepo izberemo 3 kroglice. Če med njimi ni nobene modre kroglice, dobimo 5 EUR, sicer pa moramo plačati za vsako rdečo ali belo kroglico po 1 EUR, za modro pa 2 EUR. Kolikšen bo povprečni dobiček v tej igri?

53. Igralec meče štiri kovance hkrati. Za vsakega od grbov v tako dobljenem poskusu dobi $0,5$ EUR. Koliko bi igralec moral plačati v primeru, ko ne vrže nobenega grba, če naj bi bila igra poštena ($E(X) = 0$)?

54. Iz škatle, v kateri imamo 4 bele in 6 črnih kroglic, na slepo vlečemo po eno kroglico (brez vračanja), dokler ne dobimo črne. Slučajna spremenljivka X naj bo število belih kroglic. Zapišite verjetnostno shemo in izračunajte matematično upanje te slučajne spremenljivke.

55. Zdravnik skrbi za 5 oseb, ki (neodvisno druga od druge) z verjetnostjo $\frac{1}{4}$ potrebujejo pomoč. Obiskuje jih po vrsti, če naleti na tako osebo, ostane pri njej in tisti dan ne nadaljuje obhoda. slučajna spremenljivka X naj pomeni število oseb, ki jih je zdravnik obiskal. Zapišite porazdelitev slučajne spremenljivke ter izračunajte povprečno število oseb, ki jih zdravnik obišče.

56. V škatli imamo 4 bele in 2 črni kroglici. Kaj je bolje (na dolgi rok):

    (a) plačati 1 EUR, na slepo sočasno izbrati tri kroglice in dobiti za vsako črno kroglico v tako dobljenem vzorcu po $1,5$ EUR ali

    (b) plačati 1 EUR, na slepo dvakrat zapored potegniti po eno kroglico (brez vračanja) in dobiti za vsako črno kroglico v tako dobljenem vzorcu po 2 EUR?

57. Iz kupa 32 kart potegnemo dve karti naenkrat. Za vsakega asa v tako dobljenem poskusu prejmemo 10 EUR. Kolikšen je v povprečju naš dobiček, če moramo za igro plačati 3 EUR?

58. Igralec vplača 6 EUR in enkrat vrže igralno kocko. Če padeta 2 piki, mora plačati 5 EUR, če padejo 4 pike, plača 10 EUR, za 6 pik pa mora plačati 15 EUR. Koliko bi igralec moral prejeti v primeru, ko vrže liho število pik, če naj bi bila igra poštena ($E(X) = 0$)?

59. V škatli imamo 1 belo, 2 modri in 2 rdeči kroglici. Iz škatle vlečemo po eno kroglico (ne vračamo), dokler ne dobimo rdeče kroglice. Slučajna spremenljivka X naj pomeni potrebno število potegov v tem poskusu. Zapišite porazdelitev X ter izračunajte $P(X < 3)$.

60. Strelec, ki zadeva z verjetnostjo 0.6, ima na razpolago 3 naboje. V tarčo strelja toliko časa, da zadene ali pa mu zmanjka nabojev. Slučajna spremenljivka X naj

pomeni število zgrešenih strelov. Zapišite porazdelitev te slučajne spremenljivke in izračunajte verjetnost, da je tarča zadeta vsaj enkrat.

61. Izračunajte disperzijo slučajne spremenljivke X, če je

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

62. Izračunajte disperzijo zvezne slučajne spremenljivke X podane z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} 2x & \text{za} \quad x \in [0,1], \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

63. V klobuku je 10 listkov, na dveh piše "Čestitamo, dobili ste 1000 EUR!", na ostalih pa "Več sreče prihodnjič!". Kot ena igra se šteje, da igralec na slepo in brez vračanja vleče po en listek, dokler dobiva. Kolikšen mora biti vložek igralca, da bo igra poštena?

64. V klobuku je 10 listkov, na dveh piše "Čestitamo, dobili ste 1000 EUR!", na ostalih pa "Več sreče prihodnjič!". Igralec na slepo in brez vračanja vleče po en listek, dokler dobiva. Kolikšna mora biti cena enega izvlečenega listka, da bo igra poštena?

6.1 Rešitve

1. $P(A) = \frac{1}{36}$, $P(B) = \frac{11}{36}$.

2. $P = \frac{1}{\binom{39}{7}} \approx 6,50155 \cdot 10^{-8}$.

3. $P = \frac{11}{32}$.

4. $P(A) = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{32}{3}} = \frac{56}{4960} \approx 0,011$,
   $P(B) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{32}{3}} = \frac{4}{4960} \approx 0,00081$,
   $P(C) = \frac{\binom{4}{2}\binom{28}{1}}{\binom{32}{3}} = \frac{168}{4960} \approx 0,034$,
   $P(D) = 1 - \frac{\binom{24}{3}}{\binom{32}{3}} \approx 0,59$.

5. (a) $P = \frac{\binom{18}{2}\binom{2}{1}}{\binom{20}{3}} = \frac{51}{190} \approx 0,268,$

   (b) $P = \frac{1944}{8000} \approx 0,243,$

6. (a) $P = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{1}{22},$

   (b) $P = 1 - \frac{\binom{9}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{5}{11}.$

7. $P = 1 - \frac{\binom{20}{3}}{\binom{70}{3}} \approx 0,979.$

8. $P = \frac{3!(5!2!4!)}{11!} = \frac{1}{1155} \approx 0,00087.$

9. Poskus poteka v dveh fazah, torej gre za relejne poskuse. Določiti moramo hipoteze in dogodek A.
   H_1... izdelek je izdelan na stroju A
   H_2... izdelek je izdelan na stroju B
   H_3... izdelek je izdelan na stroju C
   A... izbrani izdelek je defekten
   Poznamo verjetnosti:
   $P(H_1) = 0,25$ in $P(A|H_1) = 0,01$
   $P(H_2) = 0,35$ in $P(A|H_2) = 0,02$
   $P(H_3) = 0,40$ in $P(A|H_3) = 0,03$

   (a) Verjetnost, da je izbrani izdelek defekten je:

   $$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) + P(A|H_3) \cdot P(H_3) = 0,0215$$

   (b) Verjetnost, da je izdelek izdelan na stroju C, pri pogoju da je izbrani izdelek defekten zapišemo kot:

   $$P(H_3|A) = \frac{P(A|H_3) \cdot P(H_3)}{P(A)} = 0,558$$

10. H_1... odgovor pozna in H_2... ugiba
    A... študent obkroži pravilni odgovor
    Poznamo verjetnosti: $P(H_1) = \frac{1}{2}$, $P(H_2) = \frac{1}{2}$, $P(A|H_1) = 1$, $P(A|H_2) = \frac{1}{4}$

    (a) $P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) = \frac{5}{8}$

    (b) $P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{4}{5}$

(c) Bernoullijevo zaporedje neodvisnih poskusov: $P = \binom{10}{5}(\frac{1}{4})^5(\frac{3}{4})^5 + \binom{10}{6}(\frac{1}{4})^6(\frac{3}{4})^4$

11. (a) $P = 0,458$,
    (b) $P = 0,545$.
12. $P(A) = 1 - 0,94 \cdot 0,94 \cdot 0,94 \approx 0,17$.
13. $P = 0,788$.
14. (a) Pogojna verjetnost: P(Rumena)=0,17
    (b) Bayesov obrazec: P(2014|Rumena)=0,588
    (c) Bernoullijevo zaporedje poskusov: P(C)=0,678
15. $P = 0,737$.
16. $P(A) = 0,021, P(B) = 0,48$.
17. $P = 0,83$.
18. (a) $P(A) = 0,037$,
    (b) $P(H_1/A) = 0,541,\ P(H_2/A) = 0,405,\ P(H_3/A) = 0,054$.
19. (a) $P(A) = 0,65$,
    (b) $P(H_1/A) = 0,135$.
20. (a) $P = \binom{6}{1}(\frac{10}{200})^1(\frac{190}{200})^5 \approx 0,232$,
    (b) $P = \frac{\binom{10}{1}\binom{190}{5}}{\binom{200}{6}} \approx 0,237$.
21. (a) $P = \binom{10}{2}(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^8 \approx 0,291$,
    (b) $P = (\frac{5}{6})^{10} + \binom{10}{1}(\frac{1}{6})^1(\frac{5}{6})^9 + \binom{10}{2}(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^8 + \binom{10}{3}(\frac{1}{6})^3(\frac{5}{6})^7 \approx 0,93$,
    (c) $P = (\frac{1}{6})^1(\frac{5}{6})^9 \approx 0,032$,
    (d) $P = \binom{4}{2}(\frac{1}{6})^3(\frac{5}{6})^7 \approx 0,0078$,
22. $P = 0,341$.
23. $P = 0,504$.
24. $P = 0,34$.
25. $P = \frac{2}{3}$.

26. $P = \frac{10}{63}$.

27. $P = 0,36$.

28. (a) $P = 0,1944$,

    (b) $P = 0,2673$,

    (c) $P = 0,3888$.

29. $P = 0,1512$.

30. $P = 2\Phi(2) \approx 0,9545$.

31. $P = -\Phi(3) + \frac{1}{2} \approx 0,00135$.

32. (a) $P(A) = \frac{1}{\binom{32}{2}} = \frac{1}{496}$, $P(B) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{28}{496}$, $P(C) = 1 - \frac{\binom{28}{2}}{\binom{32}{2}} = 1 - \frac{378}{496}$.

    (b) $P(D) = \binom{6}{2}(\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4})^4 = \frac{1215}{4096}$.

33. (a) $P(A) = \frac{7}{10}\frac{1}{3} + \frac{3}{10}\frac{2}{3} = \frac{13}{30} = 0,43, P(B) = 1 - \frac{3}{10}\frac{2}{3} = \frac{24}{30} = 0,8$.

    (b) $P(C) = \binom{8}{4}(\frac{5}{12})^4(\frac{7}{12})^4 = 0,244 p = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{9}{2}}$.

    (c) $P(D) = \frac{7}{10}\frac{3}{10} + \frac{6}{10}\frac{7}{10} = 0,63$, $P(E) = \frac{1}{3}$.

34. (a) $P(A) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{21+3}{45} = \frac{8}{15} = 0,53$. $P(B) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{21}{45} = 0,47$.

    (b) $P(C) = \binom{10}{4}(\frac{2}{3})^4(\frac{1}{3})^6 = 0,057$.

    (c) $P(D) = \frac{4}{10}\frac{7}{10} + \frac{3}{10}\frac{3}{10} = 0,37$. $P(E) = \frac{0,28}{0,37} = 0,757$.

35. (a) $P(A) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{6}{496} = 0,012$, $P(B) = 1 - \frac{\binom{24}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{55}{124} = 0,44$.

    (b) $P(C) = \binom{7}{3}(\frac{1}{4})^3(\frac{3}{4})^4 = 0,173$.

    (c) $P(D) = P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3) = \frac{4}{32}\frac{28}{31}\frac{28}{31} + \frac{28}{32}\frac{4}{32}\frac{28}{31} + \frac{28}{32}\frac{28}{32}\frac{4}{32} = 0,296$.

36. (a) $P(A) = \frac{8}{32} + \frac{1}{32} = \frac{9}{32} = 0,28$, $P(B) = 1 - \frac{4}{32} = \frac{7}{8} = 0,87$.

    (b) $P(C) = \binom{7}{2}(\frac{1}{8})^2(\frac{7}{8})^5 = 0,168$.

    (c) $P(D) = P(A_1\bar{A}_2 + \bar{A}_1A_2) = \frac{4}{32}\frac{28}{31} + \frac{28}{32}\frac{4}{32} = \frac{441}{1984} = 0,22$.

37. (a) $P(A) = \frac{\binom{160}{2}}{\binom{500}{2}} = 0,102$, $P(B) = 1 - \frac{\binom{300}{2}}{\binom{500}{2}} = 0,36$.

    (b) $P(C) = 0,9\frac{2}{5} + 0,85\frac{16}{50} + 0,8\frac{14}{50} = 0,856$.

(c) $P(E) = \frac{0{,}85\frac{16}{50}}{0{,}856} = 0,318.$

38. (a) Porazdelitev slučajne spremenljivke X opišemo z verjetnostno funkcijo:

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix}, \qquad p_1 + p_2 + p_3 + \ldots = 1,$$

kjer je $P[X = x_n] = p_n$ za $n = 1, 2, 3, \ldots$.

V našem primeru so vrednosti, ki jih X lahko zavzame $0, 1, 2$ in 3, saj je to število košev, ki jih lahko da igralec, če meče trikrat. Izračunati moramo še verjetnosti:

$p_1 = P[X = 0] = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ je verjetnost, da igralec vse tri mete zgreši.

$p_2 = P[X = 1] = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$ je verjetnost, da igralec da 1 koš v treh metih (gre za direktno uporabo Bernoullijeve formule).

$p_3 = P[X = 2] = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$ je verjetnost, da igralec da 2 koša v treh metih (gre za direktno uporabo Bernoullijeve formule).

$p_4 = P[X = 3] = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ je verjetnost, da igralec vse tri mete zadene.

Porazdelitev se torej glasi:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Hitro lahko naredimo preizkus, če smo verjetnosti izračunali pravilno:

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1\checkmark$$

(b) Porazdelitvena funkcija pri diskretnih spremenljivkah je:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_k < x} p_k$$

V našem primeru se torej glasi:

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{8} & ; \quad x \leq 1 \\ \frac{4}{8} & ; \quad x \leq 2 \\ \frac{7}{8} & ; \quad x \leq 3 \\ 1 & ; \quad x > 3 \end{cases}$$

(c) $P(1 \leq X \leq 2) = F(2) - F(1) = \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.
Verjetnost da v treh metih da med 1 in 2 koša je $\frac{3}{8}$.

(d) Matematično upanje (ali povprečna vrednost) diskretne spremenljivke X je

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4 = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1,5$$

Ta podatek nam pove, da bo pri velikem številu poskusov koš zadel povprečno 1,5 krat.

Disperzija diskretne spremenljivke X je

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} - 1,5^2 = 0,75$$

Disperzija nam pove razpršenost slučajne spremenljivke okoli njenega povprečja.

39. (a) Da bo $p(x)$ res gostota verjetnosti slučajne spremenljivke, mora veljati:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1 \quad \Rightarrow \int_2^{10} \frac{1}{c}dx = \frac{8}{c} = 1 \quad \Rightarrow c = 8.$$

(b) Porazdelitvena funkcija: $F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq 2 \\ \frac{x-2}{8} & ; \quad 2 < x \leq 10 \\ 1 & ; \quad x \geq 10 \end{cases}$

Za $2 < x \leq 10$ izračunamo $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{8}dx = \frac{x-2}{8}$.
$P(3 \leq X \leq 5) = F(5) - F(3) = \frac{1}{4}$

(c) Matematično upanje: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \frac{1}{8}\int_2^{10} xdx = 6$
Disperzija: $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{124}{3} - 36 = \frac{16}{3} \approx 15,3$.
Seveda je potrebno posebej izračunati $E(X^2)$:
$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2p(x)dx = \frac{1}{8}\int_2^{10} x^2dx = \frac{124}{3}$.

40. $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{35}{210} & \frac{105}{210} & \frac{63}{210} & \frac{7}{210} \end{pmatrix}$.

41. $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{32} & \frac{5}{32} & \frac{10}{32} & \frac{10}{32} & \frac{5}{32} & \frac{1}{32} \end{pmatrix}$.

42. $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{81} & \frac{8}{81} & \frac{24}{81} & \frac{32}{81} & \frac{16}{81} \end{pmatrix}$.

43. $X \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$.

44. (a) $a = \frac{1}{4}$.

    (b) $F(X) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq -1 \\ \frac{1}{4} & ; \quad x \leq 0 \\ \frac{3}{4} & ; \quad x \leq 1 \\ 1 & ; \quad x > 1 \end{cases}$.

    (c) $z_k = \frac{(-1)^k}{4} + \frac{1}{4}$, $E(X) = 0$, $D(X) = \frac{1}{2}$.

45. (a) $a = \frac{1}{16}$.

    (b) $P(X < 3) = \frac{3}{8}$.

46. (a) $a = \frac{3}{4}$.

    (b) $F(X) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq 0 \\ -\frac{y^3}{4} + \frac{3y}{4} + \frac{1}{2} & ; \quad 0 < x \leq 2 \\ 1 & ; \quad x > 2 \end{cases}$.

    (c) $E(X) = 0$, $D(X) = \frac{1}{5}$.

47. (a) $c = \frac{1}{4}$,

    (b) $P = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.393$,

48. Plačati mora 1,5 EUR.

49. $E(X) = -3 \cdot \frac{2}{3} + 7 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. povprečen dobiček je 0.33 EUR.

50. $E(X) = 34 \cdot \frac{1}{1015} + 36 \cdot \frac{39}{1015} + 38 \cdot \frac{325}{1015} + 40 \cdot \frac{650}{1015} = 392$. Pričakovana vrednost je 392 EUR.

51. $E(X) = -1 \cdot \frac{68}{95} + 0 \cdot \frac{8}{95} + 4 \cdot \frac{16}{95} + 9 \cdot \frac{3}{95} \approx 0,24$. Dobiček je v povprečju približno 0.24 EUR.

52. $E(X) = -5 \cdot \frac{1}{15} - 4 \cdot \frac{7}{15} + 5 \cdot \frac{7}{15} \approx 0,13$.
    Povprečen dobiček bo $0,13$ EUR.

53. $E(X) = -x \cdot \frac{1}{16} + 0,5 \cdot \frac{4}{16} + 1 \cdot \frac{6}{16} + 1,5 \cdot \frac{4}{16} + 2 \cdot \frac{1}{16} = 0 \Rightarrow x = 16.$
Plačati bi moral 16 EUR.

54. $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{126}{210} & \frac{56}{210} & \frac{21}{210} & \frac{6}{210} & \frac{1}{210} \end{pmatrix}$. $E(X) = \frac{4}{7}$.

55. $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} & (\frac{3}{4})^2 \cdot \frac{1}{4} & (\frac{3}{4})^3 \cdot \frac{1}{4} & (\frac{3}{4})^4 \end{pmatrix}$. $E(X) = 3,05$.
Povprečno obišče 3 osebe na dan.

56. (a) $E(X) = -1 \cdot \frac{1}{5} + 0,5 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} = 0,5,$

(b) $E(X) = -1 \cdot \frac{6}{15} + 1 \cdot \frac{8}{15} + 3 \cdot \frac{1}{15} = 0,33.$

Bolje je izbrati prvo igro, saj pri njej dobiček znaša v povprečju $0,5$ EUR.

57. $E(X) = -3 \cdot \frac{378}{496} + 7 \cdot \frac{112}{496} + 17 \cdot \frac{6}{496} = -0,5$
V povprečju bomo izgubili $0,5$ EUR.

58. $E(X) = -21 \cdot \frac{1}{6} - 16 \cdot \frac{1}{6} - 11 \cdot \frac{1}{6} + (x - 60) \cdot \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = 22.$
Igralec bi moral prejeti 22 EUR.

59. $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \end{pmatrix}$. $P(X < 3) = \frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$.

60. $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,6 & 0,24 & 0,096 & 0,064 \end{pmatrix}$. $1 - P(X = 3) = 0,936$.

61. $D(X) = \frac{249}{100}$.

62. $D(X) = \frac{5}{12}$.

63. Matematično upanje dobitka je: $E(X) = 0 \cdot \frac{8}{10} + 1000 \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} + 2000 \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \approx 222,2.$
Da bo igra uravnovešena, mora biti vložek igralca 222,2 EUR.

64. Z x označimo ceno enega izvlečenega listka. Matematično upanje dobitka je: $E(X) = -x \cdot \frac{8}{10} + (-2x + 1000) \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} + (-3x + 2000) \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = 0$. Da bo igra uravnovešena, mora biti matematično upanje enako 0. Iz enačbe izračunamo x in dobimo, da mora biti cena posameznega izvlečenega listka 181,82 EUR.

7. Linearno programiranje

1. Politična stranka želi najeti fotokopirne stroje za izdelavo letakov za bližajoče se lokalne volitve. Na voljo sta dva tipa primernih strojev:

   - ACTO: strošek najemnine 120 EUR na mesec, zavzame $2,5\ m^2$ prostora, izdela 15000 kopij na dan.
   - ZENMAT: strošek najemnine 150 EUR na mesec, zavzame $1,8\ m^2$ prostora, izdela 18500 kopij na dan.

   Zapišite linearni program, ki najde optimalno rešitev problema za čim več kopij na mesec, če so v okviru kampanje dovolili, da se potroši do 1200 EUR na mesec za kopirne stroje, ki bodo postavljeni v prostor, ki meri $19,2\ m^2$.

2. ZagotavljamovamInvest želi investirati 1 milijon EUR. Po posvetu s finančnimi svetovalci so se odločili za 6 možnih investicij z naslednjimi karakteristikami: ZagotavljamovamInvest želi investirati z minimalnim tveganjem, ampak z di-

Investicija	% tveganje	% dividende	% rast	bonitetna ocena
1	18	4	22	4
2	6	5	7	10
3	10	9	12	2
4	4	7	8	10
5	12	6	15	4
6	8	8	8	6

   videndami vsaj 70000 EUR na leto, povprečno rastjo vsaj 12% in povprečno bonitetno oceno vsaj 7. Zapišite linearni program za dani problem.

3. StatFunt Oil izdeluje dve vrsti goriv z mešanjem treh tipov olj. Cene in dnevna razpoložljivost posameznih olj je podana v tabeli.

Olje	Cena(EUR/l)	Razpoložljivost (v l)
A	$2,5$	10000
B	$2,8$	15000
C	$3,5$	20000

Vrsta goriva mora vsebovati

Gorivo 1	največ 25% olja A
	vsaj 30% olja B
	največ 40% olja C
Gorivo 2	vsaj 20% olja A
	največ 50% olja B
	vsaj 30% olja C

Liter goriva 1 prodaja po ceni 6 EUR in goriva 2 po ceni 7 EUR. Dolgoročna pogodba zahteva, da izdelajo vsaj 10000 litrov vsakega goriva. Družba se mora odločiti o najboljši mešanici olj za obe vrsti goriv. Formulirajte problem kot linearni program.

4. Družba Vivienda d.o.o načrtuje gradnjo večjega števila stanovanjskih blokov in stanovanj. Zamislili so si 5 tipov stanovanjskih blokov, ki vsebujejo stanovanja štirih kategorij (za upokojence(1), samske osebe(2), male družine(3) in velike družine(4)). Število stanovanj v vsaki zgradbi in ostali ključni podatki so v tabeli.

Tip stan. bloka	št. stanovanj (kat.)				št. nadstr.	velikost ozemlja	strošek na blok
	1	2	3	4			(v mio)
A	1	2	4	0	3	5	2,08
B	0	3	6	0	6	5	3,2
C	2	2	2	4	2	8	3,0
D	0	6	0	8	8	6	4,8
E	0	0	10	5	3	4	4,8

Vivienda d.o.o želi zgraditi skupno 500 stanovanj, od katerih jih bo vsaj 40 kategorije 1 in po 125 vsake od ostalih kategorij. V preteklosti so se visoki nebotičniki izkazali za nezanimive, zato želijo omejiti število nadstropij tako da bo povprečno število nadstropij največ 5 in da bo vsaj polovica stanovanj v blokih s tremi ali manj nadstropji. 300 enot zemlje je namenjeno gradnji, vsa nepozidana zemlja bo namenjena parku. Formulirajte ta problem kot linearni program, ki bi izračunal najugodnejšo investicijo.

5. Lesna industrija Krško izdeluje 4 tipe stiskanih desk iz bora in bukve. Vsak kos deske gre skozi faze rezanja, lepljenja in stiskanja. Spodnja tabela prikazuje čas potreben za izdelavo ene palete vsakega tipa desk (panel) in čas, ki je na voljo tedensko.

Tip deske	rezanje (v urah)	lepljenje (v urah)	stiskanje (v urah)
klasiko	1	1	1
moderni	1	1	4
sestavljeni	2	2	3
alto	2	2	2
razpoložljivost	80	85	100

Količina lesa potrebna za eno paleto vsakega tipa desk in razpoložljivosti lesa so

	klasiko	moderni	sestavljeni	alto	razpoložljivost
bor	50	40	30	40	2500
bukev	20	30	50	20	2000

Zapišite linearni program, ki izračuna največji možni dobiček, če paleto klasika prodajo po ceni 400 EUR, modernega po 1100 EUR, sestavljenega po 750 EUR in alto po 350 EUR.

6. Testi so pokazali, da je za optimalno zdravo prehrano zajcev v laboratoriju potrebno poskrbeti za uravnoteženo prehrano, ki vsebuje vsaj $24g$ maščobe, $36g$ ogljikovih hidratov in $4g$ beljakovin. Upoštevati je potrebno, da lahko zajec zaužije največ 5 meric hrane dnevno. Raje kot da bi naročili hrano, ki je posebej prilagojena zahtevam zajcev, naročijo cenejšo hrano X in hrano Y, ki jo potem ustrezno odmerijo glede na potrebe zajcev. Merica hrane X vsebuje $8g$ maščob, $12g$ ogljikovih hidratov in $2g$ beljakovin ter stane $0,20$ EUR. Merica hrane Y vsebuje pa $12g$ maščob, $12g$ ogljikovih hidratov in $1g$ beljakovin ter stane $0,30$ EUR. Kakšna je ustrezna mešanica hrane X in Y, da bodo zajci dobili ustrezno prehrano in bodo imeli čim nižje stroške? Zapišite linearni program in ga rešite z grafično metodo.

7. Z grafično metodo poiščite optimalno rešitev naslednjega linearnega programa:

$$
\begin{aligned}
\min z = 2x + y & \\
x + y &\leq 10 \\
x - y &\leq 2 \\
x &\geq 4 \\
y &\leq 5 \\
x \geq 0, y &\geq 0.
\end{aligned}
$$

8. Dva tipa vitaminov V_1 in V_2 lahko kupimo v dveh vrstah tablet z imenom Vitaminex in Polnvita. Tableta Vitaminex vsebuje 4 enote vitamina V_1 in 3 enote vitamina V_2. Tableta Polnvita pa vsebuje 1 enoto vitamina V_1 in 4 enote V_2. Vitaminex stane 17 EUR, Polnvita pa 14 EUR. Da zadostimo zahtevam po vitaminih, moramo vzeti vsaj 7 enot vitamina V_1 in 15 enot V_2. Koliko tablet vsakega tipa naj kupimo, da bodo stroški najmanjši? Zapišite linearni program in poiščite rešitev z grafično metodo.

9. Upokojenec, ki si zaželi dodatnega zaslužka, se odloča med izdelavo dveh vrst rezbarij - rezbarija A in rezbarija B. Za eno rezbarijo A potrebuje 5 enot lesa in 3 ure dela, za rezbarijo B potrebuje 4 enote lesa in 3 ure dela. Izdelek A prodaja po ceni 30 EUR, izdelek B po ceni 24 EUR. Koliko katerih izdelkov naj izdela v tem tednu, da bo imel največji zaslužek, če ima na razpolago 45 enot lesa in 30 ur časa? Nalogo rešite grafično.

10. Kmet, ki ima 80 hektarov polj, prideluje koruzo in zelje. Da zadosti zahtevam, mora pridelovati koruzo na vsaj 10 hektarih in zelje na vsaj 20 hektarih. Ljubše mu je pridelovati zelje kot koruzo, ampak zaradi delovnih pogojev lahko prideluje največ trikrat toliko zelja kot koruze. Če je dohodek pri pridelavi zelja 800 EUR na hektar in koruze 500 EUR na hektar, koliko katere kulture naj kmet poseje, da bo imel čim višji dohodek? Kolikšen bo ta dohodek? Zapišite problem v obliki linearnega programa in ga rešite z grafično metodo.

11. V službi morate kupiti nekaj pisarniških omar. Veste, da omara Ikera stane 20 EUR, v pisarni zavzame 6 kvadratnih enot prostora, v njo pa lahko shranite 90 fasciklov. Omara Maxi stane 40 EUR, zavzame 8 kvadratnih enot prostora in lahko hrani 120 fasciklov. Za opremo pisarne imate na voljo 280 EUR. Na razpolago imate 72 kvadratnih enot prostora, ki ga lahko zapolnite z omarami.

Koliko omar kakšnega modela bi kupili, da bi imeli čim več prostora za hranjenje dokumentov? Formulirajte ta problem kot linearni program in ga rešite grafično.

12. Majhna tovarna izdeluje 2 tipa tekočega gnojila, Growbig in Thrive. Za izdelavo obeh uporablja enak postopek in isto opremo za mešanje sestavin, destilacijo mešanice in zaključna dela (stekleničenje, testiranje, tehtanje...). Ker ima tovarna omejeno količino opreme, obstajajo omejitve glede časa, ki je na razpolago za vsak postopek. Na voljo imajo 40 ur za mešanje, 40 ur za destilacijo in 25 ur za zaključna dela na teden. Gnojila izdelujejo v paketih in število ur, potrebnih za izdelavo vsakega izmed njih, je podano v tabeli

Opravila	Growbig	Thrive
Mešanje	1	2
Destilacija	2	1
Zaključna dela	1	1

Če tovarna z vsakim paketom Growbiga zasluži 300 eur in Thriva 200 EUR, koliko bi morali izdelati katerega produkta na teden, da bi imeli čim večji zaslužek? Zapišite linearni program za ta problem in ga rešite grafično.

13. Za povečanje oktanskega števila bencina se uporabljata 2 aditiva (X1 in X2). 1 kg aditiva X1 na 5000 l bencina poveča oktansko število za 10, med tem ko 1 kg X2 na 5000 l poveča oktansko število za 20. Količina dodanih aditivov mora povečati oktansko število za vsaj 5, ampak ne sme se dodati več kot 500 g na 5000 litrov in vsota količine aditiva X2 z dvakratno količino X1 mora biti vsaj 500 g. Če je cena aditiva X1 30 EUR za kilogram in X2 40 EUR za kilogram, poiščite optimalno rešitev tega problema. Zapišite linearni program in ga rešite z grafično metodo.

14. Autoengineering izdeluje dve vrsti menjalnikov, ročnega in avtomatskega. Pri izdelavi gredo skozi 4 faze dela, potreben čas za vsako fazo, razpoložljivi čas in ostali pomembni podatki so v tabeli

   Podjetje ima dobiček v višini 64 EUR za vsak ročni menjalnik, ki ga izdela in 100 EUR za vsak avtomatski. Formulirajte ta problem kot linearni program in s pomočjo grafične metode izračunajte koliko ročnih in koliko avtomatskih menjalnikov naj izdelajo na teden, da bodo imeli največji dobiček.

Faza izdelave	potreben čas (v urah za enoto)		razpoložljiv čas (v urah na teden)
	ročni	avtomatski	
vlivanje	3	5	7500
strojna obdelava	5	4	10000
sestavljanje	2	1	3500
preizkušanje	1	1	2000

15. Novacook d.o.o izdeluje dve vrsti štedilnikov (na elektriko in na plin). Pri proizvodnji gre vsak štedilnik skozi 4 faze izdelave. Potrebni podatki so v tabeli:
    Pri izdelavi električnega štedilnika nastanejo stroški v višini 200 EUR, prodajo

Faza izdelave	potreben čas (v urah za enoto)		razpoložljiv čas (v urah na teden)
	električni	plinski	
oblikovanje	4	2	3600
strojna obdelava	10	8	12000
sestavljanje	6	4	6000
preizkušanje	2	2	2800

    ga pa po ceni 300 EUR. Stroški z izdelavo plinskega štedilnika znašajo 160 EUR, zaslužek od prodaje je pa 240 EUR. Formulirajte ta problem kot linearni program in s pomočjo grafične metode izračunajte koliko električnih in koliko plinskih štedilnikov naj izdelajo, da bodo imeli največji dobiček.

16. Zmešati želimo 200kg mešanice iz surovin S_1 in S_2. Surovina S_1 stane 5 EUR/kg in vsebuje 30% spojine A in 40% spojine B. Surovina S_2 stane 8 EUR/kg in vsebuje 50% spojine A in 25% spojine B. Za dobljeno mešanico želimo, da ima med 35 in 45% spojine A in vsaj 30% spojine B. Kako moramo zmešati S_1 in S_2, da zadostimo zahtevam in imamo minimalne stroške?

17. Za proizvodnjo določenega izdelka moramo prepeljati potrebne količine treh vrst surovin in sicer surovine A, B in C. Surovine lahko pripeljemo s tovornjakoma T_1 in T_2. S tovornjakom T_1 lahko naenkrat pripeljemo 8 enot surovine A, 12 enot surovine B in 8 enot surovine C. S tovornjakom T_2 pa lahko naenkrat pripeljemo 4 enote surovine A, 16 enot surovine B in 24 enot surovine C. Za proizvodnjo potrebujejo 320 enot surovine A, 440 enot surovine B in 360 enot surovine C. Prevozni stroški s tovornjakom T_1 so 50 d.e., s tovornjakom T_2 pa 30 d.e.

(a) Koliko prevozov naj opravijo s posameznim tovornjakom, da bodo zadoščene potrebe proizvodnje in da bodo skupni prevozni stroški minimalni? Koliko znašajo minimalni skupni prevozni stroški?

(b) Koliko prevozov naj opravijo s posameznim tovornjakom, da bodo zadoščene potrebe proizvodnje in da bodo skupni prevozni stroški minimalni, če nočejo s tovornjakom T_1 opraviti več kot 10 voženj? Koliko znašajo minimalni skupni prevozni stroški v tem primeru?

18. Na voljo imamo dva tipa tovornih vlakov s katerimi želimo prepeljati čim večje število zabojnikov z določenimi izdelki. Prvi tip vlaka je sestavljen iz lokomotive in 3 vagonov tipa A in 3 vagonov tipa B. Drugi vlak pa iz lokomotive in 4 vagonov tipa A in 8 vagonov tipa B. Na voljo je 36 vagonov tipa A in 48 vagonov tipa B. Prvi vlak lahko prepelje naenkrat 30 in drugi 60 zabojnikov. Koliko posameznih tovornih vlakov naj organizirajo, da bo, glede na omenjeno število vagonov, skupno število prepeljanih zabojnikov na obeh vlakih maksimalno? Kolikšno je skupno največje število prepeljanih zabojnikov?

19. Podjetje proizvaja dve vrsti parketa: klasičnega in lamelnega. Na razpolago ima samo en stroj za razrez in obdelavo, s katerim lahko mesečno opravi 450 delovnih ur. Ta stroj potrebuje za en m^2 klasičnega parketa $0,05$ ure dela in $0,025$ m^3 lesa, za en m^2 lamelnega pa $0,1$ ure in $0,01$ m^3 lesa. Podjetje proda 1 m^2 klasičnega parketa po ceni 15 EUR, 1 m^2 lamelnega pa po ceni 10 EUR. Za naslednji mesec ima na razpolago 100 m^3 lesa. Koliko m^2 posameznega parketa naj podjetje izdela, da ne bo preseglo omejitev in bo imelo največji skupni zaslužek?

20. V podjetju Mlekec d.o.o izdelujejo 4 vrste mlečnih izdelkov, in sicer skuto, jogurt, maslo in kislo mleko. Za celoten proces izdelave potrebujejo 3 skupine naprav N_1, N_2 in N_3. Čas, ki je potreben na vsaki skupini naprav za posamezne mlečne izdelke ter razpoložljiv čas naprav je podan v tabeli:

	skuta	jogurt	maslo	kislo mleko	kapaciteta
N_1	1	1	3	2	300
N_2	3	2	4	3	540
N_3	4	3	4	2	350

(a) Zapišite optimalni proizvodni program, ki prinese največji dobiček, če je dobiček za kg skute 0,4 EUR, za kg jogurta 0,3 EUR, za kg masla 0,6 EUR in za kg kislega mleka 0,3 EUR in ga rešite s pomočjo programa LINGO. Katere mlečne izdelke in koliko se jim splača izdelovati? Kolikšen bo dobiček?

(b) Katerih mlečnih izdelkov se ne splača izdelovati? Vsaj kolikšna bi morala biti njihova cena, da bi se jih splačalo?

(c) Kolikšen bi bil dohodek podjetja, če bi imeli na razpolago 10 ur več na napravah N_3?

(d) Ali s takšnim programom izkoristijo vse ure, ki jih imajo na razpolago? Katerih in koliko jih ne izkoristijo?

(e) Zapišite dualni linearni program za dani problem, ga rešite in razložite pomen izračunanega.

21. Podjetje se je odločilo, da napravi reklamno akcijo za nov izdelek v prodaji. Na razpolago imajo 20 000 EUR. Želijo, da reklamno sporočilo pride vsaj do 50 000 potrošnikov. Največ $\frac{3}{4}$ sredstev bodo namenili za oglaševanje na televiziji (TV SLO in POP TV). Hkrati želijo, da je na televiziji predvajanih vsaj 10 oglasov. Marketinški oddelek je pripravil naslednje podatke, ki jih najdemo v tabeli. Podatki v prvih treh stolpcih veljajo za en predvajan oglas, zadnji stolpec pa podaja zgornjo mejo za število oglasov v izbranem mediju.

medij	doseg	cena	vpliv	največ
TV SLO	2000	1200	65	12
POP TV	3000	1500	90	15
Val 202	2500	200	5	30
Dnevnik	1500	800	35	10
Večer	1200	750	30	5

(a) Koliko oglasov naj podjetje objavi v posameznem mediju, da bo skupni vpliv čim večji? Kolikšen bo ta vpliv? Zapišite nalogo v obliki linearnega programa in ga rešite s pomočjo programa LINGO.

(b) V katerih medijih se ne splača oglaševati? Vsaj kolikšen bi moral biti vpliv, da bi se splačalo?

(c) Kolikšen bi bil skupni vpliv na potrošnike, če bi v oglaševanje vložili dodatnih 1000 EUR?

(d) Ali s takšno politiko oglaševanja porabijo vsa denarna sredstva?

(e) Ali s takšno politiko oglaševanja pride reklamno sporočilo do ciljnih 50 000 potrošnikov ali več?

22. Igržela je podjetje, ki izdeluje igrače. Na trg želijo poslati nove modele igrač, in sicer letalo, motor in avtomobilček, katerih cene bodo 2 EUR za letalo, 5 EUR za motor in 4 EUR za avtomobilček. Čas potreben za oblikovanje, barvanje in končna dela za posamezne igrače ter razpoložljiv čas oddelkov so podani v tabeli:

oddelek	letalo	motor	avtomobilček	razpoložljiv čas
oblikovanje	2	3	2	4500
barvanje	1	2	2	3800
končna dela	2	3	1	2800

(a) Katere igrače in koliko jih naj izdelajo, da bodo imeli največji dobiček? Zapišite linearni program za dani problem in ga rešite s pomočjo programa LINGO. Kolikšen bo dobiček?

(b) Katere igrače se ne splača izdelovati? Vsaj kolikšna bi morala biti njena cena, da bi se jo splačalo?

(c) Kolikšen bi bil dohodek podjetja, če bi imeli na razpolago 10 ur več za barvanje?

(d) Ali s takšnim programom izkoristijo vse ure, ki jih imajo na razpolago? Katerih in koliko jih ne izkoristijo?

(e) Zapišite dualni linearni program za dani problem, ga rešite in razložite pomen izračunanega.

23. Mlad pes potrebuje za zdrav razvoj 20 enot snovi A, 30 enot snovi B in 28 enot snovi C. Kupimo jih lahko v obliki pasje hrane Psičkolino, Kužamix in Perrosito. En zavoj Psičkolina vsebuje 1 enoto snovi A, 3 enote snovi B in 5 enot snovi C. Zavoj hrane Kužamix vsebuje 1 enoto snovi A, 2 enoti snovi B in 6 enot snovi C. Zavoj Perrosita pa vsebuje 3 enote snovi A, 4 enote snovi B in 4 enote snovi C. Psičkolino stane 4 EUR za zavoj, Kužamix 3 EUR in Perrosito 6 EUR.

(a) Zapišite linearni program. Katero pasjo hrano in koliko zavojev naj kupimo, da bo pes dobil zadostno količino vseh treh snovi in bomo s tem imeli minimalne stroške? Koliko bodo znašali ti minimalni stroški? (Rešitve odčitajte iz poročila programa LINGO.)

(b) Ali dobi pes s tem optimalnim nakupom kakšne snovi več kot je potrebuje za zdrav razvoj? Katere in koliko?

(c) Za koliko se spremenijo stroški, če se potrebe psa po snovi B povečajo na 32 enot?

(d) Vsaj kolikšna bi morala biti cena Kužamixa, da bi se ga splačalo kupovati?

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              44.00000


                    Variable          Value        Reduced
                     Cost
                          X1       2.000000           0.000000
                          X2       0.000000          0.2000000
                          X3       6.000000           0.000000
                         Row   Slack or Surplus       Dual Price
                           1       44.00000          -1.000000
                           2       0.000000         -0.4000000
                           3       0.000000          -1.200000
                           4       6.000000           0.000000
```

24. Prepeljati moramo 80 zabojnikov velikosti A, 110 zabojnikov velikosti B in 60 zabojnikov velikosti C. Na voljo imamo tri tovornjake. Na tovornjak T_1 lahko na enkrat naložimo in prepeljemo 2 zabojnika velikosti A, 6 zabojnikov velikosti B in 1 zabojnik velikosti C. Podobno na tovornjak T_2 4 zabojnike velikosti A, 4 zabojnike velikosti B in 2 zabojnika velikosti C. Na tovornjak T_3 pa 2 zabojnika velikosti A, 4 zabojnike velikosti B in 2 zabojnika velikosti C. Prevozni stroški s tovornjakom T_1 in T_2 znašajo vsak po 300 EUR, s tovornjakom T_3 pa 200 EUR.

(a) Zapišite linearni program za ta problem.

(b) Koliko prevozov naj opravijo s posameznim tovornjakom, da bodo prepeljali vse zabojnike in bodo skupni prevozni stroški čim manjši. Koliko znašajo ti minimalni stroški? (Rešitve odčitajte iz poročila programa LINGO.)

(c) Vsaj kolikšni bi morali biti prevozni stroški s tovornjakom T_1, da bi se splačalo peljati z njim?

(d) Ali bi s takšno razporeditvijo imeli možnost prepeljati katerih zabojnikov več, kot je potrebno? Katerih in koliko?

(e) Kolikšni bi bili stroški, če bi morali prepeljati 62 zabojnikov velikosti C?

```
Global optimal solution found.

Objective value:                              7000.000

                        Variable           Value        Reduced Cost
                              X1        0.000000            150.0000
                              X2        10.00000            0.000000
                              X3        20.00000            0.000000
                             Row    Slack or Surplus      Dual Price
                               1        7000.000           -1.000000
                               2        0.000000           -50.00000
                               3        10.00000            0.000000
                               4        0.000000           -50.00000
```

25. Podjetje proizvaja tri različne modele radijskih sprejemnikov A, B in C. Cena modela A je 50 EUR, modela B 60 EUR in modela C 81 EUR. Proces proizvodnje posameznega modela ovrednotimo s povprečnim časom, ki je potreben za izdelavo sestavnih elementov, montaže in pakiranja. Podatki o času, potrebnem za vsako od teh opravil glede na model radijskega sprejemnika, so podani v tabeli (v minutah). V naslednjem tednu ima podjetje na razpolago 26h 40 min za izdelavo sestavnih elementov, 50 h za montažo in 10 h za pakiranje.

(a) Zapišite linearni program, s pomočjo katerega bi izračunali čim večji dohodek. (časi morajo biti izraženi v minutah.)

(b) Koliko radijskih sprejemnikov katerega modela mora izdelati podjetje, da bo dohodek čim večji? Kolikšen je v tem primeru dobiček? (Rešitve odčitajte iz poročila programa LINGO.)

Opravila ⋱ Model	A	B	C
Izdelava sestavnih elementov	30	30	40
Montaža	50	60	80
Pakiranje	10	10	20

(c) Vsaj kolikšna bi morala biti cena modela A, da bi se ga splačalo izdelovati?

(d) Kolikšen bi bil dohodek podjetja, če bi imeli na razpolago 100 minut več za pakiranje?

(e) Ali s takšnim programom izkoristijo vse ure (oz. minute), ki jih imajo na voljo? Katerih in koliko ne izkoristijo?

```
Global optimal solution found.
Objective value:                                3015.000

Model Class:                                          LP


                      Variable           Value        Reduced Cost
                            X1        0.000000           0.2500000
                            X2        30.00000            0.000000
                            X3        15.00000            0.000000
                           Row    Slack or Surplus      Dual Price
                             1        3015.000            1.000000
                             2        100.0000            0.000000
                             3        0.000000           0.9750000
                             4        0.000000           0.1500000
```

7.1 Rešitve

1. Zanima nas število fotokopirnih strojev ACTO in število fotokopirnih strojev ZENMAT, ki naj jih stranka najame. Zato označimo:
   x_1-število strojev ACTO, ki jih najamejo,
   x_2 - število strojev ZENMAT, ki jih najamejo.
   Podatke lahko bolj pregledno zapišemo v tabelo:

	ACTO	ZENMAT	omejitve
najemnina (v EUR)	120	150	1200
prostor (v m^2)	2,5	1,8	19,2
kapaciteta (št. kopij)	15000	18500	max

Najprej zapišemo namensko funkcijo, ki izračuna število kopij na mesec in ker želimo čim več kopij, iščemo maksimum te funkcije.

Ker lahko en stroj ACTO izdela 15000 kopij na mesec, jih bo x_1 (št. strojev ACTO) izdelalo $15000 \cdot x_1$. Podobno bodo stroji ZENMAT izdelali $18500 \cdot x_2$ kopij na mesec. Namenska funkcija se torej glasi:

$$\max z = 15000x_1 + 18500x_2.$$

Omejitev glede stroškov najema:
En stroj ACTO stane podjetje 120 EUR na mesec, če najamejo x_1 strojev, bo to strošek $120 \cdot x_1$ na mesec in podobno $150 \cdot x_2$ bo strošek najema ZENMAT-a. Skupni strošek za najem bo torej $120x_1 + 150x_2$ in ker ne sme preseči 1200 EUR, dobimo neenačbo

$$120x_1 + 150x_2 \leq 1200.$$

Po enakem razmisleku dobimo še omejitev glede zavzetega prostora, in sicer

$$2,5x_1 + 1,8x_2 \leq 19,2.$$

Ker število najetih fotokopirnih strojev ne more biti negativno, dobimo še omejitev (neenakost)

$$x_1, x_2 \geq 0,$$

ki je obvezen del vsakega linearnega programa.

V celoti se linearni program (LP) zapiše torej kot

$\max z = 15000x_1 + 18500x_2$
$120x_1 + 150x_2 \leq 1200$
$2,5x_1 + 1,8x_2 \leq 19,2$
$x_1, x_2 \geq 0$

2. x_i - količina denarja vložena v investicijo i za $i = 1, 2, ..., 6$.
$\min z = 0,18x_1 + 0,06x_2 + 0,1x_3 + 0,04x_4 + 0,12x_5 + 0,08x_6$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1000000$
$0,04x_1 + 0,05x_2 + 0,09x_3 + 0,07x_4 + 0,06x_5 + 0,08x_6 \geq 70000$
$0,22x_1 + 0,07x_2 + 0,12x_3 + 0,08x_4 + 0,15x_5 + 0,08x_6 \geq 120000$
$4x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 10x_4 + 4x_5 + 6x_6 \geq 7000000$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

3. x_i - količina olja A v gorivu i,
   y_i - količina olja B v gorivu i,
   z_i - količina olja C v gorivu i.
   zaslužek od prodaje goriva: $6(x_1 + y_1 + z_1) + 7(x_2 + y_2 + z_2)$
   strošek z nakupom olja: $2,5(x_1 + x_2) + 2,8(y_1 + y_2) + 3,5(z_1 + z_2)$
   dobiček je razlika, torej namenska funkcija se glasi:

$$\max f = 3,5x_1 + 4,5x_2 + 3,2y_1 + 4,2y_2 + 2,5z_1 + 3,5z_2$$

   Omejitve glede razpoložljivosti olja:
   $x_1 + x_2 \leq 10000$
   $y_1 + y_2 \leq 15000$
   $z_1 + z_2 \leq 20000$
   Omejitve glede sestave goriva:
   $x_1 \leq 0,25(x_1 + y_1 + z_1) \Leftrightarrow 0,75x_1 - 0,25y_1 - 0,25z_1 \leq 0$
   Podobno ostale:

$$\begin{aligned}
0,3x_1 - 0,7y_1 + 0,3z_1 &\leq 0 \\
-0,4x_1 - 0,4y_1 + 0,6z_1 &\leq 0 \\
-0,8x_2 + 0,2y_2 + 0,2z_2 &\leq 0 \\
-0,5x_2 + 0,5y_2 - 0,5z_2 &\leq 0 \\
0,3x_2 + 0,3y_2 - 0,7z_2 &\leq 0
\end{aligned}$$

   Dolgoročne pogodbe dajo dodatne omejitve:
   $x_1 + y_1 + z_1 \geq 10000$
   $x_2 + y_2 + z_2 \geq 10000$
   Pogoj nenegativnosti: $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \geq 0$

4. x_1 - št. stanovanjskih blokov tipa A,

x_2 - št. stanovanjskih blokov tipa B,

x_3 - št. stanovanjskih blokov tipa C,

x_4 - št. stanovanjskih blokov tipa D,

x_5 - št. stanovanjskih blokov tipa E

$\min z = 2,08x_1 + 3,2x_2 + 3x_3 + 4,8x_4 + 4,8x_5$

$7x_1 + 9x_2 + 10x_3 + 14x_4 + 15x_5 = 500$

$x_1 + 2x_3 \geq 40$

$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \geq 125$

$4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 10x_5 \geq 125$

$4x_3 + 8x_4 + 5x_5 \geq 125$

$\frac{3x_1+6x_2+2x_3+8x_4+3x_5}{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5} \leq 5$

$x_1 + x_3 + x_5 \geq \frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{2}$

$5x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 4x_5 \leq 300$

$x_i \geq 0 \ \forall i = 1, ..., 5$

5. x_1 - št. palet desk klasiko,

   x_2 - št. palet moderni,

   x_3 - št. palet sestavljeni,

   x_4 - št. palet alsto

   $\max z = 400x_1 + 1100x_2 + 750x_3 + 350x_4$

   $x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 80$

   $x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 85$

   $x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 100$

   $50x_1 + 40x_2 + 30x_3 + 40x_4 \leq 2500$

   $20x_1 + 30x_2 + 50x_3 + 20x_4 \leq 2000$

   $x_i \geq 0 \ \forall i = 1, ..., 4$

6. Najprej iz besedila izpišemo tabelo, ki nam bo v pomoč pri pisanju linearnega programa:

	X	Y	potrebe
maščobe	8	12	24
ogljikovi hidrati	12	12	36
beljakovine	2	1	4
cena	0,20	0, 30	

   x_1... število meric hrane X

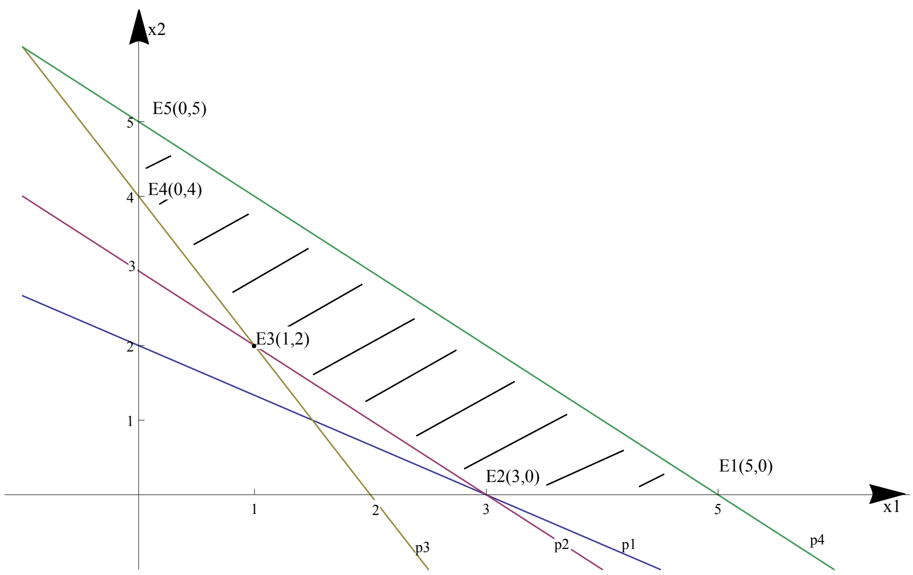
   x_2... število meric hrane Y

Linearni program se glasi:

$$
\begin{aligned}
\min z = 0,20x_1 + 0,3x_2 \\
8x_1 + 12x_2 \geq 24 \\
12x_1 + 12x_2 \geq 36 \\
2x_1 + x_2 \geq 4 \\
x_1 + x_2 \leq 5 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

V koordinatni sistem vrišemo premice
$p_1 : 8x_1 + 12x_2 = 24,$
$p_2 : 12x_1 + 12x_2 = 36$
$p_3 : 2x_1 + x_2 = 4$
$p_4 : x_1 + x_2 = 5$
tako da za vsako premico natančno izračunamo presečišči z osmi. Ko vrišemo premice, moramo glede na neenakosti določiti polravnine, ki jih te premice določajo in presek vseh polravnin, ki je iskano območje - konveksni večkotnik, ki predstavlja dopustno območje, na katerem iščemo optimalno rešitev.

Slika 7.1: Grafična metoda



Optimalna rešitev je dosežena v enem izmed oglišč tega konveksnega večkotnika. Poznamo že koordinate oglišč: $E_1(5,0), E_2(3,0), E_4(0,4)$ in $E_5(0,5)$. Izračunati moramo torej še koordinati točke E_3, torej presečišče med premicama p_2 in p_3. Rešujemo sistem dveh enačb z dvema neznankama:

$$\begin{aligned} 12x_1 + 12x_2 &= 36 \\ 2x_1 + x_2 &= 4, \end{aligned}$$

iz katerega dobimo rešitev $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Točka E_3 ima torej koordinate $E_3(1, 2)$.

Ker je optimalna rešitev dosežena v enem izmed oglišč, izračunamo vrednosti namenske funkcije v vseh teh točkah:
$E_1(5, 0) \quad \longrightarrow z_{\min} = 0,20 \cdot 5 + 0,3 \cdot 0 = 1$,
$E_2(3, 0) \quad \longrightarrow z_{\min} = 0,20 \cdot 3 + 0,3 \cdot 0 = 0,6$,
$E_3(1, 2) \quad \longrightarrow z_{\min} = 0,20 \cdot 1 + 0,3 \cdot 2 = 0,8$,
$E_4(0, 4) \quad \longrightarrow z_{\min} = 0,20 \cdot 0 + 0,3 \cdot 4 = 1,2$,
$E_1(0, 5) \quad \longrightarrow z_{\min} = 0,20 \cdot 0 + 0,3 \cdot 5 = 1,5$.
Opazimo, da je najmanjša vrednost namenske funkcije dosežena v točki E_2. Dobimo torej optimalno rešitev: $x_1 = 3$ in $z_{\min} = 0,6$.
Odg.: Vsakemu zajcu naj dajo 3 merice hrane X, na ta način bodo imeli minimalne stroške, in sicer 60 centov po zajcu.

7. Optimalna rešitev: $x = 4$, $y = 2$, minimalna vrednost: $z_{\min} = 10$.

8. $\min z = 17x_1 + 14x_2$;
   $4x_1 + x_2 \geq 7$;
   $3x_1 + 4x_2 \geq 15$;
   $x_1, x_2 \geq 0$
   Odg.: 1 tableto Vitaminexa in 3 tablete Polnvite, stroški bodo 59 EUR.

9. $\max z = 30x_1 + 24x_2$;
   $5x_1 + 4x_2 \leq 45$;
   $3x_1 + 3x_2 \leq 30$;
   $x_1, x_2 \geq 0$
   Odg.: 5 rezbarij A in 5 rezbarij B ali 9 rezbarij A in nobene B, zaslužek bo v obeh primerih 270 EUR.

10.

$$\begin{aligned} \max z &= 800x_1 + 500x_2 \\ p.p. \quad & x_1 \geq 20 \\ & x_2 \geq 10 \\ & x_1 + x_2 \leq 80 \\ & x_1 \leq 3x_2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ko narišemo območje, dobimo konveksni večkotnik s 4 oglišči in pripadajočimi vrednostmi namenske funkcije:
$E_1(60, 20) \rightsquigarrow z_{\max} = 58000$,
$E_2(20, 60) \rightsquigarrow z_{\max} = 46000$,
$E_3(30, 10) \rightsquigarrow z_{\max} = 29000$,
$E_4(20, 10) \rightsquigarrow z_{\max} = 21000$.
Maksimalna vrednost je v E_1 in zato je rešitev: Kmet naj posadi 60 hektarov zelja in 20 hektarov koruze, s tem bo imel dohodek 58000 EUR.

11. x_1... število omar Ikera
x_2... število omar Maxi
Linearni program se glasi:

$$\begin{aligned} \max z = 90x_1 + 120x_2 \\ 20x_1 + 40x_2 \leq 280 \\ 6x_1 + 8x_2 \leq 72 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

V koordinatni sistem vrišemo premico $p_1 : 20x_1 + 40x_2 = 280$ oz. to je premica $p_1 : x_1 + 2x_2 = 14$ in premico $p_2 : 6x_1 + 8x_2 = 72$ oz. to je premica $p_2 : 3x_1 + 4x_2 = 36$. Natančno izračunamo presečišča z osmi in presečišče med premicama p_1 in p_2, ki je točka $E_1(8, 3)$. Območje na grafu, kjer so možne rešitve je konveksni štirikotnik. Optimalna rešitev je dosežena v enem izmed oglišč tega konveksnega večkotnika. Izračunamo torej vrednosti namenske funkcije v vseh ogliščih:
$E_1(8, 3) \quad \longrightarrow z_{\max} = 90 \cdot 8 + 120 \cdot 3 = 1080$,

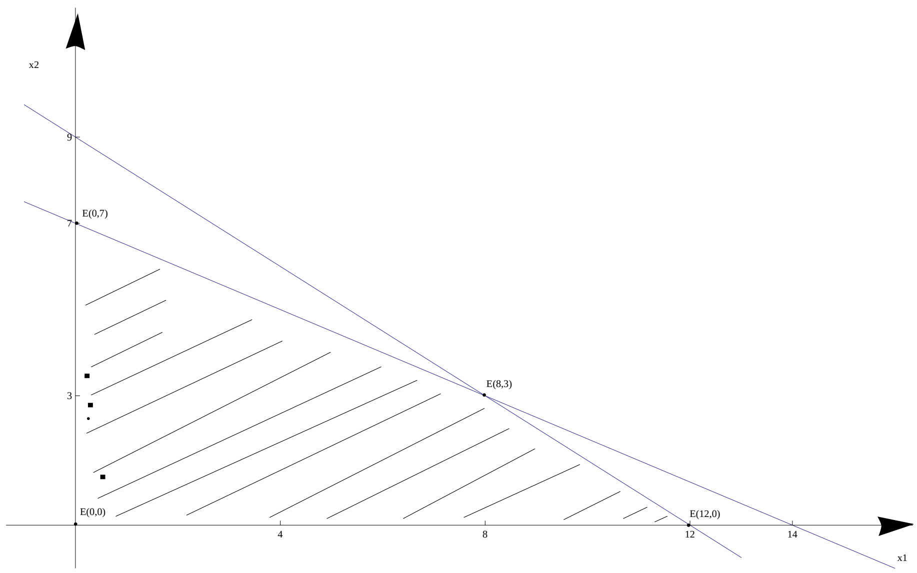
$E_2(12, 0) \quad \longrightarrow z_{\max} = 90 \cdot 12 = 1080,$

$E_3(0, 7) \quad \longrightarrow z_{\max} = 120 \cdot 7 = 840.$

Opazimo, da je maksimum dosežen v 2 točkah E_1 in E_2, dobimo torej 2 optimalni rešitvi:

Odg.: Kupite 8 omar Ikera in 3 omare Maxi ali pa 12 omar Ikera. V obeh primerih boste lahko hranili 1080 fasciklov.

Slika 7.2: Dopustno območje



12. x_1 - število paketov Growbiga,

    x_2 - število paketov Thriva

    $\max z = 300x_1 + 200x_2$

    $x_1 + 2x_2 \leq 40$

    $2x_1 + x_2 \leq 40$

    $x_1 + x_2 \leq 25$

    $x_1, x_2 \geq 0.$

    Izdelati bi morali 15 paketov Growbiga in 10 Thriva. zaslužek v tem primeru bo 6500 EUR.

13. x_1 - količina aditiva X1,

    x_2 - količina aditiva X2

    $\min z = 30x_1 + 40x_2;$

    $x_1 + x_2 \leq 500$

$2x_1 + x_2 \geq 500$
$\frac{x_1}{500} + \frac{x_2}{250} \geq 1$
$x_1, x_2 \geq 0.$
Dobimo tri ekstremne točke $E_1(500, 0), z_{min}150000$, $E_2(0, 500), z_{min} = 20000$ in $E_3(\frac{500}{3}, \frac{500}{3}), z_{min} \approx 11666,67$. Rešitev je zadnja, torej uporabiti morajo $166,67$ g aditiva X1 in $166,67$ g aditiva X2.

14. x_1 - število ročnih menjalnikov izdelanih na teden,
x_2 - število avtomatskih menjalnikov izdelanih na teden
$\max z = 64x_1 + 100x_2$
$3x_1 + 5x_2 \leq 7500$
$5x_1 + 4x_2 \leq 10000$
$2x_1 + x_2 \leq 3500$
$x_1 + x_2 \leq 2000$
$x_1, x_2 \geq 0$

Izdelati morajo 1250 ročnih menjalnikov in 750 avtomatskih menjalnikov, s tem bodo imeli največji dobiček v višini 155000 EUR.

15. x_1 - število električnih štedilnikov izdelanih na teden,
x_2 - število plinskih štedilnikov izdelanih na teden
$\max z = 100x_1 + 80x_2$
$4x_1 + 2x_2 \leq 3600$
$10x_1 + 8x_2 \leq 1200$
$6x_1 + 4x_2 \leq 600$
$2x_1 + 2x_2 \leq 2800$
$x_1, x_2 \geq 0.$

Izdelati morajo 150 plinskih štedilnikov in nobenega električnega. Zaslužek bo 12000 EUR.

16. x_1 - količina spojine S_1,
x_2 - količina spojine S_2
Linearni program:
$\min z = 5x_1 + 8x_2$
$x_1 + x_2 = 200$
$0,3x_1 + 0,5x_2 \geq 70$
$0,3x_1 + 0,5x_2 \leq 90$

$0,4x_1 + 0,25x_2 \geq 60$
$x_1, x_2 \geq 0.$

Zmešati moramo 150 kg spojine S_1 in 50 kg spojine S_2, stroški bodo 1150 EUR.

17. x_1 - število prevozov s tovornjakom T_1,
    x_2 - število prevozov tovornjaka T_2

    (a) Linearni program 1:
        $\min z = 50x_1 + 30x_2$
        $8x_1 + 4x_2 \geq 320$
        $12x_1 + 16x_2 \geq 440$
        $8x_1 + 24x_2 \geq 360$
        $x_1, x_2 \geq 0.$
        Opraviti morajo 39 prevozov s tovornjakom T_1 in 2 prevoza s tovornjakom T_2, prevozni stroški bodo 2010 d.e.

    (b) Linearni program 1 + dodatna omejitev $x_1 \leq 10$
        Opraviti morajo 10 prevozov s tovornjakom T_1 in 60 prevozov s tovornjakom T_2, prevozni stroški bodo 2300 d.e.

18. x_1 - število vlakov tipa 1,
    x_2 - število vlakov tipa 2
    $\max z = 30x_1 + 60x_2$
    $3x_1 + 4x_2 \leq 36$
    $3x_1 + 8x_2 \leq 48$
    $x_1, x_2 \geq 0.$

    Organizirajo naj 8 vlakov tipa 1 in 3 vlake tipa 2, s tem bodo prepeljali 420 zabojnikov.

19. x_1 - število m^2 klasičnega parketa,
    x_2 - število m^2 lamelnega parketa
    $\max z = 15x_1 + 10x_2$
    $0,05x_1 + 0,1x_2 \leq 450$
    $0,025x_1 + 0,01x_2 \leq 100$
    $x_1, x_2 \geq 0.$
    Izdelajo naj 2750 m^2 klasičnega in 3125 m^2 lamelnega parketa. Takrat bo zaslužek najvišji, in sicer v višini 72500 EUR.

20. (a) x_1... količina skute $[kg]$
x_2... količina jogurta $[kg]$
x_3... količina masla $[kg]$
x_4... količina kislega mleka $[kg]$

Linearni program se glasi (zapisan v programu LINGO):

```
 max=0.4*x1+0.3*x2+0.6*x3+0.3*x4;
1*x1+1*x2+3*x3+2*x4<=300;
3*x1+2*x2+4*x3+3*x4<=540;
4*x1+3*x2+4*x3+2*x4<=350;
```

V LP je na koncu nujen še pogoj nenegativnosti, ki ga v programu LINGO ni potrebno pisati.

Poročilo programa LINGO:

```
Global optimal solution found.
  Objective value:                              52.50000

  Model Class:                                        LP


                    Variable           Value        Reduced Cost
                          X1        0.000000           0.2000000
                          X2        0.000000           0.1500000
                          X3        50.00000            0.000000
                          X4        75.00000            0.000000

                         Row    Slack or Surplus      Dual Price
                           1        52.50000            1.000000
                           2        0.000000            0.000000
                           3        115.0000            0.000000
                           4        0.000000           0.1500000
```

Splača se jim izdelovati po 50kg masla in 75kg kislega mleka (Stolpec `Value`, vrednosti neničelnih spremenljivk so $x_3 = 50$ in $x_4 = 75$). Dobiček v tem primeru bo 52,5 EUR (podatek na vrhu poročila).

(b) Ne splača se izdelovati skute in jogurta. Cena skute bi morala biti $0,60$

EUR, cena jogurta bi morala biti $0,45$ EUR. (Vrednost `Value` je pri spremenljivkah x_1 in x_2 enaka 0, to pomeni, da se to ne splača izdelovati. Da odgovorimo na drugo vprašanje pogledamo stolpec `Reduced Cost`. Tam je pri x_1 vrednost `0.2000000`, kar pomeni, da bi skuta morala biti 0,2 EUR dražja, da bi se jo splačalo izdelovati, cena skute bi torej morala biti $0,60$ EUR. Enak razmislek za jogurt, ki bi moral biti $0,15$ EUR dražji, da bi se ga splačalo izdelovati, njegova cena bi torej morala biti $0,45$ EUR.)

(c) Dohodek podjetja bi bil 54 EUR. (Odgovor najdemo v stolpcu `Dual Price`, in sicer omejitev za skupino naprav N_3 je v 4. vrstici, kjer imamo podatek `0.1500000`. To pomeni, da če bi imeli pri omejitvi 1 enoto več, bi se dobiček izboljšal (ker je število pozitivno), torej v tem primeru povečal za $0,15$ enot. Če imamo pri omejitvi 10 enot več, se dobiček poveča za $10 \cdot 0,15 = 1,5$ enot. Dohodek podjetja bi torej bil $52,5 + 1,5 = 54$ EUR)

(d) Ne. Ne izkoristijo 115 ur na napravah N_2. (Pogledamo stolpec `Slack or Surplus`, kjer imamo v 3. vrstici, ki se nanaša na omejitev za N_2 neničelni podatek `115.0000`, pri ostalih vrsticah (1. vrstico zanemarimo) je `0.000000`, torej se ure izkoristijo.)

(e) Dualni linearni program se glasi (zapisan v programu LINGO):

```
 min=300*y1+540*y2+350*y3;
1*y1+3*y2+4*y3>=0.4;
1*y1+2*y2+3*y3>=0.3;
3*y1+4*y2+4*y3>=0.6;
2*y1+3*y2+2*y3>=0.3;
```

Poročilo programa LINGO:

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              52.50000
Infeasibilities:                              0.000000
Total solver iterations:                             1

Model Class:                                        LP


                Variable           Value        Reduced Cost
```

```
Y1          0.000000              37.50000
Y2          0.000000              190.0000
Y3          0.1500000             0.000000

Row     Slack or Surplus          Dual Price
  1         52.50000             -1.000000
  2         0.2000000             0.000000
  3         0.1500000             0.000000
  4          0.000000            -87.50000
  5          0.000000             0.000000
```

Vrednosti spremenljivk y_1, y_2 in y_3 morajo biti v tem primeru cene, saj se podatek $52,5$ še vedno nanaša na ceno oz. dobiček. Iz linearnega programa lahko torej sklepamo, da so
y_1... cena 1 delovne ure skupine naprav N_1,
y_2... cena 1 delovne ure skupine naprav N_2,
y_3... cena 1 delovne ure skupine naprav N_3.

Dualni linearni program nam torej izračuna kolikšna bi morala biti cena delovnih ur na vseh treh skupinah naprav, da bi v primeru, da bi prodajali kar storitve naprav N_1, N_2 in N_3, imeli enak zaslužek kot v primeru proizvodnje mlečnih izdelkov. LINGO izračuna, da bi morali 1 uro obratovanja skupine naprav N_3 zaračunavati po ceni $0,15$ EUR, ostale lahko nudijo brezplačno in bi imeli enak zaslužek, to je 52,5 EUR.

21. x_1... št. oglasov na TV SLO
x_2... št. oglasov na POP TV
x_3... št. oglasov na Val 202
x_4... št. oglasov v Dnevniku
x_5... št. oglasov v Večeru

Linearni program se glasi (zapisan v programu LINGO):

```
max=65*x1+90*x2+5*x3+35*x4+30*x5;
1200*x1+1500*x2+200*x3+800*x4+750*x5<= 20000;
2000*x1+3000*x2+2500*x3+1500*x4+1200*x5 >= 50000;
```

```
1200*x1+1500*x2 <= 3/4*20000;
1*x1+1*x2>= 10;
x1<=12;
x2<=15;
x3<=30;
x4<=10;
x5<=5;
```

V LP je na koncu nujen še pogoj nenegativnosti, ki ga v programu LINGO ni potrebno pisati.

Poročilo programa LINGO:

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              1100.000
Infeasibilities:                              0.000000
Total solver iterations:                             3
Elapsed runtime seconds:                          0.12

Model Class:                                        LP

             Variable           Value        Reduced Cost
                   X1        0.000000            7.705882
                   X2        10.00000            0.000000
                   X3        5.000000            0.000000
                   X4        5.000000            0.000000
                   X5        0.000000            3.176471

                  Row    Slack or Surplus      Dual Price
                    1        1100.000            1.000000
                    2        0.000000           0.4705882E-01
                    3        0.000000          -0.1764706E-02
                    4        0.000000           0.1647059E-01
                    5        0.000000            0.000000
                    6        12.00000            0.000000
                    7        5.000000            0.000000
```

8	25.00000	0.000000
9	5.000000	0.000000
10	5.000000	0.000000

(a) 10 oglasov na POP TV, 5 oglasov na Val 202 in 5 oglasov v Dnevniku. Skupni vpliv bo 1100.

(b) Ne splača se na TV SLO, vpliv bi moral biti vsaj za 7,706 večji, to je vsaj 72,706 in v Večeru, vpliv bi moral biti vsaj za 3,18 večji to je vsaj 33,18. (REDUCED COST)

(c) Povečal bi se za 1000 x 0,047 torej, vpliv bi bil 1147. (DUAL PRICE)

(d) Da. (Št. 0 v 2. vrstici stolpca SLACK OR SURPLUS)

(e) Samo do ciljnih 50 000, nič več. (Št. 0 v 3. vrstici stolpca SLACK OR SURPLUS)

22. (a) x_1... število letal
x_2... število motorjev
x_3... število avtomobilčkov
Program zapisan v programu LINGO:
max=2*x1+5*x2+4*x3;
2*x1+3*x2+2*x3¡= 4500;
1*x1+2*x2+2*x3¡= 3800;
2*x1+3*x2+1*x3¡= 2800;
in izpisek:

```
Global optimal solution found.
Objective value:                          8050.00
```

Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.000000	0.7500000
X2	450.0000	0.000000
X3	1450.000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	8050.000	1.000000
2	250.0000	0.000000

3	0.000000	1.750000
4	0.000000	0.5000000

Izdelajo naj 450 motorjev in 1450 avtomobilčkov. Dobiček v tem primeru bo 8050 EUR.

(b) Ne splača se izdelovati letal. Da bi se splačalo izdelovati letala, bi morala biti njihova cena višja za 0,75 EUR, torej 2,75 EUR za eno letalo.

(c) Omejitev glede barvanja se nahaja v 3. vrstici (Row 3). Odgovor na vprašanje nam da dualna cena (Dual Price), ki pove za koliko bi se spremenila vrednost namenske funkcije, če bi desno stran neenačbe povečali za 1 enoto. Če bi povečali za 1 enoto, bi se torej dobiček povečal za 1,75 EUR, če povečamo za 10 enot se dobiček poveča za $10 \cdot 1,75 = 17,5$ EUR. Dohodek podjetja bi bil torej 8067,5 EUR.

(d) Ne izkoristijo ur za oblikovanje (Slack or Surplus Row 2), in sicer ostane jim 250 ur.

(e) Dualni program zapisan v programu LINGO:
min =4500*y1+3800*y2+2800*y3;
2*y1+1*y2+2*y3¿= 2;
3*y1+2*y2+3*y3¿= 5;
2*y1+2*y2+1*y3¿= 4;

V tem primeru je pomen spremenljivk:
y_1... cena 1 ure obdelovanja
y_2... cena 1 ure oblikovanja
y_3... cena 1 ure končnih del

in izpisek:

```
Global optimal solution found.
Objective value:                          8050.000
```

Variable	Value	Reduced Cost
Y1	0.000000	250.0000
Y2	1.750000	0.000000

```
Y3        0.5000000              0.000000

Row    Slack or Surplus        Dual Price
  1         8050.000            -1.000000
  2        0.7500000             0.000000
  3         0.000000            -450.0000
  4         0.000000            -1450.000
```

Izračunano torej pove, da če se podjetje odloči, da namesto izdelave igrač proda storitve (obdelovanje, barvanje, konča dela), mora za 1 uro oblikovanja zaračunati 1,75 EUR in za 1 uro končnih del 0,50 EUR, da bi imeli končni zaslužek enak optimalnemu zaslužku pri izdelavi igrač, to je 8050 EUR. Vidimo, da lahko obdarovanje tudi podari (0 EUR).

23. (a) $\min z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$
    $x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 20$
    $3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 30$
    $5x_1 + 6x_2 + 4x_3 \geq 28$
    $x_1, x_2, x_3 \geq 0.$
    Če kupimo 2 zavoja Psičkolina in 6 zavojev Perrosita, bodo stroški minimalni in sicer 44 EUR.
    (b) Pes dobi 6 enot snovi C več kot je potrebuje za zdrav razvoj.
    (c) Stroški se spremenijo za $2,4$ EUR, torej na $46,4$ EUR.
    (d) Cena Kužamaixa bi morala biti nižja od $2,8$ EUR.

24. (a) $\min z = 300x_1 + 300x_2 + 200x_3$
    $2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 80$
    $6x_1 + 4x_2 + 4x_3 \geq 110$
    $x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 60$
    $x_1, x_2, x_3 \geq 0.$
    (b) Opravijo naj 10 prevozov s tovornjakom T_2 in 20 prevozov s tovornjakom T_3, cena bo znašala 7000 EUR.
    (c) Prevozni stroški tovornjaka T_1 bi morali biti nižji od 150 EUR.
    (d) S takšno razporeditvijo bi lahko prepeljali 10 zabojnikov B več.

(e) stroški bi se povečali za 100 EUR, znašali bi torej 7100 EUR.

25. (a) $\max z = 50x_1 + 60x_2 + 81x_3$
$30x_1 + 30x_2 + 40x_3 \leq 1600$
$50x_1 + 60x_2 + 80x_3 \leq 3000$
$10x_1 + 10x_2 + 20x_3 \leq 600$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

(b) Podjetje mora izdelati 30 sprejemnikov B in 15 sprejemnikov C, da bo dobiček čim večji, kar je 3015 EUR.

(c) Cena modela A bi morala biti višja za $0,25$ EUR, torej višja od $50,25$ EUR.

(d) Dohodek podjetja bi bil za 15 EUR večji, torej 3030 EUR.

(e) Ne izkoristijo 100 min za izdelovanje sestavnih delov.

Literatura

[1] Andrašec G., Bren M.: *Matematika, naloge iz kombinatorike in verjetnostnega računa*, FOV, Kranj, 2003.

[2] Brešar F., Brešar B.: *Analiza II*, FERI, Maribor, 2004.

[3] Waters D., Waters C. D. J.: *Quantitative methods for business*, Pearson Education, 2008.

[4] Winston W. L., Goldberg, J. B. *Operations research: applications and algorithms*, Boston: Duxbury press., 2004.

[5] Žerovnik J., Banič I., Hrastnik I., Špacapan S.: *Zbirka rešenih nalog iz tehniške matematike*, FS, Maribor, 2007.